गणित - I

(कॅलकूलस आणि लिनियर अलजेब्रा)

संगणक विज्ञान आणि अभियांत्रिकी शाखांसाठी

रीना गर्ग

KHANNA BOOK PUBLISHING CO. (P) LTD.
PUBLISHER OF ENGINEERING AND COMPUTER BOOKS
4C/4344, Ansari Road, Darya Ganj, New Delhi-110002
Phone: 011-23244447-48 **Mobile:** +91-99109 09320
E-mail: contact@khannabooks.com
Website: www.khannabooks.com

Dear Readers,

To prevent the piracy, this book is secured with HIGH SECURITY HOLOGRAM on the front title cover. In case you don't find the hologram on the front cover title, please write us to at contact@khannabooks.com or whatsapp us at +91-99109 09320 and avail special gift voucher for yourself.

Specimen of Hologram on front Cover title:

Moreover, there is a SPECIAL DISCOUNT COUPON for you with EVERY HOLOGRAM.

How to avail this SPECIAL DISCOUNT:

Step 1: Scratch the hologram
Step 2: Under the scratch area, your "coupon code" is available
Step 3: Logon to www.khannabooks.com
Step 4: Use your "coupon code" in the shopping cart and get your copy at a special discount
Step 5: Enjoy your reading!

ISBN: 978-93-5538-038-8
Book Code: UG064MA

MATHEMATICS - I
(Calculus and Linear Algebra) ***For Computer Science Engineering Branches***
by Reena Garg
[Marathi Edition]

First Edition: 2021

Published by:
Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
Visit us at: **www.khannabooks.com**
Write us at: **contact@khannabooks.com**
CIN: U22110DL1998PTC095547

To view complete list of books, Please scan the QR Code: KPH

Printed in India.

प्रो. अनिल डी. सहस्रबुद्धे
अध्यक्ष
Prof. Anil D. Sahasrabudhe
Chairman

सत्यमेव जयते

अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्
(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)
(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)
नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली–110070
दूरभाष : 011–26131498
ई–मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION
(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)
(Ministry of Education, Govt. of India)
Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070
Phone : 011-26131498
E-mail : chairman@aicte-india.org

प्रास्ताविक

शतकानुशतके भारतीय समाजाच्या प्रगती आणि विस्तारामध्ये अभियांत्रिकीने अत्यंत महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावली आहे. भारतीय उपखंडात उगम पावलेल्या अभियांत्रिकी संकल्पनांचा जगावर प्रभाव पडला आहे.

ऑल इंडिया कौन्सिल फॉर टेक्निकल एज्युकेशन (एआयसीटीई) 1987 मध्ये स्थापनेपासून तंत्रशास्त्राच्या विद्यार्थ्यांना शक्य त्या सर्व प्रकारे मदत करण्यात नेहमीच आघाडीवर असते. एआयसीटीईचे ध्येय तांत्रिक शिक्षणाला प्रोत्साहन देणे आणि त्याद्वारे उद्योगाला अधिक उंचीवर नेणे आणि शेवटी आपल्या प्रिय मातृभूमी भारताला आधुनिक विकसित राष्ट्र बनण्याचे आहे. येथे हे नमूद करणे योग्य ठरेल की अभियंते आधुनिक समाजाचा कणा आहेत – चांगले अभियंते, म्हणजे चांगले उद्योग आणि चांगले उद्योग म्हणजे चांगला देश.

NEP 2020 मध्ये प्रादेशिक भाषांमध्ये सर्वांना शिक्षणाची कल्पना मांडण्यात आली आहे, ज्यामुळे प्रत्येक विद्यार्थी पुरेसा सक्षम होईल आणि राष्ट्रीय विकासासाठी योगदान देण्याच्या स्थितीत येईल याची खात्री होईल.

एआयसीटीई गेल्या काही वर्षांपासून अविरतपणे काम करत असलेल्या क्षेत्रांपैकी एक म्हणजे सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांना विविध प्रादेशिक भाषांमध्ये तयार केलेल्या आंतरराष्ट्रीय दर्जाची पुस्तके माफक किमतीमध्ये उपलब्ध करून देणे. ही पुस्तके सोप्या भाषेत, वास्तविक जीवनातील उदाहरणे, समृद्ध सामग्री आणि बदलत्या जगाच्या उद्योगाच्या गरजा लक्षात घेऊनच तयार केलेली आहेत. ही पुस्तके अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञानासाठी एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रम – 2018 नुसार आहेत.

संपूर्ण भारतातील प्रख्यात, उत्तम ज्ञान आणि अनुभव संपन्न प्राध्यापकांनी शैक्षणिक क्षेत्राच्या सोईसाठी ही पुस्तके लिहिली आहेत. एआयसीटीईला विश्वास आहे की ही पुस्तके त्यांच्या समृद्ध सामग्रीसह तांत्रिक विद्यार्थ्यांना अधिक सहजतेने आणि गुणवत्तेसह विषयांवर प्रभुत्व मिळविण्यात मदत करतील.

या अभियांत्रिकी विषयांना अधिक सुबक बनविण्याच्या प्रयत्नांसाठी एआयसीटीई मूळ लेखक, समन्वयक आणि अनुवादकांच्या मेहनतीचे कौतुक करते.

(Anil D. Sahasrabudhe)

ऋणनिर्देश

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान विद्यार्थ्यांसाठी तांत्रिक पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी काळजीपूर्वक नियोजन आणि अंमलबजावणी केल्याबद्दल लेखक एआयसीटीईचे आभारी आहेत.

या पुस्तकाच्या समीक्षक प्रोफेसर गरिमा सिग यांच्या, हे पुस्तक विद्यार्थ्यांकरीता मैत्रीपूर्ण बनवण्यासाठी आणि कलात्मक पद्धतीने चांगला आकार देण्याच्या मौल्यवान योगदानाची आम्ही मनापासून दखल घेतो.

हे पुस्तक एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रमाशी आणि राष्ट्रीय शिक्षण धोरण (एनईपी) -2020 च्या मार्गदर्शक तत्त्वांच्या अनुषंगाने आहे, हे देखील आम्ही मोठ्या सन्मानाने नमूद करतो. प्रादेशिक भाषांमध्ये शिक्षणाला चालना देण्याच्या दिशेने या पुस्तकाचे रूपांतर नियोजित भारतीय प्रादेशिक भाषांमध्ये केले जात आहे.

डॉ. सत्यवान धोंडगे यांनी भाषांतरासाठी दिलेल्या योगदानाबद्दल आम्ही त्यांचे आभार मानू इच्छितो आणि मराठी भाषेत पुनरावलोकन करण्यासाठी श्री. रोशन के. बोंडे यांचे देखील आभार मानू इच्छितो.

आम्ही श्री. बुद्ध चंद्रशेखर, CCO NEAT AICTE, ज्यांचे AI आधारित अनुवादक साधन भाषांतराच्या उद्देशाने वापरले गेले यासाठी त्यांचे मनापासून आभार व्यक्त करतो.

शेवटी, आम्ही नवी दिल्ली येथील एम/एस खन्ना बुक पब्लिशिंग कंपनी प्रायव्हेट लिमिटेड या प्रकाशन संस्थेचे मनापासून आभार मानतो, ज्यांची संपूर्ण टीम प्रकाशनाच्या सर्व पैलूंवर सहकार्य करण्यास नेहमीच तत्पर होती, जेणेकरून तो एक अद्भूत अनुभव बनवेल.

रीना गर्ग

प्रस्तावना

गणित हा वैज्ञानिक ज्ञानाचा एक आवश्यक मार्ग आहे जो मानसिक क्षमतेचे नवीन मार्ग उघडतो. अभियांत्रिकी गणित सिद्धांत आणि अभ्यासाचा समतोल देते, जे बौद्धिक उत्तेजक आहे. वास्तविक जगाच्या समस्यांवर गणित लागू करण्याची कला शिकणे अभियांत्रिकीच्या विद्यार्थ्याला समस्येचे निराकरण शोधण्याची परवानगी देते.

कॅलकूलस आणि लिनियर अलजेब्रा हे मुख्यत्वे 21 व्या शतकातील बी.टेक (CSE) च्या पदवीधर विद्यार्थ्यांसाठी आहे. ज्याचा हेतू गणिताच्या विषयात अचूक समज प्रदान करणे आहे. हे पुस्तक ओबीई आणि ब्लूम वर्गीकरणावर आधारित नवीन राष्ट्रीय शिक्षण धोरणानुसार विद्यार्थी केंद्रित आणि स्वयं-शिक्षण उपक्रमांचा समावेश असलेल्या एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रमाशी काटेकोरपणे जोडलेले आहे. अभियांत्रिकी आणि विज्ञान शाखांमध्ये गणिताची साधने अभ्यासण्यासाठी आणि लागू करण्यासाठी वाचकांमध्ये स्वारस्य निर्माण करणे हा हेतू आहे. पुस्तकात प्रामुख्याने युनिट्समध्ये चर्चा केलेल्या संकल्पनांच्या व्यावहारिक अनुप्रयोगांवर भर देण्यात आला आहे ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना समस्या सोडवण्याच्या कौशल्यांवर मुद्दाम लक्ष केंद्रित करण्यास मदत होईल.

पुस्तकामध्ये 5 युनिट्स आहेत. विषय अधिक समजून घेण्यासाठी, प्रत्येक युनिटच्या शेवटी लहान प्रश्न, असाइनमेंट्स, बहुपर्यायी प्रश्न, स्वाध्याय आणि अधिक माहितीच्या स्वरूपात तुलनेने स्पर्धात्मक समस्या चांगल्या संख्येने दिल्या गेल्या आहेत. विद्यार्थ्यांची क्षमता वाढवण्यासाठी आणि सांघिक कार्याची भावना वाढवण्यासाठी प्रत्येक युनिटमध्ये व्यावहारिक/प्रकल्प/ क्रियाकलाप देखील दिले आहेत. विषय स्पष्ट करण्यासाठी, मजकूर नोट्स, निरीक्षणे आणि टिप्पण्यांद्वारे पूरक आहेत. जिथे शक्य असेल तिथे भूमितीचा जास्तीत जास्त वापर करून विषय समजावून सांगण्याचा प्रयत्न करण्यात आला आहे.

युनिट -1 डेरिव्हेटिव्ह्ज, वक्रता, प्रॉपर आणि इमप्रॉपर इंटिग्रल्स, बीटा-गामा फंक्शन्स त्यांच्या गुणधर्मांसह वापरले आहेत.

युनिट -2 रोलचे प्रमेय, मीन व्हॅल्यू प्रमेय, टेलर आणि मॅक्लॉरिनचे प्रमेय, L-हॉस्पिटल नियम आणि मॅक्सिमा-मिनिमा यांचा वापर करून एका वेरिएबलसाठी उपाय शोधण्यासाठी संबंधित आहेत.

युनिट -3 मॅट्रायसेस, निर्धारक, विविध पद्धतींसह समीकरणाच्या रेषीय प्रणालीचे निराकरण, रँक, क्रॅमर नियम, गॉस एलिमिनेशन पद्धत आणि गॉस जॉर्डन पद्धती उदाहरणांसह स्पष्ट करते.

युनिट -4 वेक्टर स्पेस, डिपेंडेंट आणि इंडिपेंडंट व्हेक्टर्स, बेसिस, डायमेंशन, लिनिअर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन, इनव्हर्स, रँक नलिटी प्रमेय, लिनिअर आलेखाची रचना यावर लक्ष केंद्रित करते.

युनिट -5 मध्ये आयजेन मूल्ये, आयजेन वेक्टर्स, डायगोनलायझेशन, इंनर प्रॉडक्ट स्पेस, ग्राम-श्मिट ऑर्थोगोनलायझेशन आणि सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सवर आधारित प्रमेय यावर चर्चा केली आहे.

गणित हा एक विषय आहे ज्यावर केवळ कठोर परिश्रम आणि सरावाने प्रभुत्व मिळवता येते. गणित शिकण्याच्या प्रक्रियेत सराव हा एकमेव महत्त्वाचा शब्द आहे.

मला आशा आहे की हे पुस्तक सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांच्या आवश्यकता आणि अपेक्षा पूर्ण करेल. जरी चुकीची छापे आणि चुका टाळण्यासाठी प्रत्येक काळजी घेतली गेली असली तरी परिपूर्णतेचा दावा करणे कठीण आहे. मी शिक्षक आणि विद्यार्थ्यांकडून प्रत्येक टिप्पणी आणि सूचना कृतज्ञतेने स्वीकारतो.

रीना गर्ग

आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशन

आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशनच्या अंमलबजावणीसाठी सर्वप्रथम आऊटकम बेस्ड अभ्यासक्रम विकसित करून आऊटकम बेस्ड आसेसमेंट पद्धतीचा शिक्षण पद्धतीत अंतर्भाव होणे गरजेचे आहे. आऊटकम बेस्ड आसेसमेंट पद्धतीच्या वापरामुळे विद्यार्थ्यांनी निर्धारित निष्पत्ती साध्य केल्याचे मूल्यमापन निश्चित निकषांद्वारे मोजता येईल. आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशनच्या सुयोग्य अंमलबजावणीमुळे सर्व विद्यार्थी एकसमान किमान कौशल्ये साध्य करू शकतील अशी मानके निर्धारित करता येतील. आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशनवर आधारित अभ्यासक्रम पूर्ण केल्यानांतर विद्यार्थी खालील निष्पत्ती साध्य करू शकतील.

प्रोग्राम आउटकम्स (ग्रॅज्यूएट अट्रिब्युट्स)

PO-1: अभियांत्रिकी ज्ञान: जटिल अभियांत्रिकी समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी गणित, विज्ञान, अभियांत्रिकी मूलभूत आणि अभियांत्रिकी विशेषज्ञतेचे ज्ञान लागू करा.

PO-2: समस्यांचे विश्लेषण: गणिताचे पहिले तत्त्व, नैसर्गिक विज्ञान आणि अभियांत्रिकी विज्ञानाचा वापर करून ठोस निष्कर्षांपर्यंत पोहोचणाऱ्या जटिल अभियांत्रिकी समस्या ओळखणे, सूत्रांत मांडणे, संशोधन साहित्याचे पुनरावलोकन करणे आणि त्यांचे विश्लेषण करणे.

PO-3: समाधानांची रचना/विकास: जटिल अभियांत्रिकी समस्यांसाठी समाधानांची रचना आणि प्रणालीच्या घटकांची रचना किंवा प्रक्रिया जे सार्वजनिक आरोग्य आणि सुरक्षिततेसाठी आणि सांस्कृतिक, सामाजिक आणि पर्यावरणीय विचारांसाठी योग्य विचारात घेऊन निर्दिष्ट गरजा पूर्ण करतात.

PO-4: जटिल समस्यांचा तपास करा: वैध निष्कर्ष देण्यासाठी संशोधन-आधारित ज्ञान प्रयोगांच्या रचनेसह संशोधन पद्धती, विश्लेषण आणि डेटाचे स्पष्टीकरण आणि माहितीचे संश्लेषण वापरा.

PO-5: आधुनिक साधनाचा वापर: मर्यादा समजून घेऊन जटिल अभियांत्रिकी कार्यासाठी निर्मिती , निवड आणि योग्य तंत्र लागू करणे,आणि आधुनिक अभियांत्रिकी आणि आयटी साधने अंदाज आणि प्रतिकृतीसह तयार करने.

PO-6: अभियंता आणि समाज: सामाजिक, आरोग्य, सुरक्षा, कायदेशीर आणि सांस्कृतिक समस्या आणि व्यावसायिक अभियांत्रिकी सरावाशी संबंधित परिणामी जबाबदाऱ्यांचे मूल्यांकन करण्यासाठी संदर्भित ज्ञानाद्वारे सूचित केलेले तर्क लागू करा

PO-7: पर्यावरण आणि टिकाऊपणा: सामाजिक आणि पर्यावरणीय संदर्भातील व्यावसायिक अभियांत्रिकी समाधानाचा प्रभाव समजून घ्या आणि शाश्वत विकासाचे ज्ञान आणि गरज प्रदर्शित करा.

PO-8: नैतिकता : नैतिक तत्त्वे लागू करा आणि अभियांत्रिकी अभ्यासाच्या व्यावसायिक नैतिकता आणि जबाबदाऱ्या आणि निकषांना वचनबद्ध करा.

PO-9: वैयक्तिक आणि सांघिक कार्य: एक व्यक्ती म्हणून आणि विविध संघांमध्ये सदस्य किंवा नेता म्हणून आणि बहु -अनुशासनात्मक सेटिंग्जमध्ये प्रभावीपणे कार्य करा.

PO-10: संवाद: जटिल अभियांत्रिकी कार्यांवर अभियांत्रिकी समुदायासह आणि मोठ्या प्रमाणात समाजाशी प्रभावीपणे संवाद साधा, जसे की, आकलनासाठी सक्षम, प्रभावी अहवाल लिहिणे आणि दस्तऐवजीकरणाची रचना समजून घेणे, प्रभावी सादरीकरण करणे आणि स्पष्ट सूचना देणे आणि प्राप्त करणे.

PO-11: प्रकल्प व्यवस्थापन आणि वित्त: अभियांत्रिकी आणि व्यवस्थापन तत्त्वांचे ज्ञान आणि समज प्रदर्शित करा आणि एखाद्या व्यक्तीच्या स्वतः च्या कार्याला एक संघाचे नेते म्हणून, प्रकल्पांचे व्यवस्थापन करण्यासाठी आणि बहु -विषयक वातावरणात हे लागू करा.

PO-12: आयुष्यभरासाठी शिक्षण: तांत्रिक बदलांच्या व्यापक संदर्भात स्वतंत्र आणि आयुष्यभरासाठीच्या शिक्षणामध्ये गुंतण्याची तयारी आणि क्षमता असणे आवश्यक आहे हे ओळखा.

कोर्स आउटकम

अभ्यासक्रम पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी हे करू शकतील:

CO-1: वक्रतेची कल्पना, वक्रता केंद्र आणि योग्य गणिती मर्यादा संकेतन वापरून इमप्रॉपर इंटिग्रलचे मूल्यमापन करण्यासाठी डिफरंशिअल आणि इंटीग्रल कॅलक्युलस लागू करा. या अनुप्रयोगांव्यतिरिक्त त्यांना बीटा आणि गामा फंक्शन्सची मूलभूत समज असेल.

CO-2: दिलेल्या इंटरव्हलमध्ये फंक्शनचे वर्तन तपासा आणि त्रिकोणमितीय आणि ट्रान्सिडेंटल फंक्शनचा विस्तार.

CO-3: समीकरणांच्या रेषीय प्रणालीवर आधारित समस्यांवर मॅट्रिक्सची संकल्पना तयार करणे, विश्लेषण करणे, सोडवणे आणि लागू करणे आणि त्यांना रेषीय परिवर्तनांशी संबंधित करणे.

CO-4: व्हेक्टरचे लिनिअर इंडिपेडन्स आणि लिनिअर डिपेन्डन्स यांचे वर्गीकरण करा आणि वेक्टर स्पेसचे रँक, बेसिस आणि डायमेन्शन या संकल्पना स्पष्ट करा या व्यतिरिक्त, लिनिअर मॅपचे संयोजन मॅट्रिक्स च्या संदर्भात शिका.

CO-5: आइजेन मूल्ये, आइजेन वेक्टर, आइजेन बेसेस, डायगोनलायझेशन आणि ऑर्थोगोनलायझेशन, रेखीय बीजगणित यांच्या मदतीने संख्यात्मक समस्या सोडवण्यासाठी आवश्यक साधन लागू करा. तसेच आइजेन मूल्यांच्या विविध गुणधर्मांचा जे अभियांत्रिकीच्या विविध शाखांमध्ये अनेक जटिल समस्या सोडवण्यासाठी वापरले जातात याचा विचार करा. याच्यासोबतच वेक्टरचा नॉर्म, ऑर्थोनॉर्मल आणि ऑर्थोगोनल वेक्टरच्या संकल्पनांबद्दल जागरूक असणे.

खाली दिलेल्या मॅट्रिक्सनुसार प्रोग्राम आउटकम्स आणि कोर्स आउटकम्सचे मॅपिंग करावे :

कोर्स आउटकम्स	प्रोग्राम आउटकम्स बरोबर अपेक्षित मॅपिंग (1- किमान परस्पर संबंध; 2- मध्यम परस्पर संबंध; 3- घनिष्ट परस्पर संबंध)											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1	3	2	2	1	1		2					
CO-2	3	2	2	2								1
CO-3	3	3	3	2	2	2			1	1		1
CO-4	3	2	1	1	1	1						
CO-5	3	2	2	2	2	1					1	

संक्षिप्तरूपे आणि चिन्हे

चिन्हे	वर्णन
1. संख्या प्रणाली	
N	नैसर्गिक संख्यांचा संच
Z	पूर्णांक संख्यांचा संच
Q	अपरिमेय संख्यांचा संच
I	परिमेय संख्यांचा संच
R	वास्तविक संख्यांचा संच
C	कॉम्प्लेक्स संख्यांचा संच
R^n	n-टपल्स वास्तविक संख्यांचा संच
2. ग्रीक अक्षर	
α	अल्फा
β	बीटा
γ	गामा
Γ	गामा फंक्शन
δ	डेल
Δ	डेल्टा
ε	इप्सिलॉन
ι	आइऑटा
θ	थीटा
λ	लैम्ब्डा
μ	म्यू
ϕ	फ़ाई
ψ	साय
η	ईटा
π	पाय
ρ	रो
κ	कप्पा

चिन्हे	वर्णन
3. संचामधील संकेत	
$\notin$	चा घटक नसणे
$\cup$	संयोग
$\cap$	छेद
( )	विवृत अंतराल
[ ]	संवृत्त अंतराल
$\subseteq$	उपसंच
$\nsubseteq$	उपसंच नाही
$\subset$	उचित उपसंच
$\not\subset$	उचित उपसंच नाही
{ }	संच
ϕ	रिक्त संच
>	पेक्षा काटेकोरपणे अधिक
$\leq$	पेक्षा कमी किंवा समान
$\geq$	पेक्षा मोठे किंवा समान
4. काही इतर उपयुक्त चिन्हे	
~	च्या समतुल्य
$\leftrightarrow$	देवाणघेवाण
∞	अनन्त
$\int$	इंटिग्रेशन
!	फॅक्टोरियल
$\Rightarrow$	सुचवते
$\forall$	सर्वांसाठी
$\Leftrightarrow$	द्वारे सूचित आणि निहित
$\| \ \|$	नॉर्म
$\| \ \|$	मॉड्यूलस
:	कोलन
;	अर्धविराम
[A : B] or [A/B]	- संवर्धित मॅट्रिक्स

5. **वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप**

जर $ax^2 + bx + c = 0$ वर्गसमीकरण असेल, तर

a. यांची मुळे $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ या द्वारे दिले जाते.

b. मुळांची बेरीज = $-b/a$

c. मुळांचा गुणाकार = c/a

d. मूळ समान असतील जर $b^2 - 4ac = 0$

e. मूळ वास्तविक आणि वेगळे असतील जर $b^2 - 4ac > 0$

f. मूळ कॉम्प्लेक्स असतील जर $b^2 - 4ac < 0$

g. जर $b^2 - 4ac$ एक पूर्ण वर्ग असेल, तर मूळ परिमेय संख्या असते.

6. **लॉगॅरिथमचे गुणधर्म**

a. $\log_a 1 = 0, \log_a 0 = \infty, a > 1$ च्या साठी

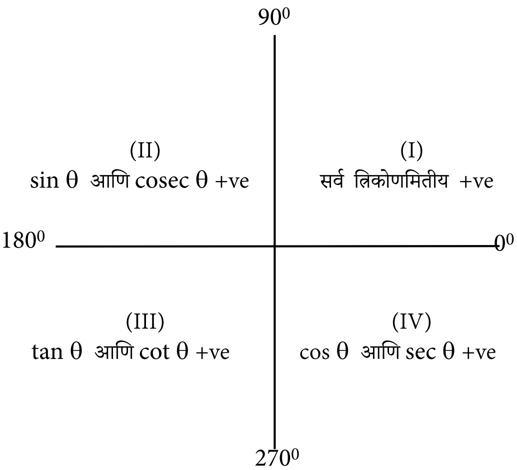
$\log_a a = 1,\ \log_e 2 = 0.6931, \log_{10} e = 0.4343$

b. $\log_a p + \log_a q = \log_a pq$

c. $\log_a p - \log_a q = \log_a \dfrac{p}{q}$

d. $\log_a p^q = q \log_a p$

7. **चतुर्थांशामधील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचे स्वरूप**



8. **त्रिकोणमितीय फंक्शनसाठी गुणाकार आणि बेरीज सूत्र**

a. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

b. $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

c. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

d. $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

e. $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

f. $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

g. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

h. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

i. $\tan 2A = \dfrac{\sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

j. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

k. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

l. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

m. $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

n. $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

o. $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

p. $\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$

q. $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

r. $\cos A\sin B = \dfrac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

s. $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

t. $\sin A\sin B = \dfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

u. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in Z$

v. $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

w. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

x. $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi$ आणि
$x = (2n+1)\pi, n \in Z$

y. $e^{ax} \neq 0, \forall x \in R; a \in R$

9. डिफरन्शिएशनची मूलभूत सूत्रे

a. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

b. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

c. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

d. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

e. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

f. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

g. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

h. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

i. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{xlaga}$

j. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

k. $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = n\,a(ax+b)^{n-1}$

l. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$

m. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$

n. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

o. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

p. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq 0, \pm 1$

q. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq 0, \pm 1$

r. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

s. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

10. इंटिग्रेशनची मूलभूत सूत्रे

a. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

b. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

c. $\int \tan x\, dx = -\log \cos x + c = \log \sec x + c$

d. $\int \cot x\, dx = \log \sin x + c$

e. $\int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x) + c$

f. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$

g. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

h. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

i. $\int e^x\, dx = e^x + c$

j. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c; a > 0, a \neq 1$

k. $\int \frac{1}{x}\, dx = \log_e x + c$

l. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

m. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

n. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$

o. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x-a}\right) + c$

p. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

q. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$

$$= \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$$

r. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$

$$= \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c$$

s. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \sin bx - b \cos bx\right)$

t. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \cos bx + b \sin bx\right)$

प्रतीकांची यादी

lim	-	लिमिट
$\therefore$	-	म्हणून
$\because$	-	कारण
i.e.,	-	म्हणजे,
$f^{n}(a)$	-	'a' वर f चा n वा डेरीवेटीव्ह
Sup.	-	सर्वोच्च
Inf.	-	अत्यल्प
$Lf'(a)$	-	'a' वर 'f' च्या डाव्या हाताचा डेरीवेटीव्ह
diag.	-	कर्ण
L.H.S	-	डाव्या हाताची बाजू
R.H.S	-	उजव्या हाताची बाजू
dim	-	डायमेन्शन
$Adj(A)$	-	मॅट्रिक्स A चा ॲडजॉइंट
min	-	मिनिमम
max.	-	मॅक्सिमम
L.C.	-	रेषीय संयोजन
L.D.	-	लिनिअरली डिपेन्डन्स
L.I.	-	लिनिअरली इनडिपेन्डन्स
$Rf'(a)$	-	'a' वर 'f' च्या उजव्या हाताचा डेरीवेटीव्ह

आकृत्यांची सूची

शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

आउटकम बेस्ड एज्युकेशन (OBE) लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांचे ज्ञान स्तर आणि कौशल्य संच वाढवले पाहिजे. OBE च्या योग्य अंमलबजावणीसाठी शिक्षकांनी मोठी जबाबदारी स्वीकारली पाहिजे. OBE प्रणालीतील शिक्षकांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे असू शकतात:

- वाजवी मर्यादेत, त्यांनी त्यांचा वेळ सर्व विद्यार्थ्यांच्या फायद्यासाठी वापरला पाहिजे
- त्यांनी विद्यार्थ्यांच्या क्षमतेचे मूल्यांकन केवळ परिभाषित निकषावर आणि कोणत्याही पक्षपात आणि भेदभावाशिवाय केले पाहिजे.
- त्यांनी हे सुनिश्चित करण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे की सर्व विद्यार्थ्यांना त्यांचे शिक्षण पूर्ण झाल्यानंतर पुरेसे दर्जेदार ज्ञान तसेच त्यांच्या मुख्य शिस्तीशी जुळणारी क्षमता प्राप्त होईल.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांना त्यांची अंतिम कामगिरी क्षमता विकसित करण्यासाठी नेहमी प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी नवीन दृष्टीकोन एकत्रित करण्यासाठी गट कार्य आणि सांघिक कार्य सुलभ केले पाहिजे आणि प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी मूल्यांकनाच्या प्रत्येक भागात ब्लूम वर्गीकरण पाळावे.

ब्लूम वर्गीकरण

स्तर	शिक्षकांनी तपासावे	विद्यार्थी सक्षम असावा	मूल्यांकनाची संभाव्य पद्धत
निर्माण करणे	विद्यार्थी तयार करण्याची क्षमता	डिझाइन करा किंवा तयार करा	सूक्ष्म प्रकल्प
मूल्यमापन	विद्यार्थ्यांचे औचित्य सिद्ध करण्याची क्षमता	वाद घालणे किंवा बचाव करणे	असाइनमेंट
विश्लेषण करणे	विद्यार्थ्यांमध्ये फरक करण्याची क्षमता	फरक किंवा भेद करा	प्रकल्प/प्रयोगशाळा पद्धती
अर्ज करणे	विद्यार्थ्यांची माहिती वापरण्याची क्षमता	चालवा किंवा प्रात्यक्षिक करा	तांत्रिक सादरीकरण/ प्रात्यक्षिक
समजून घेणे	विद्यार्थ्यांची कल्पना स्पष्ट करण्याची क्षमता	स्पष्ट करा किंवा वर्गीकृत करा	सादरीकरण / परिसंवाद
आठवणे	विद्यार्थ्यांची आठवण करण्याची क्षमता (किंवा लक्षात ठेवणे)	व्याख्या करा किंवा आठवा	प्रश्नमंजुषा

विद्यार्थ्यांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

OBE लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांनी समान जबाबदारी घ्यावी. OBE प्रणालीतील विद्यार्थ्यांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे आहेत:

- प्रत्येक कोर्समध्ये युनिट सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक UO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक CO ची चांगली माहिती असावी
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक PO ची चांगली माहिती असावी
- विद्यार्थ्यांनी योग्य चिंतन आणि कृतीसह गंभीर आणि वाजवी विचार केला पाहिजे.
- विद्यार्थ्यांचे शिक्षण व्यावहारिक आणि वास्तविक जीवनातील परिणामांशी जोडलेले आणि समाकलित केले पाहिजे.
- विद्यार्थी OBE च्या प्रत्येक स्तरावर त्यांची क्षमता जाणून घ्या.

अनुक्रमणिका

1 कॅलकुलस I

युनिट निर्दिष्टे

या युनिटमध्ये वक्रता , वक्रतेची त्रिज्या, वक्रतेचे केंद्र, वक्रतेचे वर्तुळ, इव्होलूट्स, इन्वोलुट, एनवेलोप, प्रॉपर आणि इंप्रॉपर इंटीग्रल, बीटा आणि गामा फंक्शन आणि त्यांचे गुणधर्म, पृष्ठफळ आणि परिभ्रमनाचे घनफळ यांचे मूल्यांकन करण्यासाठी प्रॉपर इंटीग्रल घटकांचे अनुप्रयोग या विषयांवर विस्तृत चर्चा केली आहे. वरील सर्व विषयांवर भरपूर उदाहरणांसह चर्चा केली गेली आहे जेणेकरून विद्यार्थ्यांना सिद्धांत अनुप्रयोग उत्कृष्ट रीत्या स्पष्ट होईल. विद्यार्थ्यांना विषयाची कल्पना करण्यासाठी आवश्यक तेथे आकृत्यांचा समावेश आहे.

तर्कशास्त्र

इनव्होल्यूट आणि इवोल्युट हे विभेदक भूमितीचा (डिफरन्शिअल जॉमेट्री) एक भाग आहे, जी स्वतः विज्ञान, कृत्रिम बुद्धिमत्ता(आर्टिफिशिअल इंटेलिजन्स) आणि रोबोटिक्स क्षेत्रात काम करणाऱ्या विद्यार्थ्यांसाठी एक अतिशय महत्वाची संकल्पना आहे. दैनंदिन वास्तविक जीवनात देखील त्याचे बरेच अनुप्रयोग आहेत.

वर्तुळाच्या इनव्होल्यूटचा एक प्रमुख अनुप्रयोग म्हणजे फिरत्या भागांसाठी गिअर्सची रचना करणे जेथे गिअर टूथ इनव्होल्यूटच्या आकाराचे अनुसरण करतात.

इनव्होल्यूट वापराचा मूलभूत वापर वायडींग घड्याळे आणि खेळण्यांमध्ये आहे जिथे स्पायरल स्प्रिंगला गोलाकार इनव्होल्यूटमध्ये हलविण्यासाठी वायडींग की (key) वापरली जाते.

जलाशय पूर्ण भरल्यावर धरणावर लावलेल्या बलाची गणना करण्यासाठी आपण डेफिनेट इंटिग्रलचा वापर करतो आणि बदलत्या पाण्याची पातळी त्या बलावर कसा परिणाम करते हे आपण तपासतो. इनडेफिनेट इंटीग्रल बाऊण्डेड बॉडीच्या वक्राचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ शोधण्यासाठी वापरले जातात.

गामा फंक्शनचा वापर गामा वितरणामध्ये केला जातो जो इलेक्ट्रॉनिक घटकाचे आयुष्यमान जसे वेळ आधारित घटना निश्चित करण्यासाठी वापरला जातो.

पूर्वतयारी

1. इंटिग्रेशन आणि डिफरन्शिएशनचे मूलभूत ज्ञान.
2. वर्तुळ, इलिप्स (ellipse), हायपरबोला (hyperbola) इत्यादी वेगवेगळ्या वक्रांची समज.
3. फॅक्टोरियल संकल्पनेशी परिचय.
4. दोन किंवा अधिक वक्रांनी बांधलेले क्षेत्र शोधण्यासाठी इंटिग्रेशनचा वापर.

युनिट आउटकम

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील:

U1-O1: वक्रता आणि वक्रता त्रिज्या ही संकल्पना स्पष्ट करू शकतील; वक्रता केंद्राच्या मदतीने वक्रांचे इवोल्युट देखील शोधू शकतील.

U1-O2: कॉनवरजन्स आणि डायवर्जन्स दृष्टीने त्यांचे स्वरूप शोधण्यासाठी विविध फंक्शनवर इंटीग्रल कसोटी (integral test) लागू करू शकतील.

U1-O3: बीटा-गामा फंक्शन संकल्पनेशी परिचित झाल्यानंतर त्याचा उपयोग वेगवेगळे इंटीग्रल सोडवण्यासाठी करू शकतात.

U1-O4: कार्टेशियन, पॅरामेट्रिक आणि पोलर वक्रांसाठी पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनाकृतिच्या परिभ्रमण परिभ्रमणाचे घनफळ मूल्यमापन करू शकतात .

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

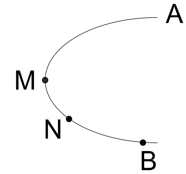
युनिट 1 आऊटकम	कोर्स आऊटकमसह अपेक्षित मॅपिंग (1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U1-O1	3	1	–	–	1
U1-O2	2	3	–	–	–
U1-O3	3	–	–	–	–
U1-O4	2	–	–	–	1

इतिहास

अपोलोनियस (इ.स. 190–262 पुर्व) कोनिकाच्या पुस्तक V मध्ये कोनिक सेक्शन ला नॉर्मल काढताना चे गणित सोडवताना च्या वक्र ते ची स्पष्टपणे गणना केली,
परंतु त्याने वक्राचा गुणधर्म म्हणून विचार केला नाही आणि त्याची "गणना" विभागांची रचना आहे. वक्रता "पाहणारी" पहिली व्यक्ती होती ओरेस्मे (c. 1382-1320), निर्देशांक प्रस्तुत करण्यात अग्रस्थानी होता. त्याने त्याला वक्राच्या झुकण्याचा स्थानिक मोजमाप म्हणून वर्णन केले, आणि त्याला लॅटिन "कर्व्हिटास" असे नाव दिले. नंतर त्याने प्रस्तावित केले की वर्तुळांसाठी ते, त्रिज्याच्या रेसिप्रोकल द्वारे परिमाणित केले जाऊ शकते आपली आधुनिक अधिवेशन. केपलरने अस्पष्टपणे 1680 च्या दशकात लिबनिझच्या ओस्क्युलेटिंग ("किसिंग") नावाच्या एका बिंदूवर "जवळच्या" वर्तुळाचा विचार करून सामान्य वक्रांसाठी वक्रता कशी परिभाषित करावी हे सुचवले. परंतु ह्यूजेन्स, ज्यांनी प्रथम सामान्य वक्रांसाठी वक्रता मोजण्याचा मार्ग शोधला आणि न्यूटनने या संकल्पनेला आधुनिक स्वरूप दिले.

"माझा असा विश्वास आहे की आम्हाला कदाचित प्रत्येक गोष्टीसाठी काही माहित नाही."
– क्रिश्चियन ह्यूजेन्स

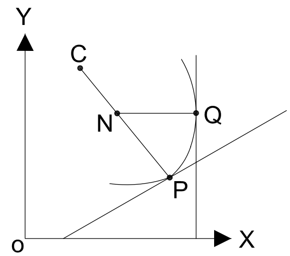
1.1 वक्रता



आकृति 1.1

आकृती 1.1 मध्ये, हे पाहिले जाऊ शकते की दिलेला वक्र $AMNB$ बिंदू N च्या तुलनेत M बिंदूवर अधिक तीव्रतेने वाकतो. एखाद्या विशिष्ट बिंदूवर वक्र वाकणे याला त्या बिंदूवरील वक्रता म्हणतात. तर M मधील वक्रता N वरील वक्रतेपेक्षा जास्त आहे. हे बिंदूवर वक्र वाकण्याच्या तीक्ष्णतेचे निश्चित संख्यात्मक मोजमाप देईल.

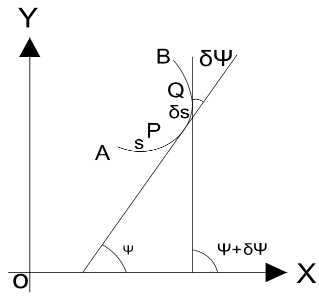
आकृती 1.2 मध्ये, दिलेल्या वक्रातील P हा कोणताही बिंदू असू द्या आणि Q हा P चा शेजारी बिंदू असा आहे की चाप PQ त्याच्या जी वे च्या दिशेने कॉनकेव्ह आहे. समजा P आणि Q वरील नॉर्मल्स N वर छेदतात.



आकृति 1.2

जेव्हा $Q \rightarrow P$, N एका निश्चित स्थिती C कडे वळते, ज्याला वक्राचा वक्रता केंद्र P म्हणतात. अंतर CP ला P बिंदूवर वक्राच्या वक्रतेची त्रिज्या म्हणतात आणि ते ρ (rho) असे दर्शविले जाते. C केंद्र असलेले वर्तुळ आणि त्रिज्या B मधील, म्हणजेच CP, P च्या बिंदूवर दिलेल्या वक्रांच्या वक्रतेचे वर्तुळ म्हणतात. बिंदू P द्वारे काढलेल्या वक्रता वर्तुळाच्या कोणत्याही जीवाला वक्रता जीवा म्हणतात. वक्रतेच्या त्रिज्येच्या रेसिप्रोकलला P बिंदू वरील वक्राची वक्रता म्हणतात आणि k या द्वारे दर्शविले जाते.

1.1.1 वक्रतेची गणितीय व्याख्या



आकृति 1.3

समजा AB हा वक्र आहे आणि P, Q या वक्र वर दोन शेजारी बिंदू आहेत. एक चाप $AP = s$ आणि चाप $AQ = s + \delta s$. 'A' हा वक्र वर एक निश्चित बिंदू आहे ज्याच्यापासून कमानांची लांबी मोजली जाते. P आणि Q वरील स्पर्शिका अनुक्रमे ψ आणि $\psi + \delta\psi$ कोन एका निश्चित रेषे सोबत म्हणजे x- अक्षा सोबत बनवतात, तर

i. कोन $\delta\psi$ ज्याद्वारे स्पर्शिका त्याच्या संपर्काचा बिंदू चाप PQ सोबत फिरते त्याला चाप PQ चे वाकणे किंवा एकूण वक्रता म्हणतात.

ii. गुणोत्तर $\delta\psi/\delta s$ ला चाप PQ ची सरासरी किंवा सरासरी वक्रता म्हणतात.

iii. सरासरी वक्रतेचे लिमिट मूल्य जे $Q \rightarrow P$ ला बिंदू P वर वक्रांची वक्रता म्हणतात.

अशा प्रकारे, बिंदू P वर वक्रता (κ) $\underset{Q\to P}{\text{Lt}} \dfrac{\delta\psi}{\delta s} = \underset{\delta s\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\delta\psi}{\delta s} = \dfrac{d\psi}{ds}$ आहे.

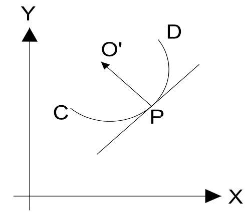
iv. P वर वक्राच्या वक्रतेचा व्यस्त जर वक्रता शून्य नसेल तर त्याला P येथे वक्राची वक्रता त्रिज्या म्हणतात आणि ρ द्वारे दर्शविले जाते अर्थात $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{ds}{d\psi}$

टिप्पणी: (1) एक सरळ रेषा अजिबात वाकत नाही (जसे कि y स्थिर आहे म्हणून $\dfrac{d\psi}{ds}$ शून्य आहे) म्हणून एका सरळ रेषेची वक्रता शून्य आहे.
(2) वर्तुळाची वक्रता स्थिर आणि त्याच्या त्रिज्याच्या व्यस्त इतकी असते.

1.1.2 वक्रता त्रिज्या

कोणत्याही बिंदू वर वक्रतेच्या व्यस्तला त्या बिंदूची वक्रता त्रिज्जा म्हणतात. साहजिकच वक्रता त्रिज्या बिंदूवर निश्चित करण्यासाठी कोणत्याही बिंदूवर वक्रता शून्य नसावी. हे सहसा ρ द्वारे दर्शविले जाते. त्यामुळे बिंदू P वर

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\psi}$$



आकृति 1.4

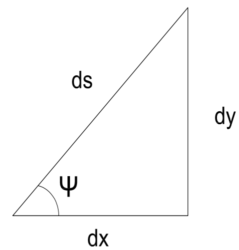
आलेखीय

वक्र CD साठी जर बिंदू P वर वक्रतेची त्रिज्या ρ असेल तर आपण बिंदू P वर प्रलंब काढतो आणि नंतर $O'P$ हे अंतर O' सह P वर वक्रता त्रिज्या इतके आहे.

A. कार्टेशियन वक्रासाठी वक्रता त्रिज्या

जेंव्हा वक्राचे समीकरण कार्टेशियन निर्देशांकात दिलेले असते , तेंव्हा आपण ρ करिता सूत्र काढतो.

वक्र $Y = f(x)$ साठी ρ काढणे



आकृति 1.5

वक्रावरील बिंदु P (x, y) वर स्पर्शिका x- अक्ष सोबत जर ψ हा कोन बनवते, तर आपल्या कडे

$$\sin\psi = \frac{dy}{ds}, \cos\psi = \frac{dx}{ds} \text{ आणि } \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

तर शेवटच्या संबंधातून, आमच्याकडे असेल $\psi = \tan^{-1}(y_1)$

, तिथे $y_1 = \frac{dy}{dx}$

x ने डिफरंशिएशन करून, आपल्याकडे असेल,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1+y_1^2}.y_2 \qquad \left\{\because y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$

आता,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dx}.\frac{dx}{ds} = \frac{y_2}{1+y_1^2}.\cos\psi$$

$$= \frac{y_2}{1+y_1^2}.\frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

$$\left[\because \cos\psi = \frac{1}{\sec\psi} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right]$$

त्यामुळे,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y_2}{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho = \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}, \text{ जिथे } y_2 \neq 0$$

B. पॅरामेट्रिक वक्रासाठी वक्रता त्रिज्या

वक्र $x = f(t), y = \phi(t)$ साठी ρ काढणे जेंव्हा वक्राचे पॅरामेट्रिक समीकरण दिलेले असेल.

येथे, $x = f(t), y = \phi(t), t$ पॅरामिटर आहे

आपल्याला माहित आहे, $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$

तसेच $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$

या रीतीने $$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} \qquad (1)$$

x ने डिफरंशिएशन करून, आपल्याकडे आहे,

$$y_2 = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \qquad \left[\because \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'}\right]$$

आपल्याला माहित आहे, $\rho = \frac{\left[1 + y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$ म्हणून, सर्व मूल्ये टाकल्यानंतर, आपल्याकडे,

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \text{ आहे}$$

C. ध्रुवीय वक्र साठी वक्रता त्रिज्या

वक्र $r = f(\theta)$ किंवा $f(r, \theta) = 0$ साठी ρ काढणे

समजा ϕ हा असा कोन जो $P(r, \theta)$ वर स्पर्शिका OP सोबत बनवतो, तेंव्हा आपल्या कडे

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}, \ \sin\phi = r\frac{d\theta}{ds} \text{ आणि } \cos\phi = \frac{dr}{ds} \qquad \ldots (1)$$

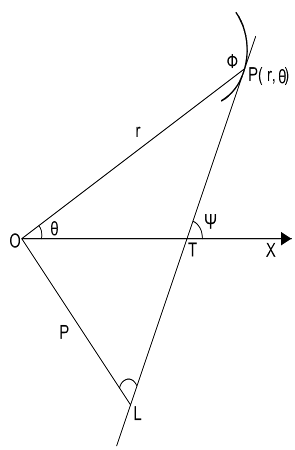
पुन्हा जर ϕ हा कोन जो स्पर्शिका $P(r, \theta)$, OX सोबत बनवतो. तेंव्हा

$$\psi = \theta + \phi$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds}\left[1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right] \qquad \ldots (2)$$



आकृति 1.6

समीकरण (1) वरून,

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

अथवा $\tan\phi = \frac{r}{r_1}$, जिथे $r_1 = \frac{dr}{d\theta}$

दोन्ही बाजूला θ सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर आपल्याला मिळते

$$\sec^2\phi \cdot \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r_1 . r_1 - r r_2}{r_1^2}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d\phi}{d\theta}=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2}\cdot\frac{1}{\sec^2\phi}$$

$$=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\phi}$$

$$=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2}\cdot\frac{r_1^2}{r_1^2+r^2} \qquad \left[\because\ \tan\phi=\frac{r}{r_1}\right]$$

$$=\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2+r^2} \qquad \ldots (3)$$

पुन्हा (1) पासून, $$r\frac{d\theta}{ds}=\sin\phi=\frac{1}{\operatorname{cosec}\phi}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\phi}}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2}} \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (2), (3), (4) वरून, आपल्याला मिळते

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2}}\cdot\left[1+\frac{r_1^2-r\,r_2}{r_1^2+r^2}\right]$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2r_1^2+r^2-r\,r_2}{\left(r^2+r_1^2\right)^{3/2}} \qquad \left[\because\ \frac{1}{\rho}=\frac{d\psi}{ds}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\rho=\frac{ds}{d\psi}=\frac{\left(r^2+r_1^2\right)^{3/2}}{2r_1^2+r^2-r\,r_2}$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.1. खालील वक्रांच्या दिलेल्या बिंदूवर वक्रतेची त्रिज्या शोधा:

(a). $y=4\sin x-\sin 2x$, बिंदू $x=\frac{\pi}{2}$ वर b. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ बिंदू $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ वर

उकल: (a) दिले आहे : $y=4\sin x-\sin 2x$

x सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर,

$$\frac{dy}{dx}=4\cos x-2\cos 2x$$

आणि $$\frac{d^2y}{dx^2}=-4\sin x+4\sin 2x$$

आपल्याला माहिती आहे $$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left[1+\left(4\cos x-2\cos 2x\right)^2\right]^{3/2}}{-4\sin x+4\sin 2x}$$

$\therefore \qquad (\rho)_{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\left[1+\left(4\cos\frac{\pi}{2}-2\cos\pi\right)^2\right]^{3/2}}{-4\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{(1+4)^{3/2}}{-4}$ (उणे चिन्हाकडे दुर्लक्ष केल्यावर)

$$= \frac{5^{3/2}}{4}, \text{ (उकल)}$$

(b). दिले आहे : $\qquad \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \qquad (1)$

x सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$= -1, \text{ बिन्दु } \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

अश्याप्रकारे, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\sqrt{y}.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$

$$= \frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x} = \frac{\left[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x}$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}\right] = -\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\right)}, \text{ बिन्दु } \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \text{ वर}$$

$$= -4$$

आपल्याला माहित आहे $\qquad \rho = \dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\dfrac{(1+1)^{3/2}}{4} = \dfrac{2^{3/2}}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **(उकल)**

उदाहरण 1.2. $|\rho|$ चे लघुत्तम मूल्य शोधा $y=\log x$, $x>0$ साठी.

उकल : समजा : $\qquad y=\log x$

x सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \text{ तसेच } \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$$

आपल्याला माहित आहे $$\rho=\frac{\left[1+y_1^{\,2}\right]^{3/2}}{y_2}=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x}$$

समजा , $$|\rho|=f(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x}$$

f (x) चे लघुत्तम मूल्य शोधण्यासाठी आपल्याला f'(x) काढावे लागेल

$$f'(x)=\frac{x.\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{1/2}.2x-\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x^2}$$

$$=\frac{3x^2\sqrt{x^2+1}-\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}\left(3x^2-x^2-1\right)}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}\left(2x^2-1\right)}{x^2}$$

समजा $f'(x)=0$, तेंव्हा $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

आणि $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ हा f''(x) धनात्मक आहे. (विद्यार्थी तपासू शकतात)

त्यामुळे $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ साठी $|\rho|$ चे मूल्य लघुत्तम आहे. $(\because x>0)$

$$\therefore \quad |\rho|_{\min}=\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x}\right]_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore |\rho|$ चे लघुत्तम मूल्य $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ असेल . **(उकल)**

उदाहरण 1.3. बिंदू (x, y) वर आयताकृती हायपरबोला $xy=c^2$ साठी वक्रता त्रिज्या शोधा.

उकल : सूचना: $y=\frac{c^2}{x}$ घ्या, उकल: $\frac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{2c^2}$

उदाहरण 1.4. $x=1-t^2,\ y=t-t^3$ दिलेल्या वक्रांच्या दोन शाखांच्या उत्पत्तीवर वक्रतेची त्रिज्या शोधा.

उकल : आरंभ बिंदू (0, 0) वर t चे दोन समान मूल्य 1 आणि −1 आहे. $\left[\because x=1-t^2,\ 0=1-t^2\Rightarrow t^2=1\Rightarrow t=\pm1\right]$

म्हणून वक्रांच्या दोन शाखांसाठी, t चे मूल्य 1 आणि -1 आहे.

दिले आहे: $x=1-t^2,\ y=t-t^3$

't' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर ,

$$\frac{dy}{dt}=1-3t^2,\quad \frac{dx}{dt}=-2t$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1-3t^2}{2t}=-\frac{1}{2t}+\frac{3}{2}t \qquad \ldots (1)$$

परत समीकरण (1) ला 't' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{2t^2}+\frac{3}{2}\right).\frac{dt}{dx}=\frac{\left(\frac{1}{2t^2}+\frac{3}{2}\right)}{-2t}$$

$$=-\frac{1}{4t^3}-\frac{3}{4t}$$

आपल्याला मिळेल, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

आणि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$

त्याचप्रकारे, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$

तसेच $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=-1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

अशा प्रकारे $$(\rho)_{t=1}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{(1+1)^{3/2}}{-1}=-2\sqrt{2}$$

तसेच $$(\rho)_{t=-1}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{(1+1)^{3/2}}{1}=2\sqrt{2} \quad \text{(उकल)}$$

उदाहरण 1.5. सिद्ध करा की कॅटेनरी $y=c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ साठी वक्रतेची त्रिज्या ही वक्र आणि x- अक्ष यांच्यामध्ये प्रलंब आंतरखंडित भागा इतकी असते आणि तो कोटि च्या वर्गा प्रमाणे बदलतो.

उकल : स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 1.6. जर ρ_1 आणि ρ_2 , पॅराबोला $y^2=4ax$ च्या नाभि जीवा च्या टोकाला वक्रतेची त्रिज्या असतील तर $\rho_1^{-2/3}+\rho_2^{-2/3}=(2a)^{-2/3}$ हे सिध्द करा.

उकल: पॅराबोलाचे समीकरण $y^2=4ax$ आहे आणि त्याचे पॅरामेट्रिक समीकरण $x=at^2,\ y=2at$ आहे. $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ आणि $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ पॅराबोला च्या नाभि जीवा ची टोके आहेत, तर आपल्याला माहित आहे

$$t_1\, t_2 = -1$$

दिले आहे, $$x = at^2,\ y = 2at$$

$$\frac{dx}{dt} = 2at,\ \frac{dy}{dt} = 2a$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

आणि $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^2}.\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2at^3}$$

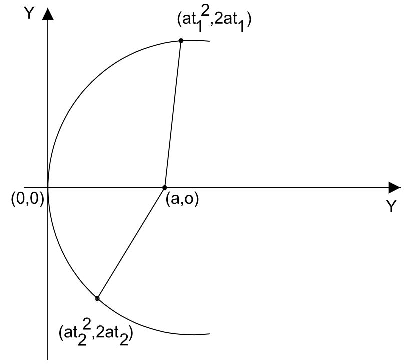
आपल्याला माहित आहे, $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\frac{1}{t^2}\right]^{3/2}}{-\frac{1}{2at^3}}$$

$$= -2a\left(t^2+1\right)^{3/2}$$

$\therefore$ $$\rho\left(at_1^2, 2at_1\right) = -2a\left(t_1^2+1\right)^{3/2}$$

आणि $$\rho\left(at_2^2, 2at_2\right) = -2a\left(t_2^2+1\right)^{3/2}$$

$\therefore$ $$\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = \left[2a\left(t_1^2+1\right)^{3/2}\right]^{-2/3} + \left[2a\left(t_2^2+1\right)^{3/2}\right]^{-2/3}$$



आकृति 1.7

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{1}{t_1^2+1} + \frac{1}{t_2^2+1}\right] = (2a)^{-2/3}\left[\frac{t_2^2+1+t_1^2+1}{\left(t_1^2+1\right)\left(t_2^2+1\right)}\right]$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{t_1^2+t_2^2+2}{t_1^2+t_2^2+(-1)^2+1}\right] = (2a)^{-2/3}$$ सिद्ध केले $[\because t_1\, t_2 = -1]$

उदाहरण 1.7. सिध्द करा कि एलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ च्या दीर्घ अक्षा च्या टोकाला वक्रता त्रिजा हि सेमी लॅटस रेक्टम बरोबर असते.

उकल : एलिप्सचे पॅरामेट्रिक स्वरूपातील समीकरण, $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ आहे आणि दीर्घ अक्षाची टोके $(\pm\, a,\, 0)$ आहे, 't' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot t$$

आणि $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}\cos ec^2 t\,\frac{dt}{dx} = \frac{b}{a}\text{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\text{cosec}^3 t$$

वक्रता त्रिजा $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\frac{b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}\right]^{3/2}}{-\frac{b}{a^2}\text{cosec}^3 t}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}$$ (उणे चिन्हाकडे दुर्लक्ष केल्यावर)

$$= \frac{1}{ab}\left(a^2 \sin^2 0 + b^2 \cos^2 0\right)^{3/2} \quad (\rho \text{ या } (a,0) \text{ बिंदूवर})$$

$$= \frac{b^2}{a} \quad \text{(एलिप्सचे सेमी लॅटस रेक्टम)} \quad \text{(सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.8. वक्र $x = c\log\left(s+\sqrt{s^2+c^2}\right)$, $y=\sqrt{s^2+c^2}$ ची वक्रता त्रिजा काढा.

उकल : दिले आहे : $x = c\log\left(s+\sqrt{s^2+c^2}\right), y=\sqrt{s^2+c^2}$

'S' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{s+\sqrt{s^2+c^2}}\left(1+\frac{2s}{2\sqrt{s^2+c^2}}\right) = \frac{c}{\sqrt{s^2+c^2}}$$

आणि

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2s}{2\sqrt{s^2+c^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2+c^2}}$$

so,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{s}{c} \qquad \dots (1)$$

आपल्याला माहित आहे , $\tan\psi = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad s = c\tan\psi$ [समीकरण (1) वरून]

$\therefore$ वक्रता त्रिजा ,

$$\frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

$$= c\left(1+\tan^2\psi\right)$$

$$= c\left(1+\frac{s^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{c^2+s^2}{c} \quad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.9. सिध्द करा कि वक्र $r^2 = a^2\sin 2\theta$ मध्ये वक्रता ही त्रिज्या वेक्टर नुसार बदलते.

उकल : स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 1.10. जर ρ_1 आणि ρ_2 कार्डिऑईड वक्र $r = a(1-\cos\theta)$ च्या ध्रुवाद्वारे कोणत्याही जीवाच्या टोकावर वक्रतेची त्रिज्या असतील, तर सिध्द करा कि $\rho_1^2+\rho_2^2 = \frac{16a^2}{9}$.

उकल : कार्डिऑईड $r = a(1-\cos\theta)$ आकृती 1.8 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे .

जर बिंदु P_1 (r_1, θ) असेल , तर P_2 $(r_2, \pi+\theta)$ असेल कारण P_1 आणि P_2 ध्रुवांमधून जाणाऱ्या जीवाची टोके आहेत

तेव्हा

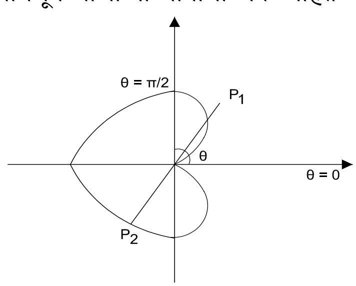
$$\frac{dr}{d\theta} = r_1 = a\sin\theta$$

आणि

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = r_2 = a\cos\theta$$

आपल्याला माहित आहे ,

$$\rho = \frac{\left(r^2+r_1^2\right)^{3/2}}{r^2+2r_1^2 - r\,r_2}$$



आकृति 1.8

$$= \frac{\left[a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]^{3/2}}{a^2(1-\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta - a^2(1-\cos\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{a^3(1-\cos\theta)^{3/2}\,2\sqrt{2}}{3a^2(1-\cos\theta)} = \frac{a}{3}2\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{1/2}$$

$\therefore$ $$\rho_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1-\cos\theta)^{1/2}$$

आणि $$\rho_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a\big(1-\cos(\theta+\pi)\big)^{1/2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1+\cos\theta)^{1/2}$$

$\therefore$ $$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{8a^2}{9}(1-\cos\theta+1+\cos\theta) = \frac{16a^2}{9}$$

$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \dfrac{16a^2}{9}$ म्हणून सिद्ध झाले

अभ्यास 1.1

खालील वक्रांच्या दिलेल्या बिंदूवर वक्रतेची त्रिज्या शोधा:

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, बिन्दु $\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{a}{4}\right)$ 2. $x^3 + y^3 = 3axy$, बिन्दु $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$
3. $y^2 = \dfrac{a^2(a-x)}{x}$, बिन्दु $(a, 0)$ [**सूचना** : वक्रतेचे समीकरण आहे $x = \dfrac{a^2}{y^2 + a^2}$]
4. $x^2y = a(x^2 + y^2)$ बिन्दु $(-2a, 2a)$
5. वक्र $y = e^x$ च्या वक्रतेची त्रिज्या शोधा ज्या ठिकाणी ती y- अक्षाला छेदते.
6. कैटेनरी $y = c\cosh\left(\dfrac{x}{c}\right)$ च्या कोणत्याही बिंदू (0, c) वर वक्रतेची त्रिज्या शोधा.
7. सिध्द करा कि पॅराबोला $y^2 = 4ax$ साठी ρ^2, हा $(SP)^3$ नुसार बदलतो, जेथे ρ हा पॅराबोलाच्या कोणत्याही बिंदू P वरील वक्रतेची त्रिज्या आहे आणि S ही पॅराबोलाची नाभी आहे.
8. सायकलॉइड $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, बिंदूं P, Q वरील स्पर्शिका काटकोनात आहेत. दाखवा की जर ρ_1, ρ_2 या बिंदूंवर वक्रतेची त्रिज्या असेल तर $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$.
9. सिध्द करा कि ऐस्ट्रॉइड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ च्या कोणत्याही बिंदूवरील वक्रता त्रिज्या ही त्या बिंदू वरील आरंभबिंदूच्या स्पर्शरेषेवर टाकलेल्या लंबाच्या लांबीच्या तीनपट असते.
10. सिध्द करा कि इलिप्स साठी $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \rho = \dfrac{a^2b^2}{P^3}$ जिथे P केंद्रातून स्पर्शरेषाला बिन्दु (x, y) वर काढलेला लम्ब आहे.
11. पॅराबोला $y^2 = 8x$ वरील बिंदू शोधा जिथे वक्रता त्रिज्या $7\dfrac{13}{16}$ आहे.
12. सिध्द करा कि वक्र ; $x = a\cos\theta(1+\sin\theta)$, $y = a\sin\theta(1+\cos\theta)$, साठी $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ वर वक्रता त्रिज्या a आहे.

खालील वक्रांसाठी (रॅडियस ऑफ कर्वेचर) वक्रता त्रिज्या शोधा:

13. $r = a\cos n\theta$ 14. $r^m = a^m \sin m\theta$

15. $r^2 \cos 2\theta = a^2$

16. सिध्द करा कि वक्र $r = a\cos n\theta$ च्या कोणत्या हि बिंदूवर रेडीअस ऑफ कर्वेचर (वक्रता त्रिज्या) $\dfrac{a}{1+n^2}$, असते जेंव्हा r = a आहे.

17. सिध्द करा कि वक्र $\theta = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)$ साठी रेडीअस ऑफ कर्वेचर (वक्रता त्रिज्या) $\sqrt{r^2 - a^2}$ आहे.

18. सिध्द करा कि लेमनिसकेट $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ची वक्रता त्रिज्या, ज्या बिंदूवर स्पर्शिका x-अक्षला समानांतर आहे ती $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$ असते.

उत्तरे

1. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{3a}{8\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{a}{2}$ 4. 2

5. $2\sqrt{2}$ 6. c 11. $\left(\dfrac{9}{8}, 3\right)$ आणि $\left(\dfrac{9}{8}, -3\right)$

13. $\dfrac{\left(r^2 + a^2n^2 - r^2n^2\right)^{3/2}}{r^2 - r^2n^2 + 2a^2n^2}$ 14. $\dfrac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$ 15. $\dfrac{r^3}{a^2}$

1.1.3 सेंटर ऑफ कर्वेचर सर्कल ऑफ कर्वेचर(वक्रता केंद्र, वक्रता वर्तुळ)

1.1.3.1 सेंटर ऑफ कर्वेचर

वक्र AB च्या कोणत्याही बिंदू P वर वक्रता केंद्र हा तो बिंदू आहे जो P वरील नॉर्मलच्या पॉझ़िटिव दिशेवर आहे आणि त्यापासून वक्रतेच्या त्रिजेइतक्या अंतरावर आहे.

1.1.3.2 सर्कल ऑफ कर्वेचर

जर 'C' वक्रता केंद्र आहे, तर केंद्र 'C' असलेले आणि बिंदू P मधून जाणाऱ्या वक्रता त्रिज्या 'ρ' असलेल्या वर्तुळाला सर्कल ऑफ कर्वेचर(वक्रता वर्तुळ) म्हणतात.

समजा ρ ही वक्रता त्रिज्या आहे आणि $(\bar{x}, \bar{y})$ दिलेल्या बिन्दूवर वक्रता केंद्र चे निर्देशांक आहेत तर वक्रता वर्तुळाचे समीकरण $(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 = \rho^2$ द्वारे दिले जाते.

1.1.4 वक्रता केंद्राचे निर्देशांक (कॉर्डिनेट्स ऑफ सेंटर ऑफ कर्वेचर)

समजा $(\bar{x}, \bar{y})$ वक्रता केंद्र C चे निर्देशांक आहेत, जो वक्रावर P(x, y) वर नॉर्मल (लंब) वर अश्याप्रकारे स्थित आहे कि $PC = \rho$

आकृती 1.9 पासून, आपल्याकडे आहे ,

$$\bar{x} = OL = OM - LM$$

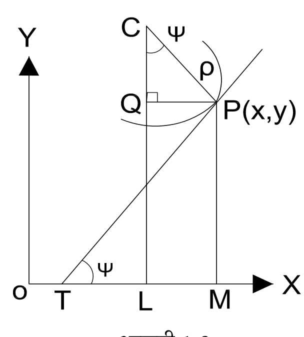
$$= OM - PQ \qquad (\because LM = PQ)$$

आता $OM = x$

आणि $PQ = PC\sin\psi = \rho\sin\psi$

$\therefore$ $\bar{x} = x - \rho\sin\psi$ … (1)

अश्याप्रकारे , $\bar{y} = CL = CQ + QL$



आकृती 1.9

$$= CQ + PM \qquad (\because QL = PM)$$

आणि $CQ = PC\cos\psi = \rho\cos\psi$ तसेच $PM = y$

$$\therefore \quad \bar{y} = y + \rho\cos\psi \qquad \ldots (2)$$

तर, आमच्याकडे आहे,

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y_1$$

$$\therefore \quad \sin\psi = \tan\psi\cos\psi$$

$$= \frac{\tan\psi}{\sec\psi} = \frac{\tan\psi}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} \text{ किंवा } \sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

समीकरण (1) आणि (2) मध्ये $\sin\psi$ आणि $\cos\psi$ वापरल्यास आपल्याला मिळते

$$\bar{x} = x - \rho\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \text{ आणि } \bar{y} = y + \frac{\rho}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

पण, जसे आपल्याला माहित आहे ,

$$\rho = \frac{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}{y_2}$$

तर, आमच्याकडे आहे,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}\left(1+y_1^2\right) \qquad \ldots (3)$$

$$\bar{y} = y + \frac{1}{y_2}\left(1+y_1^2\right) \qquad \ldots (4)$$

वक्रता केंद्राचे आवश्यक निर्देशांक आहेत.

जर आपण समीकरण (3) आणि (4) आणि वक्राच्या समीकरण यांच्यामध्ये x, y काढून टाकले तर तो आपल्याला $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ मधील संबंध प्राप्त होईल जे इवोल्युट चे समीकरण आहे

इतिहास

ह्युजेन्सने वक्रता केंद्रांच्या लोकसचे नाव वक्रतेचा इवोल्युट (evolute)दिले आणि ते कसे करावे हे दर्शविलेएक परिपूर्ण पेंडुलम तयार करा, ज्याचा कालावधी त्याच्या अँप्लिटयूड वर अवलंबून नाही. सायकलॉइडला उदवलीत करणे हे त्याच्याशी एकरूप आहे या वस्तुस्थितीवर आधारित आहे.

1.1.5 इवोल्युट (Evolute)

वक्रावरील प्रत्येक बिंदूशी संबंधित आपण त्या बिंदूवर वक्रांची वक्रता शोधू शकतो. या बिंदूवर नॉर्मल(लंब)काढून आपण या प्रत्येक बिंदूशी संबंधित वक्रता केंद्र शोधू शकतो. वक्रता बिंदूनुसार बदलत असल्याने, वक्रता केंद्र देखील बदलत असते. अश्या एकूण वक्रता केंद्रांमुळे अजून एक वक्र परिभाषित होतो त्या वक्राला वक्राचा इवोल्युट म्हणतात. दिलेल्या वक्रांच्या वक्रता केंद्रांच्या लोकसला त्या वक्राचा इवोल्युट म्हणतात.

वक्रावरील चल बिंदू p च्या वक्राच्या केंद्रांच्या लोकस (locus) ला वक्राचा इवोल्युट म्हणतात. एका वक्रा वरील चल बिंदू P च्या वक्रता केंद्राच्या बिंदूचे निधाना ला (लोकस ऑफ पॉईंट) वक्राचा इवोल्युट म्हणतात . वक्रालाच इवोल्युट चा इनवोल्युट म्हणतात.

येथे, वक्रावरील वेगवेगळ्या बिंदूंसाठी, आपल्याला वक्रतांचे वेगवेगळे केंद्र मिळतात. या सर्वांच्या वक्रता केंद्रांच्या लोकसला (locus) वक्रता केंद्रांचे इवोल्युट म्हणतात. बाह्य वक्र जे वक्रता ह्या सगळ्या केंद्रांना संतुष्ट करतो त्याला इवोल्युट म्हणतात. येथे

इव्होल्यूट म्हणजेच वक्र समीकरण.

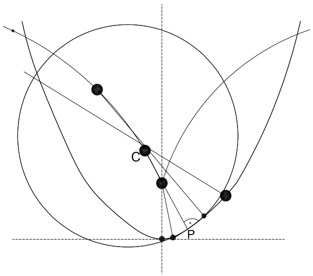
इव्होल्यूट शोधण्यासाठी, खालील मॉडेल अस्तित्वात आहेत.

जर वक्रांचे समीकरण दिले गेले असेल आणि जर आपल्याला सिद्ध करायचे असेल, डावी बाजू = उजवी बाजू, तर खालील पायऱ्याचे (steps) अनुसरण केले पाहिजे:

1. प्रथम वक्रता केंद्र, $C(\bar{x}, \bar{y})$ शोधा जेथे $\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2)$, $\bar{y} = y + \frac{1}{y_2}(1 + y_1^2)$, आणि नंतर डाव्या बाजूचा विचार करा: त्यामध्ये थेट x च्या जागी $\bar{x}$ आणि y च्या जागी $\bar{y}$.
   त्याचप्रमाणे उजव्या बाजूसाठी आणि नंतर दाखवा की
   डावी बाजू = उजवी बाजू.
2. जर वक्र दिलेला असेल आणि जर आपल्याला दिलेल्या वक्रातील इव्होल्यूट शोधण्यास सांगितले गेले तर खालीलप्रमाणे करा:

   प्रथम वक्रता केंद्र शोधा $C(\bar{x}, \bar{y})$ आणि मग x च्या रूपात $\bar{x}$ आणि

   y च्या दृष्टीने $\bar{y}$ पुन्हा लिहा आणि नंतर दिलेल्या वक्र मध्ये ठेवा, जे आपल्याला आवश्यक इव्होल्यूट देते.



आकृति 1.10

3. जर दिलेला वक्र पॅरामेट्रिक स्वरूपात दिला असेल तर आधी वक्रता केंद्र शोधा
   जे पॅरामेट्रिक स्वरूपात असेल , मग $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ ही मूल्ये वापरून पॅरामीटर काढून टाका, जो आपल्याला इवोल्युट देतो.

इव्होल्यूट आणि सेंटर ऑफ कर्वेचर बाजूला दिलेल्या आकृति 1.10 मध्ये चित्रात्मक दर्शविले आहे

1.1.6 इनवोल्युट (Involute)

एक वक्र जो काल्पनिक तार जोडून प्राप्त होतो आणि नंतर दिलेल्या वक्रावर घट्ट लपेटून आणि सोडून मिळते त्याला (differential) डीफरन्शियल जॉमेटरीत इनवोल्युट म्हणतात. इनवोल्युट किंवा इवोल्युट हा तारेच्या फ्री एन्ड चा लोकस आहे.

अधिक स्पष्टीकरणासाठी: इनवोल्युट च्या इवोल्युट चा वक्र मूळ वक्र म्हणून संदर्भित केला जातो. दुस-या शब्दात, वक्राच्या वक्रता केंद्रांच्या लोकसला इवोल्युट म्हणतात.

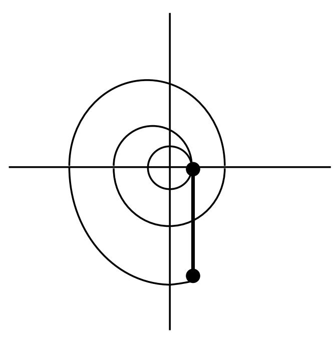
टिप्पणी: हा भूमितीच्या विशेष शाखेचा एक भाग आहे ज्याला वक्राची डीफरन्शियल भूमिती म्हणतात. ते युक्लिडियन स्पेसमध्ये असलेल्या सफाईदार वक्रांबद्दल बोलतो आणि इंटिग्रलच्या आणि डीफरन्शियल कॅलक्यूलसच्या विविध पद्धतींचे अनुप्रयोग आहेत. इतर काही वक्रांशी संबंधित आकारांना इनवोल्युट म्हणतात. 1673 मध्ये क्रिस्टीन हायजिन्सने याचा शोध लावला. ते डच गणितज्ञ आणि भौतिकशास्त्रज्ञ होते.

1.1.6.1 वक्राचे इनवोल्युट (Involutes of the Curves)

खाली दाखवल्याप्रमाणे येथे आपण वेगवेगळ्या वक्राचे इनवोल्युट पाहू:

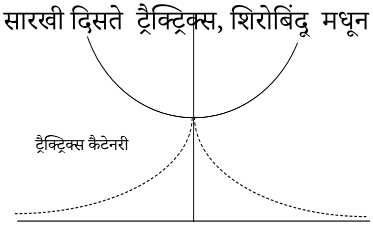
- वर्तुळाचा इनवोल्युट
- कॅटेनरी चा इनवोल्युट
- डेल्टोईड चा इनवोल्युट
- पॅराबोला चा इनवोल्युट
- इलिप्स चा इनवोल्युट

1. **वर्तुळाचा इनवोल्युट:** हा आर्किमिडीज स्पायरल सारखा आहे.



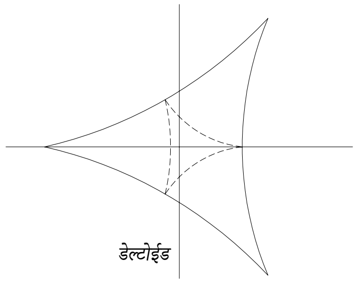
आकृति 1.11 वर्तुळाचा इन्व्हॉल्यूट

2. **कॅटेनरी चा इन्व्हॉल्यूट:** हे एक वक्र आहे जे त्याच्या टोकांना समर्थित हँगिंग केबलसारखे आहे. ही एक Uआकार ची लटकलेली तार आहे, हि पॅराबोला सारखी दिसते ट्रैक्ट्रिक्स, शिरोबिंदू मधून जाण्याऱ्या कॅटेनरी चा इन्व्हॉल्यूट.



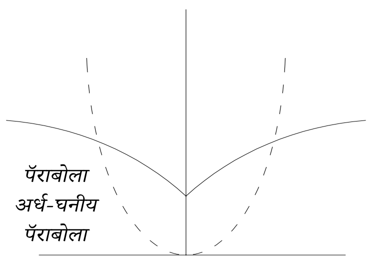
आकृति 1.12 कॅटेनरी चा इनवोल्युट

3. **डेल्टोईड चा इनवोल्युट:** हे तीन क्यस्पसह त्रिकोणी वक्र आहे. हे ग्रीक अक्षर डेल्टासारखे आहे



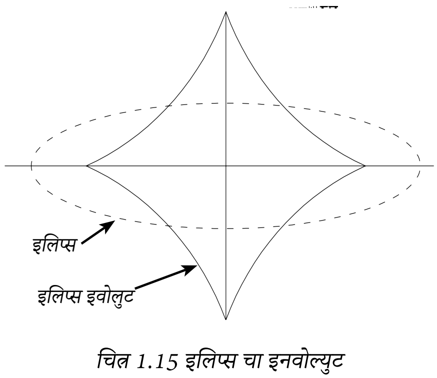
आकृति1.13 डेल्टोईडचा इनवोल्युट प्रतिकेन्द्रज

4. **पॅराबोला चा इनवोल्युट:**



आकृति1.14 पॅराबोला चा इनवोल्युट

5. **इलिप्स चा इनवोल्युट:**



चित्र 1.15 इलिप्स चा इनवोल्युट

खालील समीकरणे दिलेल्या राशींना परिभाषित करण्यासाठी वापरली जातात:

- वर्तुळाचा इनवोल्युट
- कॅटेनरी चा इनवोल्युट
- डेल्टोईड चा इनवोल्युट
- पॅराबोला चा इनवोल्युट
- इलिप्स चा इनवोल्युट

वर्तुळाचा इनवोल्युट: $x = r(\cos t + t\sin t),\ y = r(\sin t - t\cos t)$, येथे , r = वर्तुळाची त्रिज्या, t = रेडियन मध्ये कोनाचा पॅरामीटर आहे.

कॅटेनरी चा इनवोल्युट: $x = t - \tanh t,\ y = \operatorname{sech} t$, येथे t पॅरामीटर आहे

डेल्टोईड चा इनवोल्युट ट: $x = 2r\cos t + r\cos 2t,\ y = 2r\sin t - r\sin 2t$, येथे, r = डेल्टॉइडच्या निर्मितीच्या संबंधित रोलिंग वर्तुळाची त्रिज्या.

पॅराबोलाचा इनवोल्युट: $x^3 = a\,y^2$

1.1.7 इनव्हेलोप Envelope)

दिलेल्या वक्र समूहा तील प्रत्येक सदस्याला स्पर्श करणारा वक्राला त्या समूहा चा इनव्हेलोप म्हणतात.

दिलेल्या वक्र समूहा साठी इनव्हेलोप शोधण्याची प्रक्रिया.

स्थिति 1: वक्रांच्या एका पॅरामीटर समूहाचा इनव्हेलोप (Envelope).

समजा $y = f(x, \alpha)$ वक्रांचा समूह ज्याचा पॅरामीटर 'α' आहे.

स्टेप 1: पॅरामीटर α सोबत पार्शली डिफरंशिएट करा आणि पॅरामीटरचे मूल्य शोधा.

स्टेप 2: दिलेल्या वक्रांच्या समूहात पॅरामीटर α चे मूल्य ठेवून, आपल्याला आवश्यक इनव्हेलोप मिळते

विशेष स्थिति: जर वक्राचे दिलेले समीकरण पॅरामीटरच्या दृष्टीने वर्गसमीकरण आहे, अर्थात $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, तर इन्व्हेलोप चा **डिस्क्रिमिनन्ट = 0** अर्थात $B^2 - 4AC = 0$.

स्थिति 2: वक्रांच्या दोन पॅरामीटरसमूहा चा इन्व्हेलोप

समजा $y = f(x, \alpha, \beta)$ दिलेल्या वक्रांच्या समूहासाठी आणि दोघांना जोडणारा संबंध विचारात घेऊ आणि दोन पॅरामीटर αआणि β, जोडणारा $g(\alpha, \beta) = 0$ संबंध विचारात घेऊ,

स्टेप 1: स्वतंत्र व्हेरिएबल म्हणून, α चा विचार करा आणि β, α वर अवलंबून आहे . तेंव्हा $y = f(x, \alpha, \beta) = 0$ आणि $g(\alpha, \beta) = 0$ ला पॅरामीटर 'α' पार्शली डीफरन्शिएट करा.

स्टेप 2: स्टेप 1 आणि $g(\alpha, \beta) = 0$ समीकरणांमधून पॅरामीटर α आणि β, काढून टाकून आपल्याला आवश्यक इनव्हेलोप मिळतो.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.11. सिध्द करा कि वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ वर स्थित बिंदु $(a/4, a/4)$ वर वक्रता केंद्र(centre of curvature) $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$ आणि वक्रता वर्तुळाचे (circle of curvature) समीकरण $\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ आहे.

उकल : इथे, वक्र चे समीकरण

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a \qquad \text{.. (i)}$$

x सोबत डीफरन्शिएट करुन,

$$\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{2}y^{-1/2}\,y_1=0 \qquad \dots \text{(ii)}$$

परत x सोबत डीफरन्शिएटिंग करा,

$$-\frac{1}{4}x^{-3/2}-\frac{1}{4}y^{-3/2}\,y_1.y_1+\frac{1}{2}y^{-1/2}\,y_2=0 \qquad \dots \text{(iii)}$$

समीकरण (ii) वरून, बिंदु $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ वर , आपल्याला मिळेल

$$\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}\,y_1=0$$

$$\Rightarrow \qquad y_1=-1$$

समीकरण (iii) वरून,बिंदु $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ वर , आपल्याला मिळेल

$$-\frac{1}{4}.\frac{4}{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{4}.\frac{4}{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}(-1)^2+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}\,y_2=0$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{4}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\,y_2=0$$

$$\Rightarrow \qquad y_2=\frac{4}{a}$$

$$\rho \text{ (दिलेल्या बिंदूवर) } =\frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}=\frac{(1+1)^{3/2}}{4/a}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

समजा $(\overline{x},\overline{y})$ वक्रता चा केंद्र (a/4, a/4) आहे, तेंव्हा

$$\overline{x}=x-\frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$=\frac{a}{4}-\left[-\frac{(1+1)}{4/a}\right]$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{a}{2}=\frac{3}{4}a$$

आणि,

$$\overline{y}=y+\frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{1+1}{4/a}$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{a}{2}=\frac{3}{4}a$$

$\therefore$ वक्रतेवर वर्तुळाचे समीकरण आहे,

$$(x-\overline{x})^2+(y-\overline{y})^2=\rho^2$$

$$\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}a\right)^2=\frac{a^2}{2}$$ **(सिद्ध केले)**

उदाहरण 1.12. सिध्द करा कि ट्रैक्ट्रिक्स $x = c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right), y = c\sin t$ च्या इवोल्युट(evolute) चे समीकरण कैटेनरी $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ आहे.

उकल : दिलेले वक्र समीकरण आहे

$$x = c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right), y = c\sin t$$

't' सोबत डीफरन्शिएटिंग करा,

$$\frac{dx}{dt} = -c\sin t + \frac{c}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}.\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= -c\sin t + \frac{c\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -c\sin t + \frac{c}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -c\sin t + \frac{c}{\sin t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\left(1-\sin^2 t\right)}{\sin t} = \frac{c\cos^2 t}{\sin t}$$

आणि,
$$\frac{dy}{dt} = c\cos t$$

अशा प्रकारे,
$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= c\cos t.\frac{\sin t}{c\cos^2 t} = \tan t$$

आणि,
$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t.\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}.\frac{\sin t}{c\cos^2 t} = \frac{\sin t}{c\cos^4 t}$$

समजा $(\overline{x}, \overline{y})$ वक्रतेच्या कोणत्याही बिंदूवर वक्रता केंद्र आहे,

$$\overline{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) - c\frac{\cos^4 t}{\sin t}.\frac{\sin t}{\cos t}.\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) - c\cos t$$

$$\overline{x} = c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \ldots (i)$$

अथवा,
$$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$
$$= c\sin t + \frac{1+\tan^2 t}{\dfrac{\sin t}{c\cos^4 t}}$$
$$= c\sin t + \frac{c\cos^4 t}{\sin t}.\sec^2 t$$
$$= c\sin t + \frac{c\cos^2 t}{\sin t}$$
$$= \frac{c\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{\sin t}$$
$$\bar{y} = \frac{c}{\sin t} \qquad \left[\because \sin^2 t + \cos^2 t = 1\right] \qquad \ldots \text{(ii)}$$

इवोल्युट हा दिलेल्या $(\bar{x}, \bar{y})$ वक्राचा लोकस आहे . समीकरण (i) आणि (ii) मधून t ला काढून,

समीकरण (i) वरून , $\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\bar{x}}{c}$

$$\Rightarrow \qquad \tan\left(\frac{t}{2}\right) = e^{\bar{x}/c} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

समीकरण (ii) वरून,
$$\frac{\bar{y}}{c} = \frac{1}{\sin t} = \frac{1+\tan^2(t/2)}{2\tan(t/2)}$$
$$\frac{\bar{y}}{c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tan(t/2)} + \tan(t/2)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\bar{x}}{c}} + e^{\frac{\bar{x}}{c}}\right) \qquad [\text{समीकरण } (iii) \text{ वरून}]$$
$$\bar{y} = c\cosh\left(\frac{\bar{x}}{c}\right)$$

$\bar{x}$ ला x, $\bar{y}$ ला y बदलल्यावर (x, y) चा लोकस
$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \textbf{(उकल)}$$

इवोल्युट चे समीकरण आहे

उदाहरण 1.13. दिलेल्या वक्रासाठी $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ कोणत्याही बिंदु वर वक्रता केंद्राचे निर्देशांक शोधा. तसेच वक्राची त्रिज्या (रेडिअस ऑफ कर्वेचर) (ρ)आणि इवोल्युट चे समीकरण शोधा.

उकल : दिलेल्या वक्रचे पॅरामीट्रिक समीकरण आहे
$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t \qquad \ldots (1)$$

't' सोबत डीफरन्शिएटिंग करा
$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$
$$\therefore \qquad y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

आणि, $$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-\tan t)$$

$$= -\sec^2 t\frac{dt}{dx} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

$\therefore$ वक्रता त्रिज्या (ρ) $$= \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$$

$$= \left(1+\tan^2 t\right)^{3/2} \times 3a\sin t\cos^4 t$$

$$= \frac{3a\sin t\cos^4 t}{\left(\cos^2 t\right)^{3/2}} = 3a\sin t\cos t$$

आता बिंदु 't' वर वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y})$ दिलेले आहे

$$\bar{x} = x - \rho\sin\psi$$

$$= x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x + \tan t\left(1+\tan^2 t\right)\times 3a\sin t\cos^4 t \Rightarrow \qquad \bar{x} = x + 3a\sin^2 t\cos t$$

$$= a\cos^3 t + x + 3a\sin^2 t\cos t \qquad \left[\because x = a\cos^3 t\right] \qquad \ldots (2)$$

त्याचप्रकारे $$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1+\tan^2 t}{\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}}$$

$$= y + \left(1+\tan^2 t\right)\left(3a\sin t\cos^4 t\right)$$

$$= y + 3a\sin t\cos^2 t$$

$$\bar{y} = a\sin^3 t + 3a\sin t\cos^2 t \qquad \left[\because y = a\sin^3 t\right] \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (1), (2) आणि (3) वरून x, y आणि t ला काढून टाकल्यावर

$$\bar{x} + \bar{y} = a\left(\cos^3 t + \sin^3 t + 3\sin^2 t\cos t + 3\cos^2 t\sin t\right)$$

$$= a\left(\cos t + \sin t\right)^3$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos t + \sin t\right)^2 \qquad \ldots (4)$$

अश्या प्रकारे $$\left(\bar{x}-\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos t - \sin t\right)^2 \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (4) आणि (5) यांची बेरीज करून,

$$\left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} + \left(\bar{x}-\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t\sin t\right)$$

$$= a^{2/3}(1+1) = 2a^{2/3}$$

म्हणून, $(\bar{x}, \bar{y})$ चा लोकस, अर्थात् इवोल्युट चे समीकरण आहे

$$\left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} + \left(\bar{x}-\bar{y}\right)^{2/3} = 2a^{2/3}$$

आणि वक्रता केंद्राचे निर्देशांक (coordinates) $\left(a\cos^3 t+3\sin^2 t\cos t,\, a\sin^3 t+3\sin t\cos^2 t\right)$ आहे.

उदाहरण 1.14. दिलेल्या आयताकृती हायपरबोलासाठी $xy = a^2$ (अर्थात $x = at, y = a/t$) ,

i. वक्रता त्रिज्या काढा (ρ)

ii. वक्रता केंद्राचे निर्देशांक काढा म्हणजे $(\bar{x}, \bar{y})$

iii. सिध्द करा कि दिलेल्या वक्राचा इवोल्युट $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=(4a)^{2/3}$ आहे

उकल: ***(i).*** वक्रता त्रिज्या शोधण्यासाठी, आपल्याकडे आहे

$$xy=a^2 \text{ किंवा } y=\frac{a^2}{x}$$

$$\therefore \quad y_1=\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2}{x^2} \text{ आणि } y_2=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^2}{x^3}$$

याप्रमाणे,
$$\rho=\frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}=\frac{\left(1+\dfrac{a^4}{x^4}\right)^{3/2}}{2a^2/x^3}$$

$$\rho=\frac{x^3}{2a^2}\left(\frac{x^4+a^4}{x^4}\right)^{3/2} \qquad \textbf{(उकल)}$$

(ii). वक्रता केंद्राचे निर्देशांक शोधणे.

$$\bar{x}=x-\frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2} \text{ आणि } \bar{y}=y+\frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}=x-\frac{\dfrac{-a^2}{x^2}\left(1+\dfrac{a^4}{x^4}\right)}{2a^2/x^3}$$

$$\Rightarrow \quad =x+\frac{x^4+a^4}{2x^3}$$

$$\Rightarrow \quad =\frac{2x^4+x^4+a^4}{2x^3}$$

$$\Rightarrow \quad =\frac{3x^4+a^4}{2x^3}=\frac{3x^4+x^2y^2}{2x^3} \qquad \left[\because xy=a^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}=\frac{3}{2}x+\frac{y^2}{2x}$$

त्याचप्रमाणे
$$\bar{y}=y+\frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$=y+\frac{1+\dfrac{a^4}{x^4}}{2a^2/x^3}=y+\frac{x^4+a^4}{2a^2x}$$

$$=y+\frac{x^4+x^2y^2}{2x^2y} \qquad \left[\because xy=a^2\right]$$

$$\bar{y}=y+\frac{x^2+y^2}{2y}=\frac{x^2+3y^2}{2y}=\frac{3y}{2}+\frac{x^2}{2y}$$

अशा प्रकारे, वक्रता केंद्राचे निर्देशांक (coordinates) आहेत $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{y^2}{2x}, \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}\right)$ **(उकल)**

(iii) तसेच, दिलेल्या वक्राच्या इवोल्युट चे समीकरण $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$ शोधण्या साठी,

$$\bar{x} + \bar{y} = \frac{1}{2xy}\left[x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2\right]$$

$$= \frac{1}{2xy}(x+y)^3 = \frac{1}{2a^2}(x+y)^3$$

$$\Rightarrow \qquad (\bar{x}+\bar{y})^{2/3} = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(x+y)^2 \qquad \left[\because xy = a^2\right]$$

त्याचप्रमाणे, $$(\bar{x}-\bar{y})^{2/3} = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(x-y)^2$$

म्हणून, आपल्याकडे आहे

$$(\bar{x}+\bar{y})^{2/3} - (\bar{x}-\bar{y})^{2/3} = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(4xy) = \frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}\left(4a^2\right) = (4a)^{2/3}$$

त्यामुळे $(\bar{x}, \bar{y})$ चे लोकस आहे

$$(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$$

उदाहरण 1.15 खालील वक्रांसाठी वक्रता केंद्र शोधा:

(i) $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, बिन्दु $(1, -1)$ वर

(ii) पॅराबोला $y^2 = 4ax$, बिन्दु (x, y) आणि दिलेल्या वक्राच्या इवोल्युट चे समीकरण देखील शोधा.

(iii) लंबवर्तुळ(इलिप्स) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ बिन्दु (x, y) वर आणि त्याचे इवोल्युट देखील शोधा.

उकल: (i) दिलेला वक्र आहे $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

'x' सोबत डिफरंशिएट करा

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 3$$

$$y_1(1, -1) = -6$$

त्याचप्रमाणे $$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

$$y_2(1, -1) = -6$$

अशा प्रकारे $$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= 1 - \frac{(-6)\left[1+(-6)^2\right]}{-6} = -36$$

आणि $$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = -1 + \frac{1+(-6)^2}{-6} = -\frac{43}{6}$$

म्हणून वक्रता केंद्राचे निर्देशांक $(\bar{x}, \bar{y}) = (-36, -43/6)$ आहेत

(ii) पॅराबोलाचे समीकरण $y^2 = 4ax$ आहे

$$y = 2\sqrt{a\,x}$$

'x' सोबत डिफरंशिएट करा

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a}\,.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$\Rightarrow$
$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}$$

म्हणून
$$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x - \frac{\sqrt{\frac{a}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}} = x + 2(x+a)$$

$$= 3x + 2a \qquad \ldots (1)$$

त्याचप्रमाणे,
$$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = y + \frac{1+\frac{a}{x}}{-\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}}$$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{2(x+a)}{\sqrt{a}\;x^{-1/2}} \qquad \left[\because y = 2\sqrt{a\,x}\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{x}\left(1-\frac{x-a}{a}\right) = -\frac{2}{\sqrt{a}}x^{3/2} \qquad \ldots (2)$$

म्हणून, दिलेल्या वक्र चा वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(3x+2a, -\dfrac{2x^{3/2}}{\sqrt{a}}\right)$ आहे .

समीकरण (1) पासून,
$$x = \frac{\bar{x}-2a}{3}$$
समीकरण (2) मध्ये ठेउन

$$\bar{y} = -\frac{2\left(\frac{\bar{x}-2a}{3}\right)^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

$$a\,\bar{y}^2 = 4\left(\frac{\bar{x}-2a}{3}\right)^3$$

$$27\,a\,\bar{y}^2 = 4(\bar{x}-2a)^3$$

(उकल)

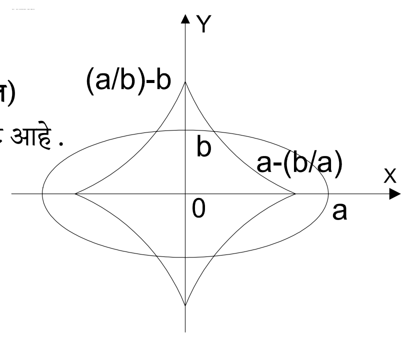
म्हणून, वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y})$ चे लोकस $27\,a\,y^2 = 4(x-2a)^3$ आहे जो इवोल्युट आहे .

(*iii*) लंबवर्तुळाचे(इलिप्स) दिलेले समीकरण आहे,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

'x' सोबत डिफरंशिएट करा

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y} \text{ आणि } y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2\,y^3}$$



आकृति 1.16

म्हणून, $$\overline{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x - \frac{-\dfrac{b^2\,x}{a^2\,y}\left(1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{-\dfrac{b^4}{a^2\,y^3}} = x - \frac{x}{a^4\,b^2}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)$$

$$= x - \frac{x}{a^4\,b^2}\left[a^2b^2\left(a^2-x^2\right)+b^4x^2\right]$$

$$\overline{x} = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3 \qquad \ldots (1)$$

त्याचप्रमाणे $$\overline{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1+\dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\dfrac{b^4}{a^2\,y^3}} = y - \frac{y}{a^2b^4}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)$$

$$= y - \frac{y}{a^2b^4}\left[a^4y^2+a^2b^2\left(b^2-y^2\right)\right]$$

$$\overline{y} = \frac{b^2-a^2}{b^4}y^3 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) वरून, $$x = \left(\frac{\overline{x}\,a^4}{a^2-b^2}\right)^{1/3}$$

समीकरण (2) वरून, $$y = \left(\frac{\overline{y}\,b^4}{b^2-a^2}\right)^{1/3}$$

(इलिप्स) लंबवर्तुळाच्या समीकरणात ठेऊन

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\overline{x}\,a^4}{a^2-b^2}\right)^{2/3} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\overline{y}\,b^4}{b^2-a^2}\right)^{2/3} = 1$$

किंवा $$\left(a\,\overline{x}\right)^{2/3} + \left(b\,\overline{y}\right)^{2/3} = \left(a^2-b^2\right)^{2/3}$$

म्हणून, वक्रता केंद्र $(\overline{x}, \overline{y})$ चा लोकस आहे

$$\left(a\,x\right)^{2/3} + \left(b\,y\right)^{2/3} = \left(a^2-b^2\right)^{2/3} \qquad \textbf{(उकल)}$$

दिलेल्या लंबवर्तुळाचे इवोल्युट आहे.

उदाहरण 1.16 सरळ रेषा $y = mx + \sqrt{a^2\,m^2+b^2}$ च्या समूहाचा इन्व्हेलोप काढा जिथे m पॅरामीटर आहे.

उकल : वक्रांच्या समूहाचे समीकरण दिले आहे

$$y = mx + \sqrt{a^2\,m^2+b^2}$$

$\Rightarrow \quad y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

$\Rightarrow \quad (y - mx)^2 = a^2 m^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad y^2 + m^2 x^2 - 2mxy = a^2 m^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad m^2 (x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - b^2) = 0$

'm' सोबत पार्शियली डिफरंशिएट करुन

$$2m(x^2 - a^2) - 2xy = 0$$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{xy}{x^2 - a^2}$

दिलेल्या वक्राच्या समीकरणामध्ये m चे मूल्य ठेऊन

$$m^2 (x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - b^2) = 0$$

$\Rightarrow \quad \left(\dfrac{xy}{x^2 - a^2}\right)^2 (x^2 - a^2) - 2\left(\dfrac{xy}{x^2 - a^2}\right) xy + (y^2 - b^2) = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} - \dfrac{2x^2 y^2}{x^2 - a^2} + y^2 - b^2 = 0$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} + y^2 - b^2 = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} = y^2 - b^2$

$\Rightarrow \quad x^2 y^2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$

$\Rightarrow \quad x^2 y^2 = x^2 y^2 - x^2 b^2 - a^2 y^2 + a^2 b^2$

$\Rightarrow \quad x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **(उकल)**

$\therefore$ दिलेल्या सरळ रेषांच्या समूहाचा इन्व्हअलोप एक लंबवर्तुळ (इलिप्स)आहे.

उदाहरण 1.17. $y = mx + am^p$ चा इन्व्हअलोप शोधा जिथे m पॅरामीटर आहे आणि a, p स्थिरांक आहेत .

उकल : वक्रांच्या समूहा चे समीकरण दिले आहे

$$y = mx + am^p \qquad \ldots (1)$$

'm' सोबत डिफरंशिएट करून

$$0 = x + pam^{p-1}$$

$\Rightarrow \quad m = \left(-\dfrac{x}{pa}\right)^{\frac{1}{p-1}}$

समीकरण (1) मध्ये m चे मूल्य ठेऊन

$$y = \left(-\frac{x}{pa}\right)^{\frac{1}{p-1}} x + a\left(-\frac{x}{pa}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$y^{p-1} = \left(-\frac{x}{pa}\right) x^{p-1} + a^{p-1}\left(-\frac{x}{pa}\right)^p$$

$$apy^{p-1} = (-x)^p + a^{p-2}(-x)^p$$ **(उकल)**

जे समीकरण (1) च्या इन्वेओलोप चे आवश्यक समीकरण आहे.

वक्रांच्या दोन पॅरामीटर कुटुंबाच्या इन्वेओलोप वर आधारित उदाहरणे:

उदाहरण 1.18. सरळ रेषा $ax + by = 1$ च्या समूहाचा इन्वओलोप शोधा, जिथे a आणि b हे $ab = 1$ द्वारे जोडलेले पॅरामीटर आहेत.

उकल: दिलेले आहे $$ax+by=1 \quad \ldots (1)$$

आणि $$ab=1 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) ला a सोबत डिफरंशिएट करून (a इंडिपेन्डन्ट व्हेरीअबल b हा a वर अवलंबून आहे)

$$x+\frac{db}{da}y=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da}=-\frac{x}{y} \quad \ldots (3)$$

समीकरण (2) ला a सोबत डिफरंशिएट करून

$$b+a\frac{db}{da}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da}=-\frac{b}{a} \quad \ldots (4)$$

समीकरण (3) व (4) कडून

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ax}{1}=\frac{by}{1}=\frac{ax+by}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{1}{2x}, b=\frac{1}{2y} \quad \ldots (5)$$

(5) वरून 'a' व 'b' समीकरण (2)मध्ये ठेवल्यावर,

$$\left(\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{1}{2y}\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad 4xy=1 \quad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.19 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ या वक्राच्या परिवारचा इन्वओलोप शोधा जिथे a आणि b हे संबंध $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$ द्वारे जोडलेले पॅरामीटर आहेत.

उकल: दिलेले $$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1 \quad \ldots (1)$$

आणि $$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) ला a सोबत डिफरंशिएट करून

$$\frac{\sqrt{x}}{-2a^{3/2}}-\frac{\sqrt{y}}{2b^{3/2}}\frac{db}{da}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da}=-\frac{\sqrt{x}\,b^{3/2}}{\sqrt{y}\,a^{3/2}} \quad \ldots (3)$$

समीकरण (2) ला a सोबत डिफरंशिएट करून

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{2\sqrt{b}}\frac{db}{da}=0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad \ldots (4)$$

समीकरण (3) व (4) वरून

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\frac{b}{a} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{1}{1}$$ [समीकरण (1) व (2) वरून]

$\Rightarrow$ $$a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y} \quad \ldots (5)$$

समीकरण (5) हे समीकरण (2) मध्ये ठेऊन, आपल्याला इनव्हेलोप मिळेल

$$x^{1/4} + y^{1/4} = 1$$ **(उकल)**

हे अपेक्षित इनव्हेलोप आहे.

उदाहरण 1.20 सरळ रेषा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ च्या समूहाचा इनव्हेलोप शोधा , जिथे a, b पॅरामीटर आहेत .

आणि ते a + b = c ने जोडलेले आहेत.

उकल: दिलेले $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \ldots (1)$$

आणि $$a+b=c$$

$\Rightarrow$ $$b = c-a \quad \ldots (2)$$

समीकरण (2) हे समीकरण (1) मध्ये ठेऊन

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{c-a}=1$$

'a' सोबत डिफरंशिएट करून

$$-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{(c-a)^2}=0$$

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{(c-a)^2}$$

$$\frac{(c-a)^2}{a^2}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{c-a}{a}=\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{y}{x}}+1=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$a=\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

'a' समीकरण (2) मध्ये ठेऊन

$$b = c - \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{c\sqrt{x}+c\sqrt{y}-c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

a आणि b समीकरण (1) मध्ये ठेऊन

$$\frac{x}{\left(\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)} = 1$$

$$\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{c\sqrt{x}} + \frac{y\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{c\sqrt{y}} = 1$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{y}{\sqrt{y}}\right) = c$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = c$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = c$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{c}$$

हे आवश्यक इनव्हेलोप आहे.

इवोल्युट वर आधारित प्रश्न जेथे इवोल्युटला त्याच्या नॉर्मलचा इन्व्हलोप असे मानले जाते.

उदाहरण 1.21. वक्राच्या इवोल्युटला इन्व्हलोपची नॉर्मल मानून इवोल्युट काढा, $x = \cos\theta + \theta\sin\theta$, $y = \sin\theta - \theta\cos\theta$.

उकल: दिलेले $x = \cos\theta + \theta\sin\theta,\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta$

'θ' सोबत डिफरंशिएट करून

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta = \theta\cos\theta$$

आणि
$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \theta(-\sin\theta) - \cos\theta = \theta\sin\theta$$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

हायपरबोलाच्या नॉर्मल चे समीकरण आहे

$$\left(y - (\sin\theta - \theta\cos\theta)\right) = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - (\cos\theta + \theta\sin\theta)\right)$$

$$\left(y - (\sin\theta - \theta\cos\theta)\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(x - (\cos\theta + \theta\sin\theta)\right)$$

$$y\sin\theta - \sin^2\theta + \theta\sin\theta\cos\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta + \theta\sin\theta\cos\theta$$

$$y\sin\theta + x\cos\theta = 1 \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला पॅरामीटर θ सोबत डिफरंशिएट करून

$$y\cos\theta - x\sin\theta = 0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) ला $\cos\theta$ आणि (2) ला $\sin\theta$ ने गुणाकार करून आणि वजाबाकी करून आपल्याला मिळते

$$x = \cos\theta \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) ला $\sin\theta$ आणि (2) ला $\cos\theta$ ने गुणाकार करून आणि बेरीज करून आपल्याला मिळते

$$y = \sin\theta \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) आणि (4) मधून θ काढून टाकल्याने, आम्हाला अपेक्षित $x^2 + y^2 = 1$ इवोल्युट मिळते

उदाहरण 1.22. हायपरबोलाला $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ त्याच्या इन्व्हलोपची नॉर्मल मानून इवोल्युट काढा .

उकल: स्वतः सोडवा.

अभ्यास 1.2

1. वक्र y = tan x च्या साठी वक्रतांची त्रिज्या आणि वक्रता केंद्र बिंदु $x = \pi/4$ वर शोधा.
2. हायपरबोला $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ साठी वक्रता केंद्र शोधा आणि त्याचे इवोल्युट देखील शोधा.
3. सिद्ध करा कि साइक्लोइड $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$ चा इवोल्युट दुसरा समान सायक्लोइड आहे.
4. सिद्ध करा कि वक्र $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$, चा इवोल्युट $x^2 + y^2 = a^2$ आहे.
5. वक्र $x\sin\theta - y\cos\theta = a\theta$ चा इन्व्हलोप (envelope) काढा, जिथे θ पॅरामीटर आहे.
6. वक्र $x\sec^2\theta + y\,\mathrm{cosec}^2\theta = a$ चा इन्व्हलोप (envelope) काढा, जिथे θ पॅरामीटर आहे
7. सरळ रेषा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ समूहाचा इन्व्हलोप (envelope) काढा, जिथे a, b पॅरामीटर आहे , जे $a^2 b^3 = c^5$ ने जोडलेले आहे.
8. ज्या वर्तुळांचे केंद्र लंबवर्तुळ (ellipse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ वर आहे आणि जे त्याच्या केंद्रातून जाते अशा वर्तुळ समूहाचा इन्व्हलोप (envelope) शोधा.
9. इलिप्स $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ च्या समूहाच्या इन्व्हलोपचे समीकरण काढा , जिथे पॅरामीटर 'a' आणि 'b' $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = 1$ ने जोडलेले आहेत, जेथे l आणि m शून्येतर स्थिरांक आहेत.

उत्तरे

1. $\frac{5\sqrt{5}}{4}, \left(\frac{\pi - 10}{4}, \frac{9}{4}\right)$
2. सूचना: $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ आणि वक्रता केंद्र $\left(\frac{a^2 + b^2}{a\cos^3\theta}, \frac{-\sin^3\theta\left(a^2 + b^2\right)}{\cos^3\theta}\right)$ आणि इवोल्युट

   $(a\,x)^{2/3} - (b\,y)^{2/3} = \left(a^2 + b^2\right)^{2/3}$

5. $x = a(\sin\theta + \cos\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$
7. $x^2 y^3 = \frac{712}{3125} c^5$

8. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(a^2 x^2 + b^2 y^2\right)$

9. $\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1$

मनोरंजक तथ्य

तुम्ही कधी मशीन किंवा खेळणी पाहिली आहेत ज्यात वायंडिंग की (key) असते, जसे की ती इन्स्ट्रुमेंट माकड खेळत आहे का? आतल्या स्पायरल स्प्रिंगमध्ये ''सर्क्युलर इन्व्हॉल्यूट'' मध्ये हालचाल होते.

दैनंदिन जीवनातील अनुप्रयोग

- ते यांत्रिक उद्योगांमध्ये, विशेषत: दात उद्योगात वापरले जातात, जेथे रोटेटिंग मशीन आणि गिअर्सचे दात बनवले जातात, ज्यामुळे कमीत कमी कंपने होऊ शकतील.
- स्क्रोल आणि गॅस कॉम्प्रेसर ही दोन अशा मशीन्स आहेत जी द्रव पंप करण्यासाठी, कॉम्प्रेस करण्यासाठी किंवा दाबण्यासाठी वापरली जातात. तेथे आकार या संकल्पनेचा एक अनुप्रयोग आहे, जे सुनिश्चित करते की ते कार्यक्षम आणि कमी आवाज करणारे आहेत.
- रस्त्याच्या वक्रतेची रचना करताना रस्ता सुरक्षा विचारात घेणे आवश्यक आहे आणि त्याचप्रमाणे घर्षण चाकाचा आकार देखील विचारात घेणे आवश्यक आहे. वक्रता ही संकल्पना त्या वेळी प्रत्यक्षात येते.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत-स्वयम प्रभा-MHRD)

Curvature and Evolutes

1.2 डेफिनाइट आणि इमप्रॉपर इंटिग्रल चे मूल्यमापन

1.2.1 डेफिनाइट इंटिग्रल (निश्चित समाकलन)

एक डेफिनाइट इंटिग्रल ला $\int_a^b f(x)\,dx$ द्वारे दर्शविले जाते जिथे 'a' ला इंटिग्रलची खालची मर्यादा (Lower Limit) आणि 'b' ला इंटिग्रलची अप्पर (Upper Limit) लिमिट म्हणतात. डेफिनाइट इंटिग्रल एकतर बेरीजची मर्यादा म्हणून किंवा इंटरव्हल $[a,b]$ मध्ये अँटी-डेरिव्हेटिव्ह (antiderivative) F म्हणून प्रस्तुत केले जाते, तर त्याचे मूल्य F च्या अंतिम बिंदूच्या मूल्यांमधील फरक आहे म्हणजे F(b) – F(a). डेफिनाइट इंटिग्रल चे मूल्य एकमेव असते.

1.2.1.1 बेरजेची मर्यादा म्हणून निश्चित समाकलन (डेफिनाइट इंटिग्रल as लिमिट ऑफ सम)

समजा f हा क्लोज्ड इंटरव्हल [a,b] वर कन्टीन्यूयस फंक्शन आहे. असे समजा की फंक्शनद्वारे घेतलेली सर्व मूल्ये धनात्मक आहेत(non negative), म्हणून फंक्शनचा आलेख x- अक्षावरील वक्र आहे.

डेफिनाइट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$ म्हणजे वक्र $y = f(x)$, ऑर्डिनेट $x = a$, $x = b$ आणि x- अक्षाने बांधलेले क्षेत्र आहे.

जेव्हा आपण या क्षेत्राचे मूल्यमापन करतो, तेव्हा ते याच्याबरोबर असते.

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$$

जिथे $h=\dfrac{b-a}{n}\to 0$ जेव्हा $n\to\infty$

वरील सूत्र डेफिनाइट इंटिग्रल ची व्याख्या बेरजेची मर्यादा म्हणून ओळखली जाते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.23. $\int_0^2\left(x^2+1\right)dx$ बेरजेची मर्यादा म्हणून शोधा.(limit as sum)

उकल : व्याख्येनुसार $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$

येथे $h=\dfrac{b-a}{n}$

म्हणून
$$\int_0^2\left(x^2+1\right)dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{2^2}{n^2}+1\right)+\left(\frac{4^2}{n^2}+1\right)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\ times}+\frac{1}{n^2}\left(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2\right)\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2}{3}\frac{(n-1)(2n-1)}{n}\right]$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= 2\left[1+\frac{2}{3}(1)(2)\right]=2\left[1+\frac{4}{3}\right]=\frac{14}{3}\ \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.24. $\int_0^2 e^x\,dx$ बेरीजेची लिमिट म्हणून शोधा.(limit as sum)

उकल : व्याख्येनुसार

$$\int_0^2 e^x\,dx=(2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0+e^{2/n}+e^{4/n}+\ldots+e^{(2n-2)/n}\right]$$

G.P (geometric progression) च्या n पदांची बेरीज वापरून, जेथे $a=1,\ r=e^{2/n}$

$$\int_0^2 e^x\,dx=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{2/n}-1}\right]$$

$$= \frac{2\left(e^2-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{2/n}-1}{2/n}\right).2} = e^2-1 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right]$$

कॅलक्यूलसचे मूलभूत प्रमेय (FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS)

1.2.2 इंटिग्रल कॅलक्यूलसचे पहिले मूलभूत प्रमेय

जर $f(x)$ हे [a ,b] ह्या इंटरव्हल मध्ये परिभाषित केले असेल, तर f (x) चे डेफिनाइट इंटिग्रल खालीलप्रमाणे परिभाषित केले जाते,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

जेथे $$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

वरीलप्रमाणे परिभाषित केलेले डेफिनेट इंटिग्रल, वक्र $y=f(x)$, x-अक्ष, ऑर्डिनेट $x=a$ किंवा $x=b$ यांनी बांधलेले क्षेत्र दर्शविते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.25. $\int_0^2 x^2\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले $$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{(2)^3}{3}-0\right] = \frac{8}{3}$$

उदाहरण 1.26. $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले $$\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = \left[-\sin x\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left[-\sin 2\pi + \sin 0\right] = \left[-0+0\right] = 0$$

उदाहरण 1.27. $\int_2^3 (x+1)\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले $$\int_2^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$
$$= \left[\left(\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{2^2}{2}+2\right)\right]$$
$$= \left[\left(\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{4}{2}+2\right)\right]$$
$$= \left[\left(\frac{9+6}{2}\right)-\left(\frac{4+4}{2}\right)\right]$$
$$= \left[\frac{15}{2}-\frac{8}{2}\right] = \frac{7}{2}$$

1.2.3 इंटिग्रल कॅलक्यूलसचे दुसरे मूलभूत प्रमेय

इंटिग्रल कॅलक्यूलसचे दुसरे मूलभूत प्रमेय सांगते कि जर $f(x)$ इंटरव्हल $[a, b]$ वर कन्टीनिवस फंक्शन असेल आणि F हे $[a,b]$ वर $f(x)$ चे इंडेफिनेट इंटिग्रल असेल तर

$$F'(x) = f(x)$$

जर $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

मग $$F'(x) = f(x)$$

टिप्पणी: अँटी-डेरिव्हेटिव्ह आणि डेरिव्हेटिव्ह एकमेकांच्या विरुद्ध असल्याने, जर तुम्हाला फंक्शनचे अँटी-डेरिव्हेटिव्ह सापडले तर तुम्हाला मूळ फंक्शन मिळेल.

उदाहरण 1.28 इंटिग्रल कॅलक्यूलसच्या दुसऱ्या मूलभूत प्रमेयाच्या मदतीने दिलेले इंटिग्रल सोडवा.

$$F(x) = \int_0^{x^3} \left(t^2 + t\right) dt$$

उकल : दिले आहे $$F(x) = \int_0^{x^3} \left(t^2 + t\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{x^3} = F\left(x^3\right) - F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{\left(x^3\right)^3}{3} - \frac{\left(x^3\right)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^9}{3} - \frac{x^6}{2}$$

$$F'(x) = 3x^8 - 3x^5$$

$$F'(x) = 3x^2\left(\left(x^3\right)^2 + \left(x^3\right)\right)$$

$3x^2$ ची वरची मर्यादा x^3 चा डेरिव्हेटीव्ह आहे आणि $\left(\left(x^3\right)^2 + \left(x^3\right)\right)$ त्याचे मूल्य $(t^2 + t)$ सारखे आहे.

या समीकरणाच्या शेवटी, आपण पाहू शकतो की $F(x)$ चा डेरिव्हेटीव्ह, जो $f(x)$ चा इंटिग्रल आहे. मूळ फंक्शन $f(x)$ च्या बरोबरीचे आहे. $F'(x)$ आणि $f(x)$ ची कार्ये अत्यंत समान आहेत.

उदाहरण 1.29 दिलेले $F(x) = \int_0^{x^2} (t+7)^{1/2}\, dt$ इंटिग्रल कॅलक्यूलसच्या दुसऱ्या मूलभूत प्रमेयाच्या मदतीने सोडवा.

उकल : दिले आहे $$F(x) = \int_0^{x^2} (t+7)^{1/2}\, dt$$

$$= \left[\frac{2(t+7)^{3/2}}{3}\right]_0^{x^2}$$

$$= F\left(x^2\right) - F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{2\left(x^2+7\right)^{3/2}}{3}\right) - \left(\frac{2(0+7)^{3/2}}{3}\right)$$

$$F(x) = \frac{2\left(x^2+7\right)^{3/2}}{3} - \frac{2(7)^{3/2}}{3}$$

$$F'(x) = 2x\left(x^2+7\right)^{1/2}$$

$2x$ ची वरची मर्यादा x^2 चा डेरिव्हेटीव्ह आहे आणि $\left(x^2+7\right)^{1/2}$ त्याचे मूल्य $(t+7)^{1/2}$ सारखे आहे.

उदाहरण 1.30 दिलेले $F(x) = \int_{-3}^{\sqrt{x}} \left(3t^2 - 30\right) dt$ इंटिग्रल कॅलक्यूलसच्या दुसऱ्या मूलभूत प्रमेयाच्या मदतीने सोडवा.

उकल : दिले आहे $$F(x)=\int_{-3}^{\sqrt{x}}\left(3t^2-30\right)dt$$
$$=\left[t^3-30t\right]_{-3}^{\sqrt{x}}=F\left(\sqrt{x}\right)-F(-3)$$
$$F(x)=\left[\left(\sqrt{x}\right)^3-30\left(\sqrt{x}\right)\right]-\left[(-3)^3-30(-3)\right]$$
$$F'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{15}{x^{1/2}}$$
$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-30)$$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ची वरची मर्यादा $\sqrt{x}$ चा डेरिव्हेटीव्ह आहे आणि $(3x-30)$ त्याचे मूल्य $(3t^2-30)$ सारखे आहे.

1.2.4 निश्चित समाकलनाचे(डेफिनाइट इंटिग्रल) गुणधर्म

येथे आपण (डेफिनाइट इंटिग्रल)निश्चित समाकलनाचे काही गुणधर्म परिभाषित करतो जे त्यांचे मूल्यमापन करण्यासाठी खूप उपयुक्त आहेत.

1. जर $f_1(x)$ आणि $f_2(x)$ इंटरव्हल $[a,b]$ कन्टीनिवस आणि बॉउंडेड फंक्शन आहे आणि k_1 आणि k_2 दोन स्थिरांक(constant) आहेत, तर
$$\int_a^b\left[k_1\, f_1(x)+k_2\, f_2(x)\right]dx=k_1\int_a^b f_1(x)\,dx+k_2\int_a^b f_2(x)\,dx$$
याला रेखीय गुणधर्म म्हणतात.(linearity property)

2. $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$$
दोन्ही बाजू $F(b)-F(a)$ समान आहेत, हे दर्शविते की ईंटेग्रेशन मधील व्हेरिएबल डमी आहे.

3. $$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$
येथे $F(b)-F(a)=-\left[F(a)-F(b)\right]$

4. $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$
येथे, 'c' ला $a<c<b$ असे परिभाषित करतात.
उजवी बाजू $F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$ जी $F(b)-F(a)$ च्या बरोबर आहे.

5. $$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$$
याला इनव्हेरियन्स गुणधर्म म्हणतात (invariance property) म्हणतात आणि हे सिद्ध केले जाऊ शकते की $a-x=t$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल, $-dx=dt$
$$\int_0^a f(a-x)\,dx=-\int_a^0 f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt \qquad \text{[गुणधर्म (3) वरून]}$$
$$=\int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{[गुणधर्म (2) वरून]}$$

6. $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$ जर f (x) सम आहे म्हणजे $f(-x)=f(x)$
$=0$ जर $f(x)$ विषम आहे म्हणजे $f(-x)=-f(x)$

सिद्धता: $$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx \qquad ...(1)$$
$x=-t$ उजवीकडे (Right) पहिल्या ईंटेग्रेल मध्ये ठेवल्यावर, आपल्याला मिळते
$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx=-\int_a^0 f(-t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt \qquad \text{[गुणधर्म (3) वरून]}$$

$$=\int_0^a f(-x)\,dx \qquad \text{[गुणधर्म (2) वरून]}$$

समीकरण (1) मध्ये ठेवल्यावर, आपल्याला मिळते

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_0^a f(-x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx$$

$$=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{जर } f(-x)=f(x)\\ 0\quad , & \text{जर } f(-x)=-f(x)\end{cases}$$

x^4, $\cos x$ इत्यादी फंक्शन्स ज्यासाठी $f(-x)=f(x)$, सम फंक्शन्स म्हणतात.

x^3, $\sin x$ इत्यादी फंक्शन्स ज्यासाठी $f(-x)=-f(x)$, विषम फंक्शन्स म्हणतात

7. $\int_0^{2a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx,$ तर $f(2a-x)=f(x)$

$\quad =0,$ तर $f(2a-x)=-f(x)$

ह्या प्रॉपर्टीला, प्रॉपर्टी (6) प्रमाणेच सिद्ध केली जाऊ शकते

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.31. $\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल : दिले आहे $\quad I=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx \qquad \ldots(1)$

$$I=\int_0^{\pi/2}\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx \qquad \text{[गुणधर्म (5) वरून]} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) आणि (2) यांची बेरीज करून,

$$2I=\int_0^{\pi/2}(\log\sin x+\log\cos x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\{\log(2\sin x\cos x)-\log 2\}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sin 2x\,dx-\frac{1}{2}\pi\log 2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin u\,du-\frac{1}{2}\pi\log 2\text{, जेथे } x=\frac{u}{2}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sin u\,du-\frac{1}{2}\pi\log 2 \qquad \text{[गुणधर्म (7) वरून]}$$

$$2I=I-\frac{1}{2}\pi\log 2 \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

म्हणून $\quad I=-\frac{1}{2}\pi\log 2$

$\therefore \quad \int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\pi\log 2$

उदाहरण 1.32. $\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$ चे मूल्य शोधा .

उकल : दिले आहे $\quad I=\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x)+\tan(\pi-x)}\,dx \qquad \text{[गुणधर्म (5) वरून]}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{-(\pi - x)\tan x}{-\sec x - \tan x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx - I$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x(\sec x - \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sec x \tan x - \tan^2 x}{1} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1)\, dx$$

$$= \pi [\sec x - \tan x + x]_0^{\pi} = \pi(\pi - 2)$$

किंवा $$I = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$$

$\therefore$ $$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$$

उदाहरण 1.33. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल : दिले आहे

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

तर $$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \qquad [\because \sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x]$$

...[गुणधर्म.(5) वरून]

I च्या दोन मूल्यांची बेरीज केल्यावर, आपल्याला मिळते

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x + x)\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= -\pi \left[\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi \left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2I = \frac{2\pi^2}{4}$$

$$I = \frac{\pi^2}{4}$$

म्हणून $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

उदाहरण 1.34. सिद्ध करा कि $\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \sin^4 4x \, dx = 0$

उकल: समजा $$I=\int_0^{\pi/2}\cos^3 2x\sin^4 4x\,dx$$

$2x=t$ ठेवल्यावर, $$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^3 t.\sin^4 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2^4.\cos^3 t.\sin^4 t.\cos^4 t\,dt$$

$$=8\int_0^{\pi}\sin^4 t.\cos^7 t\,dt=0$$ [गुणधर्म (7) वरून]

उदाहरण 1.35 . $\int_0^1\cot^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx$ चे मूल्य शोधा

उकल : दिलेले इंटिग्रल लिहिले जाऊ शकते

$$I=\int_0^1\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x(x-1)}\right)dx$$

$$=\int_0^1\tan^{-1}\left\{\frac{x-(x-1)}{1+x(x-1)}\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[\tan^{-1}x-\tan^{-1}(x-1)\right]dx$$

$$=\int_0^1\tan^{-1}x\,dx-\int_0^1\tan^{-1}(x-1)\,dx$$

परंतु $$\int_0^1\tan^{-1}(x-1)\,dx=\int_0^1\tan^{-1}(1-x-1)\,dx=-\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$$ [गुणधर्म (5) वरून]

$\therefore$ $$I=2\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$$

इंटिग्रेशन बाय पार्ट्स वापरून आणि '1' ला दुसरे फंक्शन मानून,

$$I=2\left[\tan^{-1}x.x\right]_0^1-2\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$=2.1.\frac{\pi}{4}-\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}-\log 2$$

म्हणून $\int_0^1\cot^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx=\frac{\pi}{2}-\log 2$

अभ्यास 1.3

1. दिलेल्या डेफिनेट इंटिग्रलचे बेरजेचे मर्यादा (लिमिट ऑफ सम) मानून मूल्यमापन करा.
   i. $\int_a^b x\,dx$ ii. $\int_0^5(x+1)\,dx$
   iii. $\int_2^3 x^2\,dx$ iv. $\int_1^4\left(x^2-x\right)dx$
   v. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$
2. दिलेल्या डेफिनाईट इंटिग्रलचे मूल्यमापन करा:

i. $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ ii. $\int_{1}^{2}\left(4x^3-5x^2+6x+9\right)dx$

iii. $\int_{0}^{\pi/2}\cos 2x\,dx$ iv. $\int_{0}^{\pi/4}\tan x\,dx$

v. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ vi. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}$

vii. $\int_{2}^{3}\frac{x}{x^2+1}\,dx$ viii. $\int_{0}^{1}x\,e^{x^2}\,dx$

ix. $\int_{0}^{\pi/4}\left(2\sec^2 x+x^3+2\right)dx$ x. $\int_{0}^{1}\left(x\,e^{x}+\sin\frac{\pi x}{4}\right)dx$

3. $\int_{0}^{\pi}\log(1+\cos x)\,dx$ चे मूल्यमापन करा.

4. $\int_{0}^{1}\frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ चे मूल्यमापन करा.

5. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$ चे मूल्यमापन करा.

6. सिद्ध करा $\int_{0}^{\pi}x\,f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\,dx$

7. $\int_{0}^{\pi}\sin^6 x\cos^7 x\,dx$ चे मूल्यमापन करा.

उत्तरे

1. i. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ii. $\frac{35}{2}$ iii. $\frac{19}{3}$ iv. $\frac{27}{2}$ v. $e-\frac{1}{e}$

2. i. 2 ii. $\frac{64}{3}$ iii. 0 iv. $\frac{1}{2}\log 2$

v. $\frac{\pi}{2}$ vi. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$ vii. $\frac{1}{2}\log 2$ viii. $\frac{1}{2}(e-1)$

ix. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$ x. $1+\frac{4}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

3. $-\pi\log 2$ 4. $\frac{\pi}{8}\log 2$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ 7. 0

1.2.5 इमप्रॉपर इंटिग्रल

इंटिग्रल $\int_{a}^{b}f(x)\,dx$ ला एक इमप्रॉपर इंटिग्रल म्हणतात जेंव्हा

i. एकतर इंटिग्रेशन चा इंटरव्हल [a, b] फायनाईट नाही म्हणजे एकतर ‘a’ किंवा ‘b’ किंवा दोन्ही ‘a’ आणि ‘b’ इनफायनाईट आहेत

ii. किंवा इंटीग्रॅन्ड $f(x)$ इंटरव्हल [a, b] वर बाऊंडेड नाही.

iii. इंटरव्हल [a, b] फायनाईट नाही आणि $f(x)$ त्याच्यावर बाऊंडेड नाही.

1.2.6 इमप्रॉपर इंटिग्रल चे प्रकार

इमप्रॉपर इंटिग्रल तीन प्रकारचे आहेत, ज्याची व्याख्या खालील प्रकारे केलेली आहे:

a. पहिल्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल

डेफिनेट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$ ला पहिल्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल म्हणतात जेंव्हा एकतर 'a' आणि 'b' इनफायनाईट आहे

किंवा दोन्ही इंफायनाईट आहेत परंतु $f(x)$ बॉऊण्डेड आहे.

उदाहरण साठी : $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx$, पहिल्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे.

या प्रकारे आपण व्याख्या करतो कि ,

i. $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx, (t>a)$

इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^\infty f(x)dx$ कॉनवर्जन्ट असेल जेव्हा राईट हॅन्ड लिमिट फायनाईट असेल आणि डायव्हर्जन्ट असेल जेव्हा लिमिट + ∞ किंवा -∞ असेल.

ii. $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_t^b f(x)dx, (t<b)$

इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ कॉनवर्जन्ट असेल जेव्हा राईट हॅन्ड लिमिट फायनाईट अस्तित्वात असेल आणि डायव्हर्जन्ट असेल जेव्हा लिमिट + ∞ किंवा -∞ असेल.

iii $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$

$$= \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^c f(x)\,dx + \lim_{t_2\to\infty}\int_c^{t_2} f(x)\,dx \qquad [t_1<c<t_2]$$

इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ कॉनवर्जन्ट असेल जेव्हा राईट हॅन्ड लिमिट फायनाईट अस्तित्वात असेल आणि डायव्हर्जन्ट असेल जेव्हा लिमिट + ∞ किंवा -∞ असेल.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.36 . इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ कॉनवर्जन्ट आहे कि नाही ते तपासा.

उकल: येथे
$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-1/2}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{t}-2\right] = \infty$$

म्हणून दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 1.37 . इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^0 e^{-x}\,dx$ सोडवा.

उकल : येथे $\int_{-\infty}^0 e^{-x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{-x}\,dx$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_t^0$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[-\left(1 - e^{-t}\right) \right]$$

$$= -1 + e^{\infty} = \infty$$

म्हणून दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 1.38 . दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ कॉनवर्जन्ट आहे कि नाही ते तपासा.

उकल : येथे
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t_1 \to -\infty} \int_{t_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t_2 \to \infty} \int_{0}^{t_2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t_1 \to -\infty} \left[\tan^{-1} x \right]_{t_1}^{0} + \lim_{t_2 \to \infty} \left[\tan^{-1} x \right]_{0}^{t_2}$$

$$= \lim_{t_1 \to -\infty} \left[0 - \tan^{-1} t_1 \right] + \lim_{t_2 \to \infty} \left[\tan^{-1} t_2 - 0 \right]_{0}^{t_2}$$

$$= -\left[\tan^{-1}(-\infty) \right] + \left[\tan^{-1}(\infty) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

म्हणून दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल कॉनवर्जन्ट आहे.

b. दुसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल:

डेफिनाईट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$ याला दुसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल म्हणतात जेंव्हा दोन्ही 'a' आणि 'b' फायनाईट असतील आणि $f(x)$ बॉऊण्डेड नसेल.

(म्हणजेच $f(x)$ मध्ये एक किंवा जास्त पॉईंट वर इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी आहे.)

उदाहरण साठी: $\int_0^1 \frac{dx}{x}, \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)(x-4)}$, दुसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहेत.

या प्रकारे आपण व्याख्या करतो कि,

i. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, जेंव्हा $f(x)$ च्या इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चा एकमेव पॉईंट 'a' आहे. जेंव्हा डाव्या साईड ची लिमिट फायनाईट स्वरूपात असेल , तेव्हा ते कॉनवर्जन्ट असते नाही तर ते डायवर्जन्ट असते.

ii. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, जेंव्हा $f(x)$ च्या इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चा एकमेव पॉईंट 'b' आहे. जेंव्हा डाव्या साईड ची लिमिट फायनाईट स्वरूपात असेल , तेव्हा ते कॉनवर्जन्ट असते नाही तर ते डायवर्जन्ट असते.

iii. जेव्हा $f(x)$ एखाद्या पॉईंट 'c' वर $a < c < b$ मध्ये इनफायनाईट असेल, तेव्हा

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

सामान्यतः जर $c_1, c_2, c_3, .., c_n$, इंटरव्हल $[a, b]$ मध्ये $f(x)$ चे इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चे फायनाईट बिंदू

आहेत, जेथे $a < c_1 < c_2 < c_3 \ldots < c_{n-1} < c_n < b,$, तेव्हा

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

जेंव्हा डाव्या साईड ची लिमिट फायनाईट स्वरूपात अस्तित्वात असेल , तेव्हा ते इमप्रॉपर इंटिग्रल कॉनवर्जन्ट असते नाहीतर ते डायवर्जन्ट असते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.39 . इंटिग्रल $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ चे कॉनव्हर्जन्स तपासा.

उकल : दिलेले इंटिग्रल दुसऱ्या प्रकारचे आहे आणि '0' **हा** इंटरव्हल $[0, 1]$ मध्ये इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चा बिंदू आहे.

म्हणून
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2(1-0) = 2$$

म्हणून दिलेले इंटिग्रल कॉनवर्जन्ट आहे आणि त्याचा कॉनव्हर्जनस 2 आहे.

उदाहरण 1.40 . इंटिग्रल $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ चे कॉनव्हर्जन्स तपासा.

उकल : दिलेले इंटिग्रल दुसऱ्या प्रकारचे आहे आणि $x = 1$ हा $f(x)$ च्या डिसकंटिन्यूटी चा बिंदू आहे.

म्हणून, व्याख्येनुसार,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-3x+2}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)(2-x)}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}\right] \qquad \text{पर्शियल फ्रॅकशन करून}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log(1-x) + \log(2-x)\right]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log\varepsilon + \log(1+\varepsilon) - \log 2\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \log 2\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) - \log 2\right]$$
$$= \log(1+\infty) - \log 2 = \infty$$

म्हणून दिलेले इंटिग्रल डायवर्जन्ट आहे.

उदाहरण 1.41 . इंटिग्रल $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ चे कॉनव्हर्जन्स तपासा.

उकल : दिलेले इंटिग्रल दुसऱ्या प्रकारचे आहे आणि $x = 0$ हा $f(x)$ चा $[-1, 1]$ मध्ये इंफाइनाइट डिसकंटिन्यूटी चा बिंदू आहे.म्हणून, व्याख्येनुसार,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-1}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-1}\right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[-x^{-1}\right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right]$$

$$= \infty - 1 - 1 + \infty = \infty$$

म्हणून दिलेले इंटिग्रल डायवर्जन्ट आहे.

c. तिसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल (मिश्रित प्रकार):

डेफिनाईट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$ तिसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे जेंव्हा दोन्ही 'a' किंवा 'b' किंवा दोन्ही इनफायनाईट असतील आणि $f(x)$ बॉऊण्डेड नसेल.

उदाहरण: $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x}$, तिसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहेत.

अभ्यास 1.4

1. खाली दिलेल्या इमप्रॉपर इंटिग्रल चे कोनव्हर्जन्स तपासा आणि जर कॉनवर्जन्ट असेल तर त्याची किंमत काढा:

   i. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$ ii. $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ iii. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{p^2+q^2x^2}$ iv. $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

   v. $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$ vi. $\int_0^\infty \cos x\,dx$

2. खाली दिलेल्या इमप्रॉपर इंटिग्रल चे कोनव्हर्जन्स तपासा आणि जर कॉनवर्जन्ट असेल तर त्याची किंमत काढा:

   i. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ ii. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ iii. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$ iv. $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$

   v. $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin x}$ vi. $\int_0^1 \log x\,dx$

उत्तरे

1. i. डायवर्जन्ट ii. डायवर्जन्ट iii. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{2pq}$ iv. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{4}$

   v. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$ vi. डायवर्जन्ट

2. i. कॉनवर्जन्ट ; $\frac{8}{3}$ ii. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{3}$ iii. कॉनवर्जन्ट; 2 vi. डायवर्जन्ट

   v. डायवर्जन्ट vi. कॉनवर्जन्ट; -1

1.2.7 इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$, $x=a$ या बिंदूवर कॉनव्हर्जन्स साठी तुलनात्मक परीक्षण (Comparison Tests)

1.2.7.1 तुलनात्मक परीक्षण I

विधान: जेव्हा f आणि g हे दोन पॉजिटीव्ह फंक्शन्स अशा प्रकारे आहेत कि $f(x) \le g(x)$, अशा सर्व $x \in (a, b]$ आणि 'a' ही एकमेव [a, b] मधील इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी आहे ,तेव्हा

i. $\int_a^b g\,dx$ कॉनवर्जन्ट $\Rightarrow$ $\int_a^b f\,dx$ कॉनवर्जन्ट

ii. $\int_a^b f\,dx$ डायवर्जन्ट $\Rightarrow$ $\int_a^b g\,dx$ डायवर्जन्ट

सिद्धता: $0 < f(x) \le g(x), \forall x \in (a, b]$ म्हणून

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx \le \int_{a+\varepsilon}^{b} g\,dx, \;, \; 0 < \varepsilon < b - a \text{ च्या साठी} \qquad \ldots(1)$$

i. समजा $x = a$ वर, $\int_a^b g\,dx$ कॉनवर्जन्ट आहे, तेव्हा एखादी पॉजिटीव्ह संख्या M अशा प्रकारे अस्तित्वात आहे कि

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} g\,dx < M, \quad , \; 0 < \varepsilon < b - a \text{ च्या साठी} \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) वरून,

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx < M, \quad , \; 0 < \varepsilon < b - a \text{ च्या साठी}$$

शेवटी $x = a$ वर , $\int_a^b f\,dx$ कॉनवर्जन्ट आहे .

ii. समजा $x = a$ वर, $\int_a^b f\,dx$ डायवर्जन्ट आहे, तर $\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx$ अनबॉऊण्डेड अबोव्ह आहे आणि यासाठी (1) वरून, $\int_{a+\varepsilon}^{b} g\,dx$ अनबॉऊण्डेड अबोव्ह आहे.

शेवटी, $x = a$ वर $\int_a^b g\,dx$ डायवर्जन्ट आहे.

1.2.7.2 तुलनात्मक परीक्षण II

विधान: जेव्हा f आणि g हे दोन पॉजिटीव्ह फंक्शन्स इंटरव्हल $(a, b]$ वर आहेत आणि 'a' ही एकमेव इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी अशी आहे कि
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \ne 0$$
तर दोन इंटिग्रल $\int_a^b f\,dx$ आणि $\int_a^b g\,dx$ सोबतच 'a' वर कॉनवर्जन्ट किंवा डायवर्जन्ट असतील.

सिद्धता: f आणि g हे दोन पॉजिटीव्ह फंक्शन्स इंटरव्हल (a, b] मध्ये आहेत , म्हणून $\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a, b]$

म्हणून $$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \ge 0$$

परंतु $l \ne 0$ (दिलेले) तेव्हा $l > 0$

आता एक पॉजिटीव्ह संख्या e या प्रकारे निवडा कि $l - \varepsilon > 0$

म्हणून $$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$\Rightarrow$ a $(a < c < d)$ या बिंदूचा नेबरहुड (a,c) असा अस्तित्वात येतो कि

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$$

$$\Rightarrow \qquad -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$$

$$\Rightarrow \quad (l-\varepsilon) g(x) < f(x) < (l+\varepsilon) g(x), \forall x \in (a, c]$$

स्थिति I: जसे कि $\int_a^b f\,dx$, a वर कॉनवर्जजन्स आहे

$\Rightarrow \int_a^c f\,dx$, a वर कॉनवर्जन्ट आहे [$\because a < c < b$ और $\int_c^b f\,dx$ प्रॉपर इंटिग्रल आहे]

$\Rightarrow (l-\varepsilon) \int_a^c g\,dx$, a वर कॉनवर्जन्ट आहे [तुलनात्मक परीक्षण I द्वारे]

$\Rightarrow \int_a^b g\,dx$, a वर कॉनवर्जन्ट आहे

स्थिति II: समजा $\int_a^b f(x)dx$, a वर डायवर्जन्स आहे.

$\Rightarrow \int_a^c f(x)dx$, a वर डायवर्जन्ट आहे [$\because a < c < b$ आणि $\int_c^b f\,dx$ प्रॉपर इंटिग्रल आहे]

$\Rightarrow (l+\varepsilon) \int_a^c g\,dx$, वर डायवर्जन्ट आहे [तुलनात्मक परीक्षण I द्वारे]

$\Rightarrow \int_a^b g\,dx$, a वर डायवर्जन्ट आहे.

या प्रकारे हे सिद्ध केल्या जाऊ शकते कि जर $\int_a^b g\,dx$ 'a' वर कॉनवर्ज करत आहे , तेव्हा $\int_a^b f\,dx$ 'a' वर कॉनवर्ज करत आहे आणि जर $\int_a^b g\,dx$ 'a' वर डायवर्ज करत आहे, तेव्हा $\int_a^b f\,dx$ 'a' वर डायवर्ज होईल.शेवटी प्रमेयाची सिद्धता झाली.

1.2.8 महत्वपूर्ण प्रमेय

i. इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ कॉनवर्जन्ट होईल फक्त आणि फक्त $n < 1$

ii. इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ कॉनवर्जन्ट होईल फक्त आणि फक्त $n < 1$

सिद्धता : i. दिलेले इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ एक प्रॉपर इंटिग्रल आहे $n \le 0$ च्या साठी ,हे कॉनवर्जन्ट आहे. जर $n > 0$, तर हे एक इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे आणि 'a' ही एकमेव इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी आहे.

स्थिति I: जर $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n}, 0 < \varepsilon < b-a$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}\right]_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}, & \text{फाइनाइट जर } n<1 \\ \infty & \text{, जर } n>1 \end{cases}$$

$\therefore \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $0 < n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n > 1$. च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

स्थिति II: जर $n = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log|x-a|\right]_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log(b-a) - \log\varepsilon\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \infty$$

$\therefore \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n = 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

म्हणून $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n \geq 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

ii. दिलेले इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ $n \leq 0$ च्या साठी एक प्रॉपर इंटिग्रल आहे आणि कॉनवर्जन्ट आहे. जर $n > 0$, तर हे एक इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे आणि 'b' ही एकमेव इन्फानाईट डिसकंटिन्यूटी आहे.

स्थिति I: जर $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(b-x)^{-n+1}}{-(-n+1)}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n-1}\left[(b-x)^{-n+1}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n-1}\left[\varepsilon^{1-n} - (b-a)^{1-n}\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & ; \ n > 1 \\ \dfrac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}} & ; \ n < 1 \end{cases}$$

$\therefore \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $0 < n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n > 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

स्थिति II: जर $n = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \int_a^b \frac{dx}{b-x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log|b-x|\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log\varepsilon + \log(b-a)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \infty \qquad [\because \log 0 = -\infty]$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n = 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

म्हणून $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे.

आणि $n \geq 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

टिप: $\int_0^1 \frac{1}{x^n}\, dx$, $n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n \geq 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.42 इंटिग्रल $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$ कोनव्हर्जन्स तपासा.

उकल : समजा $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$

येथे $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}(1+x^2)}$ आणि x = 0, f (x) चा एकमेव इन्फायनाईट डिसकंटिन्यूटी पॉईंट आहे आणि $f(x) > 0, x \in (0,1]$

जसे कि $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

आता $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0$ [जिथे l फायनाईट आणि नॉन झिरो आहे]

$\therefore$ कंप्यारीजन परीक्षण द्वारे

इंटिग्रल $\int_0^1 f(x)\, dx$ आणि $\int_0^1 g(x)\, dx$ एक सोबत कॉनवर्जन्ट किंवा डायवर्जन्ट होत आहे.

परंतु, इंटिग्रल $\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$, $x = 0$ वर कॉनवर्जन्ट आहे $\left[\because n = \frac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore$ $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$ कॉनवर्जन्ट आहे

उदाहरण 1.43 इंटिग्रल $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx$ चे कॉनवर्जन्स तपासा.

उकल : जसे कि $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\, dx$

येथे $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ आणि $\boldsymbol{x = 0}$**,**

$f(x)$ चा एकमेव इन्फानाईट डिसकंटिन्यूटी पॉईंट आहे. आणि $f(x) > 0$, $x \in (0, \pi/2]$

जसे कि $$g(x)=\frac{1}{x^{1/2}}$$

आता $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0,\infty$$

$\therefore$ कंप्यारीजन परीक्षण द्वारे

इंटिग्रल $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ आणि $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ एक सोबत कॉनवर्जन्ट किंवा डायवर्जन्ट होत आहे.

परंतु, इंटिग्रल $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^{1/2}}$, $x=0$ वर कॉनवर्जन्ट आहे $\left[\because n=\frac{1}{2}<1\right]$

$\therefore$ $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ कॉनवर्जन्ट आहे

1.2.9 ∞ वर कॉन्वर्जन्स साठी तुलनात्मक परीक्षण

1.2.9.1 तुलनात्मक परीक्षण I

जर f आणि g ही दोन धनात्मक फंक्शन्स असतील जसे की $f(x)\le g(x)$, सर्व $x\ge a$ साठी तर

i. $\int_a^\infty f\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल जर $\int_a^\infty g\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल.

ii. $\int_a^\infty g\,dx$ डायवर्जन्ट असेल जर $\int_a^\infty f\,dx$ डायवर्जन्ट असेल.

सिद्धता: जर f आणि g हे दोन पॉजेटिव्ह फंक्शन्स असतील जसे की $f(x)\le g(x)$, सर्व $x\in[a,t]$ साठी

$$\therefore\quad \int_a^t f(x)\,dx\le\int_a^t g(x)\,dx \qquad \ldots(1)$$

समजा $\int_a^b g\,dx$ कॉन्वर्जंट आहे, जेणेकरून M ही एक पॉजेटिव्ह संख्या अस्तित्वात असेल.

जसे की $$\int_a^t g(x)\,dx<M,\ \forall\, t\ge a \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) वरून ,

$$\int_a^t f(x)\,dx<M,\ \forall\, t\ge a$$

म्हणून $\int_a^\infty f(x)\,dx$ कॉन्वर्जंट आहे.

ii. समजा $\int_a^\infty f(x)\,dx$ डायवर्जन्ट आहे.

$\Rightarrow$ $\int_a^t f(x)\,dx$ वरच्या बाजूला बाउन्डेड नाही आणि म्हणून (1) वरून, $\int_a^t g(x)\,dx$ हे देखील वरच्या बाजूला बाउन्डेड नाही, परिणामी $\int_a^\infty g(x)\,dx$ डायवर्जन्ट आहे.

1.2.9.2 तुलनात्मक परीक्षण II

जर f आणि g हे इंटर्वल $[a,\infty)$ वरील पॉजेटिव्ह फंक्शन्स असतील जसे की

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$ [जेथे l शून्य नसेल आणि फाइनाइट असेल]

मग दोन्ही इंटिग्रल $\int_a^\infty f(x)\,dx$ आणि $\int_a^\infty g(x)\,dx$ एकसोबत कॉन्वर्जंट किंवा डायवर्जन्ट होतील.

सिद्धता: जसे की $\frac{f(x)}{g(x)}>0,\ \forall x\ge a$ आणि $l\neq 0$ [$\because f(x)$ आणि $g(x)$ पॉजेटिव्ह फंक्शन्स आहेत]

$\therefore \qquad l > 0$

$\varepsilon > 0$ घेऊन अशे की $l - \varepsilon > 0$

तेथे संख्या k अस्तित्वात आहे कारण $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ जसे की

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon, \forall x \geq k$$

$$\Rightarrow \qquad l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon, \forall x \geq k > a$$

$$\Rightarrow \qquad (l - \varepsilon) g(x) < f(x) < (l + \varepsilon) g(x), \forall x \geq k > a$$

कंप्यारीजन चाचणी I वरून, जर $\int_a^\infty f(x)\, dx$ कॉन्वर्जंट असेल तर $\int_a^\infty g(x)\, dx$ देखील कॉन्वर्जंट होईल आणि जर $\int_a^\infty g(x)\, dx$ कॉन्वर्जंट असेल तर $\int_a^\infty f(x)\, dx$ सुद्धा कॉन्वर्जंट होईल.

त्याचप्रमाणे, एकाचे डायवर्जन्स म्हणजे दुसर् याचे डायवर्जन्स.

म्हणून दोन इंटिग्रल $\int_a^\infty f(x)\, dx$ आणि $\int_a^\infty g(x)\, dx$ एकसोबत कॉन्वर्जंट किंवा डायवर्जन्ट होतील.

1.2.10 महत्वपूर्ण प्रमेय

विधान: इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ $(a > 0)$ कॉन्वर्जंट असेल फक्त आणि फक्त जर $n > 1$ आणि डायवर्जन्ट असेल $n \leq 1$ साठी.

सिद्धता:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \lim_{t \to \infty} \int_a^t \frac{dx}{x^n}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_a^t, \text{ जर } n \neq 1$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[\frac{t^{1-n}}{1-n} - \frac{a^{1-n}}{1-n} \right], \text{ जर } n \neq 1$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{a^{1-n}}{1-n}, & \text{जर } n > 1 \\ \infty \quad , & \text{जर } n < 1 \end{cases}$$

तसेच जेव्हा $n = 1$, आपल्याकडे असेल

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t \to \infty} \int_a^t \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t \to \infty} [\log x]_a^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} [\log t - \log a]$$

$$= \log \infty - \log a = \infty$$

म्हणून $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ कॉन्वर्जंट असेल फक्त आणि फक्त जर $n > 1$ आणि $n \leq 1$ साठी डायवर्जन्ट असेल.

टिप्पणी: $\int_a^\infty \frac{1}{x^n}\, dx$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $(a > 0)$ कॉन्व्हर्जंट असेल $n > 1$ साठी आणि कॉन्व्हर्जंट असेल $n \leq 1$ साठी डायवर्जन्ट आहे

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.44 दिलेल्या इंटीग्रल चे कॉन्वर्जन्स तपासा $\int_1^{\infty}\frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$.

उकल: समजा $$I=\int_1^{\infty}\frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$$

येथे $$f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^5}=\frac{x^3}{x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$$

$\Rightarrow$ $$f(x)=\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$$

समजा $$g(x)=\frac{1}{x^2}$$

तेव्हा $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}=1\neq 0,\infty$$

$\therefore$ कंप्यारीजन चाचणीद्वारे, इंटिग्रल $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ आणि $\int_1^{\infty}g(x)\,dx$ एकसोबत कॉन्व्हर्ज किंवा डायवर्ज होतात.
परंतु, इंटिग्रल
$$\int_1^{\infty}g(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} \qquad [\because n=2>1]$$
कॉन्वर्जंट आहे.

$\therefore$ इंटिग्रल $\int_1^{\infty}\frac{x^3}{(1+x)^5}\,dx$ कॉन्वर्जंट आहे.

उदाहरण 1.45 इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_1^{\infty}x^n\,e^{-x}\,dx$ च्या कॉन्वर्जन्स ची चर्चा करा

उकल: समजा $$I=\int_1^{\infty}x^n\,e^{-x}\,dx$$

येथे $$f(x)=x^n\,e^{-x}$$

असे समजा $$g(x)=\frac{1}{x^2}$$

आता $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+2}}{e^x}=0,\ \forall\, n$$

आता $\int_1^{\infty}g(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ कॉन्वर्जन्ट आहे $[\because n=2>1]$

$\therefore$ कंप्यारीजन चाचणी द्वारा, $\int_1^{\infty}x^n\,e^{-x}\,dx$ सुद्धा कॉन्वर्जंट आहे.

1.2.11 अब्सोलूट कॉन्वर्जन्स

जर $\int_a^b|f|\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल तर इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^b f\,dx$ ला अब्सोलूट कॉन्वर्जन्स म्हणता येईल.

उदाहरण 1.46 $\int_0^1\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ चे कॉन्वर्जन्स तपासा.

उकल: समजा $$I=\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

येथे, $$f(x)=\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$$

शून्याच्या शेजारच्या भागात हेच चिन्ह ठेवत नाही आणि 0' हा [0, 1] मधील 'f' च्या इनफाइनाइट डिसकंटीन्यूटीचा बिंदू आहे.

आता $$|f(x)|=\left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right|=\frac{|\sin(1/x)|}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}=g(x) \qquad \left[\because \left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1\right]$$

परंतु $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$, $x=0$ वर कॉन्वर्जंट आहे. $\left[\because n=\frac{1}{2}<1\right]$

$\therefore$ $\int_0^1 |f|$, $x=0$ वर कॉन्वर्जंट आहे.

म्हणून दिलेले इंटीग्रल $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$, $x=0$ वर अब्सोल्यूटली कॉन्वर्जंट आहे.

अभ्यास 1.5

1. खालील इंटीग्रलच्या कॉन्वर्जन्सची चर्चा करा:

   i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}(1+x^2)}$ ii. $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ iii. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3(1+x^2)^5}$

2. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ चे कॉन्वर्जन्स तपासा:

3. खालील इंटीग्रल्सचे कॉन्वर्जन्स तपासा.

   i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1-x)^{1/3}}$ ii. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$ iii. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}\,dx$ iv. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

4. खालील इंटीग्रल्सचे कॉन्वर्जन्स तपासा:

   i. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ii. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$ iii. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^n)}$ iv. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(2+x)}$

   v. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ [संकेत: $e^{x^2}>x^2, \forall\, x\in R$]

उत्तरे

1. i. कॉन्वर्जंट ii. कॉन्वर्जंट जर $n>-1$ iii. डायवर्जंट
2. कॉन्वर्जंट
3. i. कॉन्वर्जंट ii. कॉन्वर्जंट iii. कॉन्वर्जंट iv. कॉन्वर्जंट
4. i. कॉन्वर्जंट ii. कॉन्वर्जंट iii. कॉन्वर्जंट जर $n>½$
   iv. कॉन्वर्जंट v. कॉन्वर्जंट

मनोरंजक तथ्ये

- प्लाझ्मा औषधांचे प्रमाण शोधण्यासाठी औषधविज्ञान संशोधनात या संकल्पनेचा वापर केला जातो, म्हणजेच जास्तीत जास्त औषधांचे प्रमाण काय आहे आणि ते केव्हा असते.
- दोन वेगवेगळ्या प्रमाणांचे प्रमाण मोजणाऱ्या कोणत्याही औषधाचे 'R'-मूल्य या संकल्पनेचा वापर करून मोजले जाते.
- कोणत्याही वस्तूचे केंद्र शोधण्यासाठी अभियंते इंटीग्रलचा वापर करतात.
- कॅलक्यूलसमधील एक मनोरंजक संबंध म्हणजे डेरिवेटिव आणि इंटीग्रल प्रक्रिया उलट आहेत. ते एकमेकांच्या विरुद्ध आहेत आणि ते "कॅलक्यूलसचे मूलभूत प्रमेय" वापरून जोडले गेले आहेत.

वास्तविक जीवनाचे अनुप्रयोग

- आकडेवारी आणि संभाव्यतेत उपयोग.
- याचे महत्त्व क्वांटम भौतिकशास्त्र आणि अर्थशास्त्रात आहे, जे संभाव्यता वितरणाच्या आधारे तयार केले जाते.
- याचा उपयोग सरासरी बदल, खंड, त्रुटी अंदाज आणि पृष्ठभाग शोधण्यासाठी देखील केला जातो.
- हीच संकल्पना कायनेटिक ऊर्जा शोधण्यासाठीदेखील वापरली जाते.

इतिहास

गणिती विश्लेषणात विशेष फंक्शन्स वारंवार येताता. विशेष फंक्शन्स पैकी गॅमा फंक्शनचा मोठ्या प्रमाणात वापर होताना दिसत होता. गॅमा फंक्शन $\Gamma(x)$ चा उपयोग अचूक विज्ञानात केला जाते जवळजवळ सुप्रसिद्ध फॅक्टोरियल सिम्बॉल x! म्हणून. प्रसिद्ध गणितज्ञ एल. युलर (1729) यांनी याची ओळख करून दिली. बीटा फंक्शनचा प्रथम युलर आणि लिजेंडर यांनी अभ्यास केला आणि जॅक्स बिनेट यांनी त्याचे नाव दिले.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत -NPTEL)

Improper Integrals

Improper Integrals (Cont.) 1

Improper Integrals (Cont.) 2

1.3 बीटा, गामा फंक्शन्स आणि त्यांचे गुणधर्म

1.3.1 गामा फंक्शन

$n > 0$ साठी, इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx$ हे गामा फंक्शन म्हणून परिभाषित केले आहे आणि Γ (n) द्वारे दर्शविले आहे (गामा एन म्हणून वाचा). याला युलेरियन इंटिग्रलचा दुसरा प्रकार देखील म्हणतात. म्हणून,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx,\ n > 0 \qquad \dots (1)$$

लक्षात घ्या की गामा फंक्शन डेफिनेट इंटिग्रलचे मूल्य काढण्यासाठी महत्वाची भूमिका बजावते.

1.3.1.1 गामा फंक्शनचे गुणधर्म

a. सिद्ध करा कि $\quad \Gamma(n+1) = n\,\Gamma n$

आपल्याकडे आहे $\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{(n+1)-1}\,dx=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{n}\,dx$ [समीकरण (1) वरून]

$$=\left[-e^{-x}x^{n}\right]_0^{\infty}+n\int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$$=0+n\,\Gamma n$$

म्हणून $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma n$ … (2)

b. सिद्ध करा कि $\Gamma(n)=(n-1)!$, जेथे n हा धन पूर्णांक आहे

आपल्याकडे आहे $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$ [समीकरण (2) वरून]

$=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$ [समीकरण (2) वरून]

$=(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2\,\Gamma(2)$ [समीकरण (2) वारंवार वापरून]

$=(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1\,\Gamma(1)$

$=(n-1)!\,\Gamma(1)=(n-1)!\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ [समीकरण (1) वरून]

$=(n-1)!\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=(n-1)![0+1]=(n-1)!$, जेथे n हा धन पूर्णांक आहे.

टिप्पणी 1: $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)$ या सूत्राला ला गामा फंक्शनचे रिकरन्स रिलेशन असे म्हणतात.
टिप्पणी 2: लक्षात घ्या की $\Gamma(1)=1$, , गुणधर्म (b) द्वारे शोधले जाऊ शकते.

c. सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

समीकरण (1) मध्ये $n=\frac{1}{2}$ ठेवल्यास, आपल्याला मिळते

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}\,dx=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{-1/2}\,dx \qquad \ldots (3)$$

$x=v^2$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow$ $dx=2\,dv$, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-v^2}\,dv \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (4) मध्ये v चे u मध्ये रूपांतर करून

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (4) आणि (5) यांचा गुणाकार करून

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,du\,dv$$

समजा $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$ तर $u^2+v^2=r^2$ आणि $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ तसेच $du\,dv=r\,dr\,d\theta$ आणि

$0\le r\le\infty\,;\,0\le\theta\le\pi/2$

$$\therefore \quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}d\theta=2\int_0^{\pi/2}1.d\theta=\pi$$

म्हणून $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad \ldots (6)$$

d. सिद्ध करा कि $\Gamma(0)=\infty$

समीकरण (2) वरून, आपल्याकडे आहे

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$n \to 0$ असल्यामुळे $$\Gamma(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(0+1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

म्हणून $$\Gamma(0)=\infty \qquad \ldots(7)$$

पुढे लक्षात घ्या की $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \Gamma(-3)$ इत्यादी देखील अपरिभाषित आहेत.

म्हणून कोणत्याही $n > 0$ साठी गामा फंक्शन कंटिन्युयस आहे आणि n = 0, −1, −2, ... येथे डिसकंटिन्युयस आहे.

अशा प्रकारे, $\Gamma(n)$ शून्य आणि ऋण पूर्णांक वगळता सर्व n साठी परिभाषित केले आहे.

e. सिद्ध करा कि $\Gamma(n+1)=(m+1)^{n+1}(-1)^n\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$

जेथे n एक धन पूर्णांक आहे आणि $m > -1$.

आपल्याकडे आहे $\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$

$x=e^{-y}$ ठेवले तर $\quad dx=-e^{-y}\,dy=-x\,dy$

$$\therefore \quad \int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx=\int_0^\infty e^{-my}(-y)^n e^{-y}\,dy=(-1)^n\int_0^\infty y^n e^{-(m+1)y}\,dy$$

$(m+1)y=u$ ठेवा म्हणजे $dy=\frac{du}{m+1}$

$$\therefore \quad \int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx=(-1)^n\int_0^\infty\frac{u^n}{(m+1)^n}e^{-u}.\frac{du}{(m+1)}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^{(n+1)-1}\,du$$

$$\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

म्हणून $$\Gamma(n+1)=(m+1)^{n+1}(-1)^n\int_0^1 x^m(\log x)^n\,dx$$

जेथे n एक धन पूर्णांक आहे आणि $m > -1$.

महत्त्वाचे सूत्र: $\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta=\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)};\ m, n>-1$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.47. $\int_0^\infty x^{1/4}e^{-\sqrt{x}}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. आपल्याकडे आहे $\quad I=\int_0^\infty x^{1/4}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

आता ठेऊन $\sqrt{x}=u$, $\quad\Rightarrow\; x=u^2 \;\Rightarrow\; dx=2u\,du$

$$\therefore \quad I=\int_0^\infty e^{-u}\left(u^2\right)^{1/4} 2u\,du=2\int_0^\infty e^{-u}\,u^{3/2}\,du$$

$$=2\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{5}{2}-1}\,du=2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=2.\frac{3}{2}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \left[\because \Gamma(n+1)=n\Gamma n\right]$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{\pi} \quad \textbf{(उकल)} \qquad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right]$$

उदाहरण 1.48 $\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-h^2x^2}dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. आपल्याकडे आहे $\quad I=\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-h^2x^2}\,dx$

$h^2x^2=y$ ठेवल्यावर $\quad h^2\,2x\,dx=dy$ जेणेकरून

$$dx=\frac{1}{2}\frac{dy}{h^2\,x}=\frac{1}{2}\frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$$\therefore \quad I=\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{\sqrt{y}}{h}\right)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1}{2\,h^n}\int_0^\infty e^{-y}\,y^{\frac{n-2}{2}}\,dy$$

$$=\frac{1}{2\,h^n}\int_0^\infty e^{-y}\,y^{\frac{n}{2}-1}dy$$

$$=\frac{1}{2\,h^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad \textbf{(उकल)} \qquad \text{[गामा फंक्शनच्या व्याख्येनुसार]}$$

उदाहरण 1.49 $\int_0^\infty x^6e^{-2x}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. आपल्याकडे आहे $\quad I=\int_0^\infty x^6e^{-2x}\,dx$

ठेवा $2x=y\Rightarrow \quad dx=\frac{dy}{2}$ तर

$$\therefore \quad I=\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{2}\right)^6\frac{dy}{2}=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty e^{-y}\,y^{7-1}\,dy=\frac{1}{2^7}\Gamma(7)$$

$$I=\frac{1}{2^7}\Gamma(7) \qquad \text{[गामा फंक्शनच्या व्याख्येनुसार]}$$

$$=\frac{1}{2^7}(6!)=\frac{45}{8} \quad \textbf{(उकल)} \qquad \left[\because \Gamma(n+1)=n!,\, n>0\right]$$

उदाहरण 1.50 सिद्ध करा कि $\int_a^\infty e^{\left(2ax-x^2\right)}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{a^2}$

उकल. आपल्याकडे आहे $$I=\int_a^{\infty} e^{\left(2ax-x^2\right)}\,dx=\int_a^{\infty} e^{a^2-\left(x^2-2ax+a^2\right)}dx$$

$$=\int_a^{\infty} e^{a^2-(x-a)^2}\,dx=e^{a^2}\int_a^{\infty} e^{-(x-a)^2}\,dx$$

$x-a=y$ ठेऊन, $\Rightarrow dx=dy$

$$\therefore \qquad I=e^{a^2}\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy \qquad \ldots (1)$$

आता गामा फंक्शनच्या व्याख्येनुसार

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{n-1}\,du,\ n>0$$

$n=\dfrac{1}{2}$ ठेवल्यावर आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{-1/2}\,du$$

आता ठेवा $u=y^2 \ \Rightarrow\ du=2y\,dy$ आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-y^2}\left(y^2\right)^{-1/2}.\,2y\,dy$$

$$\sqrt{\pi}=2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy \qquad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right] \qquad \ldots (2)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

समीकरण (2) वापरून, (1) आशाप्रकारे मिलेल

$$I=e^{a^2}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{a^2} \qquad \text{(सिध्द केले)}$$

उदाहरण 1.51 $\int_0^{\infty} x^{-3/2}\left(1-e^{-x}\right)dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. समजा $$I=\int_0^{\infty} x^{-3/2}\left(1-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left[\left(1-e^{-x}\right)\frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty} e^{-x}\,\frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\,dx$$

$$=0+2\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{-1/2}\,dx$$

$$=2\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx=2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{\pi} \qquad \text{(उकल)}$$ **[व्याख्येनुसार]**

1.3.2 बीटा फंक्शन

बीटा फंक्शन खलील प्रमाणे दर्शविले आणि परिभाषित केले जाते

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \ldots (1)$$

जेथे m, n धन संख्या, पूर्णांक किंवा अपूर्णांक आहेत. याला युलेरियन इंटिग्रल ऑफ फर्स्ट काईन्ड असेही म्हणतात.

1.3.2.1 बीटा फंक्शनचे साधे गुणधर्म

i. सिध्द करा कि $B(m, n) = B(n, m)$ [सममिती]

आपल्याला माहित आहे कि

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}\left[1-(1-x)\right]^{n-1} dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx\right]$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{n-1}\, dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\, dx$$

$$= B(n, m)$$

म्हणून $B(m, n) = B(n, m)$

सिध्द करा कि

$$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}\, dx = a^{m+n-1} B(m, n)$$

समीकरण (1) वरून, आपल्याकडे आहे

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = B(m, n)$$

$x = \dfrac{y}{a}$ ठेवून, $\Rightarrow$ $dx = \dfrac{dy}{a}$ आणि $0 \le y \le a$

$$\int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{m-1}\left(1-\frac{y}{a}\right)^{n-1}\frac{dy}{a} = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^{m+n-1}}\int_0^a y^{m-1}(a-y)^{n-1}\, dy = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}\, dx = a^{m+n-1} B(m, n)$$

iii. हे सिद्ध करण्यासाठी $B(m, n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$

आपल्याला माहित आहे कि $B(m, n) = \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$

$x = \dfrac{1}{y+1}$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल,

$dx = -\dfrac{dy}{(1+y)^2}$, आणि y हा $\infty \le y \le 0$ पर्यंत बदलते.

$$\therefore \quad B(m, n) = \int_\infty^0 \left(\frac{1}{y+1}\right)^{m-1}\left[1-\frac{1}{1+y}\right]^{n-1}\left[-\frac{dy}{(1+y)^2}\right]$$

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^{m-1}} \cdot \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{n-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy \qquad (1)$$

(या इंटिग्रल मध्ये m आणि n फंक्शनच्या सममितीच्या गुणाने बदलले जाऊ शकतात)

पुन्हा, समीकरण (1) असे लिहिले जाऊ शकते

$$B(m,n)=\int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy+\int_1^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy \qquad (2)$$

$R.H.S.$ मधील दुसरे इंटिग्रल सोडवण्यासाठी, $y=\frac{1}{x}$ ठेवा , जेणेकरून $dy=-\frac{1}{x^2}\,dx$ आणि x हा 1 ते 0 पर्यंत बदलेल.

म्हणून $$\int_1^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy=\int_1^0\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\frac{x^{m+n}}{(1+x)^{m+n}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_0^1\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad (3)$$

समीकरण (3) वापरून , (२) असे बनते

$$B(m,n)=\int_0^1\frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy+\int_0^1\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dy+\int_0^1\frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \quad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(y)\,dy\right]$$

म्हणून $$B(m,n)=\int_0^1\frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

iv. हे सिद्ध करण्यासाठी $B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$

आपल्याला माहित आहे कि $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$x=\sin^2\theta$ ठेवल्यावर $\Rightarrow$ $dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ आणि $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$B(m,n)=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta)^{m-1}(1-\sin^2\theta)^{n-1}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

म्हणून $$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

विशिष्ट प्रकार :

जेव्हा $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}$, वरील समीकरण असे होईल,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}1.d\theta=2.\frac{\pi}{2}=\pi$$

v. सिद्ध करा कि

$$(a-b)^{m+n-1}B(m,n)=\int_a^b(x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx$$

आपल्याला माहित आहे कि

$$B(m,n)=\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}\,dy$$

समजा $y=\frac{x-b}{a-b}$,

$\Rightarrow$ $dy=\frac{dx}{a-b}$ आणि y हा b ते a पर्यंत बदलेलं.

$\therefore$ $$B(m,n)=\int_b^a\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{m-1}\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)^{n-1}\frac{dx}{a-b}$$

$$= \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1}\, dx$$

$\therefore \quad \int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1}\, dx = (a-b)^{m+n-1} B(m, n)$

म्हणून $\quad \int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1}\, dx = (a-b)^{m+n-1} B(m, n)$

1.3.3 बीटा आणि गामा फंक्शनमधील संबंध

हे सिद्ध करण्यासाठी $\quad B(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m > 0, n > 0$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे कि

$$\frac{\Gamma(n)}{z^n} = \int_0^\infty e^{-zy}\, y^{n-1}\, dy \qquad \ldots (1)$$

किंवा
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty z^n\, e^{-zy}\, y^{n-1}\, dy \qquad \ldots (2)$$

तसेच
$$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^m\, e^{-zy}\, y^{m-1}\, dy \qquad \ldots (3)$$

आता समीकरण (2) ला दोन्ही बाजूंनी $e^{-z}.z^{m-1}$ ने गुणाकार करून , आपल्याला मिळेल

$$\Gamma(n)\, e^{-z}.z^{m-1} = \int_0^\infty z^{m+n-1}\, e^{-zy}\, y^{n-1} e^{-z}\, dy$$

$$= \int_0^\infty z^{m+n-1}\, e^{-(y+1)z}\, y^{n-1}\, dy$$

दोन्ही बाजूंना z च्या संदर्भात 0 ते ∞ मध्ये इंटिग्रेशन करून, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma(n) \int_0^\infty e^{-z}.z^{m-1}\, dz = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty z^{m+n-1}\, e^{-(y+1)z}\, dz \right] y^{n-1}\, dy$$

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(1+y)^{m+n}}\, y^{n-1}\, dy \qquad \text{[गुणधर्म (1) व (3) वापरून]}$$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy$$

$$= \Gamma(m+n).\, B(m, n) \qquad \text{[1.3.2 चे गुणधर्म (1) चे (iii) वापरून]}$$

म्हणून
$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad m > 0, n > 0$$

डिडक्शन (i), सिद्ध करा कि $\quad \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे कि

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy$$

$m + n = 1$ असे निवडा कि , म्हणजे $\quad$ m = (1 - n)

$\therefore \qquad \dfrac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \dfrac{y^{n-1}}{1+y}\,dy$

$\Rightarrow \qquad \Gamma(1-n)\Gamma(n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi} \qquad \left[\because\ \Gamma(1)=1, \int_0^\infty \dfrac{y^{n-1}}{1+y}\,dy = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}, 0<n<1\right]$

जेथे $0<n<1$

डिडक्शन (ii), सिद्ध करा कि $\qquad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे कि

$$\Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad \text{म्हणून}$$

$n=\dfrac{1}{2}$ ठेऊन आपल्याला मिळेल

$$\therefore \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

डिडक्शन (iii), सिद्ध करा कि

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \sin^n\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m>-1, n>-1$$

सिद्धता: समजा

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \sin^n\theta\, d\theta$$

$\sin^2\theta = x$ ठेवल्यावर

$$\Rightarrow \qquad 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dx$$

$$\Rightarrow \qquad d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

तसेच, जेव्हा $\theta=0, x=0$ आणि जेव्हा $\theta=\dfrac{\pi}{2}, x=1$

$$\therefore \qquad I = \int_0^1 (1-x)^{\frac{m}{2}}.x^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n-1}{2}}.(1-x)^{\frac{m-1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}-1}(1-x)^{\frac{m+1}{2}-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \qquad [\because B(n,m) = B(m,n)]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \qquad \left[\because B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\right]$$

म्हणून $$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m > -1, n > -1$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.52 इंटीग्रल $\int_0^1 x^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^5 dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. समजा $\sqrt{x} = y \quad \Rightarrow \quad x = y^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2y\,dy$

$\therefore$ दिलेल्या इंटीग्रल वरून

$$\int_0^1 y^8 (1-y)^5 . 2y\,dy = 2\int_0^1 y^{10-1} (1-y)^{6-1} dy$$

$$= 2\,B(10,6) = 2\frac{\Gamma(10)\Gamma(6)}{\Gamma(16)} = \frac{2.9!5!}{15!} = \frac{1}{15015} \quad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.53. $\int_0^1 \left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}} dx$ मूल्य शोधा.

उकल. समजा $x^3 = y \quad \Rightarrow \quad x = y^{1/3} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} y^{-2/3}\,dy$

$\therefore$ दिलेल्या इंटीग्रल वरून

$$\int_0^1 \left(1-x^3\right)^{-1/2} dx = \int_0^1 (1-y)^{-1/2} . \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{1}{3}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1} dy$$

$$= \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \quad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.54 इंटिग्रल $\int_0^1 y^m \left(1-y^p\right)^n dy$ बीटा फंक्शन मध्ये व्यक्त करा आणि $\int_0^1 y^5 \left(1-y^3\right)^{10} dy$ चे मूल्य शोधा.

उकल. समजा $y^p = z \quad \Rightarrow y = z^{1/p} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz$

$$\therefore \qquad \int_0^1 y^m \left(1-y^p\right)^n dy = \int_0^1 z^{\frac{m}{p}} (1-z)^n . \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^1 z^{\frac{m+1}{p}-1} (1-z)^{\overline{n+1}-1} dz = \frac{1}{p} B\left(\frac{m+1}{p}, n+1\right) \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) मध्ये $m=5,\ p=3,\ n=10$, ठेऊन आपल्याला मिळेल

$$\int_0^1 y^5\left(1-y^3\right)^{10}\,dy=\frac{1}{3}B(2,11)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)\Gamma(11)}{\Gamma(13)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1.\Gamma(1)\Gamma(11)}{12.11.\Gamma(11)}$$

$$=\frac{1}{3\times12\times11} \qquad \left[\because \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\right]$$

$$=\frac{1}{396}$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.55. $\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{(1+x)^{24}}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. समजा

$$I=\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{(1+x)^{24}}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^8}{(1+x)^{24}}\,dx-\int_0^\infty \frac{x^{14}}{(1+x)^{24}}\,dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{(1+x)^{9+15}}\,dx-\int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{(1+x)^{15+9}}\,dx$$

$$=B(9,15)-B(15,9)$$

$$=0 \qquad \left[\because B(m,n)=B(n,m)\right]$$

उदाहरण 1.56. $\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$ हे सिद्ध करा.

उकल. समजा

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$

$\cos\theta=t$ ठेवल्यावर $\quad\Rightarrow\ -\sin\theta\,d\theta=dt\ \Rightarrow\ d\theta=-\frac{d\theta}{\sqrt{1-t^2}}$

$\therefore$

$$I=-\sqrt{2}\int_1^0\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\,.\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

पुन्हा $t^2=\sin\theta$ ठेऊन $\quad\Rightarrow 2t\,dt=\cos\theta\,d\theta$

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}\,.\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta\cos^0\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \qquad \ldots(1)$$

म्हणून

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\pi\sqrt{2}$$

$\therefore$ समीकरण (1) पासून प्राप्त होईल

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 . \sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$$ (अशा प्रकारे सिद्ध केले)

उदाहरण 1.57. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. समजा $$I = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$$

$x^6 = y$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow x = y^{1/6} \Rightarrow dx = \frac{1}{6} y^{-5/6}\,dy$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty \frac{y^{1/6}}{(1+y)}.\frac{1}{6} y^{-5/6}\,dy = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{-2/3}}{1+y}\,dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}\,dy = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} \qquad \left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \Gamma(1) = 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

उदाहरण 1.58. सिद्ध करा $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$

उकल. आपल्याला माहित आहे कि

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \cos^0\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \qquad \ldots (1)$$

आता, समजा $$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta\cos^0\theta\,d\theta \times \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\theta\cos^0\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$ [समीकरण (1) वरून]

$$=\frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4.\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=\pi \qquad \text{(सिद्ध केले)} \qquad \left[\because \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\right]$$

उदाहरण 1.59. दाखवा कि $\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^3}\,dx=\frac{5\pi\sqrt{2}}{128}$.

उकल. $x=\sqrt{\tan\theta}$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow dx=\frac{1}{2\sqrt{\tan\theta}}.\sec^2\theta\,d\theta$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\tan\theta.\frac{1}{2}(\tan\theta)^{-1/2}\sec^2\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{1/2}(\sec\theta)^{-4}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\cos^{7/2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{1}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{128}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{128}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{5\pi\sqrt{2}}{128} \qquad \text{(सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.60. इंटीग्रल $\int_0^\infty e^{-x^{1/3}}dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल. $x^{1/3}=y$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow x=y^3 \quad \Rightarrow dx=3y^2\,dy$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty e^{-x^{1/3}}dx=\int_0^\infty e^{-y}.3y^2dy$$

$$=3\int_0^\infty e^{-y}y^{3-1}dy=3\Gamma(3)=3.2!=6 \qquad \textbf{(उकल)}$$

1.3.4 डुप्लीकेशन फॉर्म्युला

$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p),\ p>0$ हे दाखवण्यासाठी.

उकल. आपल्याला माहित आहे कि

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) मध्ये $n=m$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m+1)} = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\theta)^m \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta\cos\theta)^m \, d\theta = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^m \, d\theta$$

पुन्हा $2\theta = \phi \Rightarrow d\theta = \frac{d\phi}{2}$, ठेवल्यावर आपल्याला मिळते

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m+1)} = \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi} \sin^m \phi \frac{d\phi}{2}$$

$$= \frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2} \sin^m \phi \cos^0 \phi \frac{d\phi}{2}$$

$$\left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx,\ f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

असे समजा $\qquad \frac{m+1}{2} = p \Rightarrow m = 2p-1$, जेथे $p > 0$

$$\therefore \qquad \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p), \text{ जेथे } p > 0$$

जो डुप्लीकेशन फॉर्म्युला म्हणून ओळखला जातो.

डिडक्शन (i) दिलेले सिद्ध करण्यासाठी

$$2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1),$$

m च्या सर्व वास्तविक मूल्यांसाठी.

सिद्धता: डुप्लीकेशन सूत्रामध्ये $2p - 1 = m$ ठेवा, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\Gamma(m+1)$$

$$\Rightarrow \qquad 2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1) \qquad \text{(सिद्ध केले)}$$

डिडक्शन (ii) दिलेले सिद्ध करण्यासाठी

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{2^m.m!}\sqrt{\pi},\ \text{जेथे } m>0$$

सिद्धता: आपल्याकडे आहे

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}=\frac{(2m-1)!}{(m-1)!}=\frac{2m.(2m-1)!}{2m.(m-1)!}=\frac{(2m)!}{2.m!} \quad \ldots (1)$$

आता डुप्लिकेशन सूत्र वापरून, आपल्याकडे असेल

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\frac{(2m)!}{2.m!} \quad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

$$=\frac{(2m)!}{2^m.m!}\sqrt{\pi} \quad \text{(सिद्ध केले)}$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.61 सिद्ध करा $B(n,n)=2^{1-2n}B\left(n,\frac{1}{2}\right)$

उकल. दिलेले आहे

$$B\left(n,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2n)2^{1-2n}} \quad \text{[डुप्लीकेशन सूत्रावरून]}$$

$$=\frac{B(n,n)}{2^{1-2n}}$$

$$\Rightarrow \quad B(n,n)=2^{1-2n}B\left(n,\frac{1}{2}\right)$$

उदाहरण 1.62 सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2$

उकल . डुप्लीकेशन सूत्रानुसार, आपल्याकडे आहे

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$$

$m=\frac{1}{6}$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \ldots (1)$$

पुन्हा, आपल्याला माहित आहे कि

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$n=\frac{1}{3}$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (2) वापरून, (1) आशाप्रकारे मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}}.\frac{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi}=\frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2$$ (सिद्ध केले)

उदाहरण 1.63. बीटा-गामा फंक्शन्स वापरून हे $\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=1$ दाखवा.

उकल. समजा
$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \quad \ldots(1)$$

$\frac{\pi x^2}{2}=y$ ठेऊन, $\Rightarrow x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y^{1/2}$

$$\Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)y^{-1/2}\,dy$$

$$\therefore \quad I=2.\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^{-1/2}\cos y\,dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^{-1/2}\cos y\,dy$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^{-1/2}e^{-iy}\,dy$$ चा वास्तविक भाग $\left[\because e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta\right]$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-iy}\,dy$$ चा वास्तविक भाग

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{e^{i\pi/2}}}$$ चा वास्तविक भाग $\left[\because \int_{0}^{\infty}e^{-kx}x^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(n)}{k^n}\right]$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}} \text{ चा वास्तविक भाग} \qquad \left[\because\ i = e^{i\pi/2}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} \text{ चा वास्तविक भाग}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{[डी-मोईवर्स प्रमेय वापरून]}$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \text{(सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.64 बीटा-गामा फंक्शन्स वापरून $\int_0^\infty \cos\left(\lambda^2 x^2\right) dx$ चे मूल्य काढा .

उकल. समजा $\quad I = \int_0^\infty \cos\left(\lambda^2 x^2\right) dx$

$x^2 = z$ ठेऊन,

$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\, dz$

$\therefore$

$$I = \int_0^\infty \cos\left(\lambda^2 z\right) \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} \cos\lambda^2 z\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} e^{i\lambda^2 z}\, dz \text{ चा वास्तविक भाग}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(i\lambda^2\right)^{1/2}} \text{ चा वास्तविक भाग}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda\left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2}} \text{ चा वास्तविक भाग} \qquad \left[\because\ i = e^{i\pi/2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} \text{ चा वास्तविक भाग} \qquad \left[\because \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{[डी-मोइवर्स प्रमेय वापरून]}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.65 बीटा-गामा फंक्शन्स वापरून $\int_0^1 \log\Gamma(y)\, dy$ चे मूल्य काढा.

उकल. समजा $\quad I = \int_0^1 \log\Gamma(y)\, dy \qquad \ldots(1)$

किंवा $\quad = \int_0^1 \log\Gamma(1-y)\, dy \qquad \ldots(2)$

समीकरण (1) आणि (2) यांची बेरीज करून , आपल्याला मिळेल

$$2I = \int_0^1 \left[\log\Gamma(y) + \log\Gamma(1-y)\right] dy$$

$$= \int_0^1 \log\left[\Gamma(y)\Gamma(1-y)\right] dy$$

$$= \int_0^1 \log\left(\frac{\pi}{\sin \pi y}\right) dy \qquad \left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \int_0^1 \left[\log \pi - \log\sin \pi y\right] dy$$

$$= \log\pi [y]_0^1 - \int_0^\pi \log\sin z . \frac{1}{\pi}\, dz$$ [द्वितीय इंटिग्रलसाठी $\pi y = z$ ठेऊन]

$$= \log\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \log\sin z\, dz \quad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx,\ f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$= \log\pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right) \qquad \left[\because \int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2\right]$$

$$= \log\pi + \log 2 = \log 2\pi$$ [उदाहरण 1.31 वरून]

$$I = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

उदाहरण 1.66.सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{3}{2} - m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) = \left(\frac{1}{4} - m^3\right)\pi\sec\pi m,$ दिलेल्या अटीनुसार $-1 < 2m < 1$

उकल. $$L.H.S = \Gamma\left(\frac{3}{2} - m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - m\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)\right].\left(\frac{1}{2} + m\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right).\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) = \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\Gamma\left(\frac{1-2m}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1-2m}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1-2m}{2}\right)\pi}\right] = \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi m\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\frac{\pi}{\cos\pi m} = \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\pi\sec\pi m$$ (सिद्ध केले)

उदाहरण 1.67. दाखवा कि $\int_0^{\pi/2} \tan^n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}, -1 < n < 1$

उकल. समजा $$I = \int_0^{\pi/2} \tan^n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\cos^{-n}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2} \qquad \text{(सिद्ध केले)}$$

अभ्यास 1.6

1. खालील इंटिग्रलचे मूल्य काढा.

   a. $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$ b. $\int_0^\infty \left(8-x^3\right)^{-1/3} dx$

   c. $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{-1/2} dx \int_0^\infty x^2 e^{-x^4}\, dx$ d. $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$

   e. $\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} dt$ f. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx$

   g. $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t-t^2}}$ h. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\log t}}$

2. सिद्ध करा कि $\int_0^1 t^m (\log t)^n dt = \frac{(-1)^n .n!}{(m+1)^{n+1}}$, जेथे n एक धन पूर्णांक आहे आणि $m > -1$.

3. दाखवा कि $\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(a+bt)^{m+n}} dt = \frac{B(m,n)}{a^n b^m}$, जेथे m, n, a आणि b धन पूर्णांक आहेत.

4. सिद्ध करा कि $\int_0^\pi \sqrt{\frac{\sin\theta}{(5+3\cos\theta)^n}}\, d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{2\sqrt{2\pi}}$.

5. खलील इंटिग्रलचे मूल्य काढा.

   i $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$ ii. $\int_0^1 x^m \left(1-x^m\right)^p dx$ iii. $\int_0^1 \frac{dt}{\left(1-t^n\right)^{1/2}}$ iv. $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\, dx$

6. दिलेले मूल्य काढा.

   i. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ ii. $\Gamma\left(-\frac{15}{2}\right)$

7. खालील इंटिग्रलचे मूल्य काढा.

   i. $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+ax)(1-x)^m}$ iii. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx \times \int_0^{\pi/2} \sin^{q+1} dx$

8. दाखवा कि $1.3.5...(2m-1) = \frac{2^m\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$.

9. सिद्ध करा कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

10. सिद्ध करा कि $\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\tan\theta}+\sqrt{\sec\theta}\right)d\theta=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$

उत्तरे

1. a. $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ c. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ d. $\frac{45}{8}$

e. $\sqrt{\frac{\pi}{p}},\ p>0$ f. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ g. π h. $\sqrt{\pi}$

2. i. $\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ ii. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(p+1+\frac{m+1}{n}\right)}$

iii. $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$ iv. $\frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

6. i. $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ ii. $\frac{2^8\sqrt{\pi}}{1.3.5.7\ldots15}$

7. i. $\frac{\left[\Gamma(1/4)\right]^2}{6\sqrt{2\pi}}$ ii. $\frac{1}{(1+a)^m}\cdot\frac{\pi}{\sin m\pi}$ iii. $\frac{\pi}{2(q+1)}$

मनोरंजक तथ्य

फेनमन आकृतींवरून (ज्यात उपअणुकणांचे चित्रमय प्रतिनिधित्व समाविष्ट आहे), मॅक्सवेल-बोल्ट्झमन सांख्यिकी आणि वितरण (जे रेणूंचा वेग निश्चित करण्यासाठी भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र आणि सांख्यिकीय यांत्रिकीमध्ये वापरले जाते), या फंक्शन्समध्ये काही वास्तविक मूलभूत अनुप्रयोग समाविष्ट आहेत.

दैनंदिन जीवनामध्ये उपयोग

- सशक्त आण्विक बलामध्ये त्याचे बरेच अनुप्रयोग आहेत.
- जेव्हा आपण काळ व्यवस्थापन समस्या सोडवतो, तेव्हा बीटा वितरण वापरले जाते.
- गामा फंक्शनचा वापर वेळेवर आधारित घटना शोधण्यासाठी केला जातो, जसे की कोणत्याही गोष्टीचे आयुष्य.
- पॅकिंग समस्यांमध्ये, घन गोलामध्ये किंवा घनामध्ये गोल अधिक चांगले बसेल.

व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

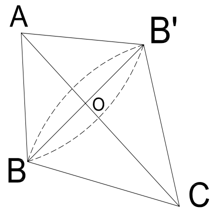
Beta & Gamma Function

1.4 पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि परिक्रमणाचे घनफळ निश्चित करण्यासाठी डेफिनाईट इंटिग्रेशनचे उपयोग

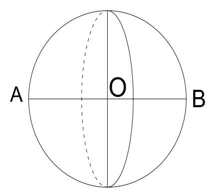
जर प्रतल क्षेत्र त्याच्या स्वतःच्या प्रतलात एका निश्चित रेषेभोवती फिरत असेल, तर प्रतल क्षेत्राने तयार केलेल्या आकृतीला घनपदार्थाच्या परिक्रमणाचे घनफळ म्हणतात आणि त्यामुळे निर्माण होणाऱ्या पृष्ठभागाला परिक्रमाचा पृष्ठभाग म्हणतात आणि ज्या ठराविक रेषेबद्दल घन फिरतो त्याला परिक्रमाचा अक्ष म्हणतात.

उदाहरण:

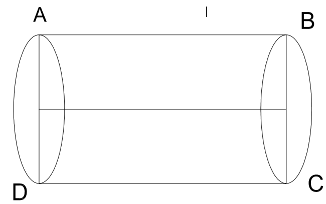
1. जेव्हा काटकोन त्रिकोण त्याच्या कर्ण या अक्षावर फिरवला तेव्हा दुहेरी शंकू तयार होतो.
2. जेव्हा वर्तुळ त्याच्या व्यासाभोवती फिरवले जाते तेव्हा एक गोल तयार होतो.



आकृति 1.17



आकृति 1.18



आकृति 1.19

3. जेव्हा चौरस त्याच्या कोणत्याही बाजूने फिरवला जातो, तेव्हा एक राईट सर्क्युलर सिलेंडर तयार होतो.

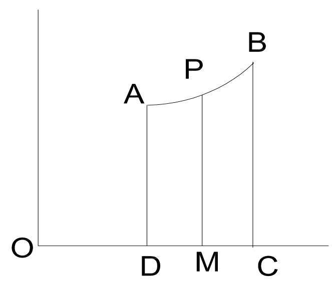
1.4.1 घन पदार्थांच्या (solid) परिक्रमाचे (Revolution) घनफळ

1.4.1.1 कार्टेशियन वक्रांसाठी

1. x-अक्षांशी संबंधित रोटेशन: वक्र $y = f(x)$, x- अक्ष आणि ऑर्डिनेट, $x = a$, $x = b$, ने तयार केलेल्या क्षेत्रांच्या x अक्षांभोवती रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ = $\int_a^b \pi y^2 \, dx$

2. y-अक्षांशी संबंधित रोटेशन: वक्र $x = f(y)$, y- अक्ष आणि अबसिसा, $y = a$, $y = b$, ने तयार केलेल्या क्षेत्रांच्या y अक्षांभोवती रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ = $\int_a^b \pi x^2 \, dy$

3. कोणत्याही अक्षाभोवती परिक्रमण: वक्र AB, अक्ष CD आणि X अक्षावरील परपेंडीकुलर्स AC, BD यांनी निश्चित केलेल्या सीमा क्षेत्राचा कोणताही अक्ष CD रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ, $\int_{OC}^{OD} \pi (PM)^2 \, d(OM)$ हे आहे. जेथे O हा CD अक्षा वरील एक निश्चित बिंदू आहे आणि PM हा वक्र AB च्या कोणत्याही बिंदू P पासून CD वर लंब आहे.



आकृति 1.20

1.4.1.2 पॅरामेट्रिक वक्रांसाठी:

1. वक्र $x = f(t),\ y = \phi(t),\ x$- अक्ष आणि ऑर्डिनेट या बिंदूंच्या $t = a,\ t = b$ तयार केलेल्या क्षेत्राच्या x- अक्षांच्या रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ $\int_a^b \pi x^2 \frac{dy}{dt}\, dt$ इतके आहे.
2. वक्र $x = f(t),\ y = \phi(t),\ y$- अक्ष आणि अबसिसा $t = a,\ t = b$ या बिंदूंनी तयार केलेल्या क्षेत्राच्या y-अक्षांच्या रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ $\int_a^b \pi y^2 \frac{dx}{dt}\, dt$ इतके आहे.
3. दोन घन पदार्थाच्या परिक्रमामुळे तयार होणारे घनफळ: $y = f_1(x)$ आणि $y = f_2(x)$ आणि $x = a,\ x = b$ या वक्रांनी तयार केलेल्या क्षेत्राच्या x- अक्षांभोवती रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ $\int_a^b \pi\left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] dx$ जेथे $f_1(x)$ वरच्या वक्रांचे ऑर्डिनेट आहे आणि $f_2(x)$ खालच्या वक्राचे आहे.

1.4.1.3 पोलार वक्रांसाठी:

वक्र $r = f(\theta)$ आणि त्रिज्या वेक्टर $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ ने तयार केलेल्या क्षेत्राच्या रोटेशनमुळे निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे चे घनफळ

1. इनिशियल लाईन OX $(\theta = 0)$ च्या संबंधीत, $\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\, d\theta$
2. लाईन OY $(\theta = \frac{\pi}{2})$ च्या संबंधीत, $\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \cos\theta\, d\theta$

1.4.2 फिरणाऱ्या घन पदार्थाचे पृष्ठफळ

1.4.2.1 कार्टेशियन वक्रांसाठी

$y = f(x),\ x$- अक्ष आणि ऑर्डिनेट $x = a,\ x = b$ या वक्रानी तयार केलेल्या क्षेत्राच्या x- अक्षाभोवती फिरून निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे चे वक्र पृष्ठफळ $\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx$ आहे.

जेथे $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

1.4.2.2 पॅरामेट्रिक वक्रांसाठी:

वक्र $x = f(t),\ y = (t),\ x$- अक्ष आणि $t = a,\ t = b$ या बिंदूंनी तयार केलेले क्षेत्र x- अक्षाभोवती फिरवल्याने निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे वक्र पृष्ठफळ $\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dt}\, dt$, आहे, जेथे $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

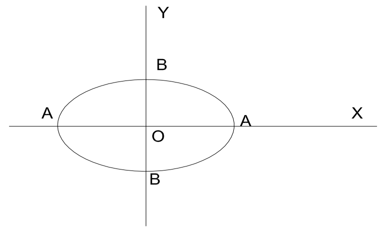
1.4.2.3 पोलार वक्रांसाठी:

वक्र $r = f(\theta)$ आणि त्रिज्या वेक्टर $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ ने तयार केलेल्या क्षेत्राच्या इनिशियल लाइनभोवती फिरून तयार झालेल्या घन पदार्थाचे वक्र पृष्ठफळ

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi y \frac{ds}{d\theta}\, d\theta$$ आहे, जेथे $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ आणि $y = r\sin\theta$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.68 एलिप्स $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ने त्याच्या मेजर अक्षाभोवती फिरून तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ काढा.



आकृति 1.21

उकल. एलिप्स चे समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ आहे.

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

एलिप्स हे y- अक्षाला सममितीय आहे.

एलिप्स ने x-अक्षाभोवती तयार केलेल्या घन पदार्थाचे आवश्यक असलेले घनफळ

$$= 2\int_0^a \pi y^2\, dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$$

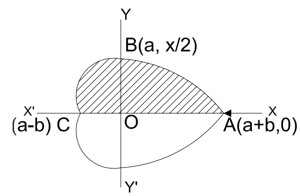
$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

उदाहरण 1.69 लिमाकोन $r = a + b\cos\theta,\ a > b$ ने इनिशियल लाईन भोवती फिरून तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ काढा.

उकल. आपण फक्त इनिशियल लाईनच्या वरचा छायांकित भाग इनिशियल लाईन भोवती फिरूवू

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}\left(a+b\cos\theta\right)^2 \sin\theta\, d\theta$$

$a+b\cos\theta = t$ ठेऊन, $\Rightarrow\ b\sin\theta\, d\theta = -\,dt$



आकृति 1.22

$$= \frac{2}{3}\pi\int_{a+b}^{a-b} t^2\left(-\frac{dt}{b}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{\pi}{b}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{a+b}^{a-b} = -\frac{2\pi}{3b}\left[\frac{-6a^2b-2b^3}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{9}\pi\left(b^2+3a^2\right)$$ **(उकल)**

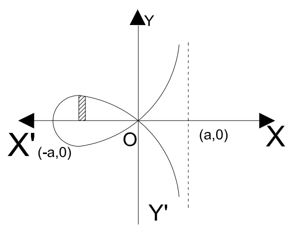
उदाहरण 1.70 वक्र लूप $(a - x)\, y^2 = (a + x)\, x^2$ च्या x-अक्षाभोवती फिरण्यामुळे निर्माण झालेल्या घन पदार्थाचे घनफळ शोधा.

उकल. वक्राचा आकार आकृतीमध्ये दर्शविला आहे.

वक्र x-अक्ष ला सममितीय आहे.

$\therefore$ आवश्यक घनफळ $V = \displaystyle\int_{-a}^{0}\pi y^2\, dx = \int_{-a}^{0}\pi\frac{(a+x)}{(a-x)}x^2\, dx$

समजा $a-x=z,\ dx=-\,dz$



आकृति 1.23

जेव्हा $x = -a$, तेव्हा $z = 2a$

आणि $x = 0$ तेव्हा $z = a$

$$\therefore \quad V = \pi \int_{2a}^{a} \frac{(a+a-z)}{z}(a-z)^2(-dz) = \pi \int_{a}^{2a} \frac{2a-z}{z}(a-z)^2 dz$$

$$= \pi \int_{a}^{2a} \frac{2a-z}{z}\left(a^2+z^2-2az\right) dz$$

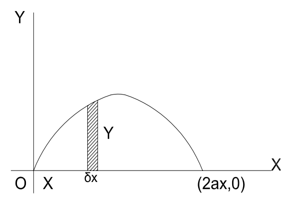
$$= \pi \int_{a}^{2a} \left[\frac{2a^3}{z} + 2az - 4a^2 - a^2 - z^2 + 2az\right] dz$$

$$= \pi \int_{a}^{2a} \left[\frac{2a^3}{z} + 4az - z^2 - 5a^2\right] dz = \pi\left[2a^3 \log z + 2az^2 - \frac{z^3}{3} - 5a^2 z\right]_a^{2a}$$

$$= \pi\left[\left\{2a^3 \log 2a + 2a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{3} - 5a^2(2a)\right\} - \left\{2a^3 \log a + 2a^3 - \frac{a^3}{3} - 5a^3\right\}\right]$$

$$= 2\pi a^3\left[\log 2 - \frac{2}{3}\right]$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.71 सायकलॉइड (Cycloid) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ च्या संपूर्ण कमानी खालच्या क्षेत्राच्या x- अक्षाभोवती फिरण्यामुळे निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे घनफळ शोधा



आकृति 1.24

उकल. समजा कमानाखालील क्षेत्र y-अक्षाला ला समांतर रेषांद्वारे रुंदी dx च्या n पट्ट्यांमध्ये आणि y- अक्षा पासून x अंतरावर विशिष्ट पट्टीची उंची y मध्ये विभाजित केली आहे.

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 \, dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1-\cos\theta)^2 \, a(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^3 (1-\cos\theta)^3 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^3 \times \left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

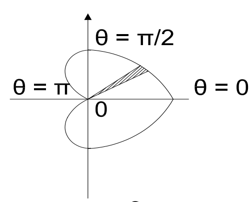
$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6\phi \, d\phi \qquad [\theta = 2\phi]$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6\phi \, d\phi \qquad [\because \sin(\pi-\phi) = \sin\phi]$$

$$= 32\pi a^3 \frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}.\frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$ [रिडक्शन सूत्र वापरून]

उदाहरण 1.72 कार्डिओइड $r = a(1 + \cos\theta)$ इनिशियल लाईन भोवती फिरवून निर्माण केलेल्या पृष्ठभागाचे घनफळ शोधा.

उकल. निर्माण झालेले घनफळ (V) $= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} r^3 \sin\theta \, d\theta$



आकृति 1.25

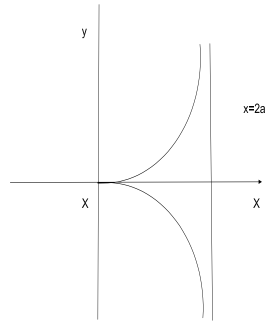
$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 \sin\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 (-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left[\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi a^3\left[\frac{(1+1)^4}{4}\right] = \frac{8}{3}\pi a^3$$

उदाहरण 1.73 सिसॉईड $y^2(2a-x)=x^3$ ला त्याच्या असिम्प्टोडभोवती फिरवल्यामुळे निर्माण झालेल्या घन पदार्थाचे घनफळ $2\pi^2a^3$ आहे हे दाखवा.

उकल. या वक्राचा असिम्प्टोट $x = 2a$ हा आहे.



आकृति 1.26

आवश्यक घनफळ $V = 2\pi\int_0^{2a}(2a-x)^2\,dy$ … (1)

वक्राच्या समीकनावरून

$$y=\frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}$$

$$dy=\frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}\,dx$$

जेव्हा y चे मूल्य 0 पासून ∞ पर्यंत बदलते आणि x चे मूल्य 0 ते $2a$ पर्यंत असते.

$$V = 2\pi\int_0^{2a}(2a-x)^2\,dy = 2\pi\int_0^{2\pi}(2a-x)^2\frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^{2a}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}\,dx + 4\pi a\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

$x = 2a\sin^2\theta$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल,

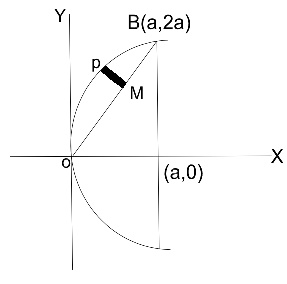
$$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2}2a\times 4a\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \pi\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \qquad V=\pi\left[\frac{(2ax-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{2a} + 4\pi a\frac{\pi a^2}{2} = 0+2\pi^2a^3 = 2\pi^2a^3$$

उदाहरण 1.74 जीवेच्या संदर्भात चार काटकोनाच्या माध्यमातून जानारया आणि व्हर्टेक्स आणि लॅटस रेकतम चे टोक यांना जोडणारया जीवेने राईट पॅराबोला $y^2 = 4ax$ ला कापल्यामुळे तयार झालेले क्षेत्र. तयार झालेल्या घन पदार्थाचे घनफळ काढा.

उकल. पॅराबोलाचे समीकरण $y^2 = 4ax$ आहे

B चे निर्देशांक $(a, 2a)$ हे आहेत



आकृति 1.27

म्हणून OB चे समीकरण

$$y-0=\frac{2a-0}{a-0}(x-0)$$

$$\Rightarrow \qquad 2x-y=0$$

समजा $P(at^2, 2at)$ हा चाप OB वर एक बिंदू आहे आणि लंब PM हा P पासून OB पर्यंत आहे.

$$PM=\frac{2at^2-2at}{\sqrt{4+1}}=\frac{2at(t-1)}{\sqrt{5}}$$

$$OP = \sqrt{\left(at^2 - 0\right)^2 + \left(2at - 0\right)^2} = a\,t\sqrt{t^2 + 4}$$

$$OM^2 = OP^2 - PM^2 = a^2t^2\left(t^2 + 4\right) - \frac{4a^2t^2\left(t-1\right)^2}{5}$$

$$OM^2 = \frac{a^2t^2\left(t+4\right)^2}{5}$$

$$OM = \frac{a\,t\left(t+4\right)}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ आवश्यक घनफळ

$$V = \int_{t=0}^{1} \pi\left(PM\right)^2 d\left(OM\right) = \pi\int_0^1 \frac{4a^2t^2\left(t-1\right)^2}{5} d\left(\frac{a\,t\left(t+4\right)}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}}\int_0^1 t^2\left(t^2 - 2t + 1\right)\left(2t+4\right) dt = \frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}}\int_0^1 \left(2t^5 - 6t^3 + 4t^2\right) dt = \frac{2\pi a^3}{15\sqrt{5}}$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.75 इलिप्स $x^2 + 4y^2 = 16$ च्या मुख्य अक्षा भोवती फिरण्यामुळे निर्माण झालेल्या घन पदार्थाचे पृष्ठफळ शोधा.

उकल. इलिप्स चे समीकरण असे आहे

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

$$4y^2 = 16 - x^2 \quad \therefore\ y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{-2x}{\sqrt{16 - x^2}} = -\frac{x}{2\sqrt{16 - x^2}}$$

$$dy = -\frac{x}{2\sqrt{16 - x^2}}\, dx$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4\left(16 - x^2\right)}} = \sqrt{\frac{64 - 3x^2}{4\left(16 - x^2\right)}}$$

जेथे $y = 0$ आहे तेथे ईलिप्स छेदतो,

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

पहिल्या क्वाड्रंटमधील इलिप्सच्या वरच्या अर्ध्या भागासाठी x हा 0 ते 4 पर्यंत बदलतो.

इलिप्स हा y- अक्षाला सममितीय आहे

$\therefore$ आवश्यक पृष्ठफळ $= 2\times\int_0^4 2\pi y\frac{ds}{dx}\, dx = 4\pi\int_0^4 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2} \times \sqrt{\frac{64 - 3x^2}{4\left(16 - x^2\right)}}\, dx$

$$= \pi\int_0^4 \sqrt{64 - 3x^2}\, dx = \sqrt{3}\,\pi\int_0^4 \sqrt{\frac{64}{3} - x^2}\, dx$$

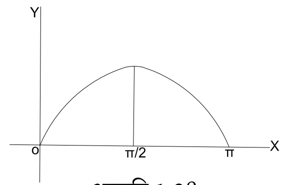
$$= \sqrt{3}\,\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{64}{3} - x^2} + \frac{64}{3\times 2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}\,x}{8}\right]_0^4$$

$$= \sqrt{3}\,\pi\left[2\sqrt{\frac{64}{3} - 16} + \frac{32}{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \sqrt{3}\,\pi\left[2\times\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{32}{3}\times\frac{\pi}{3}\right]=8\pi\left[1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.76 वक्र $y = \sin x$ चा एक चाप x-अक्षाभोवती फिरवून निर्माण झालेल्या परिभ्रमन पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ काढ़ा.

उकल : वक्र $y = \sin x$ चा एक चाप $(0,\pi)$ मध्ये आहे. आणखी



आकृति 1.28

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\cos^2 x}$$

आवश्यक पृष्ठफळ $$= 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

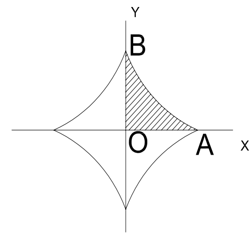
$$= 2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \qquad [\,t=\cos x \text{ ठेवा} \Rightarrow dx = -\sin x\,dx\,]$$

$$= -2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\left[\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}(t)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left[\left\{\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)\right\}-\left\{-\sqrt{2}-\sinh^{-1}(1)\right\}\right]=2\pi\left[\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)\right]$$

उदाहरण 1.77 एस्ट्रोईड $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ हे x अक्षाभोवती फिरवून तयार झालेल्या घनाचा पृष्ठभाग शोधा.

उकल : छायांकित भाग OAB, x-अक्षाच्या भोवती फीरू द्या.



आकृति 1.29

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}$$

$$=\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\times\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}$$

$$=3a\cos t\sin t$$

$\therefore$ पृष्ठभाग क्षेत्र $$= 2\int_0^{\pi/2}2\pi y\frac{ds}{dt}\,dt = 4\pi\int_0^{\pi/2}a\sin^3 t\times 3a\cos t\sin t\,dt$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt = 12\pi a^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2$$

उदाहरण 1.78 त्रिज्या 'a' असलेल्या वर्तुळाची एक चौकट त्याच्या टोकावरील स्पर्शकांनी बांधलेला आहे. दाखवा कि तयार झालेल्या पृष्ठभागांचे क्षेत्रफळ $\pi(\pi-2)a^2$ आहे.

उकल : समजा वर्तुळाचे समीकरण खलील प्रमाणे आहे,

$$x^2+y^2=a^2 \text{ किंवा } x=a\cos t,\ y=a\sin t$$

आणि $P(x, y)$ त्यावर कोणताही बिंदू असू शकतो.

$$PM = NA = a-x = a-a\cos t = a(1-\cos t)$$

$\therefore$ $$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=a$$

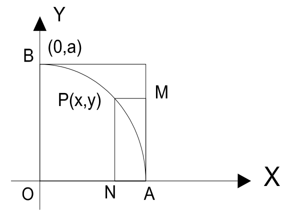
$\therefore$ पृष्ठभागाचे क्षेत्र $= \int_0^{\pi/2} 2\pi (PM) \times \frac{ds}{dt} \times dt$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} (1-\cos t)\, dt$$

$$= 2\pi a^2 [t - \sin t]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \pi a^2 (\pi - 2).$$



आकृति 1.30

उदाहरण 1.79 कार्डिओईड $r = a\,(1 + \cos\theta)$ ला आद्य रेषेभोवती फिरवल्यामुळे तयार झालेल्या घनाचा पृष्ठभाग शोधा.

उकल : कार्डिओईड आद्य रेषेला सममित आहे आणि त्याच्या वरच्या अर्ध्या भागासाठी , θ हा 0 पासुन π पर्यंत बदलतों.

तसेच $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2 (1+\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = a\sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\therefore$ आवश्यक पृष्ठभागचे क्षेत्र $= \int_0^{\pi} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\theta \times 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad [\because x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta]$

$$= 4\pi a \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2} \times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \times \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 16\pi a^2 (-2) \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= -32\pi a^2 \left[\frac{\cos^5\frac{\theta}{2}}{5}\right]_0^{\pi} = -\frac{32\pi a^2}{5}(0-1) = \frac{32\pi a^2}{5}$$

उदाहरण 1.80 परिघात '*a*' या परिघाचा पृष्ठभाग शोधा, वर्तुळ $r = a$ असे समीकरण करा.

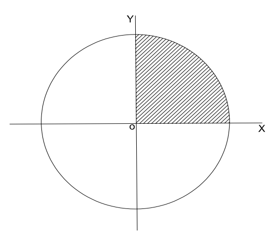
उकल : वर्तुळाचे समीकरण $r = a$ छायांकित भाग x- अक्षा भोवती फिरू द्या.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a$$

$\therefore$ $$S = 2\int_0^{\pi/2} 2\pi r\sin\theta \frac{ds}{d\theta} d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a\sin\theta \times a\, d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a^2 \sin\theta\, d\theta$$



आकृति 1.31

$$= 4\pi a^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$
$$= 4\pi a^2$$

अभ्यास 1.7

1. ॲस्ट्रोईड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
2. सायक्लोईड $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
3. वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ च्या लूप ला आद्य रेषेभोवती फिरवल्यामूळे तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
4. वक्र $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
5. वक्र $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ च्या $\theta = -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ च्या मधे स्थित चाप x अक्षाभोवती फिरते. अशा प्रकारे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
6. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ आणि $x = 0$, $y = 0$ यांनी बाउन्डेड क्षेत्र x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
7. वक्र $27ay^2 = 4(x - 3a)^2$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
8. x- अक्ष, वक्र $y^2 = 4ax$ आणि ऑर्डिनेट $x = 3a$ यांनी मिळून एक क्षेत्र तयार झाले जे x-अक्षा भोवती फिरते. त्यातून निर्माण होणारया क्षेत्राचे घनफळ शोधा.
9. सिद्ध करा कि दोन वक्र $y^2 = x^3$, $x^2 = y^3$ यांचा मधील क्षेत्र x- अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार होणारया घनाचे घनफळ $\frac{5\pi}{28}$ आहे.
10. ईलिप्स $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ हे त्याच्या मेजर अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार होणारया इलिप्सोइड चे पृष्ठफळ आणि घनफळ शोधा.
11. पॅराबोला $y^2 = 4ax$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या व्हर्टेक्स मधून जनारया स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे निर्माण झालेल्या रीलचे घनफळ शोधा.
12. पॅराबोला $y^2 = 4ax$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या व्हर्टेक्स मधून जनारया स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे निर्माण झालेल्या रीलचे पृष्ठफळ शोधा.
13. वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ साठी सिद्ध करा कि वक्राला आद्य रेषे भोवती फिरवल्यामूळे तयार होणारया क्षेत्राचे घनफळ $\frac{\pi a^2}{6\sqrt{2}}\left[3\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\right]$ हे आहे.
14. वक्र $\frac{y+8}{x} = x - 2$ आणि x- अक्ष यांचा मधील क्षेत्र हे रेषा $x + 5 = 0$ भोवती फिरवून तयार होणाऱ्या घनाचे घनफळ शोधा.
15. वक्र $3ay^2 = x(x - a)^2$ च्या लूपला x-अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
16. वक्र $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3}$ च्या लूपला x-अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ आणि घनफळ शोधा.
17. त्रिज्या 'a' असलेल्या वर्तुळाची एक चौकट त्याच्या कॉर्ड भोवती फिरते. त्याने तयार झालेल्या स्पिण्डल चे घनफळ $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}(10 - 3\pi)$ आहे हे सिद्ध करा.

उत्तरे

1. $\frac{12}{5}\pi a^2$ 2. $\frac{64}{3}\pi a^2$ 3. $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ 4. $2\pi a^3\left[\log 2-\frac{2}{3}\right]$

5. $\frac{16\pi a^2}{105}$ 6. $\frac{\pi a^3}{12}$ 7. $48\pi a^3$ 8. $18\pi a^3$

10. $2\pi ab=\sqrt{1-e^2}+e^{-1}\sin^{-1}e$ आणि $\frac{4\pi}{3}ab^2$ 11. $\frac{4\pi}{5}a^3$

12. $\pi a^2\left[3\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$ 14. 432π 15. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$

16. $\frac{3\pi}{4}, 3\pi$

मनोरंजक तथ्ये

- तुम्हाला माहीत आहे का, इलेक्ट्रिकल सर्किटमध्ये, विद्युत धारा आणि चार्ज यांच्यात एक संबंध आहे जो या संकल्पनेद्वारे मोजला जाऊ शकतो? (*https://www.math24.net/integrals-electric-circuits*)
- विविध उद्योगांमधील अभियांत्रिकी कार्य कोणत्याही वस्तूमानाचे केंद्र(सेंटर ऑफ मास) आणि जड़त्व आघूर्ण (मोमेंट ऑफ इनेर्शिया)शोधण्यासाठी या संकल्पनेच्या ज्ञानाचा वापर करतात.
- कोणतीही इमारत बांधताना आर्किटेक्ट या संकल्पनेचा वापर करतात.

दैनंदिन जीवनासाठी अनुप्रयोग

- या संकल्पनेचा उपयोग व्यवसाय आणि अर्थशास्त्र क्षेत्रात "लॉरेन्झ वक्र आणि गिनी गुणांक" मोजण्यासाठी आणि एकूण नफा वाढविण्यासाठी केला जातो.
- कोणत्याही वस्तूचे वस्तुमान आणि घनता शोधण्यासाठी भौतिकशास्त्रात उपयोग होतो.
- सरासरी बदल, घनफळ, त्रुटी अंदाज आणि पृष्ठफळ निश्चित करण्यासाठीही याचा वापर केला जातो.

व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

Application of Definite Integral - I

विषयात्मक सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

उदाहरण 1. इंटीग्रल $\int_{-3/2}^{10}\{2x\}\,dx$ चे मूल्य शोधा, जेथे $\{.\}$ हे x चा अंशभाग दर्शवितो .

उकल : आपल्याला माहीत आहे $f(x)=\{2x\}$ एक आवर्तकार्य ज्याचा कालावधी 12 आहे.

समजा

$$I=\int_{-3/2}^{10}\{2x\}\,dx=\int_{-3(1/2)}^{20(1/2)}\{2x\}\,dx$$

$$= 23\int_0^{1/2} 2x\,dx$$ (म्हणून $\{2x\} = 2x - [2x]$ आणि जेव्हा $x\,[0, 1/2], [2x] = 0$)

$$= \left|23x^2\right|_0^{1/2}$$

$$= \frac{23}{4}.$$

टिप्पणी: जर $f(x)$ एक आवर्तनी फंक्शन असेल आणि त्याचे आवर्तन(पिरिएड) p असेल तर $\int_{a/np}^{b/np} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,\ n \in I$

उदाहरण 2. दिलेल्या इंटीग्रल चे मूल्य शोधा $\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^4}\,dx$.

उकल : समजा $f(x) = x^3 e^{x^4}$ तेव्हा

$\therefore \quad f(-x) = (-x)^3 e^{(-x)^4} = -x^3 e^{x^4} = -f(x)$

म्हणून $f(x)$ एक विषम फंक्शन आहे.

$\therefore \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 e^{x^4}\,dx = 0.$

उदाहरण 3. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$ चे मूल्य शोधा .

उकल : समजा $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$

$x^n = \sin^2\theta$ ठेवून, $\Rightarrow x = \sin^{2/n}\theta$

$$dx = \frac{2}{n}\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)}.$$

उदाहरण 4. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ चे मूल्य शोधा.

उकल : समजा $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

$$\Rightarrow \quad dx = -2a\cos\theta\sin\theta\,d\theta + 2b\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2(b-a)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$x - a = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - a$$

$$= (b-a)\sin^2\theta$$

$$b - x = b - a\cos^2\theta - b\sin^2\theta$$

$$= (b-a)\cos^2\theta$$

$$\therefore \qquad I=\int_0^{\pi/2}\frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{(b-a)\sin\theta\cos\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}1.\,d\theta=\pi$$

उदाहरण 5. योग्य प्रतिस्थापनाद्वारे दाखवा, कि $\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt,\ x,\ y>0$

उकल : समजा $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+z}}$ म्हणून $\cos\theta=\frac{z^{1/2}}{\sqrt{1+z}}$

$$\cos\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}(1+z)^{-3/2}\,dz$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}\frac{1}{(1+z)^{x-1/2}}.\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{y-1}}\,\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\,dz=\frac{1}{2}B(y,x)$$

कारण,आपल्या कड़े आहे

$$B(x,y)=B(y,x)$$

म्हणून

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$$

उदाहरण 6. जर $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ तर सिद्ध करा कि $I_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2}$

उकल : दिलेले आहे $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$

$$=\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$$

$$I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n=\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2}$$

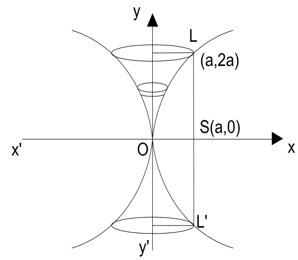
उदाहरण 7. पॅराबोला $y^2=4ax$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या व्हर्टेक्स मधून जाणा-या स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे तयार झालेल्या रीलचा वक्र पृष्ठफळ शोधा.

उकल : दीलेला पॅराबोला $y^2=4ax$ आहे.x ने डिफ्रनशीएट करुन,आपल्याला मिळेल

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}} = \sqrt{\frac{x+a}{x}}$$



आकृति 1.32

आवश्यक वक्र पृष्ठभाग हा चाप LOL' (LSL' लॅटस रेक्टम आहे)च्या व्हर्टेक्स मधून जाणाऱ्या स्पर्शिके भोवती फिरल्याने तयार झाला आहे.

वक्र x-अक्षाला सममित आहे आणि आर्क OL साठी, x हा 0 ते 1 पर्यंत बदलतो.

$\therefore$ आवश्यक पृष्ठफळ $S = 2\int_0^a 2\pi x \frac{ds}{dx}\, dx$

$$= 4\pi \int_0^a x\sqrt{\left(\frac{x+a}{x}\right)}dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{x^2+ax}\, dx$$

$$= 4\pi \int_0^a \sqrt{\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}}\, dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)\sqrt{x^2+ax} - \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4}\log\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{x^2+ax}\right\}\right]_0^a$$

$$\left[\because \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\{x+\sqrt{x^2-a^2}\right\}\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.a\sqrt{2} - \frac{a^2}{8}\log\left\{\frac{3a}{2}+a\sqrt{2}\right\} + \frac{a^2}{8}\log\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{3a^2}{4}\sqrt{2} - \frac{a^2}{8}\log\left\{\frac{\left(\frac{3a}{2}+a\sqrt{2}\right)}{a/2}\right\}\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2} - \log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

उदाहरण 8. शंकू $z = 3-\sqrt{x^2+y^2}$ आणि पॅराबोलाइड $z = 1+x^2+y^2$ यांनी तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.

उकल : संकेत, ध्रुवीय निर्देशकात रूपांतरित करा मग सोडवा.

उदाहरण 9. ईलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या जवळच्या व्हर्टेक्स मधून जनारया स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे तयार झालेल्या रीलचे वक्र पृष्ठफळ शोधा.

उकल : दिले ईलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ आहे.

ईलिप्सचे फोकस $(ae, 0)$ आहे, तिथे $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ ही इसेंट्रीसिटी दिली आहे.

फोकसमधून जाणाऱ्या आणि इलिप्सने आंतरखंडित केलेल्या लाईन सेगमेंटला लॅटस रेक्टम म्हणतात.

समजा त्रिज्या $(a - x)$ आणि जाडी dy च्या स्वरूपात एक घन घटक विचारात घ्या. या घटकाचे घनफळ $\pi(a-x)^2\ dy$ आहे. परिभ्रमन घनतेचे घनफळ आहे

$$V = \int_{-b^2/a}^{b^2/a} \pi(a-x)^2\ dy$$

$$= 2\int_0^{b^2/a} \pi(a-x)^2\ dy$$

$$= 2\pi\int_0^{b^2/a} \left(a^2 - 2ax + x^2\right) dy \quad [\text{ येथे } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ म्हणजेच } x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)]$$

$$= 2\pi\int_0^{b^2/a} \left\{a^2 - 2a.\frac{a}{b}\sqrt{\left(b^2 - y^2\right)} + \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)\right\} dx$$

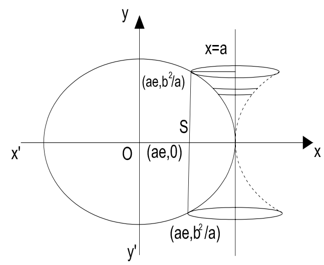
$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\int_0^{b^2/a} \left\{2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - y^2} - y^2\right\} dy$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[2b^2 y - 2b\left\{\frac{1}{2}y\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right\} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{b^2/a}$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[2b^2.\frac{b^2}{a} - 2b\left\{\frac{1}{2}.\frac{b^2}{a}.\sqrt{b^2 - \frac{b^4}{a^2}} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} - \frac{b^6}{3a^3}\right]$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[\frac{2b^4}{a} - \frac{b^4}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2} - b^3\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^6}{3a^3}\right]$$

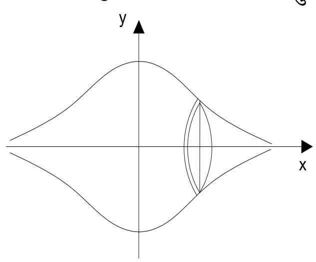
$$= \frac{2\pi b}{3a}\left[6a^2 b - 3ab\sqrt{a^2 - b^2} - 3a^3\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - b^3\right]$$



आकृति 1.33

उदाहरण 10. वक्र $y = \dfrac{a^3}{\left(a^2 + x^2\right)}$ ला त्याच्या असीम्प्टोट भोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.

उकल : $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$



आकृति 1.34

उदाहरण 11. सिद्ध करा कि वक्र $(a - x)y^2 = a^2x$ ला त्याच्या असीम्प्टोट भोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$ आहे.

उकल : दिलेले वक्र $(a - x)y^2 = a^2x$ आहे. त्याचा आकार आकृतीत दाखवला आहे. सर्वोच्च घात असलेल्या y चा गुणांक शून्य ठेवून, y अक्षाला समांतर असलेला असीम्प्टोट $a - x = 0$ आहे म्हणजेच, $x = a$ असेल.

समजा त्रिज्या $(a - x)$ आणि जाडी dy च्या स्वरूपात एक घन घटक विचारात घ्या. या घटकाचे घनफळ $\pi(a-x)^2\ dy$ आहे. म्हणून, अपेक्षित घनफळ

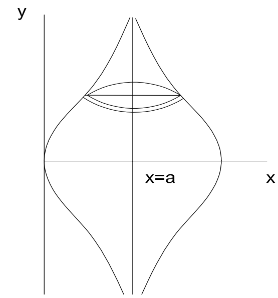
$$V = 2\int_{y=0}^{\infty} \pi(a-x)^2\ dy$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty}\left(a-\frac{a\,y^2}{y^2+a^2}\right)dy \qquad \left[\because\ x=\frac{a\,y^2}{y^2+a^2}\right]$$

$$= 2\pi a^6\int_0^{\infty}\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^2}$$

$$y = a\tan\theta \Rightarrow dy = a\sec^2\theta\,d\theta \Rightarrow \ y\to 0, \theta\to 0$$

$\Rightarrow$ $\qquad y\to\infty, \theta\to\pi/2\,.$



आकृति 1.35

म्हणून, आवश्यक घनफळ

$$V = 2\pi a^6\int_0^{\pi/2}\frac{a\sec^2\theta}{a^4\sec^4\theta}\,d\theta = 2\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi a^3.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi^2 a^3$$

उदाहरण 12. बीटा फंक्शनचे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

किंवा

दाखवा कि $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ अस्तित्वात आहे, जर आणि फक्त जर m, n दोघेही धनात्मक असतील.

उकल : समजा $\qquad I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

इंटीग्रल I प्रॉपर इंटीग्रल असेल जर $m \geq 1$ आणि $n \geq 1$ आणि म्हणून ते $m \geq 1$ आणि $n \geq 1$ चे कॉनव्हर्जेंस आहे स्पष्टपने 0 आणि 1 हे इनफाइनाइट डिसकंटिन्यूइटी चे पॉइंट आहेत जर अनुक्रमे $m < 1$ आणि $n < 1$ आहे. $m < 1$ आणि n <1साठी, 0 आणि 1 च्या दरम्यान 1/2 (समजा) घेऊन, जेणेकरून आपण अशा प्रकारे लिहू शकू,

$$I = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

समजा $\qquad I = I_1 + I_2 \qquad \ldots (1)$

इंटीग्रल $\qquad I_1 = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ चे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी , जेव्हा $m < 1$

येथे $\qquad f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \dfrac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}} \qquad [\because m<1]$

$g(x) = \dfrac{1}{x^{1-m}}$ ठेवून , जसे कि $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{n-1} = 1,$ जे फाइनाइट असेल आणि शून्य नाही

$\therefore$ इनटीग्रल I_1 आणि $\int_0^{1/2} g(x)\,dx = \int_0^{1/2}\dfrac{1}{x^{1-m}}\,dx$ एकत्र कॉनव्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

परंतु इंटीग्रल $\quad \int_0^{1/2}\dfrac{1}{x^{1-m}}\,dx$, हे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस जर फक्त आणि फक्त जर $1 - m < 1$ म्हणजेच $m > 0$

$\therefore \qquad x = 0$ वर I_1 कॉनव्हर्जेंस फक्त आणि फक्त जर $0 < m < 1$

इंटीग्रल $\qquad I_2 = \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ चे $x = 1$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी, जेव्हा $n < 1$:

येथे $\qquad f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \dfrac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}} \qquad [\because n<1]$

$g(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}$ ठेवून, म्हणून $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{m-1}=1$ जे फाइनाइट असेल आणि शून्य नाही.

$\therefore$ इनटीग्रल I_2 आणि $\int_{1/2}^{1} g(x)\,dx=\int_{1/2}^{1}\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx$ एकल कॉनव्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

परंतु इंटीग्रल $\int_{1/2}^{1} g(x)\,dx=\int_{1/2}^{1}\dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx$, हे $x = 1$ वर कॉनव्हर्जेंस जर फक्त आणि फक्त

जर $1 - n < 1$ म्हणजेच $n > 0$

$\therefore$ $x = 1$ वर I_2 कॉनव्हर्जेंस फक्त आणि फक्त जर $0 < n < 1$.

म्हणून समीकारण (1) वरुन, इंटीग्रल I कॉनव्हर्जेन्ट आहे जर आणि फक्त जर $0 < m < 1$ किंवा $0 < n < 1$. तसेच $m \geq 1$ आणि $n \geq 1$ साठी ते प्रॉपर इंटीग्रल आहे.

उदाहरण 13. गॅमा फंक्शनचे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

किंवा

सिद्ध करा कि इंटीग्रल $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ कॉनव्हर्जेन्ट असेल, जर $n > 0$

उकल : समजा $I=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$

$\Rightarrow$ $=\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$

समजा $I = I_1 + I_2$ ...(1)

येथे $f(x)=x^{n-1}e^{-x}=\dfrac{e^{-x}}{x^{1-n}}$

इंटीग्रेंड f ला $[0, 1]$ मधे $x = 0$ वर फाइनाइट डिसकंटिन्युटी आहे जर $n < 1$ आणि I_1 हे एक प्रॉपर इंटीग्रल आहे आणि म्हणून $n \geq 1$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

इंटीग्रल I_1 चे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी, जेव्हा $n < 1$

$g(x)=\dfrac{1}{x^{1-n}}$ घेऊन, म्हणून $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-x}=1$, जे फाइनाइट असेल आणि शून्य नाही.

परंतु इंटीग्रल $\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\dfrac{1}{x^{1-n}}dx$ कॉनव्हर्जेंस जर आणि फक्त जर $1 - n < 1$ म्हणजेच $n > 0$.

म्हणून कंप्यारीजन चाचणी वरून (Comperision test), इंटीग्रल $\int_0^1 f\,dx$, $0 < n < 1$ हे $n \geq 1$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट असेल. तसेच ते एक प्रॉपर इंटीग्रल आहे $n \geq 1$ साठी. म्हणून I_1 हे सर्व $n > 0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

इंटीग्रल I_1 चे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी

$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ घेवून, म्हणून $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{n+1}}{e^x}=0,\ \forall\ x$

आता $\int_1^\infty g(x)\,dx=\int_1^\infty\dfrac{dx}{x^2}$ कॉनव्हर्जेन्ट आहे. $[\because n=2>1]$

$\therefore$ कंप्यारीजन चाचणी वरून (Comperision test) इनटीग्रल I_2, सर्व $n > 0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

त्यामुळे समीकरण (1) वरुन, असे निष्कर्षात येते कि इनटीग्रल I कॉनव्हर्जेन्ट आहे जर आणि फक्त जर $n > 0$.

सारांश

1. वक्रतेची त्रिज्या $\rho = \dfrac{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}{y_2}$
2. वक्रतेच्या केंद्राचे निर्देशांक $\overline{x} = x - \rho\sin\psi, \overline{y} = y + \rho\cos\psi$ आणि $\overline{x} = x - \dfrac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}, \overline{y} = y + \dfrac{1+y_1^2}{y_2}$
3. इव्होल्यूट आणि इन्वोल्यूट : वक्रतेच्या मध्यभागी असलेल्या वक्राच्या लोकस ला इव्होल्यूट म्हणतात आणि वक्रालाच इन्व्होलुट म्हणतात.
4. जर $f(x)$ इंटरवल $[a, b]$ मध्ये परिभाषित केला असेल, तर $f(x)$ चे डेफ़िनाइट इंटीग्रल खालीलप्रमाणे लिहिता येते.
   $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
5. इंटीग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ हे एक प्रॉपर इंटीग्रल आहे , जर 'a' किंवा 'b' किंवा दोन्ही 'a' आणि'b' इनफाइनाइट असेल किंवा फंक्शन $f(x)$ हे [a, b] वर अनबाउन्डेड आहे.
6. बीटा आणि गॅमा फंक्शन:
   a. $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ हे $m, n > 0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.
   b. $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ हे $n > 0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.
   c. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \Gamma(n-1) = n!$, जर n हा धनात्मक पूर्णांक आहे.
   d. $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2), \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
   e. $B(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$
   f. $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\,dx = \dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{p+1}{2}, \dfrac{q+1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{p+q+2}{2}\right)}$
   g. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,d\theta = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}$
7. परीभ्रमन घनपदार्थांचे पृष्ठफळ.
   $S = \int_a^b 2\pi y\,ds = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ (x- अक्षा भोवती परीभ्रमन)
   $S = \int_a^b 2\pi x\,ds = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dy$ (y- अक्षा भोवती परीभ्रमन)
   परीभ्रमन घनपदार्थांचे घनफळ
   x- अक्षा भोवती परीभ्रमन $V = \int_a^b \pi y^2\,dx$
   y- अक्षा भोवती परीभ्रमन $V = \int_c^d \pi x^2\,dy$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^{5/2} x\, dx$ चे मूल्य शोधा.
   a. $\frac{1}{77}$ b. $\frac{2}{77}$ c. $\frac{4}{77}$ d. $\frac{8}{77}$
2. इलिप्सच्या इव्होल्यूटचे नाव आहे
   a. सेंट्रोइड b. ॲस्ट्रोइड c. सायक्लोईड d. हायपरबोलॉइड
3. इन्व्होल्यूट ला असे देखील ओळखले जाते.
   a. इव्होल्यूट b. इव्होल्व्हेंट c. एन्व्हेलोप d. स्पर्शिका
4. वक्र $x^2 + y^2 = 25$ ची वक्रता काय आहे?
   a. 5 b. 25 c. 0.5 d. 0.2
5. सरळ रेषेची वक्रता काय असेल?
   a. अनंत b. 1 c. 0 d. सरळ रेषेची लांबी
6. $\int_0^{\pi/2} \left[\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x)\right] dx$ चे मूल्य काय असेल.
   a. $\frac{\pi}{4}$ b. π c. $\frac{\pi^2}{4}$ d. $\frac{\pi^2}{2}$
7. जर $I = \int_{-1}^{1} \left(x^7 + \cos^{-1} x\right) dx$ असल्यास $\cos I$ चे मूल्य असेल.
   a. 1 b. 0 c. −1 d. ½
8. $\int_0^{\pi/2} \sin\theta \sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta$ चे मूल्य असेल.
   a. 1 b. 0 c. $\pi/2$ d. $\pi/4$
9. खालीलपैकी कोणती गॅमा फंक्शनची व्याख्या नाही?
   a. $\Gamma(n) = n!$ b. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
   c. $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$ d. $\Gamma(n) = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$
10. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$ चे मूल्य असेल.
   a. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}$ b. $\frac{2\pi\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ c. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ d. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}$
11. $\Gamma(9/4)$ चे मूल्य असेल.
   a. $\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ b. $\frac{9}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ c. $\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ d. $\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$
12. $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)$ चे मूल्य असेल.
   a. $\frac{\pi}{\sin n\pi}$ b. $-\frac{\pi}{\sin n\pi}$ c. 0 d. $n!$

13. इलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ जेव्हा त्याच्या छोट्या अक्षा भोवती फिरेल तेव्हा घनफळ किती असेल?

a. $4ab$ क्यूब युनिट b. $\frac{4}{3}a^2b$ क्यूब युनिट c. $\frac{4}{3}ab$ क्यूब युनिट d. 4 क्यूब युनिट

14. जेव्हा $y=\sqrt{x}$, $y=2$ आणि $y=0$ या वक्रांनि तयार झालेले क्षेत्र हे y- अक्षा भोवती फिरेल तेव्हा घनफळ किती असेल?

a. 32π क्यूब युनिट b. $\frac{32\pi}{5}$ क्यूब युनिट c. $\frac{32}{5}$ क्यूब युनिट d. $\frac{5\pi}{32}$ क्यूब युनिट

15. दिलेल्या कार्डिओइड $y = a(1 + \cos\theta)$चे क्षेत्रफळ काय आहे.

a. $\frac{3}{2}\pi a^2$ b. $3\pi a^2$ c. $\frac{3}{4}\pi a^2$ d. $\frac{3}{8}\pi a^2$

उत्तरे

1. d	2. b	3. b	4. d
5. c	6. c	7. c	8. d
9. a	10. c	11. a	12. a
13. b	14. b	15. a	

सब्जेक्टिव्ह न सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

1. एका बिंदूवर वक्राचे ओस्क्युलेटिंग प्रतल परिभाषित करा आणि या व्याख्येतून त्याचे समीकरण शोधा.
2. जेव्हा फक्त वक्र हे प्रतल असते तेव्हा वक्रता केंद्राचा लोकस हा इवोल्युट असतो हे सिद्ध करा.
3. दोन इन्व्होल्यूट च्या संबंधित बिंदूमधील अंतर स्थिर असते हे सिद्ध करा.
4. $\int_{-2}^{3}\left|x^2-1\right|dx$ मूल्य शोधा .
5. इंटिग्रल $\int_0^1 x^{n-1}\log x\,dx$ च्या कॉन्व्हर्जन्स ची निरनिराळया दृष्टीकोनांतून विचार करा.
6. $x=0, x=a, y=0, y=a$ या प्रतला दरम्यान असणाऱ्या $z^2=2xy$ च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $4\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{3\sqrt{2}}\right)$ आहे हे सिद्ध करा.
7. $az=xy$ च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ जे $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ या सिलेंडरच्या आत आहे ते शोधा.
8. सायक्लॉइड ला त्याच्या बेस भोवती फिरवल्यानंतर तयार होणाऱ्या घनपदार्थाचे घनफळ शोधा.
9. त्रिज्या a असलेल्या वर्तुळाचा भाग त्याच्या जीवेभोवती फिरवल्यानंतर तयार झालेल्या स्पिंडल चे घनफळ शोधा.

उत्तरे

4. $28/3$ 6. जर $n>0$ तर कॉन्व्हर्जन्ट आणि जर $n\le 0$ तर डायव्हर्जन्ट 8. $\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2$

9. $5\pi^2a^3$ 10. $\frac{\pi a^3(10-3\pi)}{6\sqrt{2}}$

तुम्हाला माहीत आहे का?

न्यूटनने त्याच्या डिफरेंशियल कॅलक्यूलसच्या आवृत्तीचे वर्णन 'फ्लक्षनची पद्धत' असे केले. त्याने 1666 मध्ये फ्लक्षियंवर एक पेपर लिहिला, परंतु त्याच्या बऱ्याच कार्याप्रमाणे, काही दशकांपर्यंत तो प्रकाशित झाला नाही. त्याचे महान कार्य फिलॉसॉफीय नॅचुरलीस प्रिन्सिपिया मॅथेमॅटिका (मॅथेमॅटिकल प्रिन्सिपल्स ऑफ नॅच्युरल फिलॉसॉफी) 1687 मध्ये प्रकाशित झाले या कार्यामध्ये त्याच्या वेग आणि गुरुत्वाकर्षणाच्या तत्त्वांचा समावेश आहे, परंतु त्यात स्पष्टपणे जास्त कॅलक्यूलस चा समावेश नाही. तथापि, सुरुवातीला कॅलक्यूलसचे काही स्पष्टीकरण आहे, आणि न्यूटनने आपली तत्त्वे तयार करण्यासाठी कॅलक्यूलसचा नक्कीच वापर केला. मात्र न्यूटनची 'मेथड ऑफ फ्लक्षन' *1693* पर्यंत स्पष्टपणे छापली गेली नाही.

दुसरीकडे, लिब्नीजने *1684* मध्ये कॅलक्यूलसवर आपला पहिला पेपर प्रकाशित केला आणि *1670* च्या दशकात कॅलक्यूलस चा शोध लावला असा दावा केला. प्रकाशित रेकॉर्डवरून तरी निदान लिब्नीजने आधी कॅलक्यूलसचा शोध लावला होता, असं दिसतं.

न्यूटन आणि लिबनीज यांचे सुरुवातीला सौहार्दपूर्ण संबंध असले, तरी लिबनीज आणि त्याच्या अनुयायांनी इंग्रजी गणितज्ञ जॉन वॉलिस यांनी केलेल्या विधानाकडे दुर्लक्ष केले. परकीयांच्या विद्रेषी आणि भांडखोर चारित्र्यासह, वॉलिस यांनी आयुष्यभर इंग्रजी शास्त्रज्ञांच्या वतीने प्राधान्याच्या वादाशी लढा दिला.*1695* मध्ये, कदाचित नकळत, वॉलिसने अहवाल दिला की लिबनीजला न्यूटनकडून कॅलक्यूलसबद्दल माहिती मिळाली - हा दावा आता खोटा मानला जातो.

गणिती समस्या केवळ लेबिनेसच्या कॅलक्यूलसच्या आवृत्तीद्वारेच सोडवल्या जाऊ शकतात या लिबनीजच्या एका विधानामुळे फातिओ डी डुलर नावाचा गणितज्ञ संतापला मग, त्याने *1699* मध्ये लिबनिझवर वाङ्मयचोरी केल्याचा आरोप केला. तिथून फक्त गोष्टी खाली गेल्या. न्यूटन आणि लिबनिझ यांनीही तत्त्वज्ञानाच्या प्रश्नांवर असहमती दर्शविली या बाबींना यामुळे मदत झाली नाही.

1712 मध्ये इंग्लंडमधील रॉयल सोसायटीने या प्रकरणाचा निपटारा करण्यासाठी एक अहवाल लिहिला - फक्त संपूर्ण तपासच न्यूटनने प्रभावीपणे निर्देशित केला होता. अहवालात असे आढळले आहे की लिबनीजने न्यूटनच्या कार्याबद्दलचे त्याचे ज्ञान लपवले आहे - जे आता खोट्या समजल्या जाणाऱ्या वस्तुस्थितीवर आधारित आहे. त्याला प्रत्युत्तर म्हणून, लिबनीजने न्यूटन आणि त्याच्या अनुयायांवर त्याचे स्वतःचे कॅलक्यूलस चोरल्याचा आणि त्याच्या अनुप्रयोगांमध्ये त्रुटी केल्याचा आरोप केला. *1716* मध्ये लिबनीजच्या मृत्यूनंतरही, आरोप- प्रत्यारोपांनी भरलेला वाद चांगलाच चालला.

या वादातून कोणीही सावरले नाही.न्यूटन आणि लिबनिझ दोघेही अविश्वसनीय गणिती शोध घेण्यास सक्षम होते, परंतु त्यांच्या वादाने हे सिद्ध केले की ते काही कमी प्रभावी वर्तन करण्यास देखील सक्षम आहेत.

प्रकल्प/प्रात्यक्षिक/क्रियाकलाप

प्रकल्प

1. परिमेय रेषीय समूहाचा एनव्हेलोप निश्चित करण्यासाठी साठी आपली स्क्रिप्ट तयार करा आणि दिलेल्या वक्रांचे इव्होलुट कढा.
   i. पॅराबोला $y = x^2$ ऐवजी जसे $x(t) = t, y(t) = t^2$ पॅरामीटराइज्ड केले जाते.
   ii. इलिप्स $x^2 + 4y^2 = 4$ ऐवजी जसे $x(t) = \dfrac{8t}{1+4t^2}$ आणि $y(t) = \dfrac{4t^2 - 1}{1+4t^2}$ पॅरामीटराइज्ड केले जाते.

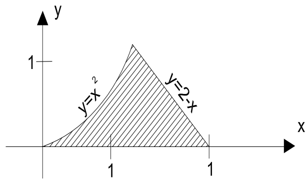
आणि या इव्होल्यूट्सला त्यांच्या संबंधित वक्रांसह प्लॉट करा.

2. बीटा फंक्शन आणि स्ट्रिंग थिअरी यांच्यातील संबंध सांगा.

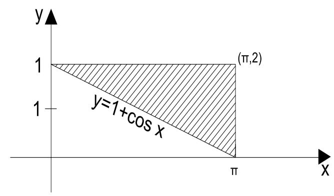
प्रात्यक्षिक

1. बीटा फंक्शनची थ्री-डी प्रतिमा तयार करा.

2. $\int_1^4 (x+6)\,dx$ साठी एक आलेख रेखाटा आणि विशिष्ट श्रेणीच्या क्षेत्रफळाला शेड करा.
3. निश्चित अविभाज्य वापरा, दिलेल्या वळणांसाठी छायांकित क्षेत्र शोधा:

a. 

आकृती 1.36

b. 

आकृती 1.37

4. पॅराबोलाच्या इवोल्युटचा आलेख काढण्यासाठी MATLAB कोड लिहा.

क्रियाकलाप

i. गॅमा फंक्शन, फैक्टोरियल फंक्शन ला कसे इंटरपोलेट करू शकते (विचार करा आणि समजावून सांगा).

ii. गॅमा फंक्शनचा आलेख कसा दिसतो?
[संकेत: पायथन कोड वापरू शकतो]

अधिक जाणून घ्या

1. जर f हे एक सम फंक्शन असेल आणि $\int_0^2 f(x)\,dx = k,$ तर $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$ चे मूल्य असेल....

a. 0 b. $2k$ c. k d. $4k$

2. दिलेल्या इंटीग्रल $\int_{-5}^{5}(x-[x])\,dx$ चे मूल्य शोधा.

a. 0 b. 5 c. 10 d. 15

3. दिलेल्या इंटीग्रल $\int_0^2 x^{[x]}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{5}{2}$ d. $\frac{7}{2}$

4. $\Gamma(0.1), \Gamma(0.2)\,\Gamma(0.3)\,....\Gamma(0.9)$ चे मूल्य शोधा?

a. $\frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$ b. $\frac{\pi^2}{\sqrt{10}}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. दिलेल्या इंटीग्रल $A=\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx,\ B=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$ चे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

6. दिलेल्या इंटीग्रल $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$ चे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

7. समजा $\alpha=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}$, तर खालीलपैकी कोणते सत्य आहे?

a. $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$ b. α परिमय संख्या आहे

c. $\log(\alpha)=1$ d. $\sin(\alpha)=1$

उत्तरे

1. b	2. b	3. c	4. a
5. A कॉनव्हर्जेंस 8/3 ला आणि B डायव्हार्जेस $+\infty$ ला.		6. डायव्हर्जेन्ट.	7. d

संदर्भ/सुचविलेले वाचन

1. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus , Wiley, NewYork.
2. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
3. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
4. Garg Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
5. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
6. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Evolute
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947). Theory of Functions, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (2002). Calculus and Analytic Geometry, 9th edition, Pearson.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

2 कॅलकुलस II

युनिट निर्दिष्टे

या युनिटमध्ये रोल्सचे प्रमेय, त्याचा भौमितिक अर्थ, सरासरी मूल्य प्रमेय त्यांच्या भौमितिक अर्थासह, टेलर आणि मॅकलॉरिनचे प्रमेय रिमेंडर सह, इंडिटर्मिनेट फॉर्म आणि L हॉस्पिटलचा नियम (सर्व प्रकार.),लांबीमध्ये मॅक्झिमा आणि मिनीमा या विषयांवर चर्चा केली आहे. विविध विषयांच्या अनुप्रयोगांची सखोल चर्चा केली आहे आणि विषयाच्या योग्य आकलनासाठी अनेक सोडवलेली उदाहरणे समाविष्ट केली आहेत. विद्यार्थ्यांना विषयांची कल्पना करण्यासाठी अनेक आकृतींचा समावेश करण्यात आला आहे.

तर्कशास्त्र

प्रमेय गणिताच्या मुळाशी आहेत. प्रमेयांचे वर्णन अनेकदा "ट्रिवियल", किंवा "कठीण", किंवा "खोल" किंवा अगदी "सुंदर" असे केले जाते. हे व्यक्तिनिष्ठ निर्णय केवळ व्यक्तीपरत्वे बदलत नाहीत, तर वेळ आणि संस्कृतीनुसार देखील बदलतात: उदाहरणार्थ, रोल्स चे प्रमेय कंपनीच्या वार्षिक कामगिरीच्या आलेखांचे विश्लेषण करण्यासाठी वापरले जाते. सरासरी मूल्य प्रमेय सहसा गती समस्यांसह लागू केले जाते जसे की चेंडू हवेत फेकणे किंवा इतर. गणनाशी संबंधित इतर समस्या सोडवण्यासाठी हे गणिताचे साधन म्हणून वापरले जाऊ शकतात.

टेलर सिरीज अभिव्यक्तींची गणना करण्यासाठी अनेक कठीण अंदाजाचे मूल्यांकन करण्यासाठी खूप उपयुक्त आहेत. आपण लिमिट सोडवण्यासाठी L'Hospital नियम वापरतो, वास्तविक जगात, विशेषत: सांख्यिकी, भौतिकशास्त्र आणि अभियांत्रिकीमध्येही त्याचे बरेच अनुप्रयोग आहेत.

या जगातील प्रत्येक गोष्ट मॅक्सिमा आणि मिनिमा या संकल्पनेवर आधारित आहे, प्रत्येक वेळी प्रत्येकजण प्रत्येक डेटाचे मॅक्सिमा आणि मिनीमा मूल्य मोजतो.

पूर्वतयारी

1. कंटिन्यूइटी आणि डिफरन्शियाबिलिटी ची संकल्पना.
2. मॉड, इंक्रीजिंग फंक्शन, डिक्रिजिंग फंक्शन, ओपन इंटरवल, क्लोज इंटरवल यासारख्या विशेष प्रकारच्या फंक्शन्स चे ज्ञान.
3. लिमिटचे मूल्यमापन, तसेच त्याचा उपयोग.
4. काही फंक्शन्स $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 \pm x)$, e^x इत्यादी च्या विस्तारा ची माहिती असणे.

यूनिट आउटकम (UO)

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी सक्षम होतील:

U2-O1: त्याच्या डेरिव्हेटिवसह समाविष्ट असलेल्या फंक्शन चे गुणधर्म सिद्ध करण्यासाठी विविध मीन मूल्य प्रमेये वापरुन.

U2-O2: फंक्शन $f(x)$ चे $x \to \infty$ म्हणून असिम्टोटिक वर्तन निश्चित करणे आणि L हॉस्पिटल नियम वापरून लिमिट चे मूल्य शोधने.

U2-O3: मॅक्सिमा-मिनिमा वापरून फंक्शनच्या वर्तनाचे विश्लेषण करने.

U2-O4: टेलर आणि मॅक्लॉरिनच्या प्रमेयासह बीजगणित आणि ट्रांसिडेंटल फंक्शनसाठी सीरीज च्या विस्ताराबद्दल जाणून घेणे.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट 2 आउटकम	कोर्स आउटकमसह अपेक्षित मॅपिंग (1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U2-O1	1	2	–	–	–
U2-O2	1	3	–	–	–
U2-O3	–	3	–	–	1
U2-O4	–	3	–	–	–

इतिहास

भास्करा 2 (1114-1185)

17 व्या शतकाच्या सुरुवातीला, एक वक्र साधारणपणे काही भौमितिक स्थितीचे समाधान करणाऱ्या बिंदूंचे स्थान म्हणून वर्णन केले गेले आणि भौमितिक बांधकामाद्वारे स्पर्शरेषा प्राप्त केल्या गेल्या. वक्रांशी स्पर्शरेषा आणि गतिमान कणांचा वेग यांच्यातील संबंध 1660 च्या उत्तरार्धात आयझॅक न्यूटनने शोधला. रोल्सचे प्रमेय म्हणजे मीन व्हॅल्यू प्रमेयाचा एक भाग आहे. भास्करा द्वितीय (1114-1185), एक भारतीय गणितज्ञ, रोलेच्या प्रमेयावर काम करणारा पहिला व्यक्ती असल्याचे श्रेय दिले जाते आणि त्याचे नाव फ्रेंच गणितज्ञ मिशेल रोले (1652-1719) यांच्या नावावर ठेवले गेले. प्रमेय अपरिमित कॅल्क्युलसचा भाग मानला जात होता आणि 18 व्या शतकापर्यंत विभेदक कॅल्क्युलस अंतर्गत वर्गीकृत नव्हता. लाग्रेंजने केवळ रोल्सच्या प्रमेयाच्या पहिल्या दोन अटी वापरून निकाल दिला. म्हणून त्याला लाग्रेंजचे मीन-व्हॅल्यू प्रमेय म्हणतात.

कॉचीने दुसरे सरासरी मूल्य प्रमेय दिले ज्यामध्ये त्याने रोलच्या प्रमेय आणि लाग्रेंजच्या मीन-व्हॅल्यू प्रमेयच्या बाबतीत एका फंक्शनऐवजी दोन फंक्शन्स वापरल्या, लैग्रेंजचे प्रमेय कॉची मीन व्हॅल्यू प्रमेयचे एक विशिष्ट आहे. टेलरचे प्रमेय मीन व्हॅल्यू प्रमेयचा विस्तार 'उच्च क्रम' डेरिव्हेटिव्ह्ज म्हणून केला जाऊ शकतो. एल हॉस्पिटल्सचा नियम खरेतर जोहान बर्नौलीने शोधला होता. 1955 मध्ये, L'Hospital -Bernoulli पत्रव्यवहार जर्मनीमध्ये प्रकाशित झाला.

2.1 रोल्सचे सिद्धांत

विधान : समजा f हे $[a,b]$ वर परिभाषित केलेले एक फंक्शन आहे जसे की

i. f, हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. f, हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

iii. $f(a) = f(b)$

तर a आणि b दरम्यान मिनीमा एक वास्तविक संख्या c अस्तित्वात आहे जसे कि $f'(c)=0$

सिद्धता: *f,* हे *[a,b]* वर कंटिन्युयस असल्याने *f, [a, b]* वर बाउन्डेड आहे आणि ते त्याचा बाउन्ड गाठते.

समजा $\underset{x\in[a,b]}{Sup.}f(x)=M$ आणि $\underset{x\in[a,b]}{Inf.}f(x)=m$

कंटिन्यूइटीच्या गुणधर्माद्वारे , येथे $c,d\in[a,b]$ अस्तित्वात आहे जसे की

$f(c) = M$ आणि $f(d) = m$ [$\because$ जर एखादे फंक्शन $f(x)$ हे क्लोज इंटरवल [a, b] वर कंटिन्युयस असेल, तर तो कमीतकमी एकदा तरी [a, b] मध्ये त्याचे सुप्रीमम आणि इन्फिमम प्राप्त करते]

दोन भिन्न स्थिति उद्भवतात:

स्थिति I:

जेव्हा $M=m$ म्हणजे $Sup.f=Inf.f$

या स्थितीत, $f(x)=M(=m)$ सर्व $x\in[a,b]$ साठी

$\Rightarrow$ f हे $[a,b]$ वर कॉस्टंट फंक्शन आहे.

$\therefore$ $f'(x)=0$ सर्व $x\in[a,b]$ साठी

म्हणून $f'(c)=0$ जेथे $c\in(a,b)$

स्थिति II: जेव्हा $M\neq m$

दिलेले आहे $f(a)=f(b)$

$\therefore$ एकतर M किंवा m,हे $f(a)=f(b)$ पेक्षा वेगळे आहे

असे समजा $M\neq f(a)$ आणि $M\neq f(b)$

जसे, $f(c)=M$, जर $c\neq a,\ c\neq b$ आणि म्हणून $a<c<b$

कारण $f(c)=M=\underset{x\in[a,b]}{Sup.}f(x)$

म्हणून, $f(x)\leq f(c)$ सगळ्या $x\in[a,b]$ साठी $\quad\ldots(1)$

समीकरण *(1)*, वरून $f(c-h)\leq f(c)$

$\therefore$ $f(c-h)-f(c)\leq 0$

$-h<0$ ने भागल्यास, आपल्याला मिळते

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{h}\geq 0$$

म्हणून $h\to 0$ लिमिट घेतल्यास,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}\geq 0$$

$\Rightarrow$ $L.f'(c)\geq 0$ $\quad\ldots(2)$

समीकरण *(1)*, वरून $f(c+h)\leq f(c)$

$\therefore$ $f(c-h)+f(c)\leq 0$

$h > 0$ ने भागल्यास, आपल्याला मिळते

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$$

म्हणून $h \to 0$ लिमिट घेतल्यास,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0$$

$\Rightarrow$ $$R.f'(c) \le 0 \qquad \ldots (3)$$

$f'(c)$ अस्तित्वात असल्यामुळे.

$\therefore$ $$L.f'(c) = R.f'(c) = f'(c)$$

हे तेव्हाच शक्य आहे जेव्हा $f'(c) = 0$.

त्याच पद्धतीने पुढे जाताना, आपण हे सिद्ध करू शकतो की $f'(d) = 0$, जेथे $d \in (a,b)$

म्हणून कमीत कमी एक $c \in (a,b)$ अस्तित्वात आहे जसे कि $f'(c) = 0$.

हे प्रमेयाचा पुरावा पूर्ण करते.

टिपण्णी: रोल्सच्या सिद्धांताच्या पुराव्यामध्ये, आपण काही संज्ञा वापरल्या (जसे Sup. Inf.)
येथे आम्ही त्याबद्दल थोडक्यात स्पष्टीकरण देत आहोत.

1.लिस्ट अप्पर बाउन्ड (सुप्रीमम): व्याख्या: समजा कि S, हा $\Re$ चा रिक्त नसलेला उपसंच आहे. वास्तविक संख्या u ला लिस्ट अप्पर बाउन्ड किंवा (l.u.b.) किंवा S चा सुप्रीमम असे म्हटले जाते जर

i. $x \le u \; \forall x \in S$ म्हणजे , u हा S चा अप्पर बाउन्ड आहे

ii.जर v हा S चा अप्पर बाउन्ड असेल, तर $u \le v$.

2.ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड (इनफिमम): व्याख्या: समजा कि S हा $\Re$ चा रिक्त नसलेला उपसंच आहे. वास्तविक संख्या l ला ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड किंवा (g.l.b.) किंवा S चा इनफ़िमम असे म्हटले जाते जर

i. $l \le x \; \forall x \in S$ म्हणजे, l, हा S चा लोवर बाउन्ड आहे.

ii. जर l' हा S चा लोवर बाउन्ड असेल, तर $l' \le l$. दुसऱ्या शब्दांत l पेक्षा मोठी कोणतीही संख्या ही S ची लोवर बाउन्ड नसेल.

उदाहरणार्थ:

1. जर S= (0,1), तर स्पष्टपणे $0 < x < 1 \; \forall \; x \in S$

तसेच, $x < 2 \; \forall \; x \in S$.

$\therefore$ 2, 3, 4 ... आणि पुढे अशाचप्रकारे सर्व S चे अप्पर बाउन्ड आहेत परंतु 1 त्यांच्यामध्ये लिस्ट अप्पर बाउन्ड आहे.

$\therefore$ 1 हा S चा लिस्ट अप्पर बाउन्ड आहे आणि $1 \notin S$.

त्याचप्रमाणे, $-1 < x \; \forall \; x \in S$

$\therefore$ $-1, -2, -3, \ldots$ आणि याप्रमाणे सर्व S चे लोवर बाउन्ड आहे परंतु या सर्व लोवर बाउन्ड पैकी 0 हे सर्वात मोठे आहे.

$\therefore$ 0 हे S चे ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड आहे आणि $0 \notin S$.

2. जर $S = [0,1]$, तर $0 \le x \le 1 \; \forall \; x \in S$.

येथे, 1 हे S चे लिस्ट अप्पर बाउन्ड आहे आणि $1 \in S$,

तसेच, 0 हे S चे ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड आहे आणि $0 \in S$.

महत्वाचे मुद्देः

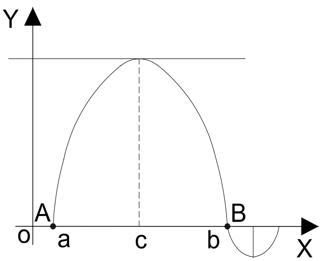
i. संचाचा l.u.b किंवा g.l.b अस्तित्वात असल्यास तो एकच असतो.
ii. संचाचा l.u.b किंवा g.l.b त्या संचाचा असू शकतो किंवा नसेलही.
iii. संचाचा l.u.b (सुप्रीमम) अस्तित्वात असू शकतो किंवा असू शकत नाही जसे सुप (N) अस्तित्वात नाही त्याप्रमाणे. (येथे, N - नैसर्गिक संख्यांचा संच.)
iv. संचाचा g.l.b. (इनफिमम) अस्तित्वात असू शकते किंवा असू शकत नाही जसे इन्फ (Z) अस्तित्वात नाही त्याप्रमाणे (येथे, Z – पूर्णांकाचा संच)

2.1.1 रोल्सच्या प्रमेयाची भौमितिक व्याख्या

समजा $y = f(x)$ एक वक्र असे आहे जे

i. $[a,b]$ कंटिन्युयस आहे
ii. *f*, हे वर (a,b) डेरिवेबल आहे
iii. $f(a) = f(b)$

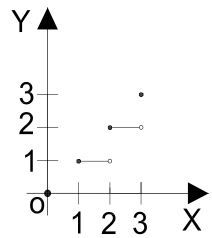
याचा अर्थ असा होतो की कमीतकमी एक बिंदू $c \in (a, b)$ अस्तित्वात आहे ज्यावर स्पर्शिका x- अक्षाला समांतर आहे.



आकृती 2.1

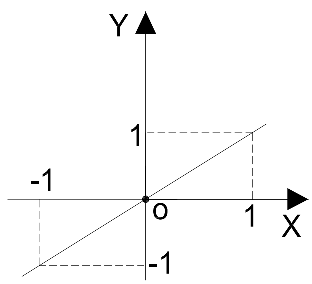
उदाहरणार्थ:

1. $f(x) = [x]$, हे $[0,3]$ वरील सर्वात मोठे पूर्णांक असलेले फंक्शन आहे.
f हे $x = 1, 2, 3$ (खंडित आलेख) वर कंटिन्युयस नाही.
$\therefore$ रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान येथे होत नाही.



आकृती 2.2

2. $f(x) = x$ **हे** $[-1,1]$ मध्ये आहे.
f हे $[-1,1]$ वर कंटिन्युयस आहे, f हे $(-1,1)$ वर डेरिवेबल आहे.
परंतु $f(-1) \neq f(1)$
$\therefore$ रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान येथे होत नाही.



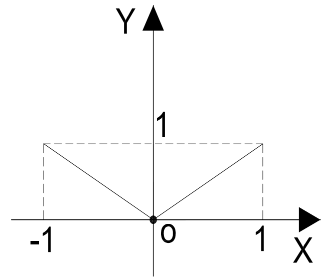
आकृती 2.3

3.[-1,1] मध्ये $f(x)=|x|$

f हे [-1,1] वर कंटिन्युयस आहे,

परंतु f हे $x=0$ वर डेरिवेबल नाही

$\therefore$ रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान येथे होत नाही.



आकृती 2.4

काही सोड्वलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.1. $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$ साठी $[2, 4]$ मध्ये रोल्सचे प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे, $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$

दिलेले, $f(x)$ हे x ची बहुपदी आहे आणि म्हणून सर्व x साठी कंटिन्युयस आणि डेरिवेबल आहे.

$\Rightarrow$ a. $f(x)$ हे $[2,4]$ वर कंटिन्युयस आहे

b. $f(x)$ हे $(2,4)$ वर डेरिवेबल आहे

c. $f(2)=(2)^3-9(2)^2+26(2)-24=0$

$f(4)=(4)^3-9(4)^2+26(4)-24=0$

रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून तेथे कामित कमी एक $c\in(2,4)$ असा अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

आपल्याकडे आहे, $f'(x)=3x^2-18x+26$

$\Rightarrow$ $f'(c)=3c^2-18c+26$

अशा प्रकारे, $f'(c)=0$

$$\Rightarrow \quad c=\frac{18\pm\sqrt{324-312}}{6}$$

$$=3\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c=3\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\in(2,4)$$

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित केले आहे.

उदाहरण 2.2. $f(x)=\cos 2x$ साठी $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ मध्ये रोल्सचे प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे, $f(x)=\cos 2x$

a. जसे आपल्याला माहित आहे की कोसाइन फंक्शन x च्या सर्व मूल्यांसाठी कंटीन्यूयस आहे आणि म्हणून $f(x)$ हा $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ मध्ये कंटिन्युयस आहे

b. $f'(x) = -2\sin 2x =$ फाइनाइट आणि परिभाषित आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ वर डेरिवेबल आहे

c. आता, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

आणि $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$\therefore$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून, तेथे $c \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ चे कमित कमी एक मूल्य असे अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे की $f'(c) = 0$

आता, $f'(c) = -2\sin 2c = 0 \quad \Rightarrow \sin 2c = 0$

$\sin 2c = \sin 0 \quad \Rightarrow \quad 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$$c = 0 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित झाले आहे.

उदाहरण 2.3 $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ साठी $[-3,0]$ मध्ये रोल्सचे प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे, $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$

a. रोल्स चे प्रमेय सत्यापित करण्यासाठी आपल्याला माहित आहे की $x(x+3)$ हे एक बहुपदी फंक्शन आहे आणि $e^{-x/2}$ हे एक्सपोनेन्शियल फंक्शन, दोन्ही सर्वत्र कंटिन्युयस आहेत.

अशाप्रकारे त्यांचा गुणाकार देखील *[−3, 0]* मध्ये कंटिन्युयस आहे.

b. $f'(x) = xe^{-x/2} + (x+3)e^{-x/2} - \frac{x(x+3)}{2}e^{-x/2}$

$$= \left(2x+3-\frac{x(x+3)}{2}\right)e^{-x/2}$$

$$= \left(\frac{x+6-x^2}{2}\right)e^{-x/2}$$

$f'(x)$ हे $(-3,0)$ वर एकमेव अस्तित्वात आहे आणि $f(x)$ हे $(-3,0)$ वर डेरिवेबल आहे.

c. $f(-3) = -3(-3+3)e^{3/2} = 0$

आणि $f(-0) = 0(0+3)e^{\frac{0}{2}} = 0$

म्हणून, $f(-3)=f(0)=0$

∴ अशा प्रकारे, रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून, $(-3, 0)$ मध्ये कमित कमी एक बिंदू c असा अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

आता $$f'(c)=\left(\frac{c+6-c^2}{2}\right)e^{-c/2}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c+6-c^2}{2}=0, \qquad \left[\because e^{-c/2}\neq 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad c^2-c-6-=0 \Rightarrow \quad c=3,-2$$

आता $c=-2\in(-3,0)$

म्हणून रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित झाले आहे.

उदाहरण 2.4. फंक्शन $f(x)=\begin{cases}-4x+5, & 0\le x\le 1\\ 2x-3, & 1\le x\le 2\end{cases}$ या साठी रोल्स च्या प्रमेयाच्या उपयोगाची तपासणी करा.

उकल: येथे, $$f(x)=\begin{cases}-4x+5, & 0\le x\le 1\\ 2x-3, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

आपल्याकडे आहे, $f(1)=1$

$x=1$, येथे कंटिन्युयस आहे

$$Rf(1)=\lim_{x\to 1^+}(2x-3)=\lim_{h\to 0}2(1+h)-3=2-3=-1$$

$$Lf(1)=\lim_{x\to 1^-}(-4x+5)=\lim_{h\to 0}-4(1-h)+5=-4+5=1$$

म्हणून $Rf(1)\neq Lf(1)$ $\quad\therefore f(x)$, हे $x=1\in[0,2]$ येथे कंटिन्युयस नाही.

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे उपयोगी नाही.

उदाहरण 2.5. इंटर्वल $[-2,2]$ मध्ये फंक्शन $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ साठी रोल्सचे प्रमेय तपासा.

उकल: येथे, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, इंटर्वल $[-2,2]$ आहे. $f(x)$ हे x च्या बहुपदीचे वर्गमूळ आहे आणि म्हणून सर्व x साठी कंटिन्युयस आहे.

i. $f(x)$, हा $[-2,2]$ मध्ये कंटिन्युयस आहे

ii. $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ हा $4-x^2=0$ म्हणजे $x=\pm 2$ वगळता सर्वत्र परिभाषित आहे.

अशा प्रकारे, $f'(x)$ हा $\Re-\{-2,2\}$ मध्ये डेरिवेबल आहे.

∴ $f'(x)$ हा $(-2,2)$ वर डेरिवेबल आहे.

iii. आता $f(-2)=\sqrt{4-(-2)^2}=\sqrt{4-4}=0$

$$f(2)=\sqrt{4-(2)^2}=\sqrt{4-4}=0 \Rightarrow f(-2)=f(2)$$

∴ रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून, $c \in (-2,2)$ चे कमित कमी एक मूल्य असे असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

$\Rightarrow \qquad f'(c)=\dfrac{-c}{\sqrt{4-c^2}}=0, \quad c=0\in(-2,2)$

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित केले आहे.

उदाहरण 2.6. रोल्स चे प्रमेय वापरून , इंटर्वल $[-1,1]$ वर *फंक्शन* $f(x)=\log\left(x^2+2\right)-\log 3$ *साठी* बिंदु $c\in(-1,1)$ शोधा.

उकल: येथे, $f(x)=\log\left(x^2+2\right)-\log 3$

जसे आपल्याला माहित आहे की लॉगरिदमिक फंक्शन्स सर्व x साठी कंटिन्युयस आहेत आणि $\log 3$ हे कॉस्टंट आहे, म्हणून *f (x)* सर्व *x* साठी कंटिन्युयस आहे, म्हणून ते *[−1, 1]* मध्ये देखील कंटिन्युयस आहे.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ (सर्व $x\in\Re$ साठी अस्तित्वात आहे)

$\therefore \qquad f'(x)$ हे $(-1,1)$ वर डेरिवेबल आहे

आता $f(-1)=\log\left((-1)^2+2\right)-\log 3=\log 3-\log 3=0$

आणि $\qquad f(1)=\log\left((1)^2+2\right)-\log 3=\log 3-\log 3=0$

$\Rightarrow \qquad f(-1)=f(1)$

अशा प्रकारे, रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून कमित कमी एक $c\in(-1,1)$ अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

$f'(c)=\dfrac{2c}{c^2+2}=0$

$\Rightarrow \qquad c=0\in(-1,1)$

अभ्यास 2.1

1. दिलेल्या इंटरवल मध्ये खालील फंक्शन्ससाठी रोल्स चे प्रमेय तपासा:

a. $[1,3]$ मध्ये, $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

b. $[-4,5]$ मध्ये, $f(x)=x^3+3x^2-24x-80$

c. $[-1,4]$ मध्ये, $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-5}$

d. $\left[0,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ मध्ये, $f(x)=\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

e. $[0,\pi]$ मध्ये, $f(x)=\sin x-\sin 2x$

f. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=e^{1-x^2}$

g. $[0,\pi]$ मध्ये, $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

h. $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ मध्ये, $f(x)=e^x\cos x$

i. $[0,\pi]$ मध्ये, $f(x)=\tan x$

j. $[1,3]$ मध्ये, $f(x)=\left(x^2-4x+3\right)e^{2x}$

2. खालील फंक्शन्ससाठी रोल्स च्या प्रमेयाच्या उपयोगतेचे परीक्षण करा:

a. $[0,3]$ मध्ये, $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{5}}$

b. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0\le x\le 1\\ 3-x, & 1<x\le 2\end{cases}$

c. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=|x|$

उत्तरे

1. a. $c=2\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b. $c=2$ c. $c=5-\sqrt{6}$ d. $c=\dfrac{\pi}{4}$

e. $c=\cos^{-1}\left(\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}\right)$ f. $c=0$ g. $c=\dfrac{\pi}{4}$ h. $c=\dfrac{\pi}{4}$

i. लागू नाही j. $c=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2. a. लागू नाही b. लागू नाही c. लागू नाही

2.1.2 लॅग्रांजेसचे मीन व्हॅल्यू प्रमेय

विधान: जर एखादे फंक्शन $f:[a,b]\to\Re$ असे आहे की

i. *f(x)* हे क्लोज्ड इंटर्वल *[a,b]* वर कंटिन्युयस आहे

ii.f(x) हे ओपन इंटर्वल *(a,b)* वर डेरिवेबल आहे

मग कमित कमी एक बिंदू $c\in(a,b)$ असा अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

सिद्धता : समजा एक फंक्शन $\phi:[a,b]\to R$, अशा प्रकारे परिभाषित करू की $\phi(x)=f(x)+Ax,\ x\in(a,b)$
जेथे A हे कॉस्टंट आहे अशाप्रकारे शोधण्यासाठी की

$$\phi(a)=\phi(b) \qquad \ldots(1)$$

आता
$$\phi(a)=f(a)+Aa$$
$$\phi(b)=f(b)+Ab$$

(1) वापरून, आपल्याकडे असेल,

$$f(a)+Aa=f(b)+Ab$$
$$A(a-b)=f(b)-f(a)$$
$$A=\frac{f(b)-f(a)}{a-b} \qquad \ldots(2)$$

आता,

i. ϕ हे *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे, कारण *f* हे *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे आणि Ax हे x मधील बहुपदि असून *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे.

ii. ϕ हे (a, b) वर डेरिवेबल आहे, कारण f हे (a, b) च्या प्रत्येक बिंदूवर डेरिवेबल आहे आणि तसेच Ax देखील.

iii. $\phi(a)=\phi(b)$

$\phi(x)$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण करते.

म्हणून कमित कमी एक $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे जसे की $\phi'(c)=0$

$$\phi(x)=f(x)+Ax$$

$\Rightarrow$ $\phi'(x)=f'(x)+A \Rightarrow \phi'(c)=f'(c)+A$

आता, $\phi'(c)=0$

$\Rightarrow$ $f'(c)+A=0\Rightarrow f'(c)=-A$

(2) वापरून, आपल्याकडे आहे $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a},\ c\in(a,b)$
हे प्रमेयाचा सिद्धता पूर्ण करते.

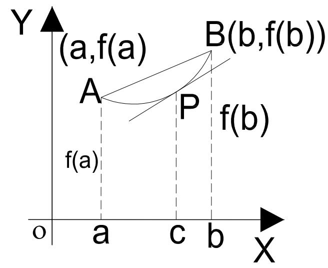
2.1.3 लॅग्रांजेसच्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची भौमितिक व्याख्या

समजा फंक्शन f ला एक ग्राफ आहे आणि

i. f हे $[a, b]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. f हे (a, b) वर डिफरेंशिएबल आहे

वक्र AB ला प्रत्येक बिंदूवर स्पर्शिका असल्याने, A आणि B व्यतिरिक्त वक्रा वर एक बिंदू अस्तित्वात आहे जेथे स्पर्शिका बिंदू $(a, f(a))$ आणि $(b, f(b))$ जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या समांतर असते .



आकृती 2.5

टिपण्णी: रोल्स चे प्रमेय लॅग्रांजेसच्या मीन मूल्याच्या प्रमेयाचा एक विशेष भाग आहे.

मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन अटींसह, जर $f(a) = f(b)$

तर $f(b) - f(a) = 0$ आणि म्हणून $f'(c) = 0$

भौमितिक व्याख्ये मध्ये, वक्रावर एक बिंदू आहे ज्यावर स्पर्शिका x-अक्षाला समांतर आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.7. इंटर्वल $[1,3]$ मध्ये $f(x) = x + \frac{1}{x}$ साठी लॅग्रांजच्या मीन मूल्य प्रमेयाची पडताळणी करा.

उकल: येथे, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

i. $f(x)$ हे x मध्ये बहुपदी आहे आणि $x \in \Re - \{0\}$ च्या सर्व मूल्यांसाठी कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे $[1,3]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ सर्व $x \in (1,3)$ साठी अस्तित्वात आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे $(1, 3)$ मध्ये डेरिवेबल आहे

लॅग्रांज मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन्ही अटी पूर्ण झाल्या आहेत,

म्हणून, कमीत कमी एक $c \in (1,3)$ अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad \ldots(1) \qquad [\text{येथे, } b=3, a=1]$$

$f(b), f(a), f'(c)$ हे समी(1) मध्ये ठेऊन, आपल्याकडे असेल,

$$\frac{\frac{10}{3} - 2}{3 - 1} = 1 - \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{3} \in (1,3)$$

म्हणूनच, लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेय सत्यापित केले आहे.

उदाहरण 2.8. दाखवा कि $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, \ x > 0$

उकल: समजा $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर ,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)$$

$$=\frac{x^2}{1+x}>0 \qquad \{\because x>0\}$$

म्हणून $f(x)$ सर्व $x>0$ साठी इंक्रीसिंग फंक्शन आहे.

तसेच $f(0)=0$

म्हणून $x>0$ साठी $f(x)>0$

अशा प्रकारे, $\log(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$

$$\ldots(1)$$

समजा $g(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\log(1+x)$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$g'(x)=1-\frac{2x+x^2}{2(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{x^2}{2(1+x)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2>0$$

$\therefore$ म्हणून $g(x)$ सर्व $x>0$ साठी इंक्रीजिंग फंक्शन आहे

तसेच, $x>0$ साठी $g(x)>0$

म्हणून $x-\frac{x^2}{2(1+x)}>\log(1+x) \qquad \ldots(2)$

(1) आणि (2) वरून, आपल्याकडे असेल

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)},x>0\cdot$$

उदाहरण 2.9. इंटरवल $[0,3]$ मध्ये, फंक्शन $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\le 1\\ 2x^2+2, & x>1\end{cases}$ साठी लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेयाच्या उपयोगाची तपासणी करा.

उकल: येथे, $[0,3]$ मध्ये, $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\le 1\\ 2x^2+2, & x>1\end{cases}$

i. $f(x)$ हे इंटर्वल $[0,3]$ - $\{1\}$ वर एक बहुपदी फंक्शन आहे.

x=1 वर कंटिन्युयीटी, $Rf(1)=\lim_{x\to1^+}2x^2+2=\lim_{h\to0}2(1+h)^2+2=4$

$$Lf(1)=\lim_{x\to1^-}1+3x=\lim_{h\to0}1+3(1-h)=4$$

तसेच $f(1)=4$

अशा प्रकारे, $Rf(1) = Lf(1) = f(1)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ हे $x=1$ वर कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे इंटर्वल $[0,3]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. इंटर्वल $[0,3]$ मध्ये, $f'(x) = \begin{cases} 3, & x \le 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$

$x=1$ वर डिफरेंशिएबिलिटी,

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(1+h) - 4}{h} = 4$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{3-4}{h} = \text{अस्तित्वात नाही}$$

$\Rightarrow x = 1 \in (0,3)$, साठी $f'(x)$ अस्तित्वात नाही

$f(x)$, हे $(0,3)$ वर डेरिवेबल नाही

म्हणून लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेय लागू नाही.

उदाहरण 2.10. इंटर्वल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ मध्ये, फंक्शन $f(x) = \cos x$ साठी लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेयाच्या उपयोगाची तपासणी करा.

उकल: येथे, $f(x) = \cos x$

i. आपल्याला माहीत आहे की, कोसाइन फंक्शन x च्या सर्व मूल्यांसाठी कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे इंटर्वल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. $f'(x) = -\sin x$ (फाइनाइट आणि डेफिनाइट)

$\therefore$ $f(x)$ हे इंटर्वल $(0, \pi/2)$ मध्ये डेरिवेबल आहे.

लॅग्रांज मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन्ही अटी पूर्ण झाल्या आहेत,

म्हणून कमित कमी एक $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ असा अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे, जसे की

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad \left[\text{ येथे, } b = \frac{\pi}{2}, a = 0\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, f(0) = \cos 0 = 1$$

हे मूल्ये मांडल्या नंतर

$$\Rightarrow \quad \frac{0-1}{\frac{\pi}{2} - 0} = -\sin c$$

$\Rightarrow \qquad c = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$

$\Rightarrow \qquad c = \sin^{-1}(0.636) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

त्यामुळे लॅग्रांजच्या मीन मूल्य प्रमेयाचे समाधान होते.

उदाहरण 2.11. दाखवा कि $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \; x > 0$

उकल: समजा $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{x}{1+x^2}$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$= \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} > 0 \; \forall x > 0$$

म्हणून $f(x)$ सर्व $x > 0$ साठी इंक्रीजिंग फंक्शन आहे.

तसेच $\qquad f(0) = 0 \qquad$ ($\tan^{-1} 0 - 0 = 0$ आहे म्हणून)

म्हणून $\qquad f(x) > 0 \; \forall \; x > 0$

अशा प्रकारे, $\qquad \tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2} \qquad \ldots(1)$

समजा $\qquad g(x) = x - \tan^{-1} x$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर ,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \forall x > 0$$

$\therefore \; g(x)$ सर्व $x > 0$ साठी इंक्रीजिंग फंक्शन आहे

अशा प्रकारे $g(0) = 0 - \tan^{-1} 0 = 0$

म्हणून $\qquad g(x) > 0 \; \forall \; x > 0$

म्हणून $x > 0$ साठी $g(x) > 0$

अशा प्रकारे $x > \tan^{-1} x \forall x > 0 \qquad \ldots(2)$

(1) आणि (2) वरून, आपल्याकडे असेल

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \; x > 0$$

अभ्यास 2.2

1. दिलेल्या इंटरवल मध्ये खालील फंक्शन्स साठी लॅग्रांजेसच्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची पडताळणी करा.

a. $[1,3]$ मध्ये, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ मध्ये, $f(x) = x(x-1)(x-2)$

c. $[1,4]$ मध्ये, $f(x) = \frac{1}{4x-1}$

d. $[-3,4]$ मध्ये, $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

e. $[1,e]$ मध्ये, $f(x) = \log x$

f. $[-\pi,\pi]$ मध्ये, $f(x) = x - 2\sin x$

2. खालील फंक्शन्ससाठी लॅग्रांजेसच्या मीन मूल्य प्रमेयाच्या उपयोगतेचे परीक्षण करा:

a. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x) = |x|$

b. $[a,b]$ मध्ये, स्थिर फंक्शन $f(x) = \beta$

c. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=x^{1/3}$ d. $[-3,4]$ मध्ये, $f(x)=|x+2|$

3. लॅग्रांजेस चे मीन व्हॅल्यू प्रमेय वापरून, हे सिद्ध करा

a. $[-1,0]$ मध्ये, $\frac{x^2}{2}<x-\log(1+x)<\frac{x^2}{2(1+x)}$ b. $\frac{x}{1+x}<\log(1+x)<x,\ x>0$

c. $1+x<e^x<1+xe^x$ सर्व $x>0$ साठी

4. दाखवा कि $\frac{y-x}{1+y^2}<\tan^{-1}y-\tan^{-1}x<\frac{y-x}{1+x^2}$ जर $0<x<y$ आणि काढा $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\tan^{-1}\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$

उत्तरे

1. a. $c=2$ b. $c=\frac{6-\sqrt{21}}{6}$ c. $c=\frac{1+3\sqrt{5}}{4}$ d. $c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e. $c=e-1$ f. $c=\pm\frac{\pi}{3}$

2. a. लागू नाही b. लागू आहे c. लागू नाही d. लागू नाही

2.1.4 कॉची मीन मूल्य प्रमेय

विधान: जर एखादे फंक्शन $f:[a,b]\to\Re$ आणि $g:[a,b]\to\Re$ असे आहे की

i. f आणि g दोन्ही $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. f आणि g दोन्ही (a,b) वर डिफरंशीएबल आहेत

iii. $g'(x)\neq 0$ सर्व $x\in(a,b)$ साठी मग कमीत कमी एक बिंदू $c\in(a,b)$ असा अस्तित्वात आहे कि

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

सिद्धता : समजा $g(a)=g(b)$, तर g हे रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण करेल.

तर, कामित कमी एक बिंदू $c\in(a,b)$ असा अस्तित्वात आहे की $g'(c)=0$

परंतु हे दिलेल्या वस्तुस्थितीचा विरोधाभास करते की $g'(c)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$, म्हणून आपले अनुमान चुकीचे आहे आणि $g(a)\neq g(b)$

आता एक फंक्शन परिभाषित करा: $\phi:[a,b]\to\Re$ असे आहे की $\phi(x)=f(x)+Ag(x), x\in(a,b)$ जेथे A स्थिर आहे आणि अशा प्रकारे निश्चित केले जाईल की,

$$\phi(a)=\phi(b) \quad \ldots (1)$$

आता,

$$\phi(a)=f(a)+Ag(a)$$

$$\phi(b)=f(b)+Ag(b)$$

समी(1) वापरून, आपल्याकडे असेल

$$f(a)+Ag(a)=f(b)+Ag(b) \Rightarrow A[g(a)-g(b)]=f(b)-f(a)$$

$$A=\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)} \quad \ldots (2)$$

आता,

i. ϕ हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहे, कारण f आणि g दोन्ही *[a, b]* वर कंटिन्युयस असतात आणि A देखील कॉस्टंट

असून $[a, b]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. ϕ हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे, कारण f आणि g दोन्ही (a, b) वर डिफरंशीएबल आहेत आणि A देखील कॉस्टंट असून (a, b) वर डिफरंशीएबल आहे.

iii. तसेच, $\phi(a)=\phi(b)$

अशा प्रकारे, $\phi(x)$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण करते

म्हणून कमीत कमी एक $c \in (a,b)$ अस्तित्वात आहे जसे की $\phi'(c)=0$

$$\phi(x)=f(x)+Ag(x)$$

$\Rightarrow$ $$\phi'(x)=f'(x)+Ag'(x)$$

$\Rightarrow$ $$\phi'(c)=f'(c)+Ag'(c)$$

आता, $$\phi'(c)=0$$

$\Rightarrow$ $$f'(c)+Ag'(c)=0$$

$\Rightarrow$ $$f'(c)=-Ag'(c)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{f'(c)}{g'(c)}=-A$$

समी(2) वापरून, आपल्याकडे असेल,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, c \in (a,b)$$

म्हणून, प्रमेय सिद्ध झाले आहे.

टिप्पणी: लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेय हे $g(x)=x,\ x \in (a,b)$ घेऊन कॉचीच्या मीन मूल्य प्रमेयाचे एक विशिष्ट प्रकरण आहे.

2.1.5 कॉचीच्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची भौमितिक व्याख्या

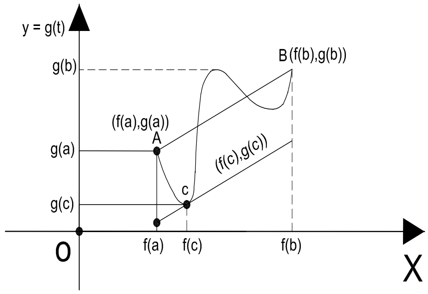
समजा $x=f(t)$ आणि $y=g(t)$ पॅरामेट्रिक वक्र आहे जेथे $t \in (a,b)$

i. f आणि g दोन्ही $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. f आणि g दोन्ही (a,b) वर डेरिवेबल आहे

iii. इंटरवल $[a,b]$ वर $g'(x) \neq 0$ आहे

तर कमीत कमी एक $c \in (a,b)$ अस्तित्वात आहे ज्यावर स्पर्शिका AB ला समांतर आहे



आकृती 2.6

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.12. इंटरवल $[0,1]$ वर, $f(x)=e^{x}$ आणि $g(x)=e^{-x}$ साठी कॉची मीन मूल्य प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे, $f(x)=e^{x}$, $g(x)=e^{-x}$

i. f आणि g दोन्ही $[0,1]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii $f'(x)=e^{x}, g'(x)=-e^{-x}$, हे $(0,1)$ वर डिफरंशीएबल आहे

iii $g'(x)=-e^{-x}\neq 0\ \forall x\in(0,1)$,

मग कमीत कमी एक $c\in(0,1)$ असा अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad [\text{जेथे } b=1, a=0] \qquad \ldots(1)$$

म्हणून, $f(1)=e^{1}=e,\ f(0)=e^{0}=1$ आणि

$$g(1)=e^{-1}=\frac{1}{e},\ g(0)=e^{-0}=1$$

सर्व मूल्ये (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याकडे आहे

$$\frac{e-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{e^{c}}{-e^{-c}}$$

$$\Rightarrow \quad 1=e^{2c-1}$$

$$\Rightarrow \quad e^{0}=e^{2c-1}$$

$$\Rightarrow \quad 0=2c-1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

त्यामुळे कॉची मीन मूल्य प्रमेय पडताळले आहे.

उदाहरण 2.13. समजा, फंक्शन f हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहे आणि (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे . सिद्ध करा की तेथे एक संख्या c ही (a,b) मध्ये अशी आहे की $2c[f(a)-f(b)]=f'(c)[a^{2}-b^{2}]$

उकल: येथे,

i. f हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. f' हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

लॅग्रांजेसच्या मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन्ही अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून कामित कमी एक असा $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad f(a)-f(b)=f'(c)(a-b) \qquad \ldots(1)$$

$\Rightarrow$ आता, दिलेले आहे

$$2c[f(a)-f(b)]=f'(c)[a^{2}-b^{2}]$$

समी(1) वापरून, आपल्याकडे आहे

$$2c\left[(a-b)f'(c)\right]=f'(c)\left[(a-b)(a+b)\right]$$

$\Rightarrow$ $$2c=a+b$$

$\Rightarrow$ $$c=\frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow$ $$c=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$$

म्हणून, एक संख्या $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे.

उदाहरण 2.14. इंटरवल $[1,2]$ वर, फंक्शन $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^2-4$ साठी, $\sqrt[3]{3}=1.44$ घेऊन कॉची मीन मूल्य प्रमेय वापरून 'c' शोधा

उकल: येथे, $[1,2]$ वर, फंक्शन $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^2-4$

i. f , सर्व $x\in\Re-\{0\}$ वर कंटिन्युयस आहेत [f हे $x = 0$ वर परिभाषित केलेले नाही]

आणि g हे बहुपदीय फंक्शन असल्याने सर्वत्र कंटिन्युयस आहे.

$\therefore$ $f(x)$ आणि $g(x)$ हे $[1,2]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. $f'(x)=-\frac{1}{x^2},g'(x)=2x$ हे $[1,2]$ वर डिफरंशीएबल आहे.

iii. $g'(x)=2x\neq 0\ \forall\, x\in(1,2)$

म्हणून कामित कमी एक असा $c\in(1,2)$ अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \ldots (1)\ [\text{ जेथे } a=1,\ b=2]$$

म्हणून, $f(2)=\frac{1}{2},\ f(1)=1,\ g(2)=0, g(1)=-3$

सर्व मूल्ये (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याकडे आहे,

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{0-(-3)}=\frac{-\frac{1}{c^2}}{2c}$$

$\Rightarrow$ $$c^3=3$$

$\Rightarrow$ $$c^3=\sqrt[3]{3}==1.44\in(1,2)$$

उदाहरण 2.15. इंटरवल$[a,b]$ वर, फंक्शन $f(x)=x^2,\ g(x)=x^4$ साठी, कॉची मीन मूल्य प्रमेय सत्यापित करा, जेथे $a>0,\ b>0$.

उकल: येथे, $f(x)=x^2,\ g(x)=x^4$

i. f आणि g ही x ची बहुपदी फंक्शन असल्यामुळे सर्वत्र कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ आणि $g(x)$ हे (a,b) वर कंटिन्युयस आहे

ii. $f'(x)=2x,\ g'(x)=4x^3$

$f'(x)$ आणि $g'(x)$ पुन्हा बहुपदी फंक्शन आहेत आणि म्हणून सर्वत्र डिफरंशीएबल आहेत

$\therefore$ $f'(x)$ आणि $g'(x)$ हे $[a,b]$ वर डिफरंशीएबल आहेत,

iii. $g'(x)=4x^3\neq 0\ \forall\ x\in(a,b),\ \{a>0,b>0\}$

अशाप्रकारे f आणि g कॉची मीन मूल्य प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण करतात.

म्हणून कमीत कमी एक असा $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \{\text{जेथे } a=a,\ b=b\}$$

म्हणून, $f(b)=b^2,\ f(a)=a^2,\ g(a)=a^4, g(b)=b^4$

$\Rightarrow$ $$\frac{b^2-a^2}{b^4-a^4}=\frac{2c}{4c^3}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{b^2+a^2}=\frac{1}{2c^2} \qquad \Rightarrow \qquad c^2=\frac{b^2+a^2}{2}$$

$\Rightarrow$ $$c=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}}\in(a,b)$$

म्हणून, कॉची मीन मूल्य प्रमेय पडताळले आहे.

अभ्यास 2.3

1. खालील फंक्शन्ससाठी कॉची च्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची पडताळणी करा:

a. $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ मध्ये, $f(x)=\sin x,\ \ g(x)=\cos x$ b. $[1,2]$ मध्ये, $f(x)=x^2,\ \ g(x)=x^3$

c. $[1,3]$ मध्ये, $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ d. $[1,e]$ मध्ये , $f(x)=\log x,\ \ g(x)=\frac{1}{x}$

e. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ मध्ये, $f(x)=(1+x)^{3/2},\ \ g(x)=\sqrt{1+x}$

2. जर f' आणि g' हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आणि डिफरंशीएबल आहेत, तर दाखवा की $a<c<b$

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)}=\frac{f''(c)}{g''(c)}$$

3. सिद्ध करा कि $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\theta, 0<\alpha<\theta<\beta<\frac{\pi}{2}$

उत्तरे

1. a. $c=-\frac{\pi}{4}$ b. $c=\frac{14}{9}$ c. $c=\sqrt{3}$ d. $c=\frac{e}{e-1}$ e. $c=\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}$

मनोरंजक माहिती

- रोल्सचे प्रमेय कंटिन्यूइटी आणि डिफरनशिएबिलटी यांच्यातील संबंध स्थापित करते
- मीन मूल्य प्रमेय अगदी स्पीडोमीटरची अचूकता तपासण्यासाठी वापरला जातो.
- हे बिंदूचे अस्तित्व निर्दिष्ट करते जेथे डेरिवेटिव नाहीसे होते.

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- जर A ते B पर्यंतच्या प्रवासादरम्यान सरासरी वेग 50 किमी/तास असेल, तर एक वेळ अशी असेल जेव्हा तात्कालिक वेग 50 किमी/तासाचा असेल (ते कमाल आहे)
- ऋतूंमध्ये सूर्यास्ताच्या वेळेतील बदलाचा दर.
- जेव्हा एखादा चेंडू हवेत वरच्या दिशेने फेकला जातो, तेव्हा त्याचा वेग काही वेळा शून्य होतो. रोल्सचे प्रमेय स्पष्ट करते की चेंडूचा वेग कधीतरी शून्य होतो.
- L.M.V.T चा वापर गतीला 'चालान' देण्यासाठी केला जातो.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Rolle's Theorem

Rolle's Theorem and Lagrange Mean Value Theorem (MVT)

Mean Value Theorems

2.2 टेलरचा सिद्धांत

टेलरचे प्रमेय म्हणजे मीन मूल्य प्रमेयाचा विस्तार आहे कारण मीन मूल्य प्रमेय फंक्शनचे मूल्य आणि त्याच्या पहिल्या ऑर्डर डेरिव्हेटिव्हशी संबंधित आहे परंतु टेलरचे प्रमेय फंक्शनचे मूल्य आणि त्याचे 'उच्च ऑर्डर डेरिव्हेटिव्ह' संबंधित आहे.

2.2.1 टेलरचा सिद्धांत लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह

विधान: समजा, फंक्शन $f:[a,a+h]\to\Re$ असे आहे की

i. $[a,a+h]$ वर $f,f',f''........f^{n-1}$ हे x चे कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^{n}(x)$, हे $(a,a+h)$ मध्ये अस्तित्वात आहे

तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(\theta h+a)$$

सिद्धता: एक फंक्शन $\phi:[a,a+h]\to\Re$ चा अशा प्रकारे विचार करा

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x).f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+...+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{(a+h-x)^n}{(n)!}A \quad ...(1)$$

जिथे A हे असे निवडले जाणारे स्थिरांक आहे कि

$$\phi(a)=\phi(a+h) \qquad \ldots(2)$$

आता $x=a$ आणि $x=a+h$ (1) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे आहे

$$\phi(a)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A$$

आणि $\phi(a)=\phi(a+h)$

ही मूल्ये (2) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याकडे आहे

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A \qquad \ldots(3)$$

आता ,

i. $\phi(x)$, हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, म्हणून $f(x), f'(x), f''(x).........f^{n-1}(x)$ हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, $\ldots\ldots(a+h-x)^n$ बहुपदी आसल्यामुळे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहेत. तसेच कंटिन्युयस फंक्शन्सची बीजगणितीय बेरीज कंटिन्युयस आहे.

ii. $\phi(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहे, म्हणून $f(x), f'(x), f''(x).........f^{n-1}(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहेत, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, $\ldots\ldots(a+h-x)^n$ बहुपदी आसल्यामुळे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहे

iii. तसेच, $\phi(a)=\phi(a+h)$

$\therefore$ $\phi(x)$, $[a,a+h]$ मध्ये रोल्सच्या प्रमेयाच्या सर्व तीन अटी पूर्ण करते. मग कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$\phi'(a+\theta h)=0 \qquad \ldots(4)$$

समी (1) ला x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$\phi'(x)=f'(x)+(a+h-x).f''(x)-f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f'''(x)+\frac{2(a+h-x)}{2!}(-1)f''(x)+\ldots$$
$$+\ldots.+.\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x)-\frac{(n-1)(a+h-x)^{n-2}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{n(a+h-x)^{n-1}(-1)}{(n)!}A$$

किंवा $$\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x)-\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}A$$
$$=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^n(x)-A\right]$$

$x=a+\theta h$ ठेऊन,

$$\phi'(a+\theta h)=\frac{\left[h(1-\theta)\right]^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^n(a+\theta h)-A\right]$$

परंतु $\phi'(a+\theta h)=0$ (4) वरून,

$\Rightarrow f^n(a+\theta h)-A=0 \quad \Rightarrow \quad A=f^n(a+\theta h) \quad [\because 1-\theta \neq 0$ आणि $h \neq 0]$

(3) वरून, $f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(a+\theta h)$

जो प्रमेयाचा आवश्यक परिणाम आहे.

येथे $(n+1)^{th}$ वे पद आहे . $\frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)$ ला n^{th} टर्म नंतर लॅग्रांजेसचा रिमेन्डर फॉर्म असे म्हणतात.

2.2.2 मैकलॉरिनचे प्रमेय लॅग्रांजेसच्या फॉर्म ऑफ रिमेन्डरसह

विधान: जर $f(x)$ हे $[0,x]$ मध्ये परिभाषित केलेले फंक्शन असे आहे की

i. $f, f', f''.......f^{n-1}$ हे $[0,x]$ मध्ये कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii $f^n(x)$, हे $(0,x)$ मध्ये अस्तित्वात आहे. तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots.+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}f^n(\theta x)$$

सिद्धता: टेलरच्या प्रमेयावरून, आपल्याकडे आहे

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(a+\theta h)$$

या समीकरनामध्ये मध्ये $a=0, h=x$ ठेउन आपल्याकडे असेल

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}f^n(\theta x),\ 0<\theta<1$$

वरील समीकरण म्हणजे लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर स्वरूपासह आवश्यक मॅक्लॉरिनचे प्रमेय आहे.

2.2.3 टेलरचा सिद्धांत कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह

विधान: समजा, फंक्शन $f:[a,a+h]\to\Re$ असे आहे की

i. इंटरवल $[a,a+h]$ वर $f, f', f'.........f^{n-1}$ हे x मधील कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^n(x)$, हे $(a,a+h)$ मध्ये अस्तित्वात आहे

तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta,\ 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(a+\theta h)$$

सिद्धता: फंक्शन $\phi:[a,a+h]\to\mathbb{R}$ अशा प्रकारे घेऊ की

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x).f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+(a+h-x).A \qquad \ldots.(1)\ x\in(a,\ a+h)$$

जिथे A हे असे निवडले जाणारे स्थिरांक आहे कि $\phi(a)=\phi(a+h)$

आता $x=a$ समी(1) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$\phi(a)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A \qquad \ldots(2)$$

आणि $\phi(a)=\phi(a+h)$

आता $x=a+h$, (1) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$\phi(a+h)=f(a+h)+0+0+\ldots.+=f(a+h) \qquad \ldots(3)$$

आता, $\phi(a+h)=\phi(a)$

मग, (2) आणि (3) वरून, आपल्याकडे असेल

$$f(a+h)=f(a)+h.f^{/}(a)+\frac{h^2}{2!}f^{//}(a)+\ldots\ldots.+.\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+hA \qquad \ldots(4)$$

आता,

i. $\phi(x)$, हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, म्हणून $f(x),f'(x),f''(x)\ldots\ldots\ldots f^{n-1}(x)$ हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, $\ldots\ldots(a+h-x)^{n-1}$ बहुपदी आसल्यामुळे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहेत.

ii. $\phi(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहे, म्हणून $f(x),f'(x),f''(x)\ldots\ldots\ldots f^{n-1}(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहेत, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, $\ldots\ldots(a+h-x)^{n-1}$ बहुपदी आसल्यामुळे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहेत.

iii. तसेच, $\phi(a)=\phi(a+h)$

$\therefore$ $\phi(x)$, $[a,a+h]$ मध्ये रोल्सच्या प्रमेयाच्या सर्व तीन अटी पूर्ण करते. मग कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की $\phi'(a+\theta h)=0$

समी (1) ला दोन्ही बाजूने x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$\phi'(x)=f'(x)+\left[(a+h-x).f''(x)-f'(x)\right]+\frac{1}{2!}\left[2(a+h-x)f''(x)(-1)+(a+h-x)^2f'''(x)\right]+\ldots$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left[-(a+h-x)^{n-1}f^n(x)-(n-1)(a+h-x)^{n-2}f^{n-1}(x)\right]+\frac{n(a+h-x)^{n-1}(-1)}{n!}A$$

किंवा $$\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}f^n(x)}{(n-1)!}-A$$

$x=a+\theta h$ ठेउन, आपल्याकडे असेल

$$\phi'(a+\theta h)=\frac{(a+h-a-\theta h)^{n-1}f^n(a+\theta h)}{(n-1)!}-A$$

$$=\frac{\left[h(1-\theta)\right]^{n-1}f^n(a+\theta h)}{(n-1)!}-A$$

$$=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)-A$$

परंतु $\phi'(a+\theta h)=0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h) - A = 0$$

किंवा
$$A = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)$$

‘ A ‘ चे हे मूल्य (4) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + h\left[\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)\right]$$

म्हणजे , $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)$

हे टेलरच्या प्रमेयाचा आवश्यक फॉर्म कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह आहे.

येथे. $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)$ ला टेलरचा सिद्धांत कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह आफ्टर nth टर्म असे म्हणतात.

2.2.4 मॅकलॉरिन चा प्रमेय कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्म ऑफ सह

सिद्धता: जर $f(x)$ हे $[0,x]$ मध्ये परिभाषित केलेले फंक्शन असे असेल की

i. $f, f', f''\ldots\ldots f^{n-1}$ हे $[0,x]$ मध्ये कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^{n}(x)$, हे $(0,x)$ मध्ये अस्तित्वात आहे. तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n)!}f^{n}(\theta x), 0<\theta<1$$

सिद्धता: कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह टेलरच्या सिद्धांता वरून, आपल्याकडे असेल

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)$$

वरील प्रमेया मध्ये $a=0$ आणि $h=x$ ठेवा

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{(n)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(\theta x), 0<\theta<1$$

हे पाहिजे असलेले कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनचे प्रमेय आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.16. $f(x) = (1-x)^{7/2}$ या फंक्शनचा विस्तार दिलेला आहे
$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$. तर θ चे मूल्य शोधा जेव्हा $x \to 1$

उकल: येथे, $f(x) = (1-x)^{7/2}$

$$f'(x) = -\frac{7}{2}(1-x)^{5/2}$$
$$f''(x) = \frac{35}{4}(1-x)^{3/2}$$
$$f'''(x) = -\frac{105}{8}(1-x)^{1/2}$$

$x = 0$ वर वरील सर्व डेरिव्हेटिव्ह्ज काढल्यानंतर, आपल्याकडे आहे

$$f(0)=1\ f'(0)=-\frac{7}{2},\ f''(0)=\frac{35}{4},\ f'''(\theta x)=-\frac{105}{8}(1-\theta x)^{1/2}$$

आता
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$$

$\Rightarrow$
$$(1-x)^{7/2} = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{35}{8}x^2 - \frac{105}{48}(1-\theta x)^{1/2}\, x^3$$

जेव्हा $x \to 1$, आपल्याकडे असेल

$$0 = 1 - \frac{7}{2} + \frac{35}{8} - \frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2}$$

$\Rightarrow$
$$\frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2} = \frac{15}{8}$$

$\Rightarrow$
$$(1-\theta)^{1/2} = \frac{15}{8}\times\frac{48}{105}$$

$\Rightarrow$
$$(1-\theta)^{1/2} = \frac{6}{7}$$

दोन्ही बाजूंनी वर्ग केल्यावर

$$1-\theta = \frac{36}{49}$$

$\Rightarrow$
$$\theta = 1 - \frac{36}{49}$$

$\Rightarrow$
$$\theta = \frac{13}{49} \text{ (उकल)}$$

उदाहरण 2.17. दाखवा की x च्या प्रत्येक मूल्यासाठी,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \sin(\theta x)$$

उकल: येथे,
$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = -\cos x = \cos(x+\pi)$$
$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{iv}(x)=\cos x=\cos(2\pi+x)$$

....

....

$$f^{n}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n-1}(x)=\cos\left(x+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x)=\cos\left(x+2n.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x)=\cos(x+n\pi)$$

$$f^{2n+1}(x)=\cos\left(x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n+1}(\theta x)=\cos\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

म्हणून $\quad f(0)=\cos 0=1\,,\; f^{/}(0)=-\sin 0=0$

$$f^{//}(0)=-\cos 0=-1\,,\; f^{///}(0)=\sin 0=0$$

$$f^{iv}(0)=\cos 0=1$$

....

....

$$f^{2n-1}(0)=\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f^{2n}(0)=\cos n\pi=\begin{cases}1, & n=\text{सम}\\ -1, & n=\text{विषम}\end{cases}=(-1)^{n+1}\sin\theta x$$

$$f^{2n+1}(\theta x)=\cos\left[\theta x+n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\begin{cases}-\sin\theta x, & n=\text{सम}\\ \sin\theta x. & n=\text{विषम}\end{cases}=(-1)^{n+1}\sin\theta x$$

मॅकलॉरिनच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.\frac{x^3}{3!}f'''(0)+......+.\frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{2n}(0)+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{2n+1}(\theta x)$$

मिळवलेली मुल्ये ठेउन, आपल्याकडे असेल

$$\cos x = 1 + x.0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + \dots\dots\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^{n+1}\sin(\theta x)$$

म्हणजे, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x)$ सिद्ध केले.

उदाहरण 2.18 जर एखादे फंक्शन f असे असेल की f' हे $[a,b]$ वर कंटीन्यूअस फंक्शन आहे आणि (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे. तर दाखवा की एक वास्तविक संख्या $\theta, 0 < \theta < 1$, अशी आहे की

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''[a + \theta(b-a)].$$

उकल: समजा $\phi(x) = f(x) + (b-x) f'(x) + (b-x)^2 A$ ...(1)

जिथे A हे असे निवडले जाणारे स्थिरांक आहे कि $\phi(a) = \phi(b)$

आता, $\phi(a) = f(a) + (b-a) f'(a) + (b-a)^2 A$ ...(2)

आणि $\phi(a) = \phi(b)$ [मिळवा $x = a$ आणि $x = b$ समी(1) मध्ये टाकून] ...(3)

समी (2) मध्ये समी (3) वापरून, अपलायला मिळेल

$$f(x) = f(a) + (b-a) f'(a) + (b-a)^2 A \quad \dots(4)$$

i. $f(x)$, $f'(x)$ हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, आणि $(b-x)$, $(b-a)^2$ हे $[a,b]$ वर बहुपदी असून एक कंटिन्युयस फंक्शन आहे,

$\therefore$ $\phi(x)$ हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f(x)$, $f'(x)$, हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे, आणि $(b-x)$, $(b-x)^2$ हे बहुपदी असून (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

$\therefore$ $\phi(x)$ हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

iii. तसेच, $\phi(a) = \phi(b)$

अशा प्रकारे, $\phi(x)$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण करते.

म्हणून तेथे वास्तविक संख्या $\theta, 0 < \theta < 1$, अशी आहे की $\phi'[a + \theta(b-a)] = 0$ ...(5)

समी (1) ला x ने डिफरन्शिएट केल्यावर

$$\phi'(x) = f'(x) + (b-x) f''(x) + (-1) f'(x) + 2(b-x)(-1) A$$

किंवा $\phi'(x) = (b-x) f''(x) - 2(b-x) A$

किंवा $\phi'(x) = (b-x)[f''(x) - 2A]$

$x = a + \theta(b-a)$ टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$\Rightarrow \phi'[a + \theta(b-a)] = (b - a - \theta(b-a))[f''(a + \theta(b-a)) - 2A]$$

$$0 = (b-a)(1-\theta)[f''(a+\theta)(b-a) - 2A]$$

[समी (5) वरून आणि $b - a \neq 0, 1 - \theta \neq 0$ असल्यामुळे]

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} f''(a + \theta(b-a))$$

‘ A ‘ चे मूल्य समी (4) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''[a + \theta(b-a)]$$

उदाहरण 2.19. दाखवा की $\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+.....+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}$

उकल: समजा $f(x+h)=\log(x+h)$

$$f(x)=\log x$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$$

$$f^{iv}(x)=-\frac{6}{x^4}=(-1)^3\frac{3!}{x^4}$$

....

....

असेच चालू ठेऊन

$$f^{n-1}(x)=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$f^{n}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n}}$$

$$f^{n}(x+\theta h)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह टेलरच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$f(x+h)=f(x)+h.f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(x+\theta h)$$

सर्व मूल्ये टाकल्यानंतर, आपल्याकडे असेल

$$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3!}\times\frac{2!}{x^3}+.....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}+\frac{h^n}{n!}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

किंवा $\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+.....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)}\frac{(-1)^{n-2}}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}h^n}{n(x+\theta h)^n}$

उदाहरण 2.20. मॅक्लॉरिनच्या प्रमेया वरून $e^{ax}.\sin bx$ ला n टर्म नंतर लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह विस्तृत करा.

उकल: समजा $f(x)=e^{ax}.\sin bx$

$$f'(x)=e^{ax}\cos bx.b+ae^{ax}\sin bx$$

$$= e^{ax}\left(b.\cos bx + a.\sin bx\right)$$

$$f''(x) = e^{ax}\left(-b^2.\sin bx + ab\cos bx\right) + ae^{ax}\left(b\cos bx + a\sin bx\right)$$
$$= e^{ax}\left[\left(a^2 - b^2\right)\sin bx + 2ab\cos bx\right]$$
$$f'''(x) = e^{ax}\left[\left(a^2 - b^2\right)\cos bx.b - 2ab\sin bx.b\right] + ae^{ax}\left[\left(a^2 - b^2\right)\sin bx + 2ab\cos bx\right]$$
$$= e^{ax}\left[b\left(3a^2 - b^2\right)\cos bx + \left(a^3 - 3ab^2\right)\sin bx\right]$$

असेच चालू ठेऊन

$$f^n(x) = \left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{ax}\sin\left(bx + n.\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$x = 0$ टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$f(0) = 0,\ f'(0) = b,\ f''(0) = 2ab,$$
$$f'''(0) = b\left(3a^2 - b^2\right),$$
$$f^n(\theta x) = \left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{ax}\sin\left(b\theta x + n.\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x)$$

सर्व मूल्ये टाकल्यानंतर, आपल्याकडे असेल

$$e^{ax}.\sin bx = 0 + x.b + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}\left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

किंवा $e^{ax}.\sin bx = bx + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \frac{x^3}{3!}b\left(3a^2 - b^2\right) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}\left(a^2 + b^2\right)^{n/2} e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

अभ्यास 2.4

1. दाखवा की x च्या प्रत्येक मूल्यासाठी खलील विस्तार शक्य होतो
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots.. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x, 0 < \theta < 1.$$

2. मॅक्लॉरिनच्या विस्ताराच्या मदतीने, दाखवा की

   a. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}.$

   b. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots - \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^n}{n(1-\theta x)^n}.$

3. जर एखादे फंक्शन f', जे $[a, a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन असेल आणि $(a, a+h)$ वर डिफरंशीएबल असेल. तर सिद्ध करा की a आणि $(a + h)$ दरम्यान वास्तविक संख्या c अस्तित्वात अशाप्रकारे आहे की

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(c)$$

4. $f(x)=(1-x)^{5/2}$ या फंक्शनचा विस्तार $f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(\theta x)$ अशाप्रकारे दिलेला आहे. **तर** θ चे मूल्य शोधा जेव्हा $x \to 1$

5. शक्य असल्यास, मॅक्लॉरिनच्या प्रमेयाचा वापर करून x च्या चढत्या घातांकामध्ये $\sqrt{x}$ ला विस्तृत करा.

6. n टर्म नंतर लॅग्रेंजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनचे प्रमेय वापरून $f(x)=a^x$ फंक्शन विस्तृत करा.

7. n टर्म नंतर कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनचे प्रमेय वापरून $e^{ax}.\sin bx$ विस्तृत करा.

उत्तरे

4. $\theta=\frac{9}{25}$ 6. $1+x\log a+\frac{x^2}{2!}(\log a)^2+.....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}a^{\theta x}(\log a)^n$

7. $bx+\frac{x^2}{2!}(2ab)+\frac{x^3}{3!}b(3a^2-b^2)+......+\frac{x^n}{(n-1)!}(a^2+b^2)^{n/2}(1-\theta)^{n-1}e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

मनोरंजक माहिती

- हे सिग्नल प्रक्रिया उद्योगात देखील वापरले जाते जेथे आपल्याला साइनूसॉइडल फंक्शन्स चा अंदाज घेणे आवश्यक आहे
- सिग्नलचा परिणाम तपासण्यासाठी हे ट्रान्सीस्ट्र्स आणि एम्प्लिफायर उद्योगात वापरले जाते

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- हे संगणक आणि कॅल्क्युलेटरवरील अनेक फंक्शन्सच्या अंदाजे मूल्यांची गणना करण्यात मदत करतात.
- लिमिट सोडवण्यासाठी आणि अनेक अनंत बेरीज निश्चित करण्यासाठी ते खूप उपयुक्त आहेत.
- फंक्शन्सचे असीम्टोमेटिक वर्तन समजून घेण्यासाठी हे खूप उपयुक्त आहेत.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Taylor's Theorem 1

Taylor's theorem 2

2.3 इंडिटर्मिनेट फॉर्म आणि 'L' हॉस्पिटल्सचा नियम

समजा $f(x)$ आणि $g(x)$ ही दोन दिलेली फंक्शन्स आहेत.तर $\frac{f(x)}{g(x)}$ जसे $x \to c$ ची लिमिट सर्वसाधारणपणे डिनॉमिनेटरच्या लिमिट नुसार विभागलेल्या अंकांच्या लिमिट इतकी असते. पण जेव्हा त्या दोन लिमिट शून्य असतात, तेव्हा कोशंट फॉर्म ०/० पर्यंत कमी होतो.

$\frac{0}{0}$ फॉर्मला इंडिटर्मिनेट फॉर्म म्हणतात

गणितानुसार, ते खालील प्रमाणे व्यक्त केले जाऊ शकते,

लिमिटचे मूल्यांकन करण्यासाठी $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{m}$

जर $l=0,\ \ m\neq 0$, तर $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

जर $l\neq 0,\ \ m=0$, तर $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$

जर $l=0,\ \ m=0$ तर $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$

चे मूल्यमापन केले जाऊ शकत नाही आणि याला इंडिटर्मिनेट फॉर्म म्हणतात.
खालीलप्रमाणे निरनिराळे फॉर्म प्रतीकांद्वारे दर्शविले जातात

$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0

येथे, आपण हे सर्व इंडिटर्मिनेट फॉर्म उदाहरणांसह स्पष्ट करू.

2.3.1 इंडिटर्मिनेट फॉर्म $\dfrac{0}{0}$ (टाईप - I) च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम

प्रमेय: समजा f आणि g हे $x=a$ वर डिफरंशीएबल आहे आणि $f(a)=0=g(a)$,तर

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

सिद्धता: $f(a)=0=g(a)$

आपण असे लिहू शकतो,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$x-a$ ने भागून, आपल्याकडे असेल

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

दोन्ही बाजूंनी लिमिट घेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \qquad \left[\because \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\lim\limits_{x\to b} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}\right]$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$ [डिफरन्शिएबिलिटी च्या व्याख्येनुसार]

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

साधारणपणे, जर

$$f(a) = f'(a) = f''(a) .... = f^{n-1}(a) = 0$$

$$g(a) = g'(a) = g''(a) .... = g^{n-1}(a) = 0$$

आणि

$$g^{n}(a) \neq 0$$

जर $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{n}(x)}{g^{n}(x)}$ अस्तित्वात असेल,

तर

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{n}(x)}{g^{n}(x)}$$

याला "L" हॉस्पिटल नियम म्हणून ओळखले जाते.

नियम कसा उपयोगात आणावा,

जर $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ अपरिभाषित आहे आणि $\dfrac{0}{0}$ स्वरूपाचा आहे, तर खालील प्रक्रियेद्वारे लिमिटचे मूल्यांकन करा:

1. अंश आणि छेदाला वेग वेगळे डिफरन्शिएट केल्यावर, म्हणजेच, "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

दोन स्थिती उद्भवतात:

स्थिती I: जर $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ हे $\dfrac{0}{0}$ या स्वरूपाचे नसेल तर,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

स्थिती II: जर $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ हे $\dfrac{0}{0}$ या स्वरूपाचे असेल, तर अंश आणि छेदाला पुन्हा वेग वेगळे डिफरन्शिएट करा, म्हणजेच, "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$

2. वरील प्रक्रिया (केस -2) पुन्हा पुन्हा करा म्हणजे जोपर्यंत $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{n}(x)}{g^{n}(x)}$ चा फॉर्म हा डिटर्मिनेट फॉर्म होईल म्हणजे ,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{n}(x)}{g^{n}(x)}$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

(प्रकार-I)

उदाहरण 2.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

उदाहरण 2.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{x-1-\log x}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{x-1-\log x}$ $\qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)-1}{1-\frac{1}{x}}$$ "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x+x^x\log x-1}{1-\frac{1}{x}} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)+x^x.\frac{1}{x}+x^x(1+\log x)\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x+x^x\log x+x^{x-1}+\left(x^x+x^x\log x\right)\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1+0+1+0}{1}=2$$

उदाहरण 2.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$. च्या वरून '$a$' आणि '$b$' चे मूल्य शोधा,

उकल: येथे $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$ $\qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{x(-a\sin x)+(1+a\cos x)-b\cos x}{3x^2}=1 \qquad \ldots(1)$$

समी (1) ची उजवी बाजू फाइनाइट असल्याने, त्याची डवी बाजू देखील फाइनाइट असणे आवश्यक आहे जेव्हा $x\to 0$

पण विभाजक$\longrightarrow 0$ म्हणून $x \to 0$

आणि अंश $\longrightarrow 0$ म्हणून $x \to 0$

$\Rightarrow \quad 1+a-b=0$

$\Rightarrow \quad a-b=-1 \qquad \ldots (2)$

(1) च्या डाव्या बाजूला, "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x - ax\cos x - a\sin x + b\sin x}{6x}=1 \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\cos x - a\cos x + ax\sin x - a\cos x + b\cos x}{6}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-3a+b}{6}=1 \quad \Rightarrow \quad -3a+b=6 \qquad \ldots(3)$$

(2) आणि (3) वापरून, आपल्याला मिळेल, $a=-\frac{5}{2},\ b=-\frac{3}{2}$ उकल

उदाहरण 2.24. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2}{x^3}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2}{x^3}$ $\qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x + e^x\sin x - 1 - 2x}{3x^2}$$

किंवा

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x+\sin x)-1-2x}{3x^2} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)-2}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{6x} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2e^x\sin x}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ \text{उकल}$$

उदाहरण 2.25. $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ फाइनाइट आहे अशाप्रकारे ‘ a ‘ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ $\qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-2\cos 2x}{3\tan^2 x.\sec^2 x}=\frac{a-2}{0}$$

पण दिलेले आहे की, $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ फाइनाइट आहे.

$\therefore \quad a-2=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ उकल

2.3.1.1 मालिकेच्या विस्ताराच्या पद्धतीद्वारे लिमिटचे मूल्यमापन

i. $a^x = 1 + x\log a + \frac{x^2}{2!}(\log a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\log a)^3 + \dots\dots\dots$

ii. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots$

iii. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots |x| < 1$

iv. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots |x| < 1$

v. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots |x| < 1$

vi. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots\dots |x| < 1$

vii. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\dots\dots \forall x$

viii. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\dots\dots \forall x$

ix. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\dots\dots \forall x$

x. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\dots\dots \forall x$

xi. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots\dots\dots \forall x$

xii. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots\dots\dots$

उदाहरण 2.26. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ [$\frac{0}{0}$ स्वरूप]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\dots\dots\right)}{x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots}{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \dots\dots\dots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots\dots\right)}{x^2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots\dots\dots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots\dots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$ **उकल**

पर्यायी पद्धत: $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \log(1+x)}$ [$\frac{0}{0}$ स्वरूप]

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{x}{1+x} + \log(1+x)}$$ [$\frac{0}{0}$ स्वरूप]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 2.27. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \log(1+x)}{x^2}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \log(1+x)}{x^2}$ [$\frac{0}{0}$ स्वरूप]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\dots\dots\right] - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} \dots\dots\dots\right] - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \dots\dots\dots\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{2} - \frac{5x}{6} + \dots\dots\dots\right] = \frac{1}{2} \text{ उकल}$$

अभ्यास 2.5

1. खालील गोष्टींचे मूल्यांकन करा:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)}{x \sin x}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x + \log(1-x)}{x \tan^2 x}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^2}{\log\left(1+x^2\right)}$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2 \sin x}$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$

h. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{\sqrt{x}}$

i. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - x}{\sin x - x\cos x}$

j. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^{\sin x} - e^x}$

2. खालील लिमिट चे मूल्यांकन करा:

a. $\lim_{a\to b} \frac{a^b - b^a}{a^a - b^b}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x \sin x}$

c. $\lim_{x\to b} \frac{x^b - b^x}{x^x - b^b}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$

e. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$

f. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \sin x}{\cos^2 x}$

g. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^2 + x\log(1-x)}$

h. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x \sin x}$

3. जर $\lim_{x\to 0} \frac{re^x - q\cos x + pe^{-x}}{x \tan x} = 3$ तर p, q आणि r ची मूल्ये शोधा.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$ च्या वरून a, b आणि c चे मूल्य शोधा,

5. मूल्यमापन करा:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

उत्तरे

1. a. 1 b. $\dfrac{1}{2}$ c. $-\dfrac{1}{2}$ d. 1

 e. $\dfrac{1}{3}$ f. 1 g. $\dfrac{\log a}{\log b}$ h. 0

 i. $\dfrac{1}{2}$ j. -1

2. a. $\dfrac{1-\log b}{1+\log b}$ b. $\dfrac{1}{2}$ c. $\dfrac{1-\log b}{1+\log b}$ d. $\dfrac{1}{3}$

 e. $\dfrac{3}{2}$ f. 1 g. $-\dfrac{2}{3}$ h. 2

3. $p=\dfrac{3}{2}, q=3, r=\dfrac{3}{2}$ 4. $a=1, b=2, c=1$ 5. i. 1 ii. 1

2.3.2 इंडिटर्मिनेट फॉर्म $\frac{\infty}{\infty}$ (टाईप-II) च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम

प्रमेय: जर $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ आणि $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, तर $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ जर उजवी बाजू अस्तित्वात असेल (फाइनाइट असो किंवा इंफाइनाइट)

नियम कसा उपयोगात आणावा:

1. इंडिटर्मिनेट फॉर्म $\dfrac{\infty}{\infty}$ चे मूल्यांकन करण्यासाठी, त्यांना फॉर्म $\dfrac{0}{0}$ मध्ये बदला आणि नंतर सोडवा.

2. जर $x\to\infty$, तर $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, जेव्हा $x\to\infty$, तेव्हा $x\to\dfrac{1}{y}$ च्या रूपात बदलून, असे की $y\to 0$

समजा $x=\dfrac{1}{y}$, तर $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}{g\left(\dfrac{1}{y}\right)}$, आणि पुढे जा.

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार-II)

उदाहरण 2.28. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log\tan 2x}{\log\tan x}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\tan 2x}{\log\tan x}$ [$\dfrac{0}{0}$ स्वरूप]

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan 2x}.\sec^2 2x.\,2}{\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\tan x.\sec^2 2x}{\tan 2x.\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 2x}}{2.\frac{\sin 2x}{\cos 2x}.\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}$$

$$=1$$

उदाहरण 2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3-100}{4x^4+x^2+2x+100}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^3-100}{4x^4+x^2+2x+100}$

$x=\dfrac{1}{y}$ ठेऊन, जसे $x\to\infty \quad\Rightarrow\quad y\to 0$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2.\frac{1}{y^4}+3.\frac{1}{y^3}-100}{4.\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^2}+2.\frac{1}{y}+100}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2.+3y-100y^4}{4.+y^2+2y^3+100y^4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

उदाहरण 2.30. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$ $\qquad$ [$\frac{\infty}{\infty}$ स्वरूप]

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\left[\frac{-2\cos 3x.\sin 3x.3}{-2\cos x.\sin x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\right] \qquad \because \{\sin 2x = 2\sin x.\cos x\} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}\right] = \frac{3\cos 3\pi}{\cos\pi} = \frac{3(-1)}{(-1)} = 3$$

2.3.3 इंडिटर्मिनेट फॉर्म $0 \times \infty$ (टाइप- III) च्या मूल्यांकनासाठी एल हॉस्पिटल नियम

जर $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ आणि $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, तर $\lim_{x\to a} f(x).g(x)$ हे $0 \times \infty$ च्या स्वरूपात आहे रूपांतरित केल्या नंतर

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ किंवा } = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

जे अनुक्रमे $\frac{0}{0}$ किंवा $\frac{\infty}{\infty}$ स्वरूपाचे आहे आणि नंतर मागील चर्चा केलेल्या पद्धतींनी सोडवा.

काही सोडवलेली उदाहरणे
(प्रकार- III)

उदाहरण 2.31. $\lim_{x\to 0} x\log x$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim_{x\to 0} x\log x$ $\qquad [0 \times \infty$ स्वरूप $]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \qquad [\frac{\infty}{\infty}\text{ स्वरूप }]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

उदाहरण 2.32. $\lim_{x\to 0} x\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim_{x\to 0} x\cot x$ $\qquad [0 \times \infty$ स्वरूप $]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x} = 1$$

उदाहरण 2.33. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ $\qquad [0 \times \infty$ स्वरूप $]$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cot x} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\operatorname{cos}ec^2 x}=-1$$

उदाहरण 2.34. $\lim_{x\to\infty}2^x.\sin\frac{a}{2^x}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे $\lim_{x\to\infty}2^x.\sin\frac{a}{2^x}$ [0 × ∞ स्वरूप]

$$\Rightarrow \quad =\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून,

$$\Rightarrow \quad =\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{2x}\left(\frac{-a.2^x.\log 2}{\left(2^x\right)^2}\right)}{\frac{-2^x.\log 2}{\left(2^x\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}a.\cos\frac{a}{2^x}=a$$

2.3.4 इंडिटर्मिनेट फॉर्म ∞-∞ च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम (टाईप - IV)

जर $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ किंवा $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, तर $\lim_{x\to a}f(x)-g(x)$ हे $\infty-\infty$ चे रूप आहे

या स्वरूपात, रूपांतरित करा $\lim_{x\to a}f(x)-g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x.)g(x)}}$

ज्याचे मूल्य 'L' हॉस्पिटल नियमाने करता येते जसे आधी केल्याप्रमाणे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

(प्रकार- IV)

उदाहरण 2.35. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{cosec\,x}{x}\right)$ चे मूल्य शोधा

उकल : दिलेले आहे की $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$ [$\infty-\infty$ स्वरूप]

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}\right) \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम लागू केल्यावर ,

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2\cos x+2x\sin x}\right) \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x^2\sin x+2x\cos x+2x\cos x+2\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x^2\sin x+4x\cos x+2\sin x}\right) \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{-x^2\cos x-6x\sin x+6\cos x}\right)=-\frac{1}{6}$$

उदाहरण 2.36. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ [$\infty-\infty$ स्वरूप]

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

उदाहरण 2.37. $\lim_{x\to 0}\left(\cos ec^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे $\lim_{x\to 0}\left(\cos ec^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad [\infty-\infty\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right) \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right) \qquad \left[\because\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1\right] \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-......\right)^2}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}-...}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{60}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}-\frac{x^2}{60}+\ x\text{ च्या उच्च घातांकाचे पद}$$

$$=\frac{1}{3}$$

अभ्यास 2.6

1. खालील लिमीट चे मूल्यांकन करा:

a. $\lim_{x\to0^+}\frac{\log\sin x}{\cot x}$

b. $\lim_{x\to a^+}\frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}$

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-8x^2+2x+1}{x^4-x^2+2x-3}$

d. $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$

e. $\lim_{x\to0}\frac{\cos ecx}{\log x}$

f. $\lim_{x\to0}\frac{\log x}{\cot x}$

g. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}, n\in N$

h. $\lim_{x\to5}\frac{\log(1-x)}{\cot \pi x}$

i. $\lim_{x\to0^+}\log_x .\sin x$

2. खालील इंडिटर्मिनेट फॉर्मचे मूल्य शोधा:

a. $\lim_{x\to0} x.\log x.\tan x$

b. $\lim_{x\to\infty} x.\tan\frac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to a} (a-x).\tan\dfrac{\pi x}{2a}$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \sec\dfrac{\pi}{2x}\log x$

e. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x).\tan x$

f. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(a^{1/x}-1\right)x$

3. खालील लिमिटचे मूल्यमापन करा :

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\cos ecx\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)\right)$

g. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (2x\tan x-\pi.\sec x)$

h. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ecx-\cot x)$

उत्तरे

1. a. 0   b. 1   c. 0   d. 0
   e. $-\infty$ f. 0   g. 0   h. 0
   i. 1

2. a. 0   b. 1   c. $\dfrac{2a}{\pi}$ d. $\dfrac{2}{\pi}$
   e. 0   f. $\log a$

3. a. 0   b. $\dfrac{1}{3}$ c. $\dfrac{2}{3}$ d. $\dfrac{1}{2}$
   e. $\dfrac{1}{3}$ f. $\dfrac{1}{2}$ g. -2 h. 0

2.3.5 इंडिटर्मिनेट फॉर्म च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम 0^0 (टाईप - V

जर, $\lim\limits_{x \to a} f(x)=0$ आणि $\lim\limits_{x \to a} g(x)=0$, तर $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ हे 0^0 स्वरूपाचे आहे

ह्या स्वरूपाचे लिमिट सोडवण्यासाठी, समजा, $y=\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

$$\log y=\lim_{x \to a} g(x).\log f(x)$$

जे $0 \times \infty$ स्वरूपाचे आहे आणि मागील पद्धतीद्वारे सोडवले जाऊ शकते.

आपण गृहीत धरू शकतो,

$$\lim_{x \to a} g(x).\log f(x)=l$$

तर समी (1) वरून, $\log y=l \Rightarrow y=e^l$

काही सोडवलेली उदाहरणे
(प्रकार- V)

उदाहरण 2.38. $\lim_{x\to 0^+} x^x$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले आहे $y = \lim_{x\to 0^+} x^x$ [0^0 स्वरूप]

दोन्ही बाजूंनी log घेउन

$$\log y = \lim_{x\to 0^+} x \log x \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

$$\log y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \qquad [\tfrac{\infty}{\infty} \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

अशा प्रकारे $\log y = 0$

$\Rightarrow$ $y = e^0 = 1$

म्हणून $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

उदाहरण 2.39. $\lim_{x\to 1} (1-x^2)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$ चे मूल्य शोधा

उकल: दिलेले आहे $y = \lim_{x\to 1} (1-x^2)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$ [0^0 स्वरूप]

तर $$\log y = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\log(1-x)} \log(1-x^2) \qquad [\tfrac{\infty}{\infty} \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\log(1-x) + \log(1+x)}{\log(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(1 + \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}} = 1 + \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1+x}$$

$$=1+\frac{0}{2}=1$$

अशा प्रकारे $\log y = 1$

$\Rightarrow$ $y = e^1 = e$

म्हणून $\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}} = e$

2.3.6 इंडिटर्मिनेट फॉर्मच्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम 1^∞ (टाईप - VI)

जर $\lim_{x\to a} f(x)=1$ आणि $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, तर $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ हे 1^∞ स्वरूपाचे आहे.

ते सोडवता येते $y = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ घेऊन

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to a} g(x).\log f(x)$ (1)[$0\times\infty$ फॉर्म]

हे मागील पद्धतीद्वारे सोडवले जाऊ शकते.

त्यानंतर, समजा

$$\lim_{x\to a} y = l$$

तेव्हा $y = e^l$

म्हणजे $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^l$

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार- VI)

उदाहरण 2.40. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ चे मूल्य शोधा

उकल: दिलेले आहे

$y = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ [1^∞ स्वरूप]

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\cos x$ [$0\times\infty$ स्वरूप]

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून,

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{2x}$$

$= \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}$ [$\frac{0}{0}$ स्वरूप]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे $\log y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $y = e^{-\frac{1}{2}}$

म्हणून $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

उदाहरण 2.41. दिलेल्या लिमिट $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ चे मूल्य शोधा:

उकल: दिलेले आहे $$y = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x} \qquad [1^\infty \text{ स्वरूप }]$$

$$\therefore \quad \log y = \lim_{x\to 0}\cot^2 x \log\cos x \qquad [0\times\infty \text{ स्वरूप }]$$

$$\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{\tan^2 x} \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ स्वरूप }]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून,

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{2\tan x.\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2\tan x.\sec^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे $$\log y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\frac{1}{2}}$$

म्हणून $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

2.3.7 इंडिटर्मिनेट फॉर्म ∞^0 च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम (टाईप - VII)

जर $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ आणि $\lim_{x\to a} g(x)=0$, तर $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ हे ∞^0 स्वरूपाचे आहे.

या प्रकारच्या इंडिटर्मिनेट स्वरूपाचे निराकरण करण्यासाठी,

समजा $$y = \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

$$\therefore \quad \log y = \lim_{x\to a} g(x).\log f(x) \qquad \ldots (1) \qquad [0\times\infty \text{ स्वरूप }]$$

हे मागील पद्धतीद्वारे सोडवले जाऊ शकते.

त्यानंतर, समजा $$\log y = l$$

तेव्हा $$y = e^l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^l$$

काही सोडवलेली उदाहरणे
(प्रकार-VII)

उदाहरण 2.42. $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा $$y=\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad [\infty^0 \text{ स्वरूप}]$$

$\therefore$ $$\log y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log x}\log\cot x \qquad [\frac{\infty}{\infty} \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cot x}.\left(-\cos ec^2 x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cos ec^2 x}{\cot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos x.\sin x} \qquad [\frac{0}{0}\text{स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=-1$$

अशा प्रकारे $$\log y=-1 \quad \Rightarrow \quad y=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

म्हणून $$\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}}=\frac{1}{e}$$

उदाहरण 2.43. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1}$ चे मूल्य शोधा

उकल: समजा $$f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1}, \quad x>1$$

$\therefore$ $$\log f(x)=\lim_{x\to\infty}(x+1)\log\left(1-\frac{1}{2x}\right), \ x>1$$

$$\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x+1}} \qquad [\frac{0}{0}\text{स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून ,

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)}.\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{(2x-1)}\cdot\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{-x(2x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1+2x}{-2x^2+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{-2+\frac{1}{x}}$$ [अंश आणि छेदाला x^2 ने भाग देऊन]

$$= -\frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे $\log f(x) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1} = e^{-\frac{1}{2}}$

उदाहरण 2.44. $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x)^{\cot x}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: समजा $y = \lim_{x\to\pi/2}(\sec x)^{\cot x}$ [∞^0 स्वरूप]

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to\pi/2} \cot x.\log\sec x$ [$0\times\infty$ स्वरूप]

$\log y = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\log\sec x}{\tan x}$ [$\frac{\infty}{\infty}$ स्वरूप]

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून ,

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\sec x}.\sec x.\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \sin x.\cos x$$

$$= 0$$

अशा प्रकारे $\log y = 0$

$\Rightarrow$ $y = e^0 = 1$

म्हणून $\lim_{x\to\pi/2}(\sec x)^{\cot x}=1$

उदाहरण 2.45. सिद्ध करा $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2}=e^3$

उकल: समजा $y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2}$ [1^∞ स्वरूप]

$$\therefore \quad \log y=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right) \quad [0\times\infty \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून

$$=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left[\frac{2}{2x+1}-\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{2}.\frac{1}{2}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(3x+2)}{2x+1}-\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{2}.\frac{(3x+2)}{2}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{2x}.\frac{\left(1+\frac{2}{3x}\right).3x}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}-\frac{2.3x\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{(2x)^2\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2}+\ldots\ldots.\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3.\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}-\frac{3}{2x}\frac{\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2}+\ldots\ldots.\right]$$

$$=3$$

अशा प्रकारे $\log y=3$

$\Rightarrow \quad y=e^3$

म्हणून $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2}=e^3$

उदाहरण 2.46. सिद्ध करा $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=-\frac{e}{2}$

उकल: समजा $y=(1+x)^{1/x}$

$\therefore$
$$\log y = \frac{1}{x}\log(1+x)$$
$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...\right)$$
$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ...$$

$\Rightarrow$
$$y = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...}$$
$$= e.e^t \text{ जेथे } t = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ...$$
$$= e\left[1 + t + \frac{t^2}{2} + ...\right]$$
$$= e.\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ...\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ...\right)^2 + ...\right]$$
$$= e.\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + ...\right]$$
$$= e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + ...$$

आता
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + ...\right) - e}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-e}{2} + \frac{11}{24}ex + ...$$
$$= \frac{-e}{2}$$

उदाहरण 2.47. $\lim_{n\to\infty}\left[n + n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]$ मूल्यमापन करा.

उकल: दिलेले आहे $\lim_{n\to\infty}\left[n + n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n + n^2.\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n + n^2.\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} - ....\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n - \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{2(n+1)^2} - \frac{n^2}{3(n+1)^3} - \ldots\ldots\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{n^2}{(n+1)^3} - \ldots\ldots\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 - \frac{1}{3}.\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} - \ldots\ldots\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

म्हणून $\quad \lim_{n\to\infty}\left[n + n^2.\log\frac{n}{n+1}\right] = \frac{1}{2}$

अभ्यास 2.7

1. खालील लिमिट चे मूल्य शोधा:

a. $\lim_{x\to\pi/2}(\cos x)^{\cos x}$ b. $\lim_{x\to 1}(x-1)^{x-1}$ c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)^{1/x}$

2. खालील लिमिट निश्चित करा.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ b. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ c. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$ d. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{1/x}$

e. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x)^{1/\log x}$ f. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ g. $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ h. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

i. $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$ j. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ k. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan^2 x}$

3. a. दाखवा कि $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \dfrac{11e}{24}$

b. दाखवा कि $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11}{24}ex^2}{x^3} = -\dfrac{7}{16}e$

4. a. सिद्ध करा कि $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x} = 1$ b. सिद्ध करा कि $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$

c. सिद्ध करा कि $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+e^{x}\right)^{2/x}=e^{2}$ d. सिद्ध करा कि $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{3x+2}=e^{-3}$

5. मूल्यमापन करा:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x}+b^{x}}{2}\right)^{1/x}$ आणि तर काढा $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{x}+3^{x}}{2}\right)^{1/x}=\sqrt{6}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\log x}{x}\right)^{1/x}$ c. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\left(1+n^{2}\right)}{n}$

उत्तरे

1. a. 1 b. 1 c. 1
2. a. e^{a} b. 1 c. 1 d. 1
 e. $\dfrac{1}{e}$ f. $e^{1/3}$ g. $e^{2/\pi}$ h. $e^{-1/6}$
 i. e j. e^{2} k. $e^{-1/2}$
5. b. 1 c. 0

मनोरंजक तथ्य

- भौतिकशास्त्रातही अनिश्चित फॉर्म आढळतात. क्वांटम फिजिक्स, कण क्षय, क्वांटम मेकॅनिक्स, थर्मोडायनामिक्स इत्यादींमध्ये त्याचा वापर आपण पाहू शकतो.
- जोहान बर्नौली देखील या अद्वितीय नियमाच्या निर्मितीमध्ये गुंतले होते.
- L हॉस्पिटल चा नियम कधी कधी न संपणाऱ्या चक्रात पडून अपयशी ठरतो.
- जरी हॉस्पिटल म्हणून लिहिलेले असले तरी हा शब्द "हॉपीटल" म्हणून उच्चारला जातो.

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- वाणिज्य क्षेत्रामध्ये त्याचा एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग आहे, जिथे सतत चक्रवाढ व्याज असते.विशेषत: गुंतवणूकीमध्ये, विविध प्रकारची बँक खाती,क्रेडिट कार्ड बिल, तारण इ. भरताना दर दररोज येतात.
- हे गामा फंक्शन्समध्ये वापरले जाते जे पुढे अभियांत्रिकी, क्वांटम फिजिक्स,आकडेवारी, खगोल भौतिकी, द्रव गतिशीलता, एकत्रित, संभाव्यता सिद्धांत इ. मध्ये वापरले जाते.

व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

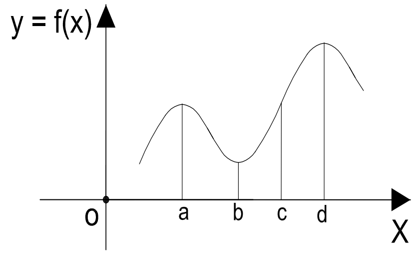
Indeterminate Forms Part I

2.4 मॅक्सिमा आणि मिनीमा(मॅक्सिमा आणि मिनीमा)

फंक्शन f चे $x = a$ साठी मॅक्सिमम मूल्य आहे असे म्हटले जाते जर $f(a) > f(x)$ म्हणजे ,$f(x) - f(a) < 0$, a जवळच्या सर्व x साठी.

फंक्शन f चे $x = a$ साठी मिनीमम मूल्य आहे असे म्हटले जाते जर $f(a) < f(x)$. म्हणजे , $f(x) - f(a) > 0$, a च्या जवळच्या सर्व x साठी.

संलग्न चित्रात, $f(x)$ चे $x = a$ साठी मॅक्सिमम मूल्य आहे कारण $f(a)$ चे मूल्य $f(x)$ च्या शेजारच्या मूल्यापेक्षा जास्त आहे. त्याचप्रमाणे $f(x)$ मध्ये मिनीमा $x = b$ आणि मॅक्सिमा d वर आहे.



आकृती 2.7

लक्षात घ्या की $f(x)$ चे $x = a$ साठी मॅक्सिमम मूल्य आहे, जरी $f(a) < f(c)$. याचे कारण $f(a) > f(x)$, a च्या शेजारी. अशा प्रकारे $f(x)$ चे जास्तीत जास्त मूल्य $f(x)$ चे सर्वात मोठे मूल्य असणे आवश्यक नाही.

2.4.1 मॅक्सिमा आणि मिनिमा साठी अट

टेलरच्या प्रमेयाने 'a' बिंदू वर विस्तार करुन, आपल्याकडे असेल

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

म्हणजे,
$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

किंवा
$$= (x-a)\left\{f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a) f''(a) + \ldots\right\} \qquad \ldots(1)$$

जेव्हा $x - a$ लहान असेल, $f'(a)$ संख्यात्मकदृष्ट्या पुढील अटींपेक्षा जास्त असते. तर $f(x) - f(a)$ चे चिन्ह $(x-a)\ f'(a)$ वर अवलंबून असते. परंतु जेव्हा $x > a$ दुसरे जेव्हा $x < a$ असेल तेव्हा फक्त एकच चिन्ह असेल . म्हणून $x = a$ वर मॅक्सिमा किंवा मिनीमा शक्य नाही जोपर्यंत $f'(a) = 0$ नाही.

जर $f'(a) = 0$ असेल तर समी(1) होईल

$$= (x-a)^2 \left\{\frac{1}{2} f''(a) + \frac{1}{6}(x-a) f'''(a) \ldots\right\} \qquad (2)$$

x - a च्या लहान मूल्यांसाठी, $\frac{1}{2} f''(a)$ ला सक्सिडिंग टर्म्स पेक्षा अधिक संख्यात्मक मूल्य असेल. ज्यामुळे $f(x) - f(a)$ चे चिन्ह हे $\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$ किंवा $f''(a)$ यावर अवलंबून आहे. जसे $\frac{1}{2}(x-a)^2$ नेहमी धनात्मक असते.

म्हणून फंक्शन $f(x)$ ला $x = a$ साठी मॅक्सिमा, मिनिमा असेल जर

i. $f'(a) = 0$ आणि $f''(a) =$ ऋणात्मक असेल तर $f(x)$ ला 'a' वर मॅक्सिमा आहे.

ii. $f'(a) = 0$ आणि $f''(a) =$ धनात्मक असेल तर f (x) ला 'a' वर मिनीमा आहे.

iii. $f'(a) = 0$ आणि $f''(a) = 0$ असेल तर f (x) ला x = a वर मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही, जोपर्यंत $f'''(a) = 0$ नाही. $f^{iv}(a) = 0$ चे चिन्ह नंतर f (x) चे स्वरूप निश्चित करेल.

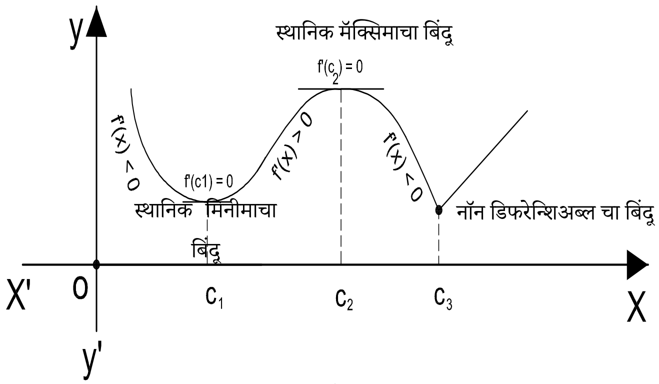
2.4.2 एक्सट्रिमासाठी पहिली डेरिवेटिव्ह चाचणी (मॅक्सिमा किंवा मिनिमा)

समजा f हे इंटर्वल I = (a, b) वर कंटीनिवस फ़ंक्शण आहे आणि असे समजा c हा I मधील क्रिटिकल बिंदू आहे, अर्थात् $c \in I$ मग

i. $f'(x)$, c च्या माध्यमातून x वाढल्याने चिन्ह धनात्मक पासून ऋणात्मक बदलते, म्हणजेच, $x \in (c-\delta, c)$ साठी $f'(x) \geq 0$, आणि $x \in (c, c+\delta)$ साठी $f'(x) \leq 0$ तेंव्हा c, स्थानिक मॅक्सिमाचा बिंदू आहे आणि f ची स्थानिक मॅक्सिमा c वर आहे.

ii. $f'(x)$, c च्या माध्यमातून x वाढल्याने चिन्ह ऋणात्मक पासून धनात्मक बदलते, म्हणजेच , $x \in (c-\delta, c)$ साठी $f'(x) \leq 0$, आणि $x \in (c, c+\delta)$ साठी $f'(x) \geq 0$ तेंव्हा c, स्थानिक मिनीमाचा बिंदू आहे आणि f स्थानिक मिनीमा c वर आहे.

iii. $f'(x)$, c च्या माध्यमातून x वाढल्याने चिन्ह बदलत नाही, म्हणून f ला c वर शिरोबिंदू (मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही) असतो आणि अशा बिंदूला म्हणतात इन्फ्लेक्शन पॉईंट म्हणतात.



आकृती 2.8

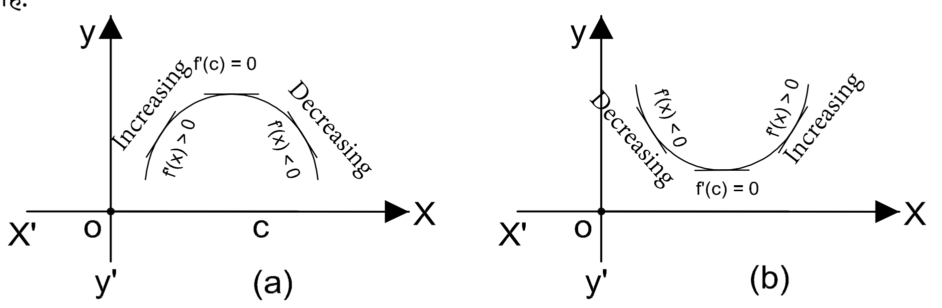
व्याख्या. f चा क्रिटिकल बिंदू: समजा f , इंटर्वल I आणि c ∈ I, वर परिभाषित केलेले कंटीनिवस फ़ंक्शण आहे, तेंव्हा c ला क्रिटिकल बिंदू म्हणतात जर तो $f'(c) = 0$ किंवा I मधील बिंदूंवर डिफरन्शिएबल नसेल .

व्याख्या. समजा f ला वास्तविक मूल्य फंक्शन आणि समजा c, f डोमेनचा अंतर्गत बिंदू आहे, मग

a. c ला स्थानिक मॅक्सिमा बिंदू असल्याचे म्हटले जाते, जर $h > 0$ असेल, जसे की $(c - h, c + h)$ मध्ये $f(c) > f(x), \forall x$. f(c) च्या मूल्याला f चे मॅक्सिमम मूल्य(local maximum value) म्हणतात.

b. c हा स्थानिक मिनिमा बिंदू असल्याचे म्हटले जाते, जर $h > 0$ असे असेल तर $(c - h, c + h)$ मध्ये $f(c) < f(x), \forall x$. f(c) च्या मूल्याला f चे मिनिमम मूल्य (local minimum value) म्हणतात.

भौमितिकदृष्ट्या, वरील व्याख्या सांगते की जर $x = c$ हा f च्या स्थानिक मॅक्सिमा लिमिटचा बिंदू असेल तर आलेख दिलेल्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे c च्या आसपास 'f' असेल. लक्षात ठेवा f हे फंक्शन मध्यांतरात वाढत आहे $(c - h, c)$ (म्हणजेच $f(x) > 0$) आणि मध्यांतर $(c, c + h)$ मध्ये कमी होत आहे (म्हणजे $f(x) < 0$), सुचवित आहे की f (c) शून्य असणे आवश्यक आहे.



आकृती 2.9

उदाहरण 2.48. जेव्हा f दिले जाते तेव्हा स्थानिक मॅक्सिमा आणि फंक्शनच्या मिनिमाचे सर्व बिंदू शोधा

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

उकल: दिलेले आहे $f(x) = x^3 - 3x + 3$

x सोबत डिफरन्शिएट करून $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$= 3(x^2 - 1)$$

$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

आता $f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 1, -1$

अशा प्रकारे, x = ±1, c ला क्रिटिकल बिंदू आणि फंक्शनचे मॅक्सिमा किंवा मिनीमा मूल्य x = 1, -1 वर असू शकते. पहिली डेरिवेटिव्ह चाचणी लागू केल्यावर

x चे मूल्य		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ चे चिन्ह
x=1	डाव्या बाजुला(समजा 0.98)	$f'(x) < 0$
	उजव्या बाजुला(समजा 1.01)	$f'(x) > 0$
x=-1	डाव्या बाजुला(समजा -1.01)	$f'(x) > 0$
	उजव्या बाजुला(समजा -0.9)	$f'(x) < 0$

$x = 1$ वर, $f'(x)$ चे चिन्ह ऋणात्मक कडून धनात्मक मध्ये बदलते.

$\therefore$ स्थानिक मिनिमाचा बिंदू $x = 1$ आहे आणि $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$ हे स्थानिक मिनीमा मूल्य आहे.

$x = -1$ वर, $f'(x)$ चे चिन्ह धनात्मक पासून ऋणात्मक मध्ये बदलते.

$\therefore$ $x = -1$ हा स्थानिक मॅक्सिमाचा बिंदू आहे आणि $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+3=5$ मॅक्सिमा मूल्य आहे .

उदाहरण 2.49. फंक्शन f च्या स्थानिक मॅक्सिमाचे आणि स्थानिक मिनिमा सर्व बिंदू शोधा, $f(x) = x^3 + 1$ जे द्वारे दिले आहे.

उकल: दिलेले आहे $f(x) = x^3 + 1$

x सोबत डिफरन्शिएट करून $f'(x) = 3x^2$

आता $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

अशा प्रकारे, $x = 0$, 'f' चा क्रिटिकल बिंदू आणि फंक्शनचे मॅक्सिमा किंवा मिनीमा मूल्य $x = 0$ वर असू शकते .

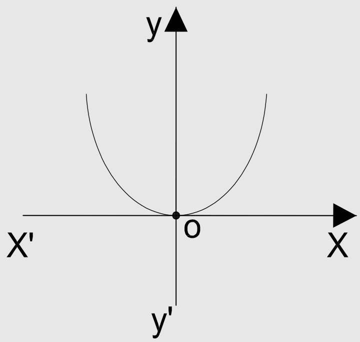
पहिली डेरिवेटिव्ह चाचणी लागू केल्यावर

x चे मूल्य		$f'(x)=3x^2$ चे चिन्ह
x=0	डाव्या बाजुला(समजा -0.1)	>0
	उजव्या बाजुला(समजा 0.1)	>0

अशा प्रकारे, $x = 0$, परंतु $f'(x)$ त्याचे चिन्ह बदलत नाही . म्हणून, $x = 0$, हा स्थानिक मॅक्सिमा किंवा स्थानिक मिनिमा बिंदू नाही. अशा प्रकारे,x = 0 हा विचलनाचा बिंदू आहे

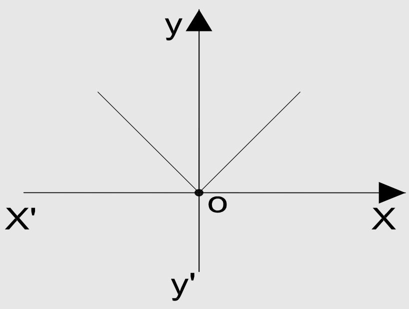
टिपण्णी:

i. समजा $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ एक फंकशन आहे. स्पष्टपणे, f चे R मध्ये किमान मूल्य x = 0 आणि f(0) = 0 आहे परंतु f चे जास्तीत जास्त मूल्य नाही.



आकृती 2.10

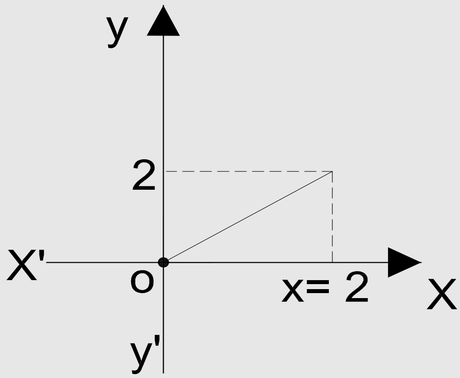
ii.समजा एक फंकशन $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ आहे



आकृती 2.11

f चे किमान मूल्य x = 0 वर आहे. तसेच f (0) = | ० | = 0, परंतु R मध्ये f चे जास्तीत जास्त मूल्य नाही.

iii. समजा की एक फंकशन $f(x)=x,\ x\in(0,2)$ **आहे**



आकृती 2.12

f चे मॅक्सीमम मूल्य किंवा मिनिमम मूल्य (0, 2) यात नाही

$$f(x)=x,\ x\in(0,2)\ f'(x)=1$$

(0,2) मध्ये सर्व बिंदूवर, $f'(x)>0$, चिन्हात कोणतेही बदल नाहीत.

(0,2) मध्ये f ला मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही

2.4.3 एक्सट्रीमासाठी दुसरी डेरिवेटिव्ह चाचणी (मॅक्सिमा किंवा मिनिमा)

समजा f अंतराल I वर परिभाषित आणि $c\in I$ एक द्वितीय डिफरेंशियबल फंक्शन आहे . तर

i. जर $f'(c)=0$ आणि $f''(c)<0$, तर $x=c$ हा स्थानिक मॅक्सिमा चा एक बिंदु आहे आणि $f(c)$ हे f चे स्थानिक मॅक्सिमम मूल्य आहे

ii. जर $f'(c)=0$ आणि $f''(c)>0$, तर $x=c$ स्थानिक मिनीमा चा एक बिंदु आहे आणि $f(c)$हे f चे स्थानीय मिनीमम मूल्य आहे.

iii. जर $f'(c)=0$ आणि $f''(c)=0$, तर चाचणी अपयशी ठरते. एक्सट्रीमम मूल्ये तपासण्यासाठी पुढील प्रक्रिया करणे आवश्यक आहे

उदाहरण 2.50. फंक्शन f च्या स्थानिक मॅक्सिमाचे आणि स्थानिक मिनिमा चे सर्व बिंदू शोधा, जे खालील प्रमाणे दिले आहे. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10,\ x\in\Re$

उकल: दिलेले आहे $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10$

आता, $$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2$$

$$=5x^2(x-3)(x-1)$$

$\therefore$ $$f'(x)=0\ \Rightarrow\ 5x^2(x-3)\ (x-1)=0\Rightarrow x=0,1,3$$

आता, $$f''(x)=20x^3-60x^2+30x$$

$$= \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(1) = -10 < 0 \\ f''(3) = 90 > 0 \end{cases}$$

दुसऱ्या डेरिवेटिव्ह चाचणी नुसार, $x = 1$, स्थानिक मॅक्सिमाचा एक बिंदू आहे आणि मॅक्सिमम मूल्य आहे

$$f(1) = 11$$

आणि $x = 3$ हा स्थानिक मिनिमाचा बिंदू आहे आणि मिनीमम मूल्य आहे

$$f(3) = -17$$

आणि $x = 0$ वर दुसरी डेरिवेटिव्ह चाचणी अयशस्वी होते

आता, पहिल्या डेरिव्हेटिव्ह चाचणीद्वारे,

x चे मूल्य		$f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1)$ चे चिन्ह
x=0	डाव्या बाजुला(समजा -0.1)	> 0
	उजव्या बाजुला(समजा 0.1)	> 0

अशा प्रकारे $x = 0$ वर, f ला मॅक्सिमा किंवा मिनिमा नाही.

उदाहरण 2.51. फंक्शन f जे दिलेले आहे , $f(x) = |x+2| - 1$ च्या लोकल मिनिमम किंवा मॅक्सिमम ची किंमत काढा.

उकल: येथे $f(x) = |x+2| - 1$

किंवा
$$f(x) = \begin{cases} x+2-1, & x \geq -2 \\ -(x+2)-1, & x < -2 \end{cases}$$

किंवा
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -2 \\ -x-3, & x < -2 \end{cases}$$

आता,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > -2 \\ -1, & x < -2 \end{cases}$$

प्रथम डेरिवेटिव परीक्षण द्वारे,

x चे मूल्य		$f'(x)$ चे चिन्ह
x=-2	डाव्या बाजुला(समजा -2.1)	< 0
	उजव्या बाजुला(समजा -1.9)	> 0

$f'(x)$ हे चिन्हाला ऋणात्मक मधून धनात्मक मधे बदलते

$\therefore$ $f(x)$ चा लोकल मिनिमा $x = -2$ आहे आणि लोकल मिनिमम किंमत आहे

$$f(-2) = |-2+2| - 1 = -1$$

$f(x)$ चा कोणताही लोकल मॅक्सिमम नाही आणि यामुळे कोणताही मॅक्सिमम ची किंमत नाही.

आपण खाली दिलेल्या कोणत्याही पद्धतीने परीक्षण करू शकतो:

येथे $\quad f(x) = |x+2| - 1$

आपण जाणतो की $\quad |x+2| \geq 0$

मिनीमम साठी, $\quad x + 2 = 0 \Rightarrow \quad x = -2$

या प्रकारे, f ची मिनिमम किंमत -2 वर आहे, आणि $f(-2) = -1$ आहे.

उदाहरण 2.52. फंक्शन $f(x) = \sin 2x + 5$ ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

उकल: येथे $\quad f(x) = \sin 2x + 5$

आपण जाणतो की $\quad -1 \leq \sin x \leq 1$

$\therefore \quad -1 \leq \sin 2x \leq 1$

दोन्ही बाजूला 5 जोडल्यास

$$-1 + 5 < \sin 2x + 5 \leq 1 + 5$$

$$4 \leq \sin 2x + 5 \leq 6$$

या प्रकारे, $f(x)$ ची मॅक्सिमम किंमत 6 आणि मिनिमम किंमत 4 आहे.

उदाहरण 2.53. फंक्शन $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $x > 0$ ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

उकल: येथे $\quad f(x) = x\sqrt{1-x}, \; x > 0$

$$f'(x) = \sqrt{1-x} + \frac{x(-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2(1-x) - x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2/3$$

आता,
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x}(-3) - (2-3x).\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(1-x)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-6(1-x) + (2-3x)}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-4+3x}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$x = 2/3$ वर, $$f''(2/3)=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}}\right]>0$$

द्वितीय डेरिवेटिव परीक्षण द्वारे, $x = 2/3$ एक मॅक्सिमम बिंदु आहे आणि f ची मॅक्सिमम किंमत $x = 2/3$ वर आहे.

$$f(2/3)=\frac{2}{3}\sqrt{1-2/3}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$ [परिमेयकरण]

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

अभ्यास 2.8

1. $(x-1)(x-2)(x-3)$ ची मॅक्सिमम किंमत काढा
2. दाखवा कि $x = 1$ वर, $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ चा मॅक्सिमम नाही आणि मिनिमम पण नाही .
3. दाखवा कि $\sin x(1+\cos x)$ ची मॅक्सिमम किंमत $x=\frac{1}{3}\pi$ यावर आहे.
4. खाली दिलेल्या फंक्शन ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

i. $f(x)=(2x-1)^2+3$ ii. $f(x)=9x^2+12x+2$ iii. $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

5. खालील मॅक्सीमा आणि मिनिमा चे सर्व बिंदू शोधा आणि खाली दिलेल्या फंक्शन ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

i. $f(x)=x^3-3x$ ii. $f(x)=\sin x-\cos x, x\in(0,2\pi)$ iii. $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x},\ x>0$

iv. $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$ v. $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$ vi. $f(x)=(x-1)^4(x-2)^2$

vii $f(x)=2x^3-6x^2+6x+5$

6. परीक्षण करा की 'f'चा लोकल मिनिमम किंवा मॅक्सिमम 0 वर आहे ?

i. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0\\ -3x+1, & x\le 0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 0\\ -3x+1, & x>0\end{cases}$

iii. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\ge 0\\ -3x+1, & x<0\end{cases}$ iv. $f(x)=|x|+|x-1|$

7. खाली दिलेल्या फंक्शन ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

i. $f(x)=-|x+1|+3$ ii $f(x)=|\sin 4x+3|$

iii $f(x)=x+1, \quad x\in(-1,1)$

उत्तरे

1. $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

4. i. मिनिमम किंमत =-2 ii. मिनिमम किंमत = -2

iii. मिनिमम किंमत =1/3, मॅक्सिमम किंमत =3

5. i. मिनिमम 1 वर, $f(1)$=-2, मॅक्सिमम -1 वर, $f(-1)$= 2

ii. मिनिमम $\frac{7}{4}\pi$ वर, $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$, मॅक्सिमम $\frac{3}{4}\pi$, वर, $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$,

iii. मिनिमम x=2 वर, $f(2)$ =1 iv मॅक्सिमम 0 वर, $f(0)=\frac{1}{2}$

v. मॅक्सिमम 1 वर, $f(1)=\frac{1}{4}$, मिनिमम -1 वर, $f(-1)=-\frac{1}{4}$

vi. मॅक्सिमम 1, $\frac{5}{3}$ वर, $f(1)=0$, $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{16}{729}$, मिनिमम $x=2$, वर, $f(2)=0$

vii. मॅक्सीमा ही नाही आणि मिनिमा ही नाही

6. i. मिनिमम ii. मॅक्सिमम

iii. मॅक्सीमा ही नाही आणि मिनिमा ही नाही iv. मिनिमम

7. i. मॅक्सिमम किंमत =3 मिनिमम किंमत नाही ii. मिनिमम किंमत =2, मॅक्सिमम किंमत =4

iii. मॅक्सिमम किंमत ही नाही आणि मिनिमम किंमत ही नाही

काही विविध उदाहरणे

मॅक्सीमा आणि मिनिमा वर आधारित

उदाहरण 2.54. सिद्ध करा कि दिलेल्या परिघासह सर्व आयतांमधे, चौरसाचे क्षेत्रफळ सर्वात मोठे असते.

उकल: स्वतः सोडवा

उदाहरण 2.55. सिद्ध करा कि दिलेल्या क्षेत्रफळा सह सर्व आयतांमधे, चौरसाचे परिघ सर्वात कमी असते.

उकल: स्वतः सोडवा

उदाहरण 2.56. जर एका काटकोन त्रिकोणाच्या एका बाजूची आणि कर्ण च्या लांबीची बेरीज दिलेली असेल, तर दाखवा की त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ मॅक्सिमम असते जेव्हा दोन्ही मधला कोण $\frac{\pi}{3}$ असतो.

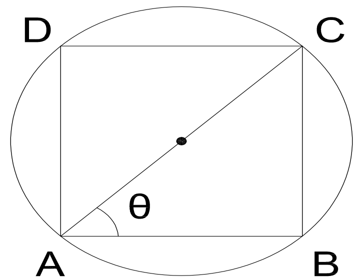
उकल: स्वतः सोडवा

उदाहरण 2.57. सिद्ध करा की दिलेल्या निश्चित वर्तुळामध्ये असलेल्या सर्व आयता पैकी, चौरसाचे क्षेत्रफळ सर्वात मोठे असते.

उकल: समजा की ABCD केंद्र O आणि त्रिज्या r च्या सोबत दिलेल्या वर्तुळामध्ये एक आयत आहे.

समजा की $\angle CAB = \theta$

जेव्हा, $AC = 2r,\ AB = 2r\cos\theta$ आणि $BC = 2r\sin\theta$.
समजा कि A, आयत ABCD चे क्षेत्रफळ आहे.



आकृती 2.13

जेव्हा, $A = AB\times BC = 4r^2\sin\theta\cos\theta = 2r^2\sin 2\theta$

म्हणून $A = 2r^2\sin 2\theta$ जेव्हा r कॉन्स्टंट आहे

$\therefore$ $\dfrac{dA}{d\theta} = 4r^2\cos 2\theta$ आणि $\dfrac{d^2A}{d\theta^2} = -8r^2\sin 2\theta$

जेव्हा, $\dfrac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow 4r^2\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow$ $\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ म्हणजेच $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

आणि $\left[\dfrac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\pi/4} = -8r^2\sin\dfrac{\pi}{2} = -8r^2 < 0$

$\therefore$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ मॅक्सिमम चा एक बिंदु आहे

या प्रकारे, जेव्हा $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ वर क्षेत्रफळ मॅक्सिमम होत आहे

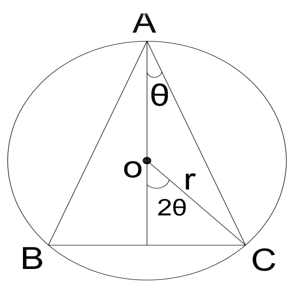
या स्थितित, $AB = 2r\cos\dfrac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

आणि $BC = 2r\sin\dfrac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

या प्रकारे, $AB = BC$ आणि यामुळे ABCD चौरस आहे.

उदाहरण 2.58. सिद्ध करा की, दिलेल्या वर्तुळामध्ये मॅक्सिमम क्षेत्रफळ असलेला त्रिकोण हा समभुज त्रिकोण असतो.

उकल: समजा कि ABC एक त्रिकोण आहे, केंद्र O आणि त्रिज्या r च्या सोबत दिलेल्या वर्तुळामध्ये आहे.
मॅक्सिमम क्षेत्रफळ च्या साठी, बिंदु A, पाया BC पासून मॅक्सिमम अंतरावर असायला पाहिजे.
यामुळे, A ला व्यास वर, BC साठी लंब असायला पाहिजे.
या प्रकारे, $AD \perp BC$.
अशाप्रकारे त्रिकोण ABC समद्विभुज असायला पाहिजे.
समजा कि $\angle CAB = \theta$.



आकृती 2.14

आता, $BC = 2CD = 2OC\sin 2\theta = 2r\sin 2\theta$

आणि, $AD = (OA + OD) = (r + r\cos 2\theta)$.

समजा कि A त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ आहे.

$$A = \frac{1}{2}BC\times AD = r^2\sin 2\theta(1+\cos 2\theta).$$

$$\frac{dA}{d\theta} = r^2\{\sin 2\theta(-2\sin 2\theta) + (1+\cos 2\theta).2\cos 2\theta\}$$

$$= r^2\left\{2\left(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta\right) + 2\cos 2\theta\right\} = 2r^2[\cos 4\theta + \cos 2\theta]$$

आणि $$\frac{d^2A}{d\theta^2} = 2r^2\{-4\sin 4\theta - 2\sin 2\theta\} = -4r^2[2\sin 4\theta + \sin 2\theta]$$

आता, $$\frac{dA}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 4\theta + \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos 4\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad 4\theta = \pi - 2\theta \quad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

आणि $$\left[\frac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\pi/6} = -4r^2\left(2\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) = -6r^2\sqrt{3} < 0$$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ मॅक्सिमम चा एक बिंदु आहे

या स्थितित, त्रिकोणाचे प्रत्येक कोण $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ आहे.

आणि यामुळे ABC एक समभुज त्रिकोण आहे.

घनपदार्थांचे घनफळ आणि पृष्ठफळ यावर आधारित

उदाहरण 2.59. हे सिद्ध करा की वरच्या बाजूला उघडे असुन दिलेल्या व्हॉल्यूमच्या सिलिंडर चे पृष्ठफळ मिनीमम आहे जर त्याची उंची त्याच्या तळाच्या त्रिज्याइतकी असेल तर.

उकल: स्वत: सोडून पाहा.

उदाहरण 2.60 सिद्ध करा कि, वरच्या बाजूला उघडलेल्या सिलिंडरची उंची, दिलेला पृष्ठभाग आणि सर्वात मोठा खंड त्याच्या तळाच्या त्रिज्याच्या बरोबरीने आहे.

उकल: स्वत: सोडून पाहा.

उदाहरण 2.61 सिद्ध करा , वरच्या बाजूला उघडलेल्या सिलिंडरची उंची, पृष्ठभाग क्षेत्र आणि जास्तीत जास्त घनफळ $\sin^{-1}(1/3)$, हे आहे.

उकल: स्वत: सोडून पाहा.

उदाहरण 2.62 सिद्ध करा , चौरस बेस आणि दिलेले प्रमाण असलेल्या बंद क्युबॉइडचे पृष्ठभाग क्षेत्र घन झाल्यावर सर्वात कमी असते.

उकल: a, लांबी, a, रुंदी आणि उंची h असलेल्या बंद क्युबॉइडचे निश्चित घनफळ V असू द्या.

समजा S त्याचे पृष्ठभागाचे क्षेत्र आहे.

नंतर $$V = (a \times a \times h) \text{ किंवा } h = \frac{V}{a^2} \qquad \ldots(1)$$

आता, $$S = 2(a^2 + ah + ah) = 2(a^2 + 2ah) = 2\left(a^2 + \frac{2V}{a}\right) \qquad [(1) \text{ वापरून}]$$

म्हणजे, $$S = 2\left(a^2 + \frac{2V}{a}\right), \therefore \frac{dS}{da} = 2\left(2a - \frac{2V}{a^2}\right) \text{ आणि } \frac{d^2S}{da^2} = \left(4 + \frac{8V}{a^3}\right)$$

आता, $$\frac{dS}{da} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = a^3 \ \Rightarrow \ a \times a \times h = a^3 \Rightarrow h = a$$

आता, कधी $h = a$, मग आपल्याला मिळेल,

$$V = a^3$$

$$\therefore \quad \left[\frac{d^2S}{da^2}\right]_{h=a} = \left(4+\frac{8a^3}{a^3}\right) = 12 > 0$$

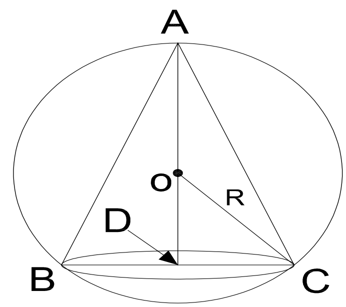
नंतर, S कमीत कमी असते जर लांबी = a, रुंदी = a आणि उंची = a, म्हणजे जेव्हा तो घन असतो.

उदाहरण 2.63. सिद्ध करा, की दिलेल्या पृष्ठभागाच्या बंद सिलिंडरची उंची आणि जास्तीत जास्त घनफळ त्याच्या तळाच्या व्यासाइतकेच आहे.

उकल: स्वत: सोडून पाहा.

उदाहरण 2.64. सिद्ध करा , दिलेल्या क्षेत्रात चिन्हांकित केले जाऊ शकणारे सर्वात मोठे खंड कोन इतके आहे की ते तिप्पट उंची, गोलाचा व्यास दुप्पट करण्यासाठी समान आहे (त्रिज्या R सर्वात मोठ्या कोनाचे प्रमाण एका क्षेत्रात शोधा)

उकल: समजा R ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची त्रीज्या आहे, आणि आपण असे गृहीत धरूया V हे त्या वर्तुळाच्या आत तयार झालेल्या त्रिकोणाचे घनफळ आहे, उंची h आणि r त्याच्या बेस ची त्रिज्या आहे.



आकृती 2.15

दिलेल्या आकृतीत, आपल्याला मिळेल

$$OD = AD - AO = (h - R)$$

$$R^2 = (h-R)^2 + r^2 \text{ किंवा } r^2 = h(2R-h) \qquad \ldots(1)$$

आता, $$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(2R-h) \quad [(1) \text{ वापरून}]$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi h(4R-3h)$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \left(\frac{4}{3}\pi R - 2\pi h\right)$$

मॅक्सीमा आणि मिनीमा साठी, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{dV}{dh} = 0$$

आता, $$\frac{dV}{dh} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi h(4R-3h) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = 0 \text{ किंवा } (4R-3h) = 0 \qquad \Rightarrow \quad h = \frac{4}{3}R \qquad [\because h \neq 0]$$

आणि $$\left[\frac{d^2V}{dh^2}\right]_{h=(4/3)R} = -\frac{4\pi R}{3} < 0$$

म्हणून: V जास्तीत जास्त होते जेव्हा $h = \frac{4}{3}R$, म्हणजे.(जर $3h$=2(2R)

म्हणजे उंचीच्या 3 पट = व्यासाच्या 2 पट

सर्वात मोठ्या कोनचे घनफळ= $\frac{1}{3}\pi \times \frac{16R^2}{9} \times \left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$

अभ्यास 2.9

1. 8 ला दोन धन भागांमध्ये विभागा जेणेकरून एका चा स्क्वेयर आणि दुसऱ्या च्या घनाची बेरीज कमीत कमी असेल.
2. a ला अशा दोन भागांमध्ये विभागा कि एका भागाच्या p^{th} घातांकाचा आणि दुसऱ्या भागाच्या q^{th} घातांकाचा गुणाकार जास्तीत जास्त असू शकते.
3. दिलेल्या परिघासह सर्वात मोठे आयत एक चौरस आहे हे सिद्ध करा.
4. आयताकृतीचा परिघ पाहता, चौरस असताना त्याचा डाइगोनल कमीत कमी असल्याचे दाखवा.
5. त्रिकोण समद्विभुज असताना दिलेल्या हायपोटेनसच्या उजव्या कोनाच्या त्रिकोणाचा परिघ जास्तीत जास्त आहे हे सिद्ध करा.
6. सिद्ध करा कि कमीतकमी वक्र पृष्ठफळ असलेला दंडगोल आणि दिलेले घनफळ यांचे अल्टिटूड हे दंडगोलच्या पायाच्या त्रिज्येच्या $\sqrt{2}$ पट असते.
7. वक्र $y^2 = 4ax$ वर (2, -8) बिंदूच्या सर्वात जवळ असलेला बिंदू शोधा.
8. सिद्ध करा कि चौरस बेस असलेल्या बंद क्युबॉइडचे पृष्ठफळ आणि दिलेले घनफळ कमीत कमी असते जेव्हा ते घन असते.

उत्तरे

1. 6 , 2 2. $\dfrac{ap}{p+q}, \dfrac{aq}{p+q}$ 7. (4,-4)

मनोरंजक तथ्ये:

- मॅक्झिमा आणि मिनीमा वापरून आढळणारे जास्तीत जास्त आणि किमान मूल्य एकल एक्सट्रेमा म्हणून ओळखले जाते. (एक्सट्रेममचे बहुवचन)
- अस्ताना, काझाकस्थान येथे वर्ल्ड एक्स्पो 2017 मध्ये एक शिल्प प्रदर्शित करण्यात आले होते, ज्याचे नाव मिनिमा | मॅक्झिमा, ज्याची रचना स्वत: मध्ये अद्वितीय होती.
- https://arechitizer.com/projects/minima-maxima-1/)

दैनंदिन जीवनाचे अनुप्रयोग

- औषधांच्या परिणामकारकतेचा / रोगांच्या प्रसाराचा अभ्यास करताना औषधांमध्ये अनुप्रयोग (म्हणजे जास्तीत जास्त कार्यक्षमता किती वेळाने दिसून येते.)
- अणुऊर्जा क्षेत्रात क्षयरोगाचा अभ्यास.
- व्यवसायात, उद्योग या संकल्पनेचा वापर त्यांचा नफा जास्तीत जास्त करण्यासाठी किंवा त्यांचे नुकसान कमी करण्यासाठी, वस्तूंच्या किंमतींचा अंदाज घेऊन आणि किती स्टॉकमध्ये ठेवण्यासाठी करतात.
- लोकसंख्या वाढ वक्र.

व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

Extreme values-I

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेली उदाहरणे
(हॉट्स)

उदाहरण 1. समजा $f : [2, 5] \rightarrow R$ हे $(2, 5)$ वर कंटिन्यूयस आणि डिफरेंशिएबल आहे. असे समजा $f'(x) = (f(x))^2 + \pi$ सर्व $x \in (2, 5)$ साठी. $f(5) - f(2)$ चे *मूल्य* शोधा.

उकल: दिलेले आहे कि f हे $[2, 5]$वर कंटिन्यूयस आणि $(2, 5)$ वर डिफरेंशिएबल आहे.
म्हणून, लॅग्रांजेसच्या मिन मूल्य प्रमेयाद्वारे, कमीत कमी एक $c \in (2,5)$ अस्तित्वात असेल जसे की,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \text{येथे } b=5, a=2$$

तर
$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = (f(c))^2 + \pi$$
$$\frac{f(5)-f(2)}{3} \geq \pi \qquad \because \left[(f(c))^2 \geq 0 \ \forall c \in (2,5) \right]$$

$$\therefore \quad f(5)-f(2) \geq 3\pi$$

उदाहरण 2. सिद्ध करा कि $e^x \cos x = 1$ च्या कोणत्याही दोन मुळांच्या मध्ये, $e^x \sin x - 1 = 0$ चे कमीत कमी एक मूळ अस्तित्वात आहे.

उकल: दिलेले आहे कि $e^x \cos x = 1$
पुनर्रचना करुण, आपल्याकडे असेल
$$\cos x = e^{-x}$$
समजा $f(x) = \cos x - e^{-x}$

i. कोसाइन फंक्शन आणि एक्स्पोनेनशियल फंक्शन दोघेही R वर कंटिन्यूयस आणि डिफरेंशिएबल आहेत , त्याचप्रमाणे, प्रत्येक इंटरवल $[a, b]$ वर म्हणू.

ii. असे गृहीत धरू कि a, b हे f चे मूळ आहेत.

तेव्हा $f(a) = f(b) = 0$

म्हणून, रोल्सच्या प्रमेयावरुन, $\exists\, c \in (a, b)$, हे अशा प्रकारे अस्तित्वात असेल की $f'(c) = 0$

आता , $f'(x) = -\sin x + e^{-x}$

$\Rightarrow \quad -\sin c + e^{-c} = 0$

$\Rightarrow \quad e^{-c} = \sin c$

किंवा $\quad 1 = e^{c} \sin c$

म्हणजे. $\quad e^{c} \sin c - 1 = 0$

याचा अर्थ असा आहे की $e^x \sin x - 1 = 0$ ला एक मूळ $c \in (a, b)$ मध्ये आहे, म्हणजेच, $e^x \cos x = 1$ च्या दोन मुळांच्या मध्ये.

उदाहरण 3. सिद्ध करा कि, क्वाड्राटिक समीकरण $f(x) = 3px^2 + 2qx + r = 0$ चे $(0, 1)$मध्ये मुळ आहे जर $p + q + r = 0$ असेल.

उकल: समजा $\quad f(x) = px^3 + qx^2 + rx$

i. स्पष्टपणे $f(x)$ हे x *मधील बहुपदी असून* इंटरवल $[0, 1]$ मध्ये कंटिन्यूयस आहे.

$$f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$$

ii. पुन्हा $f(x)$ हे x *मधील बहुपदी असून* इंटरवल $[0, 1]$ मध्ये डिफरेंशिएबल आहे .

iii.
$$f(0) = p(0)^3 + q(0)^2 + r(0) = 0$$
$$f(1) = p(1)^3 + q(1)^3 + r(1) = p + q + r = 0$$

म्हणून, रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान करते, येथे मिनीमा एक $c \in (0, 1)$ हे अशा प्रकारे अस्तित्वात असेल की $f'(c) = 0$

$$f'(c) = 3pc^2 + 2qc + r$$

जसे
$$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3pc^2 + 2qc + r = 0$$

जे c मध्ये क्वाडरेटिक आहे आणि $c \in (0, 1)$.

म्हणून $3px^2 + 2qx + r = 0$ ला $(0, 1)$ मध्ये मूळ आहे.

उदाहरण 4. समजा फंक्शन f क्लोज इंटरवल $[a, b]$ मध्ये कंटिन्यूयस आहे, ओपन इंटरवल (a, b) मध्ये डिफरेंशिएबल आहे आणि $f'(x) = 0$ सर्व $x \in (a, b)$ *साठी* तर दाखवा की f हे $[a, b]$ वर कॉन्स्टंट आहे.

उकल: f हे $[a, b]$ वर कॉन्स्टंट आहे हे दाखवण्यासाठी , $f(x) = f(a)\ \forall\ x \in [a, b]$ दाखवने पुरेसे आहे.

समजा $x \in [a, b]$ जसे की $x > a$.

आता, इंटरवल $[a, x]$ वर मिन मूल्य प्रमेय वापरुन,

i. f, इंटरवल $[a, b]$ वर कंटिन्यूयस आहे.

$\therefore$ f, इंटरवल $[a, x]$ वर कंटिन्यूयस आहे.

ii. दिलेले आहे कि f, इंटरवल (a, b) वर डिफरेंशिएबल आहे.

$\therefore$ f, इंटरवल (a, x) वर डिफरेंशिएबल आहे.

लॅग्रांजेसच्या मिन मूल्य प्रमेयद्वारे, तेथे कमित कमी एक $c \in (a, x)$ हे अशा प्रकारे अस्तित्वात असेल की

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \qquad \ldots (1)$$

$f'(c) = 0$ असल्यामुळे

(1) वरुण
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$
$$f(x) - f(a) = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x) = f(a)$ कोणत्याही $x \in [a, b]$.

$\therefore$ f हे $[a, b]$ वर कॉन्स्टंट आहे.

उदाहरण 5. समजा $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ आणि आपण असे गृहीत धरूया $x \in [0,1]$ साठी $g(x) = x^2$.

मग दोन्ही f आणि g दोन्ही इंटरवल $(0, 1)$वर डिफरेंशिएबल आहे आणि $x \neq 0$ ऐवजी $g(x) > 0$. दाखवा कि

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ आणि $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ अस्तित्वात नसेल.

उकल: येथे
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,\ x \ne 0$$

तसेच,
$$g(x) = x^2 \ \forall x \in (0,1)$$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \ \forall x$

आता , $x \ne 0$ साठी
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

$= \sin(\infty)$

= -1 आणि 1 दरम्यान ओसिलेट होतय.

= अस्तित्वात नसेल.

उदाहरण 6. *f (x)* साठी *n* ऑर्डर असलेल्या मॅक्लॉरिन बहुपदी चा खाली दिल्याप्रमाणे परिभाषित केलेला रिमेंडर वापरून
$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c), n \ge 0, \quad 0 \le c \le x$$

sin(0.1) हे कॅलक्युलेट करण्यासाठी मॅकलॉरिन बहुपदीची ऑर्डर काय आहे यासाठी कमीतकमी एक अबसोल्यूट एरर जास्तीत जास्त 10^{-6} पर्यंत अचूक मिळवणे आवश्यक आहे.

उकल. दिलेले आहे
$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c), n \ge 0, \quad 0 \le c \le x$$
$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c), n \ge 0, \quad 0 \le c \le 0.1$$

f (x) चा डेरिव्हेटीव्ह फक्त *sin x* आणि *cos x* असल्याने आणि $|\sin x| \le 1$ आणि $|\cos x| \le 1$
$$\left|f^{n+1}(c)\right| \le 1$$

आता
$$R_n(0.1) \le \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}(1)$$
$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

म्हणून, जेव्हा
$$R_n(0.1) < 10^{-6}$$

म्हणजे,
$$\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

हे तेव्हाच शक्य असेल जेव्हा $n \ge 4$.

परंतु $sinx$ साठी मॅक्लॉरिन बहुपदी फक्त विषम पदांचा समावेश करीत असल्याने, $n \geq 5$.

उदाहरण 7. समजा $f:(0,\infty)\to R$ डिफरंशीएबल आहे. गृहीत धरा कि $\lim_{x\to\infty} f(x)+f'(x)=L$. मग $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ आणि $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ हे दाखवा.

उकल. स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 8. समजा $f:[a,b]\to R$ हे तीन वेळा डिफरंशीएबल असलेले फंक्शन आहे जसे की $f(a) = f(b) = 0$ आणि $f'(a) = f'(b) = 0$ मग सिद्ध करा कि $c \in (a, b)$ अस्तित्वात आहे आणि ज्यासाठी $f'''(c) = 0$.

उकल. येथे $f:[a,b]\to R$ तीन वेळा डिफरंशीएबल असलेले फंक्शन आहे.

$\Rightarrow f$ हे $[a, b]$ वर कंटिन्यूयस आहे आणि f हे (a, b) वर डिफरंशीएबल आहे आणि तसेच $f(a) = f(b) = 0$

मग रोल्सच्या प्रमेयानुसार, मिनीमा एक $c_1 \in (a, b)$ असा अस्तित्वात आहे कि

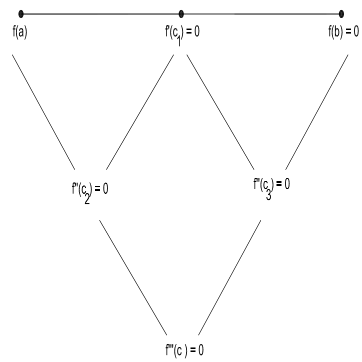
$$f'(c_1)=0$$

पुन्हा f' साठी रोल्सचे प्रमेय लागू करून,

i. f' हा $[a,b]$ वर कंटिन्यूयस आहे आणि म्हणून, $[a, c_1]$ आणि $[c_1, b]$ वर कंटिन्यूयस आहे.

ii. f' हा $[a,b]$ वर डिफरंशीएबल आहे आणि म्हणून, (a, c_1) आणि (c_1, b) वर डिफरंशीएबल आहे.

iii. $f'(a) = f'(c_1) = f(b) = 0$



रोल्सच्या प्रमेयानुसार,कमित कमी एक $c_2 \in (a, c_1)$ आणि एक $c_3 \in (c_1, b)$ असा अस्तित्वात आहे कि

$f''(c_2) = 0$, $c_2 \in (a, c_1)$ करीता

आणि $f''(c_3) = 0$, $c_3 \in (c_1, b)$ करीता

त्याचप्रमाणे, रोल्सचे प्रमेय f'', (c_2, c_3) वर, लागू करून

f'' हे $[c_2, c_3]$ वर कंटिन्यूयस आणि (c_2, c_3) वर डिफरंशीएबल आहे आणि $f''(c_2) = f''(c_3) = 0$ मग कमीत कमी एक $c \in (c_2, c_3)$ असा अस्तित्वात आहे कि $f'''(c) = 0$, $c \in (c_2, c_3)$ साठी

अशा प्रकारे $f'''(c) = 0, c \in (a, b)$ करीता

उदाहरण 9. 24 सेमीच्या बाजू असलेल्या टिनचा चौरस तुकडा प्रत्येक कोपऱ्यातून एक चौरस कापून वरच्या बाजूला उघडा असलेला बॉक्स बनवायचा आहे आणि फ्लॅप्स फोल्ड करून बॉक्स तयार करा. कापल्या जाणाऱ्या चौरसाची बाजू काय असावी जेणेकरून बॉक्सचे घनफळ जास्तीत जास्त असेल? तसेच हे मॅक्सिमम घनफळ शोधा.

उकल. समजा कापलेल्या चौरसाची प्रत्येक बाजू $= x$ आहे.

$\therefore$ बॉक्ससाठी, लांबी = $24 - 2x$

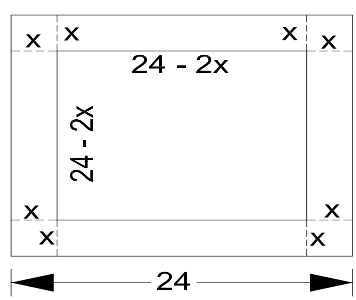
रुंदी = $24 - 2x$, उंची = x

V हे बॉक्सचे घनफळ असू द्या

$$V = x(24-2x)^2$$

$$\frac{dV}{dx} = x.2(24-2x)(-2)+(24-2x)^2.1$$

$$=(24-2x)(24-6x)$$



आकृती 2.16

मॅक्सिमा किंवा मिनिमासाठी , $\frac{dV}{dx}=0$

$\Rightarrow \quad (24-2x)(24-6x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=4,12$

$x=4$ [$\because$ $x=12$ हे अशक्य आहे]

आता, $\frac{d^2V}{dx^2}=(24-2x)(-6)+(24-6x)(-2)$

$x=4$ साठी, $\frac{d^2V}{dx^2}=(24-8)(-6)=$ ऋण संख्या

$\Rightarrow$ V मॅक्सिमम आहे जेव्हा $x = 4$

$\therefore$ प्रत्येक कोपऱ्यातून 4 सेमीचा चौरस कापला जातो तेव्हा घनफळ जास्तीत जास्त असतो.

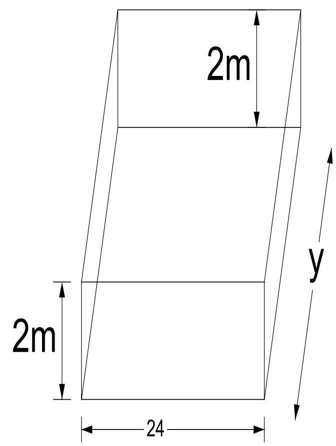
$\therefore$ मॅक्सिमा घनफळ $= 4\,(24 - 8)^2 = 1024$ क्यू. सेमी.

उदाहरण 10. आयताकृती पाया आणि आयताकृती बाजू असलेली एक टाकी जी वरच्या बाजूला उघडी अशी बनवायची आहे की त्याची खोली 2 मीटर आणि घनफळ 8 m^3 आहे. जर टाकीच्या बांधकामाची किंमत रू. 70 प्रति चौरस मीटर, पायासाठी आणि बाजूंसाठी रू. 45 प्रति चौरस मीटर असेल, तर कमीतकमी महागड्या टाकीची किंमत किती आहे?

उकल. समजा $x\ mt$ आणि $y\ mt$ टाकीच्या पायाच्या बाजू आहेत.

टाकीची खोली 2 मीटर दिली आहे,

टाकीचे घनफळ $= 2xy\ m^3$



आकृती 2.17

$\Rightarrow \quad 2xy=8$

$\Rightarrow \quad xy=4$ [$\because$ टाकीचे घनफळ = 8 m^3 (दिले)]

टाकीच्या पायाचे क्षेत्रफळ = $(x \times y)\ m^2$

आता, हे दिले आहे की टाकीचा पाया बांधण्याची किंमत रू 70 प्रति चौ. मी आहे.

$\therefore$ टाकीचा पाया बांधण्याची किंमत = रू 70 xy

टाकीच्या बाजूंचे एकूण क्षेत्रफळ

$= (2x + 2x + 2y + 2y)\ \mathrm{m}^2 = 4(x + y)\ m^2$

हे दिले आहे की टाकीच्या बाजू बांधण्याची किंमत रू. 45 प्रति चौ. मी. आहे.

$\therefore$ टाकीच्या बाजू बांधण्याची किंमत = रू. $180(x + y)$

समजा C टाकी बांधण्याची एकूण किंमत आहे.

$C =$ रू. $[70xy + 180\,(x + y)]$

$=$ रू. $\left[70(4)+180\left(x+\frac{4}{x}\right)\right]$ [$\because\ x=4$]

$=$ रू. $\left[280+180x+\frac{720}{x}\right]$

$\therefore \qquad \frac{dC}{dx} = 180 - \frac{720}{x^2}$

मॅक्सिमा किंवा मिनिमासाठी, $\frac{dC}{dx} = 0$

म्हणजेच $\qquad 180 - \frac{720}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow x = 2 \qquad$ [$\because$ x ऋण असणे शक्य नाही]

आता $\qquad \frac{d^2C}{dx^2} = \frac{1440}{x^3}$

$x = 2$ साठी $\qquad \frac{d^2C}{dx^2} = \frac{1440}{(2)^3}$ = धन संख्या

$\therefore$ C (म्हणजे एकूण किंमत) मिनीमम असते जेव्हा $x = 2$

म्हणून, कमीत कमी महागड्या टाकीची किंमत = रू. $\left[280 + 180(2) + \frac{720}{2}\right]$ = रू. 1000

सारांश

1. रोल्सचे प्रमेय, सरासरी मूल्य प्रमेय लागू करण्यासाठी एक आवश्यक अट म्हणजे फंक्शन कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

2. $f(x)$ चा विस्तार, x च्या घातांमध्ये (मैकलॉरिन सिरीज)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots$$

3. फ़ंक्शन $f(x)$ चा $x = a$ च्या संदर्भात $(x - a)$ च्या घातांमध्ये विस्तार (टेलर सिरीज).

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots$$

4. इंडिटर्मिनेट फॉर्म

i. $\frac{0}{0}$ $\qquad$ ii. $\frac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ iii. $0 \times \infty$ $\qquad$ iv. $\infty - \infty$

v. 1^∞ $\qquad$ vi. 0^0 $\qquad$ vii. ∞^0

5. L' हॉस्पिटल नियम

जर $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0$ आणि $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$ तर $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

6. लिमिटचे स्टँडर्ड रिझल्ट्स

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad$ *b.* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ $\qquad$ *c.* $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ $\qquad$ d. $\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

7. मॅक्सिमा आणि मिनिमा: $f(x)$ फंक्शनसाठी, आपण $f'(x)$ शोधतो आणि त्याची तुलना शुन्याबरोबर करतो म्हणजेच $f'(x) = 0$ जे $f(x)$ चे क्रिटिकल पॉईंट्स देते.आता या क्रिटिकल पॉईंट्स वर आपण $f(x)$ चा मॅक्सिमा आणि मिनिमा तपासतो.

केस I: सुरुवातीला क्रिटिकल पॉईंट्स वर $f''(x)$ शोधा.

जर $f''(x) > 0$, तर क्रिटिकल पॉईंट हा मिनिमाचा बिंदू आहे.

केस II: जर $f''(x) < 0$, तर क्रिटिकल पॉईंट हा मॅक्सिमाचा बिंदू आहे.

8. फंक्शन्सचे काही स्टँडर्ड विस्तार:

a. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ 	b. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}. + \dots$

c. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$ 	d. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

e. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$ जर $|x| < 1$

f. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

g. $(1+x)^n$, $|x| < 1$ साठी

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \dots \; |x| < 1$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\lim_{p\to\infty} \frac{p^5.p!}{5.6\dots(5+p)}$ चे मूल्य शोधा.

a. $4!$ 	b. $5!$ 	c. 0 	d. ∞

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ चे मूल्य शोधा.

a. ∞ 	b. -1 	c. 0 	d. 2^2

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}$ चे मूल्य शोधा.

a. 1 	b. -1 	c. 0 	d. अस्तित्वात नाही

4. रोल्सच्या प्रमेयाची पडताळणी करण्यासाठी काय आवश्यक आहे?

a. ओपन इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

b. ओपन इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

c. क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि ओपन इंटरव्हल मध्ये डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

d. क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

5. जेव्हा रोल्सचे प्रमेय $f(x)$ साठी $[a, b]$ वर सत्यापित केले जाते, तेव्हा तेथे c असे अस्तित्वात असते. अशाप्रकारे कि

a. $c \in [a, b]$ असे की $f'(c) = 0$ 	b. $c \in (a, b)$ असे की $f'(c) = 0$

c. $c \in [a, b)$ असे की $f'(c) = 0$ 	d. $c \in (a, b]$ असे की $f'(c) = 0$

6. जर फंक्शन $f(x) = x^2 - 8x + 12$ हे $(2, 6)$ या पॉईंट ला रोल्सच्या प्रमेयाची अट पूर्ण करत असेल तर c चे मूल्य असे शोधा की $f'(c) = 0$

a. 6 	b. 4 	c. 8 	d. 2

7. जर $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, तर $[0, 18\pi]$ या इंटरव्हल मध्ये किती पॉईंट्स असे अस्तित्वात आहेत की $f'(c) = 0$

a. 8 b. 9 *c.* 17 *d.* 18

8. जर $f(x)=\ln(10-x^2), x\in(-3,3)$ तर इंटरव्हल $[-3, 3]$ मधील असा बिंदू शोधा कि जेथे स्पर्शिकाचा स्लोप शून्य आहे

a. 0 *b.* 2

c. रोल्सचे प्रमेय लागू होत नाही, कारण फंक्शन $[-3, 3]$ मध्ये कंटिन्यूयस नाही.

d. रोल्सचे प्रमेय लागू होत नाही, कारण फंक्शन $[-3, 3]$ मध्ये डिफरंशीएबल नाही.

9. वक्र $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ वर आणि या इंटरव्हल $[0, 1]$ मध्ये 'c' बिंदू शोधा , जेथे वक्राच्या स्पर्शिकेचा स्लोप हा बिंदू (0, 1) आणि (1, 4) यांना जोडणाऱ्या रेषेच्या बरोबर असतो.

a. 0.64 *b.* 0.44 *c.* 0.54 *d.* 0.34

10. $f(x) = x^3 + x + 1$, या फंक्शनसाठी, आपल्याकडे कोणताही रोल्सचा बिंदू नाही.जर निर्देशांक अक्ष हे घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने 60 अंशाच्या कोनातून फिरवून रूपांतरित केले तर रोल्सचा नवीन बिंदू हा असेल

a. $\sqrt{3/2}$ *b.* फंक्शनमध्ये कधीही रोल्सचा पॉइंट असू शकत नाही

c. $\sqrt{3}$ *d.* $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$

11. वक्र $y = \log x$ वरील असा बिंदू शोधा कि त्या बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका हि, (1, 0) आणि (e, 1) या बिंदूंना जोडणाऱ्या जीवेला समांतर असेल

a. e *b.* $e-1$ *c.* $1-e$ *d.* $-e$

12. जर सरासरी मूल्य प्रमेयामध्ये $f(a)=f(b)$ असेल तर ते

a. लिबनिझचे प्रमेय b. रोल्सचे प्रमेय c. टेलर फंक्शनची मालिका d. कॉचीचे प्रमेय

13. जर $f(x) = \sin x \cos x$, (0, x) या इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असेल तर

a. $1<\frac{\cos x.\sin x}{x}<\sin 2x$ b. $1<\frac{\cos x.\sin x}{x}<\cos 2x$

c. $1<\frac{\cos x.\sin x}{x}<x\cos 2x$ d. $1<\frac{\cos x.\sin x}{x}<1+\cos 2x$

14. इंटरव्हल [0, 1] वर, फंक्शन $x^{25}(1-x)^{75}$ चे जास्तीत जास्त मूल्य कोणत्या पॉइंट ला असेल.

a. 0 *b.* 1/2 *c.* 1 *d.* 1/4

15. $f(x) = e^{-x^2}$ च्या $x = 0$ संदर्भात टेलरच्या सिरीज मधील x^2 चे सह-गुणक शोधा

a. 1/4 *b.* -1 *c.* 1/2 *d.* -2

16. जर $f(x) = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \ldots + 100x^{100}$ हि वास्तविक चल x मधील बहुपदी आहे, तर $f(x)$ ला

a. मॅक्सिमा पण नाही आणि मिनिमा पण नाही. b. फक्त एक मॅक्सिमा आहे.

c. फक्त एक मिनिमा आहे. d. एक मॅक्सिमा आणि एक मिनिमा आहे.

17. मॅक्लॉरिनची सिरीज वापरून $f(x)$ फंक्शनचा विस्तार असेल

a. $f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$ b. $1+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$

c. $f(0)-\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$ d. $f(1)+\frac{x}{1!}f'(1)+\frac{x^2}{2!}f''(1)+\frac{x^3}{3!}f'''(1)+\ldots$

18. वास्तविक संख्या x आणि त्याचा व्यस्त यांची जेव्हा बेरीज केली जाते तेव्हा बेरजेचे मिनीमम मूल्य $x=\ldots$ असेल

a. -2 b. 2 c. 1 d. −1

19. जर फंक्शन $f(x) = 2x^2 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$, जेथे $a > 0$, त्याची मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य अनुक्रमे p आणि q ला अशी प्राप्त करते कि $p^2 = q$, तर a चे मूल्य काय असेल

a. 1/2 b. 3 c. 1 d. 2

20. $f(x)$ फंक्शन साठी मॅक्लॉरिनच्या विस्तार सत्य होण्यासाठी हि अट आवश्यक आहे

a. ते कंटिन्यूयस असावे. b. ते डिफरंशीएबल असावे

c. ते प्रत्येक बिंदूवर अस्तित्वात असले पाहिजे d. ते कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असावे

उत्तरे

1. a	2. c	3. d	4. c
5. b	6. b	7. d	8. a
9. c	10. d	11. b	12. b
13. b	14. d	15. b	16. c
17. a	18. c	19. c	20. d

व्यक्तिनिष्ठ न सोडविलेली उदाहरणे (हॉट्स)

1. समजा $f(x)$ हे R वर एक कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल फंक्शन आहे, तर $f(x)$ च्या कोणत्याही दोन वास्तविक मुळांमध्ये, $f'(x)$ चे कमीत कमी एक मूळ अस्तित्वात असते हे दाखवा.

2. समजा $f: [a,b] \longrightarrow R$ हे तीन वेळा डिफरंशीएबल फंक्शन आहे जसे की $f(a) = f(b) = f'(a) = f''(a) = 0$,तर सिद्ध करा की $c \in (a, b)$ जसे की $f'''(c) = 0$ हे *अस्तित्वात आहे.*

3. सरासरी मूल्य प्रमेय वापरून, हे सिद्ध करा कि $|\sin x - \sin y| \le |x - y| \,\forall\, x, y \in R$.

4. समजा $f: (0, \infty) \longrightarrow R$ हे एक डिफरंशीएबल फंक्शन आहे तर सिद्ध करा की, कोणत्याही $a > 0$ साठी, जर

$$\lim_{x\to\infty}\left(af(x)+f'(x)\right)=L \text{ तर } \lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{L}{a}$$

5. जर $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$ जेथे $a_i \in R, 1 \le i \le n$ आहे तर $a_0 + 2a_1x + \ldots + (n + 1)\, a_n x^n = 0$ याला कमीत कमी एक वास्तविक मूळ $(0, 1)$ मध्ये आहे हे दाखवा.

6. सरासरी मूल्य प्रमेय वापरून, दिलेली असमानता सिद्ध करा

$$\frac{y-x}{y} < \log\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{y-x}{x}, \text{ सर्व } 0 < x < y \text{ साठी}$$

7. समजा $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ आणि $g(x)=\sin x \;\; \forall x\in R$. तर दाखवा कि $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

परंतु $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ही अस्तित्वात नाही.

8. समजा $f: R\to R$ हे एक असे डिफरंशीएबल फंक्शन आहे की $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \leq 4$ आणि $f(0) = 0$ तर सिद्ध करा की

$f(1) \in [-4, 4]$ आणि $f(2) \in [-8, 8]$.

9. समजा I हा एक इंटरव्हल आहे आणि $f: I \rightarrow R$, I वर डिफरंशीएबल आहे. जर डेरिवेटिव्ह f', I वर कधीही 0 नसेल तर एक तर $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in I$ किंवा $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in I$.

10. सिद्ध करा की सिलेंडरचे जास्तीत जास्त घनफळ जो कि उंची h आणि व्हर्टिकल अँगल 30° असलेल्या शंकूमध्ये कोरला जाऊ शकतो $\frac{4}{81}\pi h^3$ हे आहे.

11. एक पाण्याची टाकी उलट्या राईट सर्क्युलर कोन च्या आकारात आहे ज्याचा अक्ष उभा आहे आणि व्हर्टेक्स खालचा आहे. त्याचा सेमी व्हर्टिकल कोन $\tan^{-1}$ (0.5) आहे. त्यामध्ये 5 क्यूबिक मीटर प्रति तास स्थिर दराने पाणी ओतले जाते. टाकीतील पाण्याची खोली 4 मीटर असताना त्या वेळी पाण्याची पातळी किती वाढत आहे ते शोधा.

प्रात्यक्षिक

1. MATLAB टूल वापरून $[0, 2\pi]$ मध्ये साइन आणि कोसाइन फंक्शन्सचा आलेख रेखाटा.
2. MATLAB टूल वापरून R वर e^{3x} साठी आलेख रेखाटा.
3. M.S. एक्सेल मध्ये, [x] काढा, ग्रेटेस्ट इंटीजर फंक्शन इंटरव्हल [0, 5] मध्ये.

क्रियाकलाप

1. फंक्शनसाठी रोल्सच्या प्रमेयाची पडताळनी करण्यासाठी MATLAB चा कोड लिहा.
   i. x^2, $[-3, 3]$ या इंटरवल मध्ये
   ii $(x+2)^3 * (x-3)^4$, $[-2, 3]$ या इंटरवल मध्ये
   यासाठी एक कर्व देखील काढ़ा.

अधिक जाणून घ्या

1. $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right\}^{1/x}$ चे मूल्य आहे

a. abc b. $(abc)^{1/3}$ c. $(abc)^{1/8}$ d. $\frac{1}{abc}$

2. x^x च्या मिनीमम मूल्य आणि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ च्या मॅक्सिमम मूल्याचा गुणाकर असेल

a. e b. $\frac{1}{e}$ c. 1 d. e^2

3. $e^{\sin x}$ चा विस्तार ......

a. $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\ldots$ b. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$

c. $1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\ldots$ d. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{10}+\ldots$

4. 'a' आणि 'b' यातील रिलेशन शोधा अशा प्रकारे की L हॉस्पिटल रूल एकच वेळेस वापरुन खालील लिमिट प्राप्त होते

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^{2x}}{be^x+ae^{2x}}.$$

a. $b/a=2$ b. $a/b=2$ c. $a=b$ d. $a=-b$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)+\cos(bx)-2\cos(cx)}{\cos(ax)+2\cos(bx)-3\cos(cx)}$ ची फाइनाइट लिमिट काढण्यासाठी किती वेळेस डिफरनशीएशन करावे लागेल, दिलेले आहे $a\neq b\neq c$

a. 3 b. 0 c. 2 d. 4

उत्तरे

1.b 2. c 3. b 4. d

5.c

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Bary, N.K. (1964). A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press.
2. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus, Wiley, NewYork.
3. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
4. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
5. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
6. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947). Theory of Functions, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.

12. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.

13. Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.

14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

3 सारणी (मॅट्रिक्स)

युनिट निर्दिष्टे

या युनिट मध्ये पुढील विषयांवर चर्चा केली आहे – मॅट्राइसेस आणि त्यांचे प्रकार, मॅट्रिक्सवर ऑपरेशन्स, मॅट्रिक्सचे गुणधर्म, व्हेक्टर, व्हेक्टरवर ऑपरेशन, डिटरमिनंट आणि त्याचे गुणधर्म आणि अनुप्रयोग, रेषीय समीकरणांची प्रणाली, मॅट्रिक्सची रँक, मॅट्रिक्स चा व्यस्त, क्रॅमरचा नियम, गॉस एलिमिनेशन आणि गॉस-जॉर्डन एलिमिनेशन लांबी मध्ये. विद्यार्थ्यांमध्ये आंतरविद्याशाखीय दृष्टीकोन विकसित करण्यासाठी सर्व संकल्पना स्पष्ट केल्या गेल्या आहेत.

तर्कशास्त्र

रेषीय बीजगणितीय समीकरणे, रेषीय विकलक समीकरणे आणि अरेषीय विकलक समीकरणे यांच्या प्रणालीच्या निराकरणात मॅट्रिक्सचा सर्वाधिक वापर केला जातो. मॅट्रिक्स, रोटेशन आणि परावर्तन यांसारख्या अनेक भौतिक क्रियादेखील मॅट्रिक्सच्या मदतीने गणितीयपद्धतीने दर्शवल्या जाऊ शकतात. एन्क्रिप्शनमध्ये, आम्ही हा डेटा सांकेतिक करण्यासाठी आणि डिकोड करण्यासाठी सुरक्षा हेतू डेटा स्क्रॅम्बल करण्यासाठी त्याचा वापर करतो. लोकांची वैशिष्ट्ये, लोकसंख्या, सवयी इत्यादी वास्तविक जगातील डेटाचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी मॅट्रिक्सचा वापर केला जातो. रोबोटिक्स आणि ऑटोमेशनमध्ये, रोबोटच्या हालचालींसाठी मॅट्रिक्स हे आधार घटक आहेत. वयोमान-समस्या, वेग-वेळ इत्यादी अनेक क्षेत्रांत समीकरणांची रेषीय प्रणाली वापरली जाते.

पूर्वतयारी

1. मॅट्रिक्सच्या बीजगणिताचे मूलभूत ज्ञान.
2. त्यांच्या गुणधर्मांसह आयुग्मी (adjoint), व्यस्त (inverse) आणि सारणिक (determinant) या संकल्पनेशी परिचित आहे.
3. समीकरणांच्या रेषीय प्रणालीतून सारणिच्या निर्मितीची कल्पना जाणून घ्या.

युनिट आउटकम (UO)

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी सक्षम होतील:

U3-O1: रेषीय समीकरणांची सुसंगत आणि विसंगत प्रणाली ओळखा आणि रँक वापरून ऑगमेंटेड मॅट्रिक्सच्या रो एचेलन फॉर्मद्वारे त्यांचे उपाय शोधा.

U3-O2: स्वत: ला R^n मधील व्हेक्टरच्या बीजगणितीय आणि भौमितिक प्रतिनिधित्वाच्या संकल्पनांशी आणि बेरिज, स्केलर गुणाकार आणि डॉट प्रॉडक्टसह त्यांच्या कार्याशीपरिचित करतील .

U3-O3: रेषीय समीकरणांच्या होमोजीनियस आणि नॉन होमोजीनियस प्रणालीचे इनव्हरटिबल मॅट्रिक्स, पिव्होट पोझिशन्स आणि सोल्यूशन संदर्भात समकक्ष विधाने ओळखा आणि वापरा.

U3-O4: गॉस एलिमिनेशन पद्धत, गॉस जॉर्डन पद्धत आणि क्रॅमरचा नियम वापरुन रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीसाठी उपायांचे अस्तित्व आणि वेगळेपण निश्चित करा.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध:

युनिट-3 आउटकम	प्रोग्राम आउटकम (PO) च्या बरोबर अपेक्षित संबंध (1- कमकुवत परस्परसंबंध ; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U3-O1			3	1	1
U3-O2			1	3	2
U3-O3			3	2	1
U3-O4			3		

इतिहास

ऐतिहासिकदृष्ट्या, मॅट्रिक्स आणि निर्धारकांचा अभ्यास इ.स.पू. दुसर् या शतकात परत जातो जरी अंश इ.स.पू. चौथ्या शतकात परत पाहिले जाऊ शकतात. रेषीय समीकरणांच्या प्रणालींच्या अभ्यासातून मॅट्रिक्स आणि डिटरमिनंटची सुरुवात निर्माण झाली पाहिजे यात आश्चर्य नाही. बॅबिलोनच्या लोकांनी अशा समस्यांचा अभ्यास केला ज्यामुळे एकाच वेळी रेषीय समीकरणे निर्माण होतात आणि काही त्यातील मातीच्या गोळ्यांमध्ये जतन केली जातात जी वाचली. तथापि 17 व्या शतकाच्या अखेरीस कल्पना पुन्हा प्रकट झाल्या आणि विकास खरोखर सुरू झाला, हे मॅट्रिक्स नव्हते तर प्रथम ओळखले गेलेले निर्धारक नावाच्या वर्ग श्रेणीशी संबंधित एक विशिष्ट संख्या होती. केवळ हळूहळू बीजगणितीय अस्तित्व म्हणून मॅट्रिक्सची कल्पना उदयास आली. मॅट्रिक्स हा शब्द 19 व्या शतकातील इंग्रजी गणितज्ञ जेम्स सिल्वेस्टर यांनी सादर केला, परंतु त्याचा मित्र गणितज्ञ आर्थर कॅली ने 1850 च्या दशकात दोन पेपरमध्ये मॅट्रिक्सचा बीजगणितीय पैलू विकसित केला. कॅलीने प्रथम त्यांना रेषीय समीकरणांच्या प्रणालींच्या अभ्यासावर लागू केले, जेथे ते अजूनही खूप उपयुक्त आहेत. ते देखील महत्वाचे आहेत कारण, कॅलीने ओळखले म्हणून, मॅट्रिक्सचे काही संच बीजगणितीय प्रणाली तयार करतात ज्यात अंकगणिताचे अनेक सामान्य नियम असतात (उदा. संबंधित आणि वितरणात्मक कायदे) वैध आहेत परंतु ज्यात इतर कायदे आहेत (उदा. प्रवास योग्य कायदा) जे वैध नाही.

देवाचा विचार व्यक्त केल्याशिवाय समीकरणचा माझ्यासाठी काहीच अर्थ नाही.—

श्रीनिवास रामानुजन
(1887-1920)

मॅट्रिक्सकडे संगणक ग्राफिक्समध्ये महत्वाचे अनुप्रयोग देखील आले आहेत, जेथे त्यांचा वापर प्रतिमांचे रोटेशन आणि इतर परिवर्तनदर्शी करण्यासाठी केला गेला आहे.

प्रस्तावना

मॅट्राइसेस हा शब्द मॅट्रिक्स या शब्दाचे बहुवचन आहे. आर्थर केली 1860 मध्ये मॅट्राइसेसची संकल्पना व्यक्त करणारी पहिली व्यक्ती होती.

मॅट्राइसेस च्या अभ्यासाचा उगम विविध रेषीय समस्यांच्या कल्पनेतून झाला. अनेक अभियांत्रिकी प्रक्रियेत घडणाऱ्या रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीशी त्याचे विशेष संबंध आहेत.हे रेषीय बीजगणिताच्या अभ्यसात आणि विकासात एक महत्त्वाची यादी प्रदान करते. अप्लाइड इंजिनिअरिंग आणि कंट्रोल सिस्टममध्ये रेषीय प्रणाली स्वरूपाच्या सादरीकरणात मॅट्राइसेस देखील उपस्थित आहेत. गणित, विज्ञान आणि अभियांत्रिकी या प्रत्येक शाखेच्या अभ्यासात मॅट्राइसेस चा मोठ्या प्रमाणावर वापर केला जातो.

3.1 व्याख्या

mn संख्याचा एक संच (वास्तविक किंवा कॉम्प्लेक्स) आयताकृती अॅरेच्या स्वरूपात मांडला आहे ज्यात m रांगा आहेत (आडव्या रेषा) आणि n स्तंभांना (उभ्या रेषा) म्हणतात ज्याला m x n मॅट्रिक्स (m बाय n मॅट्रिक्स' किंवा 'मॅट्रिक्स' म्हणून वाचले जाते ज्याची ऑर्डर m बाय n ' किंवा 'मॅट्रिक्स ऑफ टाइप m बाय n.

मॅट्रिक्स सामान्यत: चिन्ह $\left[a_{ij}\right]$ किंवा $\left(a_{ij}\right)$ किंवा $\left\|a_{ij}\right\|$ याने दर्शविला जाते.

मॅट्रिक्स सहसा A, B, C इत्यादी एकाच मोठ्या अक्षराद्वारे अवलोकन केले जाते.

म्हणून, एक $m \times n$ मॅट्रिक्स 'A' खालील प्रमाणे लिहता येते.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \text{ किंवा } A=\left[a_{ij}\right]$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ जर } i = 1, 2, \ldots m \text{ आणि } j = 1, 2, \ldots n$$

प्रत्येक $m \times n$ मॅट्रिक्समध्ये $m.n$ घटकांची संख्या आहे.

नोट: मॅट्रिक्समधील प्रत्येक प्रवेशाला मॅट्रिक्सचा घटक म्हणतात .

उदाहरणार्थ: आपण एक एकसामायिक समीकरणांच्या प्रणालीच्या संचाचा विचार करू.

$$2x+3y+3z+2t=0$$

$$3x+2y+5z+3t=0$$

$$4x+5y+6z+7t=0$$

$$2x+3y+4z+5t=0$$

आता, आपण वरील समीकरणांचे x, y, z आणि t चे गुणांक लिहितो आणि त्यांना कंसात टाकतो आणि मग, आपल्याला मिळते

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

वरील संख्याप्रणालीची रांगा आणि स्तंभांच्या कंसांने बांधलेल्या आयताकृती टेबलमध्ये मांडणी केली जाते त्याला मॅट्रिक्स म्हणतात. यात 4 रांगा आणि 4 स्तंभ आहेत आणि सर्व $4 \times 4 = 16$ घटक आहेत. याला 4×4 मॅट्रिक्स म्हणतात.

एका घटकाच्या दुहेरी उपलिपीमध्ये(Dobule subscript), पहिली उपलिपी(first subscript) रांग निश्चित करते आणि दुसरी उपलिपी(second subscript) स्तंभ निश्चित करते जसे a_{ij} मधे i रांग आणि j स्तंभात स्थित आहे.

3.1.1 वेगवेगळ्या प्रकारच्या मॅट्रिक्स.

1. **वास्तविक मॅट्रिक्स :** मॅट्रिक्सचे सर्व घटक वास्तविक असतील तर त्याला वास्तविक मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & \sqrt{3}\\ 1/2 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$ एक वास्तविक मॅट्रिक्स आहे.

2. **कॉम्प्लेक्स मॅट्रिक्स:** ज्या मॅट्रिक्समध्ये कॉम्प्लेक्स संख्या आहे त्याला कॉम्प्लेक्स मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}_{2\times 2}$ एक कॉम्प्लेक्स मॅट्रिक्स आहेत.

3. **रो मॅट्रिक्स:** केवळ एकच रांग आणि कितीही स्तंभ असलेल्या मॅट्रिक्सला रो मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरणार्थ : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{1\times 4}$ एक रो मॅट्रिक्स आहे.

4. **कॉलम मॅट्रिक्स:** एक मॅट्रिक्स ज्यात फक्त एकच स्तंभ असतो आणि कितीही रांगा असलेल्या मॅट्रिक्सला कॉलम मॅट्रिक्स म्हणतात

उदाहरणार्थ : $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}_{4\times 1}$ एक कॉलम मॅट्रिक्स आहे.

5. **नल मॅट्रिक्स किंवा झिरो मॅट्रिक्स:** ज्या मॅट्रिक्सचे सर्व घटक शून्य आहेत त्याला नल मॅट्रिक्स किंवा झिरो मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरणार्थ : $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times 2}$ आणि $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$ झिरो मॅट्रिक्स आहेत.

6. **स्क्वेअर मॅट्रिक्स**: ऑर्डर $m \times n$ चे मॅट्रिक्स म्हणजे स्क्वेअर मॅट्रिक्स असे म्हटले जाते जर $m = n$. रांगांची संख्या स्तंभांच्या संख्येच्या बरोबरीने आहे

उदाहरणार्थ : $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे.

7. **आयताकृती मॅट्रिक्स:** ऑर्डर $m \times n$ मॅट्रिक्स आयताकृती मॅट्रिक्स असल्याचे म्हटले जाते जर $m \neq n$. रांगांची संख्या स्तंभांच्या संख्येच्या बरोबरीने नाही .

उदाहरणार्थ : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$

8. **डायगोनल मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्सला डायगोनल मॅट्रिक्स म्हणतात जर त्याचे सर्व अविकर्णी(non-diagonal) घटक शून्य असतील.

समजा $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ आणि जर $i \neq j$ ऐवजी $a_{ij}=0$ नंतर 'A' $n \times n$ ऑर्डरचा डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.

डायगोनल मॅट्रिक्सला $diag\left[a_{11}, a_{12}, \ldots.\ \ a_{nn}\right]$ लिहिले जाते.

उदाहरणार्थ : $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3\times 3}$ डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.

9. **युनिट मॅट्रिक्स किंवा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्सला युनिट मॅट्रिक्स किंवा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स म्हणतात जर

डायगोनल घटक 1 आहे आणि अविकर्णी (non-diagonal) घटक शून्य आहे.

उदाहरणार्थ : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ आणि $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ युनिट मॅट्रिक्स आहे.

ऑर्डर n चा युनिट मॅट्रिक्सला I_n असेही लिहिले जाते..

10. सिंग्यूलर आणि नॉन सिंग्यूलर मॅट्रिक्स : स्क्वेअर मॅट्रिक्स 'A' ला सिंग्यूलर मॅट्रिक्स म्हणतात जर $|A| = 0$ म्हणजे जर 'A' त्यातून तयार झालेला निर्धारक(डीटरमीनन्ट्) शून्य आहे.

उदाहरणार्थ : मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ जर $|A| = 0$ (सिंग्यूलर मॅट्रिक्स)

जर $|A| \neq 0$, (निर्धारक शून्याच्या बरोबरीचे नाही) तर मॅट्रिक्स 'A' नॉन सिंग्यूलर मॅट्रिक्स असं म्हणतात.

उदाहरणार्थ: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ जर $|A| = -10 \neq 0$ (नॉन सिंग्यूलर मॅट्रिक्स)

11. सममित (सिमेट्रिक) मॅट्रिक्स: स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = \left[a_{ij}\right]$ सममित मॅट्रिक्स म्हणतात जर $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$

किंवा $A = A'$ ($A' = A$ चा ट्रान्सपोज)

उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}_{3\times3}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ सममित मॅट्रिक्स.

12. विषम-सममित (स्कीयू- सिमेट्रिक) मॅट्रिक्स: स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ विषम -सममित मॅट्रिक्स म्हटले जाते जर $a_{ij} = -a_{ji}$, i आणि j किंवा $A = -A'$

सर्व विकर्ण (डायगोनल) घटक शून्य आहे .

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ स्किव सीमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे

13. मॅट्रिक्सचे परिवर्तन (ट्रान्सपोज) : समजा $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, जर त्याच्या रांगांचे स्तंभांमध्ये रूपांतर केले गेले आणि त्याच्या स्तंभांचे रांगेत रूपांतर केले गेले तर A पासून $n \times$ m मॅट्रिक्स मिळतों आणि जे नवीन मॅट्रिक्स बनवले गेले त्याला A चा परिवर्तन (ट्रान्सपोज) म्हणतात आणि त्याला A' किंवा A^T ने दाखवले आहे.

उदाहरणार्थ: समजा $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$, तेव्हा $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$

जर $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times3}$ तर $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

परिवर्तन (ट्रान्सपोज) मॅट्रिक्सचे गुणधर्म : जर A' आणि B' अनुक्रमे A और B चे परिवर्तन (ट्रान्सपोज) मॅट्रिक्स असल्यास,

a. $(A')' = A$

b. $(A+B)' = A' + B'$

c. $(kA)' = kA'$, k एक संख्या आहे

d. $(AB)' = B'A'$

e. $(ABC)' = C'B'A'$

14. ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स: स्क्वेअर मॅट्रिक्स 'A' ला ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स म्हणतात जर मॅट्रिक्स 'A' चा आणि त्याच्या परिवर्तनशील मॅट्रिक्स A' चा गुणाकार युनिट मॅट्रिक्स असेल. म्हणजे $A \cdot A' = I$ येथे I एक युनिट मॅट्रिक्स आहे.

उदाहरणार्थ: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, तेव्हा $A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$AA' = I$ [विद्यार्थी स्वत: याची पडताळणी करू शकतात]

म्हणुन 'A' एक ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स आहे..

15. ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स: एक स्क्वेअर मॅट्रिक्सला ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात जर प्रमुख डायगोनल वरील किंवा त्याखालील सर्व घटक शून्य आहेत.

ट्रायन्युलर मॅट्रिक्सचे दोन प्रकार आहेत.

a. **अप्पर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्स A मुख्य डायगोनल खालील सर्व घटक शून्य आहेत, तर त्याला अप्पर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ मुख्य विकर्ण

एक अप्पर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स आहे

b. **लोवर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स:** वरिल सर्व घटक शून्य आहेत,तर त्याला लोवर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरण: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ मुख्य विकर्ण

एक लोवर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स.

16. कॉन्ज्युगेट मॅट्रिक्स:

आपण म्हणू या $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix}$

मॅट्रिक्स A चा कॉन्ज्युगेट $\overline{A}$ ने दर्शविला जातो.

$$\therefore \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: मॅट्रिक्स A च्या कॉन्ज्युगेटचा ट्रान्सपोज A^{θ} ने दर्शविला जातो.

समजा

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$\left(\overline{A}\right)' = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$A^{\theta} = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

17. एकात्मक (युनिटरी) मॅट्रिक्स: स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ला एकात्मक (युनिटरी) मॅट्रिक्स म्हटले जाते जर $A.A^{\theta} = I$

उदाहरणार्थ: $$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}, \text{ आणि } A^{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$$

$AA^{\theta} = I$

18. हर्मिटियन मॅट्रिक्स: एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = \left[a_{ij}\right]$ ला हर्मिटियन मॅट्रिक्स म्हटले जाते जर, A चा प्रत्येक $(ij)^{th}$ घटक हा A च्या कॉन्ज्युगेटच्या $(ji)^{th}$ घटका समान असतो. दुस-या शब्दांत सांगायचं तर आपण असं म्हणू शकतो $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$

उदाहरणार्थ $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+i \\ 2-3i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A हा हर्मिटियन होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट म्हणजे $A = A^{\theta}$ म्हणजेच A चा कॉन्जुगेट ट्रांसपोज आहे.

किंवा $$A = \left(\overline{A}\right)'.$$

19. विषम-हर्मिटियन मॅट्रिक्स: एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = \left[a_{ij}\right]$ ला विषम -हर्मिटियन मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल जर, A चा प्रत्येक $(ij)^{th}$ घटक A च्या $(ji)^{th}$ घटकच्या कॉम्प्लेक्स कॉन्जुगेट च्या ऋण मुल्याबरोबर असेल.दुस-या शब्दांत सांगायचं तर आपण असं म्हणू शकतो $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ मुख्य विकर्ण सर्व घटक खालीलप्रमाणे असतील

$$a_{ii} = -\overline{a}_{ii} \text{ किंवा } a_{ii} + \overline{a}_{ii} = 0$$

जर $a_{ii} = a + ib$ तर $\overline{a}_{ii} = a - ib$

$$(a+ib)+(a-ib) = 0 \text{ या } 2a = 0 \text{ या } a = 0$$

म्हणून a_{ii} निव्वळ काल्पनिक आहे की $a_{ii} = 0$

म्हणून एक विषम -हर्मिटियन मॅट्रिक्सचे सर्व डायगोनल घटक एकतर शून्य किंवा पूर्णपणे काल्पनिक असतील.

उदाहरणार्थ $$\begin{bmatrix} i & 2-3i & 4+5i \\ -(2+3i) & 0 & 2i \\ -(4-5i) & 2i & -3i \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A हा विषम -हर्मिटियन होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट अशी आहे कि,

$$A^{\theta} = -A$$

$$\left(\overline{A}\right)' = -A$$

20. इडेमपोटेंट मॅट्रिक्स: मॅट्रिक्स A इडेमपोटेंट मॅट्रिक्स म्हटले जाईल जर $A^2 = A$

उदाहरणार्थ जर: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

तर $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

21. आवर्त मॅट्रिक्स: एक मॅट्रिक्स A ला आवर्त मॅट्रिक्स म्हटले जाईल जर,

$$A^{k+1} = A$$

जर 'k' एक +ve पूर्णांक आहे. जर K एक किमान मूल्य +ve पूर्णांक आहे, ज्यासाठी $A^{k+1} = A$ आहे, तेव्हा k ला A चा आवर्त म्हणतात.

जर आपण k = 1 घेऊया, तर आम्हाला $A^2 = A$ आणि आपण त्याला इडेमपोटेंट मॅट्रिक्स म्हणतो.

22. नीलपोटेंट मॅट्रिक्स: मॅट्रिक्स A ला नीलपोटेंट मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल, जर, $A^k = 0$ (शून्य मॅट्रिक्स), जेथे k धनात्मक पूर्णांक आहे; जर, तरीही k न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक आहे ज्यासाठी $A^k = 0$ आहे, त्यावेळी k नीलपोटेंट मॅट्रिक्स याला निर्देशांक म्हणतात.

उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$, नंतर $A^2 = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

म्हणून मॅट्रिक्स A ला नीलपोटेंट मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल आणि त्याचा निर्देशांक 2 असेल.

23. इन्व्होल्यूटरी मॅट्रिक्स: मॅट्रिक्स 'A' ला इन्व्होल्यूटरी मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल, जर $A^2 = I$, जेथे I युनिट मॅट्रिक्स आहे.

कारण $I^2 = I$ (नेहमी युनिट मॅट्रिक्स असेल)

$\therefore$ युनिट मॅट्रिक्स इन्व्होल्यूटरी मॅट्रिक्स आहे.

24. मॅट्रिक्सचा ट्रेस: समजा A, ऑर्डर n चा एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे. तर मुख्य विकर्ण ज्या घटकांशी संबंधित आहेत त्याची बेरीज Tr(A) ने दर्शविली जाते.

म्हणून जर $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, तर

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + \ldots.. + a_{nn}$$

आपण म्हणू या $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

तर $trace(A) = tr(A) = 1 + (-3) + 5 = 3$

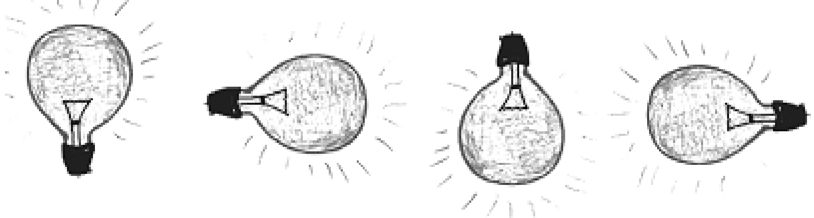
मॅट्रिक्सचा ट्रेस चे गुणधर्म : समजा A आणि B दोन स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे ज्याची ऑर्डर n आणि λ एक स्केलर आहे, नंतर

a. $tr(\lambda A) = \lambda\, tr\, A$

b. $tr(A+B) = tr\,A + tr\,B$

c. $tr(AB) = tr\,(BA)$

एक लाइट बल्बमध्ये स्क्रू करण्यासाठी किती मॅट्रिक्स लागतात?



बस $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, पण तुम्हाला त्याची पुन्हा पुन्हा अंमलबजावणी करावी लागेल.

आकृती 3.1

3.1.2 मॅट्रिक्सवर ऑपरेशन

3.1.2.1 मॅट्रिक्सची बेरीज

दोन मॅट्रिक्सची ‘बेरीज’ तेव्हा केले जाते जेव्हा ते एकाच ऑर्डर चे असतात. समजा A आणि B एकाच ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर या दोन मॅट्रिक्सची बेरीज A आणि B संबंधित घटक यांची बेरिज करुन प्राप्त केले जाते.

याला A + B . म्हणून दाखवले आहे

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, तर

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 1+1 \\ 1+1 & 2+1 & 3+1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

वेळोवेळी जर $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ आणि $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, नंतर

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$$

3.1.2.2 मॅट्रिक्सच्या बेरजेचे गुणधर्म

एकाच ऑर्डरचे मॅट्रिक्स यांची बेरीज करता येते किंवा वजाबाकी करता येते.

a. कम्युटेटिव्ह नियम : एकाच ऑर्डरच्या दोन मॅट्रिक्स ची बेरीज कोणत्याही क्रमाने केली जाऊ शकते म्हणजेच कम्युटेटिव्ह नियम हा मॅट्रिक्स च्या बेरजेसाठी लागू होतो. जर ‘A’ आणि ‘B’ हे दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर

$$A + B = B + A$$

(विद्यार्थी एकाच ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स घेऊन त्याची पडताळणी करू शकतात)

b. असोसिएटिव्ह नियम: जर आपल्याकडे एकाच ऑर्डरचे तीन मॅट्रिक्स आहेत ‘A’, ‘B’ आणि ‘C’ , तर असोसिएटिव्हिटी नियम

हा मॅट्रिक्स च्या बेरजेसाठी लागू होतो, म्हणजे.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$ (विद्यार्थी त्याची पडताळणी करू शकतात)

3.1.2.3 मॅट्रिक्सची वजाबाकी

दोन मॅट्रिक्स वर 'वजाबाकी' हे ऑपरेशन केले जाऊ शकते, जर ते समान ऑर्डर चे असतील तर. समजा 'A' आणि 'B' एकाच ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर दोन मॅट्रिक्स ची वजाबाकी हि पहिल्या मॅट्रिक्स मधील प्रत्येक हा दुसऱ्या मॅट्रिक्समधील संबंधित घटकांमधून वजा करून प्राप्त झाला आहे.

याला A – B . म्हणून दाखवले आहे.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, तर

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1-2 & 2-2 \\ 2-3 & 3-1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

हे दोन मॅट्रिक्स 'A' आणि 'B' मधील वजाबाकी आहे

3.1.2.4 मॅट्रिक्सचा स्केलर गुणाकार

जर एक मॅट्रिक्स ला स्केलर राशि k ने गुणाकार केला , तर त्याच्या प्रत्येक घटकाला k ने गुणाकार केला जातो.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$,

तर $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

3.1.2.5 मॅट्रिक्सचे गुणाकार

दोन मॅट्रिक्स 'A' आणि 'B' चा गुणाकार तरच शक्य आहे जर 'A' च्या स्तंभांची संख्या 'B' च्या रांगांच्या संख्ये बरोबर असते

समजा $A = \left[a_{ij}\right]_{p\times q}$ आणि $B = \left[b_{jk}\right]_{q\times r}$, तर गुणाकार AB असा परिभाषित केला जातो कि,

$$C = \left[c_{ik}\right]_{p\times r}$$

जेथे $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots\ldots + a_{in}b_{nk}$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

आणि आपण लिहू शकतो, $C = AB$

उदाहरणार्थ: जर $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$ तर

$$AB = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 2\end{bmatrix} \end{array}$$

$$=\begin{bmatrix}R_1c_1 & R_1c_2 & R_1c_3\\R_2c_1 & R_2c_2 & R_2c_3\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 3 & 6\\2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$$

3.1.2.6 मॅट्रिक्स गुणाकाराचे गुणधर्म.

a. मॅट्रिक्सचे गुणाकार अनुक्रमिक नाही उदा. 'A' आणि 'B' दोन मॅट्रिक्स आहेत, त्यावेळी

$AB \neq BA$ (समान असणे आवश्यक नाही)

b. मॅट्रिक्स गुणाकार हा असोसिएटिव्ह आहे, जर तीन मॅट्रिक्स 'A', 'B' आणि 'C', जर आपल्याकडे असेल तर

$A(BC) = (AB)C$

c. मॅट्रिक्स मॅट्रिक्स गुणाकार बेरजेच्या संदर्भात वितरक (डीस्ट्रिब्युटिव्ह) आहे. तीन मॅट्रिक्स A, B आणि C, जर आपल्याकडे असतील तर

$A(B + C) = AB + AC$

d. मॅट्रिक्स 'A' आणि युनिट मॅट्रिक्स 'I' यांचा गुणाकार हा स्वयं एक मॅट्रिक्स 'A' असतो . उदा.

$AI = IA = A$

e. जर मॅट्रिक्स 'A' चा गुणाकार व्यस्त अस्तित्वात असेल तर $|A| \neq 0$ म्हणजे.

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

उदाहरणार्थ: जर $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{3\times3}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}_{3\times2}$

तर गुणाकार AB मिळवा आणि BA का परिभाषित होत नाही हे स्पस्ट करा?

उकल: येथे A च्या स्तंभांची संख्या (3×3) = B च्या रांगांची संख्या (3×2), म्हणून गुणाकार AB परिभाषित केला आहे.

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}3 & -2\\5 & -5\\7 & -8\end{bmatrix}_{3\times2}$$

आता, BA साठी, B च्या स्तंभांची संख्या $(3 \times 2) \neq$ A च्या रांगांची संख्या (3×3) म्हणून गुणाकार BA परिभाषित नाही.

टिप्पणी: 1. जर A आणि B अनुक्रमे $m \times n$ आणि $p \times q$ ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स आहे, तर गुणाकार AB तरच शक्य आहे जर $n = p$ आणि AB चे ऑर्डर $m \times q$ होईल.

2. दोन मॅट्रिक्स 'A' आणि 'B' AB शक्य आहे, म्हणून गुणाकार BA असू शकते किंवा नसेल.

चित्रमय मांडणी

1. मॅट्रिक्स गुणाकाराच्या टप्प्याटप्प्याने प्रक्षेपण (Visulaization): http://matrixmultiplication.xyz

अभ्यास 3.1

1. जर $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ तर खालील मूल्य शोधा.

   a. 2A + 3B b. 3A – 4B

2. दोन मॅट्रिक्स A आणि B अशा प्रकारे आहे कि $3A-2B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ आणि $-4A+B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ मग मॅट्रिक्स A आणि B चे मूल्य शोधा.

3. जर A = diag[2, 9, 4] आणि B = diag[−3, 7, 6] मग खालील मूल्य शोधा.

   a. A + B b. A – B c. 7A + 2B d. 9A – 11B

4. जर $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\\ -5 & 1\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 4 & -2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, मग मॅट्रिक्स X चे मूल्य अशा प्रकारे ओळखले कि 2A + 3X = 5B

5. जर $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ दिल्यावर खालील मूल्य शोधा.

   a. AB b. BA

   हे देखील सिद्ध करा कि AB ≠ BA आहे.

उत्तरे

1. a. $\begin{bmatrix}3 & 10 & 3\\ 8 & 3 & 6\\ 2 & 2 & 13\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}-4 & -2 & -4\\ -5 & -4 & 9\\ 3 & 3 & -6\end{bmatrix}$ 2. $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$

3. a. $diag[-1,\ 16,\ 10]$ b. $diag[5,\ 2,\ -2]$

   c. $diag[8,\ 77,\ 40]$ d. $diag[51,\ 4,\ -30]$

4. $X=\begin{bmatrix}12 & 4/3\\ 4 & -14/3\\ 25/3 & 28/3\end{bmatrix}$ 5. a. $\begin{bmatrix}3 & 12 & 11\\ 4 & 13 & 8\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}11 & 9 & 13\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 5 & 8\end{bmatrix}$

3.2 व्हेक्टर

कोणतेही क्रमबद्ध n-संख्यांचे टपल ला n-व्हेक्टर असं म्हटलं जाते, क्रमबद्ध एन-टपलनुसार, आम्हाला असे म्हणायचे आहे की

एन क्रमांकांचा समावेश असलेला एक डॉट ज्यामध्ये प्रत्येक क्रमांकाची जागा निश्चित केली जाते. जर $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ या n-संख्या आहेत, तर क्रमबद्ध n- टपलची व्याख्या $X = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ परिभाषित केली आहे , आणि त्यांना n-व्हेक्टर म्हणतात.

a_i क्रमांकांना निर्देशांक, घटक, नोंदी किंवा एक्सचे घटक म्हणतात. एक व्हेक्टर एकतर रांग व्हेक्टर म्हणून किंवा स्तंभ व्हेक्टर म्हणून लिहिला जाऊ शकतो.

समजा $X = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ आणि $Y = (b_1, b_2, b_3..., b_n)$ दोन व्हेक्टर आहेत, तर ते समान असतील म्हणजेच.$X = Y$ जर आणि फक्त जर त्यांचे संबंधित घटक समान आहेत, म्हणजे, $a_i = b_i$, $i = 1, 2, ..., n$ साठी, जर 'A' हा ऑर्डर $m \times n$ चा मॅट्रिक्स असेल, तर 'A' च्या प्रत्येक ओळीची ऑर्डर n-टपल व्हेक्टर असेल आणि A चा प्रत्येक स्तंभ ऑर्डर m- टपल व्हेक्टर असेल.

उदाहरणार्थ a. $(1, 2, 5)$ हे एक रो व्हेक्टर आहे.

b. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ हा स्तंभ व्हेक्टर आहे.

3.2.1 व्हेक्टरवर ऑपरेशन

3.2.1.1 व्हेक्टरची बेरीज:

समजा $X = (a_1, a_2, a_3, ... a_n)$ आणि $Y = (b_1, b_2, b_3, ...b_n)$ दोन व्हेक्टरचा संच आहे, तर दोन वेक्टर, X आणि Y यांची बेरीज $X + Y = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$

उदाहरणार्थ $X = (1, 2, 3)$ आणि $Y = (1, 1, 1)$, तर $X + Y = (2, 3, 4)$ होईल.

3.2.1.2 व्हेक्टर्सची वजाबाकी:

समजा $X = (a_1, a_2, a_3, ... a_n)$ आणि $Y = (b_1, b_2, b_3, ...b_n)$ दोन व्हेक्टरचा संच आहे, तर दोन वेक्टर, X आणि Y यांची वजाबाकी $X - Y = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, ... a_n - b_n)$

उदाहरणार्थ: $X = (2, 3, 5)$ आणि $Y = (1, 2, 6)$, तर $X - Y = (1, 1, -1)$.

3.2.1.3 वेक्टरचे स्केलेअर गुणाकार

समजा $X = (a_1, a_2, a_3, ... a_n)$ इतका n-टपल व्हेक्टर आहे आणि k स्केलर राशि आहे, तर k व्हेक्टर सह X स्केलेअर च्या गुणाकार ची व्याख्या अशी केली आहे.

$$k.X = k(a_1, a_2, a_3, ... a_n)$$
$$= (ka_1, ka_2, ka_3, ... ka_n)$$

उदाहरणार्थ: $X = (1, 2, 3)$, मग $6X = 6(1, 2, 3) = (6, 12, 18)$ होईल.

3.2.1.4 डॉट (इनर) गुणाकार

समजा $X = (a_1, a_2, a_3, ... a_n)$ आणि $Y = (b_1, b_2, b_3, ...b_n)$ दोन व्हेक्टर आहेत, त्यावेळी X आणि Y यांचा डॉट गुणाकार हा $X.Y = (a_1, a_2, a_3, ... a_n).(b_1, b_2, b_3, ...b_n) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n)$ आशाप्रकारे परिभाषित केला जाईल.

उदाहरणार्थ: समजा $X = (2, 5, 4)$ आणि $Y = (1, 2, 5)$, तर $X.Y = (2, 5, 4) . (1, 2, 5) = (2)(1) + (5)(2) + (4)(5) = 2 + 10 + 20 = 32$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.1 दिलेले आहे $X = (1, 2, 5, 4)$ आणि $Y = (0, 3, 9, 12)$, तर $2X - Y$ शोधून काढा.

उकल : दिले आहे $X = (1, 2, 5, 4)$ आणि $Y = (0, 3, 9, 12)$, तर

$$\begin{aligned} 2X - Y &= 2(1, 2, 5, 4) - (0, 3, 9, 12) \\ &= (2, 4, 10, 8) - (0, 3, 9, 12) \\ &= (2, 1, 1, -4) \end{aligned}$$

उदाहरण 3.2 दिलेले आहे $X = (1, 5, 2)$ आणि $Y = (1, 10, 11)$, शोधून काढा.

a. $X + Y$ b. $9X$ c. $2X - 5Y$

उकल : दिलेले आहे $X = (1, 5, 2)$ आणि $Y = (1, 10, 11)$ आहे, तर

a. $X + Y = (1, 5, 2) + (1, 10, 11) = (2, 15, 13)$

b. $9X = 9\,(1, 5, 2) = (9, 45, 18)$

c. $2X - 5Y = 2(1, 5, 2) - 5(1, 10, 11)$

$= (2, 10, 4) - (5, 50, 55) = (-3, -40, -51)$.

उदाहरण 3.3 जर $X = (9, 4, 5, 10)$ आणि $Y = (0, -3, 2, -1)$, तर खलील मूल्य शोधून काढा.

a. $X.X$ b. $Y.X$

उकल : दिले आहे $X = (9, 4, 5, 10)$ आणि $Y = (0, -3, 2, -1)$

a.
$$\begin{aligned} X.X &= (9, 4, 5, 10)\,.\,(9, 4, 5, 10) \\ &= (9)(9) + (4)(4) + (5)(5) + (10)(10) \\ &= 81 + 65 + 25 + 100 = 222 \end{aligned}$$

b. $Y.X = (0, -3, 2, -1).\,(9, 4, 5, 10) = -12$ (स्वत:प्रयत्न करा)

अभ्यास 3.2

1. a आणि b याचे मूल्य शोधा,
   i. $(a, 3) = (2, a + b)$ ii. $(4, b) = a\,(2, 3)$
2. जर $X = (2, 3, 0, 5)$, $Y = (0, 6, -1, 9)$ आणि $Z = (1, 1, 1, 0)$ आहे, तर शोधून काढा.
   i. $X + Y$ ii. $Y - 3Z$
3. खालीलपैकी कोणते व्हेक्टर समान आहेत हे ठरवा?
   $X_1 = (1, 2, 3)$, $X_2 = (1, 3, 2)$, $X_3 = (2, 3, 1)$, $X_4 = (2, 3, 1)$
4. जर $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ आणि $Z = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ तर खालील मूल्य शोधा.
   i. $5X - 2Y$ ii. $-2X + 4Y - 3Z$
5. जर $X = \left(-2, 5, \sqrt{10}, 3, 4\right)$ आणि $Y = \left(1, -2, \sqrt{10}, -4, 3\right)$, शोधून काढा

i. $X.X$ ii. $Y.Y$

6. जर दोन व्हेक्टर $(a+b, a-b) = (5, 3)$ असे दिले असतील, तर a' आणि b' चे मूल्य शोधून काढा.

उत्तरे

1. i. $a = 2, b = 1$ ii. $a = 2, b = 6$ 2. i. $(2, 9, -1, 14)$ ii. $(-3, 3, -4, 9)$

3. $X_3 = X_4$ 4. i. $\begin{bmatrix} 27 \\ 5 \\ -24 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} -23 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$

5. i. 64 ii. 40 6. $a = 4, b = 1$

3.3 एलेमेंट्री ऑपरेशन्स (रूपांतरण)

मॅट्रिक्सवरील खालील पैकी एका ऑपरेशनला प्रारंभिक रूपांतरण किंवा ई-रूपांतरण म्हणतात.

1. कोणत्याही दोन रांगांची (किंवा स्तंभांची) देवाणघेवाण करणे म्हणजे i^{th} आणि j^{th} रांगा बदलण्यासाठी R_{ij} किंवा $R_i \leftrightarrow R_j$. सूचित केले जाते.
   तसेच, i^{th} आणि j^{th} स्तंभांचे परस्परबदल C_{ij} किंवा $C_i \leftrightarrow C_j$ सूचित केले जाते.
2. कोणत्याही रो (किंवा कॉलम) घटकांचा शून्य नसलेल्या स्केलर प्रमाणाने गुणाकार.i रो ला k ने केलेला गुणाकार kR_i द्वारे दर्शवली जातो त्याचप्रमाणे, i कॉलम ला k ने केलेला गुणाकार kC_i द्वारे दर्शवली जातो.
3. कोणत्याही रो च्या (किंवा कॉलम) घटकांना स्थिरांकाने गुणाकार आणि संबंधित इतर कोणत्याही रो चे (किंवा कॉलम) घटक यांची बेरीज.

3.3.1 एलेमेंटरी मॅट्रिक्स

प्राथमिक रूपांतरण लागू करून युनिट मॅट्रिक्समधून मिळवलेल्या मॅट्रिक्सला एलेमेंटरी मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदा. समजा $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 + 3R_3$ लागू करून, आपल्याला मिळेल

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हा एक एलेमेंटरी मॅट्रिक्स आहे.

3.4 मॅट्रिक्स चा इचीलॉन फॉर्म

3.4.1 मॅट्रिक्सचा रो- इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्स रो- इचीलॉन स्वरूपात आहे असे म्हटले जाते जर

a. शून्य रो जर असतील तर, ते सर्व मॅट्रिक्सच्या तळाशी असतील.

b. प्रत्येक रो मधील पहिला शून्य नसलेला घटक हा मागील रो मधील पहिल्या शून्य नसलेल्या घटकाच्या उजव्या बाजूला असतो.

टीप: कोणत्याही रो च्या पहिल्या शून्य नसलेल्या घटकास की (key)-घटक किंवा पिव्होट घटक म्हणतात.

3.4.2 मॅट्रिक्स चा रो रिड्युसड इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्सला रो रिड्युसड इचीलॉन फॉर्म असे म्हटले जाते जर

a. तो रो इचीलॉन स्वरूपात आहे.

b. प्रत्येक मुख्य घटक एक (1) आहे

c. प्रत्येक कॉलममधील मुख्य घटकावरील सर्व घटक शून्य आहेत.

3.4.3 मॅट्रिक्स चा कॉलम इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्सला कॉलम इचीलॉन फॉर्म असे म्हटले जाते जर

a. शून्य कॉलम जर असतील तर, ते सर्व मॅट्रिक्सच्या अत्यंत उजवीकडे असतील.

b. प्रत्येक कॉलमचा पहिला शून्य नसलेला घटक आधीच्या कॉलम मधील शून्य नसलेल्या घटकाच्या खाली असतो.

टिप्पणी: कोणत्याही कॉलमच्या पहिल्या शून्य नसलेल्या घटकाला की-घटक किंवा पिव्होट घटक म्हणतात.

3.4.4 मॅट्रिक्स चा कॉलम रिड्युसड इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्स हा कॉलम रिड्युसड इचीलॉन स्वरूपात आहे असे म्हटले जाते जर

a. तो कॉलम इचीलॉन स्वरूपात आहे.

b. प्रत्येक कि - घटक एक(1) आहे

c. प्रत्येक रो मधील कि-घटकाच्या डावीकडील घटक सर्व शून्य आहेत.

टिप्पणी: जर A हा रो इचीलॉन फॉर्म मध्ये असेल तर त्याचा ट्रान्सपोज A' हा कॉलम इचीलॉन स्वरूपात असतो.

3.5 डिटरमिनंटस

डिटरमिनंटसचा सिद्धांत रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीच्या अभ्यासातून निर्माण झाला आहे. डिटरमिनंट एक स्केलर मूल्य आहे जे स्क्वेअर मॅट्रिक्सच्या घटकांचे फंक्शन आहे. चौरस मॅट्रिक्स $A=[a_{ij}]$चा डिटरमिनंट, det A किंवा det (A) किंवा $|A|$ द्वारे दर्शविले जातो

1×1 ऑर्डर असलेल्या मॅट्रिक्स $A = [a]$ चा डिटरमिनंट, $|A| = a$ म्हणून दर्शविले जाते आणि ऑर्डर एकचा डिटरमिनंट म्हणतात.

2×2 च्या मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ चा डिटरमिनंट $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ असे दर्शविले जाते आणि त्याला ऑर्डर दोनचा डिटरमिनंट म्हणतात.

अशा प्रकारे , 3×3 चा मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ चा डिटरमिनंट $|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

असे दर्शविले जाते आणि त्याला ऑर्डर तीन चा डिटरमिनंट म्हणतात.

3.5.1 ऑर्डर दोन (किंवा दुसरी ऑर्डर) च्या डिटरमिनंटचे स्पष्टीकरण

दोन अज्ञात x आणि y असलेल्या दोन रेषीय समीकरणांची खालील प्रणाली विचारात घ्या.

$$a_1x + b_1y = 0 \quad \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) वरून आपल्याला मिळते,

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_1}{a_1} \quad \ldots (3)$$

समीकरण (2) वरून आपल्याला मिळते,

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_2}{a_2} \quad \ldots (4)$$

समीकरण (3) आणि (4) वरून, x आणि y काढून टाकून, आपल्याला मिळते

$$-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

$a_1b_2 - b_1a_2$ याला ऑर्डर दोनचा डिटरमिनंट म्हणतात. $a_1b_2 - b_1a_2$ ही संख्या अधिक सोयीस्करपणे $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ चिन्हाद्वारे दर्शविली जाते.

a_1, a_2, b_1, b_2 या संख्यांना डिटरमिनंटचे घटक म्हणतात

टिप्पणी: ऑर्डर 2×2 च्या डिटरमिनंटचा विस्तार करण्यासाठी, आपण क्रॉस-गुणाकाराचा नियम लागू करतो.

ची किंमत $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.4. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ च्या डिटरमिनंटचे मूल्य शोधा.

उकल. समजा

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 6 = 41 \text{ **(उकल)**}$$

उदाहरण 3.5. x चे मूल्य शोधा, जर $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

उकल. समजा

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2x^2 - 18 = 18 - 18$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$ **(उकल)**

3.5.2 तिसऱ्या ऑर्डरच्या डिटरमिनंटचा विस्तार

तीन अज्ञात x, y आणि z असणाऱ्या तीन रेषीय समीकरणांची खालील प्रणाली विचारात घ्या.

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \qquad \ldots (5)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \qquad \ldots (6)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \qquad \ldots (7)$$

वरील तीन समीकरणांच्या संचातून x, y, z दूर करण्यासाठी, (6) आणि (7) सोडवून

$$\frac{x}{b_2c_3 - c_2b_3} = \frac{y}{c_2a_3 - a_2c_3} = \frac{z}{a_2b_3 - b_2a_3} = k$$

$$x = k(b_2c_3 - c_2b_3)$$

$$y = k(c_2a_3 - a_2c_3)$$

$$z = k(a_2b_3 - b_2a_3)$$

x, y, z ही मूल्ये समीकरण (5) मध्ये ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3)k + b_1(c_2a_3 - a_2c_3)k + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)k = 0$$

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = 0 \qquad \ldots(8)$$

(विद्यार्थ्यांनी स्वतः विचार केला पाहिजे की k चे मूल्य शून्य का असू शकत नाही)

समीकरण (8) च्या डाव्या हाताच्या या अभिव्यक्तीला तिसऱ्या क्रमाचा डिटरमिनंट म्हणतात. प्रतीकात्मकपणे, ते

म्हणून लिहिले आहे $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$\Rightarrow \qquad \text{किंवा} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

टिपण्णी : i. डिटरमिनंटचा वरील विस्तार पहिल्या रो च्या दृष्टीने विस्तार म्हणून ओळखला जातो. त्याचप्रमाणे, डिटरमिनंट कोणत्याही रो किंवा कोणत्याही कॉलम सह आणि प्रत्येक बाबतीत विस्तारित केलेलय डिटरमिनंटचे मूल्य समान राहते.

ii. प्रत्येक पद (term) च्या सुरुवातीला चिन्ह = $(-1)^{i+j}$, जेथे 'i' आणि 'j' रो आणि कॉलम सूचित करतात ज्यात हे घटक असतात.

हे कोणत्याही ऑर्डरच्या डिटरमिनंटसाठी वैध आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.6. $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\\ 31 & 11 & 38\end{bmatrix}$ च्या डिटरमिनंटचे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\\ 31 & 11 & 38\end{bmatrix}$$

तेव्हा $$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\\ 31 & 11 & 38\end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$|A|=1\begin{vmatrix}6 & 10\\ 11 & 38\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 10\\ 31 & 38\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}2 & 6\\ 31 & 11\end{vmatrix}$$

$$=1(228-110)-3(76-310)+5(22-186)$$

$$=1(118)-3(-234)+5(-164)=118+702-820$$

$$=0$$ **(उकल)**

उदाहरण 3.7. जर $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$, मग दाखवा कि $|3A|=27|A|$

उकल. दिले आहे $$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$3A=3\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

तर $|3A|$ चा डिटरमिनंट $|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून $|3A| = 3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 3(36-0)-(0-0)+3(0-0)$$

$$= 108-0+0 \;= 108$$

आणि $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(4) - 0 + 1(0)$$

$$= 4$$

तेव्हा $27|A| = 27 \times 4 = 108$

म्हणून $|3A| = 27|A|$ **(सिद्ध केले)**

3.5.3 डिटरमिनंटचे गुणधर्म

गुणधर्म i. सर्व रो कॉलम मध्ये आणि सर्व कॉलम रो मध्ये बदलल्यास डिटरमिनंटचे मूल्य तेच राहते.

उदाहरण 3.8. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

दुसऱ्या रो च्या बाजूने विस्तार करून

$\Delta = 36$ (विद्यार्थी स्वतः सोडवू शकतात)

सर्व रो हे कॉलम मध्ये बदलून, आपलल्याला मिळेल.

$\Delta_1 = 36$ (विद्यार्थी याची पडताळणी करू शकतात)

म्हणून $\Delta = \Delta_1$

गुणधर्म ii. जर डिटरमिनंटच्या कोणत्याही दोन रो किंवा कोणत्याही दोन कॉलमची देवाणघेवाण केली तर डिटरमिनंटचे मूल्य देखील फक्त चिन्हाने बदलते

उदाहरण 3.9. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार केल्यानंतर, आपल्याकडे आहे

$$\Delta = 2$$

गुणधर्म ii वापरून, म्हणजे दुसऱ्या आणि तिसऱ्या रो चे आदान -प्रदान करून, आपल्याला मिळेल.

(समजा) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या संदर्भात विस्तार करून, आपल्याला मिळेल.

$$\Delta_1 = -2$$

म्हणून $\Delta = -\Delta_1$

गुणधर्म iii जर डिटरमिनंटच्या कोणत्याही दोन रो किंवा दोन कॉलम एकसारखे असतील, तर डिटरमिनंटचे मूल्य नेहमी शून्य असतो.

उदाहरण 3.10. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$\Delta = 0$ (विद्यार्थी गणना करू शकतात)

म्हणून $\Delta = 0$

गुणधर्म iv. जर डिटरमिनंटच्या रो किंवा कॉलम चा प्रत्येक घटक समान स्थिरांकाने गुणाकार केला असेल तर डिटरमिनंटचे मूल्य देखील त्या घटकाद्वारे गुणाकार केले जाते.

उदाहरण 3.11 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या संदर्भात विस्तार केल्याने, आपल्यला मिळेल

$$\Delta = -3$$

पहिल्या रो ला 5 ने गुणाकार केल्यास, आपल्याला मिळते

$$\text{(समजा)}\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -15 = 5(\Delta)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_1 = 5\Delta$$

गुणधर्म v. जर एका रो (किंवा कॉलम) चे घटक अनुक्रमे इतर रो (किंवा कॉलम) च्या संबंधित घटकांच्या कोणत्याही स्थिरांकाने गुणाकार करून त्यांची बेरीज केली तर डिटरमिनंटचे मूल्य बदलत नाही.

उदाहरण 3.12 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = -2$$

दुसऱ्या कॉलमला 3 ने गुणाकार केल्यावर आणि पहिला कॉलम यांची बेरीज केल्यास, आपल्याला मिळते

$$\text{(समजा)} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+6 & 2 & 4 \\ 3+3 & 1 & 5 \\ 0+12 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta_1 = -2$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta = \Delta_1$$

गुणधर्म vi. जर डिटरमिनंटच्या रो (किंवा कॉलम) मधील प्रत्येक घटक हा दोन किंवा जास्त पदांची बेरीज म्हणून व्यक्त केला असेल तर

डिटरमिनंट देखील दोन (किंवा अधिक) डिटरमिनंटची बेरीज म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो.

उदाहरण 3.13 $\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे $$\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1$$ (विद्यार्थी गणना आणि पडताळणी करू शकतात)

टीप: जर n ऑर्डर असलेला A हा चौरस मॅट्रिक्स असेल तर $|k.A| = k^n |A|$

उदाहरण 3.14 डिटरमिनंट चे गुणधर्म वापरून हे सिद्ध करा कि

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

उकल. समजा $$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & b^2-a^2 & ac-bc \\ c-a & c^2-a^2 & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & (b-a)(b+a) & c(a-b) \\ c-a & (c-a)(c+a) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

अनुक्रमे R_2 आणि R_3 मधून $(b - a)$ आणि $(c - a)$ बाहेर काढून , आपल्याला मिळेल

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 1 & a+c & -b \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_3 \to R_3 - R_2$, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & c-b & c-b \end{vmatrix}$$

R_3 मधून (c - b) कॉमन काढून , आपल्याला आहे

$$=(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

तिसऱ्या रोद्वारे ऑपरेशन करून, आपल्याला मिळेल

$$=\left[(b-a)(c-a)(c-b)\right](-1)\begin{vmatrix} a & bc-a^2 \\ 1 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=\left[(b-a)(c-a)(c-b)\right](-1)\left[-ac-a^2-ab-bc+a^2\right]$$

$$=\left[(b-a)(c-a)(c-b)\right](-1)\left[(-1)(ac+ab+bc)\right]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$ **(सिद्ध केले)**

उदाहरण 3.15 दाखवा कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & abc \\ 1 & b & bca \\ 1 & c & cab \end{vmatrix} = 0$$

उकल. समजा $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & abc \\ 1 & b & bca \\ 1 & c & cab \end{vmatrix}$

c_3 मधून abc कॉमन काढून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$=0$ [पहिला आणि तिसरा कॉलम सारखा असल्याने] [गुणधर्म (iii) नुसार]

उदाहरण 3.16 डिटरमिनंट चे गुणधर्म वापरून हे सिद्ध करा कि

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$$

उकल. दिले आहे $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

ऑपरेटिंग $c_1 \to c_1 + c_2 + c_3$, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

c_1 मधून (x + 2) कॉमन काढून, आपल्याला मिळेल

$$=(x+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$, आपल्याकडे आहे

$$\Delta=(x+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & (x-1) & 0\\ 0 & 0 & (x-1)\end{vmatrix}$$

अनुक्रमे R_2 आणि R_3 मधून (x - 1) कॉमन काढून, आपल्याकडे आहे

$$\Delta=(x+2)(x-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

R_2 च्या संदर्भात विस्तार करून,

$$\Delta=(x+2)(x-1)^2\cdot(1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x+2)(x-1)^2\cdot(1)$$

$$=(x+2)(x-1)^2$$ (सिद्ध केले)

अभ्यास 3.3

1. खालील डिटरमिनंटचे मूल्य शोधा:

a. $\begin{vmatrix}x^2-x+1 & x-1\\ x+1 & x+1\end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix}\sqrt{6} & \sqrt{5}\\ \sqrt{20} & \sqrt{24}\end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix}210 & 117 & 345\\ 19 & 9 & 34\\ 7 & 3 & 5\end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}$

2. दिलेल्या डिटरमिनंटचे मूल्य काढा. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$

a. दुसऱ्या रोच्या मदतीने

b. तिसऱ्या कॉलमच्या मदतीने

3. दिलेल्या डिटरमिनंटचे मूल्य काढा. $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1 & \sec\theta\\ \tan\theta & -\sec\theta & \tan\theta\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

4. डिटरमिनंटच्या गुणधर्मांचा वापर करून, खालील सिद्ध करा:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

b. $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

c. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = \left(1-x^3\right)^2$

d. $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

e. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\left(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2\right)$

5. $x = 2$ हे दिलेल्या $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ समीकरणाचे मूळ आहे हे दाखवा आणि ते पूर्णपणे सोडवा.

6. जर a, b आणि c वास्तविक असतील आणि $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$,तर दाखवा की एकतर a + b + c $= 0$ किंवा a = b = c.

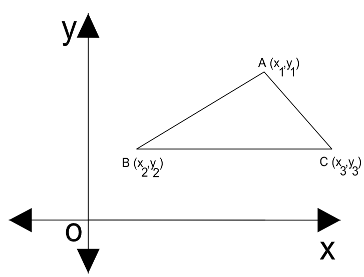
उत्तरे

1. a. $x^3 - x^2 + 2$	b. 2	c. 2691	d. 40
2. a. 23	b. 23	3. $\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)$	

3.5.4 डिटरमिनंटचे अनुप्रयोग

3.5.4.1 डिटरमिनंट वापरून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढणे

शिरोबिंदू (x_1, y_1), (x_2, y_2) आणि (x_3, y_3) असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे आहे.



आकृती 3.2

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

किंवा $$= \frac{1}{2}\left[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_2\right]$$

डिटरमिनंटच्या फॉर्म मध्ये हे एक्स्प्रेशन असे लिहिले जाऊ शकते

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ आणि } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

टिप्पणी: 1. डिटरमिनंट ऋण असू शकते परंतु क्षेत्र नेहमीच धन असते म्हणजे ≥ 0.
2. जर त्रिकोणाचे क्षेत्र दिलेले असेल तर गणनेसाठी धन तसेच ऋण किमती वापरा.
3. तीन पॉइंट्स एकरेषीय असतील जर आणि फक्त जर तीन बिंदूंनी बनलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्र शून्य असेल.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.17. ज्या त्रिकोणाचे शिरोबिंदू (2, 7), (1, 1), (10, 8) आहेत त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधा.

उकल. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे दिले आहे

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत $(\underset{x_1}{\underset{\downarrow}{2}}, \underset{y_1}{\underset{\downarrow}{7}}), (\underset{x_2}{\underset{\downarrow}{1}}, \underset{y_2}{\underset{\downarrow}{1}}), (\underset{x_3}{\underset{\downarrow}{10}}, \underset{y_3}{\underset{\downarrow}{8}})$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[1(8-10)-1(16-70)+1(2-7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1(-2)-1(-54)+1(-5)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-2+54-5] = \frac{47}{2}$$

अशा प्रकारे, त्रिकोणाचे अपेक्षित क्षेत्र 47/2 चौरस एकक आहे

उदाहरण 3.18. ज्या त्रिकोणाचे शिरोबिंदू (−2, −3), (3, 2), (−1, −8) आहेत अशा त्रिकोणाचे क्षेत्र शोधा.

उकल.

त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत $(\underset{x_1}{\underset{\downarrow}{-2}}, \underset{y_1}{\underset{\downarrow}{-3}}), (\underset{x_2}{\underset{\downarrow}{3}}, \underset{y_2}{\underset{\downarrow}{2}}), (\underset{x_3}{\underset{\downarrow}{-1}}, \underset{y_3}{\underset{\downarrow}{-8}})$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे दिले आहे

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1(-24+2)-1(16-3)+1(-4+9)\right]$$ [R_1 च्या संदर्भात विस्तारित करून]

$$=\frac{1}{2}[-22-13+5]=-\frac{30}{2}=-15$$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ नेहमी ऋणात्मक नसल्यामुळे, त्रिकोणाचे अपेक्षित क्षेत्र 15 चौरस युनिट्स आहे.

उदाहरण 3.19. त्रिकोणाचे क्षेत्र 4 चौरस एकके आणि शिरोबिंदू $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(0, k)$ असल्यास k चे मूल्य शोधा.

उकल. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे दिले जाते

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

येथे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= 4$ वर्ग युनिट आहे.

$\therefore\quad \Delta=\pm 4$ [आपल्याला माहित आहे की क्षेत्रफळ नेहमीच धन असते परंतु डिटरमिनंट हा धन किंवा ऋण असू शकते]

$x_1=-2, x_2=0, x_3=0, y_1=0, y_2=4, y_3=k$ ठेऊन

$$\pm 4=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & k\end{vmatrix}$$

$$\pm 4=\frac{1}{2}[-(-2)(k-4)] \qquad [R_2 \text{ च्या संदर्भात विस्तार करून}]$$

$$\pm 8=2(k-4)$$

$$\pm 4=k-4$$

धन चिन्ह घेऊन	आणि	ऋण चिन्ह घेऊन.
$4=k-4$		$-4=k-4$
$4+4=k$		$-4+4=k$
$8=k$		$0=k$
$\therefore\quad k=8$		$\therefore\quad k=0$

त्यामुळे अपेक्षित मूल्य $k = 8, 0$.

उदाहरण 3.20 $(-2, -1)$, $(7, 8)$, $(-3, -2)$ हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल: आपल्याला माहित आहे की तीन बिंदू एकाच रेषेवर असल्यास ते एकरेषीय असतात.

$\therefore$ त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $= 0$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ दिले आहे $\quad \Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$

$(x_1,y_1)=(-2,-1),(x_2,y_2)=(7,8),(x_3,y_3)=(-3,-2)$ हे ठेवल्या वर

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 7 & -3\\ -1 & 8 & -2\end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}[1(-14+24)-1(4-3)+1(-16+7)]$$ [R_1 च्या संदर्भात विस्तार करून]

$$= \frac{1}{2}[10-1-9] = 0$$

$$\Delta = 0$$

म्हणून, दिलेले बिंदू एकरेषीय आहेत.

अभ्यास 3.4

1. खालीलपैकी प्रत्येकात बिंदूसह शिरोबिंदू दिलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधा.
   a. (1, 0), (6, 0), (4, 3) b. (3, 8), (−4, 2), (5, 1)
2. खाली दिलेल्यामध्ये k चे मूल्य शोधा जर
   i. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 4 चौरस एकक आहे आणि शिरोबिंदू (k, 0), (4, 0), (0, 2) आहेत.
   ii. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 35 चौरस एकक आहे आणि शिरोबिंदू (2, -6), (5, 4), (k, 4) आहेत.
3. $A(a, b+c), B(b, c+a), C(a, a+b)$ हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उत्तरे

1. a. 15/2 b. 61/2 **2.** i. 0, 8 ii. 12, −2

3.5.5 मायनर्स आणि कोफॅक्टर्स

3.5.5.1 मायनर्स

समजा n कोटी असलेला $A=[a_{ij}]$ असा मॅट्रिक्स आहे कि $|A|=|a_{ij}|$

तर मॅट्रिक्स A चा डिटरमिनंट जो रो आणि कॉलम ज्यामध्ये घटक आहे तो हटवून प्राप्त केला जातो तो माइनर म्हणून परिभाषित केला जातो. मॅट्रिक्स कोफॅक्टर चे मूल्य काढण्यासाठी माइनर आवश्यक आहेत.

समजा $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

अशा प्रकारे, a_1, b_1 आणि c_1 चे मायनर्स अनुक्रमे हे $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ आहेत.

अशा प्रकारे, a_2 , b_2 आणि c_2चे मायनर्स अनुक्रमे हे $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ आहेत.

अशा प्रकारे, a_3, b_3 आणि c_3 चे मायनर्स अनुक्रमे हे $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ आहेत.

3.5.5.2 कोफॅक्टर

रो क्रमांक i आणि कॉलम क्रमांक j च्या कोणत्याही घटकाचा कोफॅक्टर आहे.

कोफॅकटर = $(-1)^{i+j}$ माइनर

चौकोनी मॅट्रिक्सचे निर्धारक आणि व्यस्त या दोन्हींची गणना करण्यासाठी कोफॅक्टर उपयुक्त आहेत.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.21 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 0 & -1\end{bmatrix}$ मॅट्रिक्सचे सर्व मायनर्स आणि कोफॅक्टर शोधा.

उकल: दिले आहे $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 7 & 0 & -1\end{bmatrix}$

येथे

$$a_{11}=1,\ a_{12}=2,\ a_{13}=3$$
$$a_{21}=4,\ a_{22}=3,\ a_{23}=2$$
$$a_{21}=4,\ a_{22}=3,\ a_{23}=2$$

$$M_{11}=a_{11}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$M_{12}=a_{12}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-4-14=-18$$

$$M_{13}=a_{13}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix}=0-21=-21$$

$$M_{21}=a_{21}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2-0=-2$$

$$M_{22}=a_{22}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-1-21=-22$$

$$M_{23}=a_{23}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 0\end{vmatrix}=0-14=-14$$

$$M_{31}=a_{31}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-9=-5$$

$$M_{32}=a_{32}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2-12=-10$$

$$M_{33}=a_{33}\text{ चा माइनर }=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3-8=-5$$

$$A_{12}=a_{11}\text{ चा कोफॅक्टर}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{2}(-3)=-3$$
$$A_{12}=a_{12}\text{ चा कोफॅक्टर}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{3}(-18)=18$$
$$A_{13}=a_{13}\text{ चा कोफॅक्टर}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{4}(-21)=-21$$
$$A_{21}=a_{21}\text{ चा कोफॅक्टर}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{3}(-2)=2$$
$$A_{22}=a_{22}\text{ चा कोफॅक्टर}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{4}(-22)=-22$$
$$A_{23}=a_{23}\text{ चा कोफॅक्टर}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{5}(-14)=14$$

$$A_{31} = a_{31} \text{ चा कोफॅक्टर= } (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 (-5) = -5$$
$$A_{32} = a_{32} \text{ चा कोफॅक्टर= } (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 (-10) = 10$$
$$A_{33} = a_{33} \text{ चा कोफॅक्टर= } (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 (-5) = -5$$

3.5.6 स्क्वेअर मॅट्रिक्सचा ऍडजॉईन्ट

A च्या प्रत्येक घटकाची जागा त्याच्या $|A|$ मधील कोफॅक्टरद्वारे बदलून आणि मिळालेल्या मॅट्रिक्सचा ट्रान्स्पोज घेऊन स्क्वेअर मॅट्रिक्स A चा ऍडजॉईन्ट मिळतो

समजा $|A|$ हा स्क्वेअर मॅट्रिक्स A चा डिटरमिनंट आहे.

अशा प्रकारे, जर $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, तर

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A|$ मधील घटकांच्या कोफॅकटर द्वारे तयार केलेले मॅट्रिक्स दिला आहे.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

जेथे $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - c_2b_3)$

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - c_1b_3)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - c_2a_3)$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1c_3 - c_1a_3)$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -(a_1c_2 - c_1a_2)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - b_1a_3)$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - b_1a_2)$$

मग, कोफॅक्टर मॅट्रिक्सचा ट्रान्स्पोज आहे $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ ज्याला A मॅट्रिक्सचा ऍडजॉईन्ट म्हणतात आणि त्याला adj.A असे दर्शविले जाते.

3.5.6.1 ऍडजॉईन्ट गुणधर्म

मॅट्रिक्स A आणि त्याचा अडजॉईन्ट यांचा गुणाकार हा A च्या डिटरमिनंट ने गुणाकार केलेल्या युनिट मॅट्रिक्सच्या बरोबर असतो. प्रतीकात्मकपणे, जर A एक चौरस मॅट्रिक्स असेल तर

$$adj.(A).\,A = A.(adj\,A) = |A|.I$$

जेथे I, हा युनिट मॅट्रिक्स आहे

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.22. दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ चा ऍडजॉईन्ट शोधा.

उकल: दिले आहे $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

येथे $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{21} = 3, a_{22} = 5$

a_{11}, a_{12}, a_{21} आणि a_{22} चे कोफॅक्टर दिले आहेत

$A_{11} = a_{11}$ चा कोफॅक्टर $= (-1)^{1+1}\,5 = 5$

$A_{12} = a_{12}$ चा कोफॅक्टर $= (-1)^{1+2}\,(3) = -3$

$A_{21} = a_{21}$ चा कोफॅक्टर $= (-1)^{2+1}\,(3) = -3$

$A_{22} = a_{22}$ चा कोफॅक्टर $= (-1)^{2+2}\,(2) = 2$

म्हणून $adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **(उकल)**

उदाहरण 3.23. दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ऍडजॉईन्ट शोधा.

उकल: दिले आहे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

येथे $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 4$

$a_{21} = 2,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 2$

$a_{31} = 3, a_{32} = 3, a_{33} = 4$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ चे कोफॅक्टर आधी चर्चा केल्याप्रमाणे मोजले जातात.

$$A_{11} = 6, \quad A_{12} = -2, \quad A_{13} = -3$$
$$A_{21} = 4, \quad A_{22} = -8, \quad A_{23} = 3$$
$$A_{31} = -8, \quad A_{32} = 6, \quad A_{33} = -1$$

म्हणून $$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \qquad adj.(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -8 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

3.5.6.2 मॅट्रिक्सचा व्यस्त

जर A आणि B हे सारख्या ऑर्डर चे मॅट्रिक्स असे असतील कि $AB = BA = I$, तर B ला A चा व्यस्त म्हणतात म्हणजेच $B = A^{-1}$ आणि A हा B चा व्यस्त आहे.

टिपण्णी

1. चौरस मॅट्रिक्स 'A' ला व्यस्त असण्याची अट म्हणजे मॅट्रिक्स 'A' हा नॉन सिंग्युलर असावा म्हणजेच $|A| \neq 0$.
2. कोणताही स्क्वेअर मॅट्रिक्स ज्याला व्यस्त आहे त्याला इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स म्हणतात.
3. जर कोणत्याही स्क्वेअर मॅट्रिक्सला व्यस्त असेल तर तो नेहमीच अद्वितीय असते.

मॅट्रिक्स 'A' चा व्यस्त त्याच्या ॲडजॉईन्ट मॅट्रिक्सच्या मदतीने शोधण्यासाठी, आपल्याकडे आहे

$$A^{-1} = \frac{adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}(Adj.A)$$

(विद्यार्थी आधी नमूद केलेल्या ॲडजॉईन्टच्या गुणधर्माच्या मदतीने हि निष्पत्ती शोधू शकतात.)

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.24 मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त शोधा.

उकल: दिले आहे $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \qquad |A| \neq 0$, म्हणून '$A$' हा नॉन सिंग्युलर आहे आणि A^{-1} अस्तित्वात आहे.

म्हणून, आपल्याला कोफॅक्टर शोधण्याची आवश्यकता आहे.

$$A_{11} = a_{11} \text{ चा कोफॅक्टर} = 5$$
$$A_{12} = a_{12} \text{ चा कोफॅक्टर} = -3$$

$$A_{21} = a_{21} \text{ चा कोफॅक्टर} = -3$$
$$A_{22} = a_{22} \text{ चा कोफॅक्टर} = 2$$

$\Rightarrow$ $$Adj.(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

आता $$A^{-1} = \frac{Adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

उदाहरण 3.25. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त शोधा आणि हे देखील सत्यापित करा की $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$

उकल: दिले आहे $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

म्हणून आपल्याजवळ आहे,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

अशा प्रकारे $|A| \neq 0$ म्हणजे 'A' नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे आणि म्हणून A^{-1} अस्तित्वात आहे,
A^{-1} शोधण्यासाठी, आपल्याला A चे ऍडजॉईन्ट शोधावे लागतील, यासाठी आपल्याला A चे कोफॅक्टर शोधावे लागतील.
आपल्याकडे आहे,

$$A_{11} = -9,\quad A_{12} = -8,\quad A_{13} = -2$$
$$A_{21} = 8,\quad A_{22} = 7,\quad A_{23} = 2$$
$$A_{31} = -5,\quad A_{32} = -4,\quad A_{33} = -1$$

$\therefore$ $$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

म्हणून, $$A^{-1} = \frac{Adj.(A)}{|A|}$$
$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

पडताळणीसाठी $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (विद्यार्थी स्वतः प्रयत्न करू शकतात.)

अभ्यास 3.5

दिलेल्या मॅट्रिक्ससाठी ऍडजॉईन्ट वापरून मायनर्स , कोफॅक्टर, ऍडजॉईन्ट आणि व्यस्त यावर आधारित प्रश्न

1. दिलेल्या डिटरमिनंटसाठी प्रत्येक घटकाचे सर्व मायनॉर्स आणि कोफॅक्टर शोधा.

तसेच दिलेला डिटरमिनंट सोडवा. $A = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

2. दिलेल्या मॅट्रिक्सचा ऍडजॉईन्ट शोधा:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

3. दिलेल्या मॅट्रिक्सचा ऍडजॉईन्ट शोधा: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. खालील मॅट्रिक्सचे व्यस्त शोधा:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

5. दिलेल्या मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधा: $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. मॅट्रिक्स दिला आहे $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$. जेथे कोणताच d_1, d_2, d_3 आणि d_4 शून्य नाही. तर शोधा D^{-1}

उत्तरे

1. $M_{11} = (ab^2 - ac^2)$, $M_{12} = (ab - ac)$, $M_{13} = (c - b)$

$M_{21} = (a^2b - bc^2)$, $M_{22} = (ab - bc)$, $M_{23} = (c - a)$

$M_{31} = (ca^2 - cb^2)$, $M_{32} = (ca - bc)$, $M_{33} = (b - a)$

$A_{11} = (ab^2 - ac^2)$, $A_{12} = (ac - ab)$, $A_{13} = (c - b)$

$A_{21} = (bc^2 - a^2b)$, $A_{22} = (ab - bc)$, $A_{23} = (a - c)$, $|A| = (a - b)(b - c)(c - a)$

$A_{31} = (ca^2 - cb^2)$, $A_{32} = (bc - ca)$, $A_{33} = (b - a)$

2. a. $\begin{bmatrix} 15 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

4. a. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -15 \\ 3 & 1 & -9 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -20 \\ 2 & 3 & -15 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_4 \end{bmatrix}$

मनोरंजक माहिती

- विविध इमारतींची रचना किंवा डिझाइन मॅट्रिक्सच्या मदतीने बदलता येते. आपण “बुर्ज खलिफा” चे उदाहरण घेऊ शकतो. ते डिझाइन इतके साधे नाही ते मॅट्रिक्स चा वापर करून बनवले गेले आहे.
- इटरेटेड फंक्शन सिस्टीम सारख्या काही खास रचलेल्या फंक्शन्स काढणे खरोखर मजेदार आहे आणि मॅट्रिक्स चा वापर करून त्याची मोजणी केली जाते.
- आयटी आणि माहिती सुरक्षा (विशेषतः एन्क्रिप्शन) च्या क्षेत्रात, अनेक आयटी कंपन्या डेटा संरचना म्हणून मॅट्रिक्सचा शोध प्रश्न, वापरकर्त्याच्या माहितीचा माग काढण्यासाठी आणि डेटाबेस व्यवस्थापित करण्यासाठी देखील वापरतात.
- हे अनेक ठिकाणी देखील वापरले जाऊ शकते, जसे कि कार रेसिंग गेम खेळताना मॅट्रिक्स फिरवत असल्यासारख्या; फेस बुक, ट्विटर, इन्स्टाग्रामवर नेटवर्कचे क्लस्टर तयार करणे; किंवा अगदी वॉल स्ट्रीटमध्ये वापार करताना.

दैनंदिन जीवनामध्ये उपयोग

- आपल्या पर्सनल कॉम्प्युटरवरील ऍडोब फोटोशॉप सारख्या विविध ग्राफिक सॉफ्टवेअर मध्ये प्रतिमा प्रस्तुत करताना रेषीय परिवर्तनांवर प्रक्रिया करण्यासाठी मॅट्रिक्स वापरतात.
- चौरस मॅट्रिक्स भौमितिक ऑब्जेक्टचे रेखीय रूपांतर दर्शवू शकते, उदाहरणार्थ, मॅट्रिक्स कार्टेशियन x-y प्रतलामध्ये x किंवा y- अक्ष मधील ऑब्जेक्ट प्रतिबिंबित करते.
- गेमिंग उद्योग आणि इमेज प्रोसेसिंग डोमेनच्या क्षेत्रामध्ये त्याचा उपयोग आहे, जेथे तलाव, नद्या आणि इतर उलटी प्रतिमांमध्ये प्रतिबिंब दिसतात.
- कॉम्प्युटर ग्राफिक्समध्ये देखील मॅट्रिक्स महत्वाची भूमिका बजावतात, जसे की जेव्हा लोक कोणत्याही ऑब्जेक्टवर इच्छित मॅट्रिक्स परिवर्तन वापरतात, उदाहरणार्थ कार्टून कॅरॅक्टर.
- प्लॉट सर्वेक्षणांची आखणी करण्यात, लोकांची लोकसंख्या, बालमृत्यू दर यांसारख्या वास्तविक जगाच्या आकडेवारीचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी ते महत्त्वाची भूमिका बजावतात.
- अर्थशास्त्रातही, अवलंबित व्हेरिएबल्सचे भविष्य सांगणारे मॉडेल तयार करणे, शेअर्सचे विश्लेषण करणे, व्यवसायाच्या ट्रेंडचा अभ्यास मॅट्रिक्सद्वारे केला जाऊ शकतो.

- भौतिकशास्त्रात, बॅटरी पॉवर आउटपुटची मोजणी करताना, किरचॉप्सचा नियम सोडवण्यासाठी आणि क्वांटम फिजिक्स च्या क्षेत्रात, मॅट्रिक्स महत्वाची भूमिका बजावते.
- तसेच भूगर्भशास्त्रात, भूकंपीय सर्वेक्षण करताना ते महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावतात.
- रोबोटिक्समध्ये, रोबोटिक हालचाली मेट्रिक्सच्या आधारे परिभाषित केल्या जातात.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत - NPTEL)

Basic Matrix Concepts

Introduction to Matrix Algebra - I

Matrix Analysis with Applications

Elementary Row Operations

Determinant of a Matrix

3.6 मॅट्रिक्सची रँक

एक नैसर्गिक संख्या 'r' ला मॅट्रिक्स 'A' ची रँक असे म्हटले जाते जर

1. शून्य नसलेला ऑर्डर 'r' चा कमीत कमी एक मायनॉर (चौरस सबमेट्रिक्स) अस्तित्वात असेल.
2. मॅट्रिक्सचा 'A' चा 'r' पेक्षा मोठा ऑर्डर असलेला प्रत्येक मायनॉर शून्य असेल. A ची रँक $\rho(A)$ द्वारे दर्शवली जाते.

टिप्पणी

1. $\rho(A) = 0$, जेव्हा A हा शून्य मॅट्रिक्स असतो.
2. $\rho(A) \geq 0$, जेव्हा $A \neq 0$
3. जर A 'n' ऑर्डर असलेला नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर, $\rho(A) = n$.
4. जर 'A' हा 'n' ऑर्डर असलेला सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर, $\rho(A) < n$.
5. जर मॅट्रिक्स 'A' ची ऑर्डर $m \times n$ असेल तर $\rho(A) \leq \min(m, n)$.
6. रँक 'r' असलेल्या प्रत्येक मॅट्रिक्स 'A' च्या संदर्भात, तेथे P आणि Q सारखे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असे अस्तित्वात असतात की

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

उदाहरणार्थ: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: दिले आहे $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

तर $|A| = 2\,(1) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ A हा ऑर्डर 3 असलेला नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स

$\Rightarrow$ $\rho(A) = 3$

3.6.1 मॅट्रिक्सची रँक शोधण्याचा दुसरा मार्ग

मॅट्रिक्सची रँक त्या मॅट्रिक्सच्या इचेलॉन फॉर्ममध्ये शून्य नसलेल्या रोच्या संख्येइतकी असते.

टिप्पणी : शून्य नसलेला रो हा एक रो आहे ज्यात किमान एक घटक शून्य नसतो.

उदा. A मॅट्रिक्सचा विचार करा $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

स्पष्टपणे, दिलेला मॅट्रिक्स 'A' हा इचेलॉन स्वरूपात आहे, ज्यामध्ये दोन शून्य नसलेले रो आहेत.

म्हणून A ची रँक = 2 म्हणजेच $\rho(A) = 2$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.26. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याकडे आहे $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2,$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to 4R_3 - R_2,$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 3 आहे, म्हणून $\rho(A) = 3$ (उकल)

उदाहरण 3.27. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 + 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 2 आहे, म्हणून $\rho(A) = 2$ (उकल)

उदाहरण 3.28. b च्या कोणत्या मूल्यासाठी मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$ ची रँक 2 असेल.

उकल:

येथे आपल्याकडे आहे $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$

$R_1 \to 2R_1$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_1$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

जर A ची रँक 2 असेल तर b - 2 शून्य असणे आवश्यक आहे

म्हणजेच $b-2=0 \Rightarrow b=2$ **(उकल)**

उदाहरण 3.29. मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे $$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - \frac{9}{2}R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \frac{-7}{2} & -7 & \frac{-21}{2} \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 7R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 2 आहे, म्हणून $\rho(A)=2$ (उकल)

उदाहरण 3.30. मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे $$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & -14 & -10 & -4 \\ 0 & -21 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 3R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_4$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 3 आहे, म्हणून $\rho(A) = 3$ (उकल)

उदाहरण 3.31. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{4}{5}R_2, R_4 \to R_4 - \frac{9}{5}R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 33/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_3 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 4 आहे, म्हणून $\rho(A) = 4$ (उकल)

उदाहरण 3.32. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_3 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow R_2 \leftrightarrow R_3,\ A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 3 आहे, म्हणून

$\rho(A) = 3$ (उकल)

3.7 मॅट्रिक्सचा नॉर्मल फॉर्म

ऑर्डर m × n च्या प्रत्येक मॅट्रिक्सला प्राथमिक रूपांतरणाद्वारे रो आणि कॉलम ऑपरेशनद्वारे खालीलपैकी कोणत्याही स्वरूपात रूपांतरित केले जाऊ शकते, जसे की

i . $\begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} I_r \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$ iii. $[I_r \ \vdots \ 0]$ iv. $[I_r]$

जेथे I_r हे ऑर्डर r असलेला आइडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे आणि 0 हा कोणत्याही ऑर्डरचा शून्य मॅट्रिक्स दर्शवते ज्याला त्याचे नॉर्मल फॉर्म किंवा कॅनॉनिकल फॉर्म म्हणतात. त्यामुळे प्राप्त झालेल्या क्रमांकाला A ची रँक म्हणतात.
आणि आपण लिहितो $\rho(A) = r$.

फॉर्म $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ला A चे फर्स्ट कॅनॉनिकल फॉर्म म्हणतात. रो आणि कॉलम दोन्ही परिवर्तन येथे वापरले जाऊ शकत असल्याने, म्हणून प्राप्त केलेल्या पहिल्या रो चा घटक 1 पहिल्या कॉलम रूपांतरित केला जाऊ शकतो. मग पहिला रो आणि पहिला कॉलम दोन्ही शून्य नसलेल्या घटकांवर हलवता येतात. त्याचप्रमाणे, दुसऱ्या रोचा घटक 1 दुसऱ्या कॉलम मध्ये हलवता येतो वगैरे.

काही सोडवलेले प्रश्न

उदाहरण 3.33 मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ला त्यांच्या नॉर्मल फॉर्म मध्ये किंवा कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये रूपांतरित करून रँक शोधा.

उकल. दिले आहे $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1, C_3 \to C_3 + C_1, C_4 \to C_4 - 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + 2C_4, C_4 \to (-1)C_4$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_2 \leftrightarrow C_4$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_2 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

जे आवश्यक सामान्य स्वरूप आहे

$\therefore \quad \rho(A) = 2$

उदाहरण 3.34 मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म रूपांतरित करून A ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$R_1 \to \left(\frac{1}{9}\right) R_1$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_1(-4)$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + C_1\left(\frac{-2}{9}\right)$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 + C_1\left(\frac{-3}{9}\right)$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2(5)$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -206/9 & -282/9 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + C_2(-5)$
$C_4 \to C_4 + C_2(-6)$ $\qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -206/9 & -282/9 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3\left(\dfrac{-9}{206}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 141/103 \end{bmatrix}$

$C_4 \to C_4 + C_3\left(\dfrac{-141}{103}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_3, 0]$

जे नॉर्मल फॉर्म आहे.

$\therefore \qquad \rho(A) = 3$

उदाहरण 3.35 मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ मध्ये रूपांतरित करा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$C_2 \to C_2 + C_1, C_3 \to C_3 - 2C_1, C_4 \to C_4 + 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 4R_1 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$R_4 \leftrightarrow R_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -8 & 14 \end{bmatrix}$

$C_4 \to C_4 - 2C_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$
$R_4 \to R_4 - 5R_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$C_3 \leftrightarrow C_4$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to \frac{-1}{2} C_3$
$C_4 \to \frac{-1}{8} C_3$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + 2R_3$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

जे आवश्यक नॉर्मल फॉर्म आहे.

$\therefore \qquad \rho(A) = 4$

उदाहरण 3.36 मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म रूपांतरित करून A ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1,\ R_4 \to R_4 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1, C_3 \to C_3 + C_1, C_4 \to C_4 - 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + \frac{6}{7}C_2, C_4 \to C_4 - \frac{11}{7}C_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_3$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 + 2C_3$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to -\frac{1}{7}R_2, R_3 \to -\frac{1}{2}R_3$ $$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

जे आवश्यक नॉर्मल फॉर्म आहे.

$\therefore \qquad \rho(A) = 3$

उदाहरण 3.37 मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\9&10&11&12\end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म रूपांतरित करून A ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $$A=\begin{bmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\9&10&11&12\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-\frac{3}{2}R_1, R_3 \to R_3-2R_1$

$R_4 \to R_4-\frac{9}{2}R_1$ $$A\sim\begin{bmatrix}2&3&4&5\\0&-1/2&-1&-3/2\\0&-1&-2&-3\\0&-7/2&-7&-21/2\end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2-\frac{3}{2}C_1, C_3 \to C_3-2C_1$

$C_4 \to C_4-\frac{5}{2}C_1$ $$A\sim\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&-1/2&-1&-3/2\\0&-1&-2&-3\\0&-7/2&-7&-21/2\end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2}R_1, R_2 \to -2R_2, R_3 \to -R_3$

$R_4 \to \frac{-2}{7}R_4$ $$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3-R_2, R_4 \to R_4-R_2$ $$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3-2C_2, C_4 \to C_4-3C_2$ $$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_2&0\\0&0\end{bmatrix}$$

जे आवश्यक नॉर्मल फॉर्म आहे.

$\therefore \quad \rho(A)=2$

उदाहरण 3.38 मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&4\\1&2&3&4\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म रूपांतरित करून A ची रँक शोधा

उकल:

आपल्याला दिलेले आहे
$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&4\\1&2&3&4\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-2R_1$
$R_3 \to R_3-R_1$
$R_4 \to R_4+R_1$
$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-4\\0&0&4&0\\0&0&5&-3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}C_2\to C_2-2C_1\\C_3\to C_3+C_1\\C_4\to C_4-4C_1\end{matrix} \quad A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&5&-4\\0&0&4&0\\0&0&5&-3\end{bmatrix}$$

$C_3 \leftrightarrow C_2$
$$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&-4\\0&4&0&0\\0&5&0&-3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}R_3\to R_3-\frac{4}{5}R_2\\R_4\to R_4-R_2\end{matrix} \quad A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&-4\\0&0&0&16/5\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$R_2 \to 1/5R_2$
$R_3 \to 5/16R_3$
$$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-4/5\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}R_2\to R_2+\frac{5}{4}R_3\\R_4\to R_4-R_3\end{matrix} \quad A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$C_3 \leftrightarrow C_4$
$$A\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_3&0\\0&0\end{bmatrix}$$

जे आवश्यक नॉर्मल फॉर्म आहे.

$\therefore \qquad \rho(A)=3$

3.7.1 P आणि Q चे मूल्य शोधत असताना $\mathbf{PAQ}=\begin{bmatrix}\mathbf{I_r}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$

जर A हा ऑर्डर $m\times n$ चा मॅट्रिक्स असेल तर $A=I_m A I_n$ जिथे I_m आणि I_n अनुक्रमे m आणि n ऑर्डरचे एकक मॅट्रिक्स आहेत. A वरील प्राथमिक पंक्ती ऑपरेशन संबंधित प्राथमिक मॅट्रिक्सच्या प्री -गुणाकार द्वारे प्रभावित केले जाऊ शकते अर्थात I_m ला किंवा त्यानंतरच्या चरणांमध्ये I_m कडून मिळवलेल्या मॅट्रिक्सला लागू करणे. त्याचप्रमाणे, A वर प्राथमिक कॉलम ऑपरेशन लागू करणे हे In वर किंवा पुढील चरणांमध्ये मिळवलेल्या मॅट्रिक्सवर लागू करण्याच्या समतुल्य आहे. शेवटी जेव्हा आपल्याला

डाव्या हाताला A च्या जागी $\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$ मिळते, तेव्हा आपल्याकडे Im च्या जागी P आणि उजव्या हाताच्या In च्या जागी Q असतो.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.39 दोन नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स P आणि Q असे मूल्य शोधा कि PAQ नॉर्मल फॉर्म असेल जेथे

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $\quad A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

मॅट्रिक्सची ऑर्डर 2×3 असल्याने मॅट्रिक्स A असे लिहिले जाऊ शकते.

$$[A]_{2\times3}=I_2\cdot A\cdot I_3$$

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_1\to\frac{1}{2}R_1$
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_2\to R_2+R_1$
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_2\to C_2-C_1, C_3\to C_3+3C_1$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_2\to\frac{1}{3}C_2$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & -1/3 & 3\\ 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_3\to C_3+C_2$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & -1/3 & 8/3\\ 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[I_2,0]=PAQ$$

म्हणून $\quad P=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}$ आणि $Q=\begin{bmatrix}1 & -1/3 & 8/3\\ 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

उदाहरण 3.40 जर $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ आहे तर दोन नॉन सिंग्युलर मॅट्रीक्स P आणि Q चे मूल्य असे शोधा की $PAQ=I$

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $$A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सची ऑर्डर 3´3 असल्याने मॅट्रिक्स A असे लिहिले जाऊ शकते

$$[A]_{3\times 3}=I_3\cdot A\cdot I_3$$

$$\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_1\to R_1-R_2$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_2\to R_2-2R_1$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_2\to -C_2$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_2\leftrightarrow R_3$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_3\leftrightarrow R_3-3R_2$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -3\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_3\to C_3-C_2$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -3\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$I_3=PAQ$$

म्हणून $$P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -3\end{bmatrix}\text{ आणि }Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

उदाहरण 3.41 नॉन सिंग्युलर मॅट्रीक्स P आणि Q असे शोधा की PAQ नॉर्मल फॉर्म मध्ये असेल जिथे

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 1\\ 2 & -3 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

उकल: आपल्याला दिलेले आहे $$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 1\\ 2 & -3 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सचा क्रम 3×3 असल्याने मॅट्रिक्स A असे लिहिले जाऊ शकते

$$[A]_{3\times 4}=I_3\cdot A\cdot I_4$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 6 & 1\\ 2 & -3 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_1\leftrightarrow R_2$ $$\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_2\to R_2-3R_1$
$R_3\to R_3-2R_1$ $$\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 1\\ 0 & -11 & -16 & -2\\ 0 & -11 & -11 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$C_2\to C_2-4C_1$
$C_3\to C_3-6C_1$
$C_4\to C_4-C_1$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -11 & -16 & -2\\ 0 & -11 & -11 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & -4 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_2\leftrightarrow R_3$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -11 & -11 & -4\\ 0 & -11 & -16 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & -4 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_2\to R_2(-1/11)$ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4/11\\ 0 & -11 & -16 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2/11 & -1/11\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & -4 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + 11R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 - C_2, C_4 \to C_4 - \frac{4}{11} C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5/11 \\ 0 & 1 & -1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to \frac{-1}{5} R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5/11 \\ 0 & 1 & -1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 + C_3 \left(\frac{2}{5} \right)$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_3, 0] = PAQ$$

म्हणून
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ आणि } Q = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

पडताळणी:
$$PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

अभ्यास 3.6

खालील मॅट्रिक्सची रँक शोधा:

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$

खालील मॅट्रिक्सची श्रेणी नॉर्मल (फॉर्म) स्वरूपात आणल्यानंतर त्यांची रँक शोधा:

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

दोन नॉन सिंग्युलर मॅट्रिसिस P आणि Q असे शोधा जिथे PAQ हे नॉर्मल स्वरूपात आसेल मॅट्रिक्स A साठी,

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 11 & -19 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तरे

1. 2	2. 2	3. 2	4. 2
5. 2	6. 2	7. 2	8. 2
9. 3	10. 3	11. 3	

12. $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $PAQ=\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -5/3 \\ 1/2 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix} 1 & 4/7 & 9/119 & 9/217 \\ 0 & 1/7 & -1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/31 \end{bmatrix}$

14. $PAQ=\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ जिथे $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

मनोरंजक तथ्ये

- मॅट्रिक्सच्या रँकचा डेटा मायनिंग आणि बायोइन्फॉर्मेटिक्सच्या क्षेत्रातही अनुप्रयोग आहे.
- सामाजिक विज्ञानांमध्ये, देशांसाठी वापरकर्ता प्राधान्ये मॅट्रिसच्या स्वरूपात दर्शविली जातात.
- जैविक विज्ञानांमध्ये, जनुक अभिव्यक्तीची पातळी मॅट्रिस वापरून दर्शविली जाते.
- वैद्यकीय क्षेत्रात, मॅट्रिसचा वापर त्यांच्या आण्विक डेटावरून कर्करोग आणि त्याचे उपप्रकार शोधण्यासाठी केला जातो.

वास्तविक जीवनाचे अनुप्रयोग

- गणिती आणि संगणक प्रोग्रामिंग मॉडेलिंग तयार करण्यासाठी याचा अत्यंत वापर केला जातो.
- जर काही अज्ञात डेटा मॅट्रिक्स स्वरूपात परत मिळविणे आवश्यक असेल, तर सायबर सुरक्षा क्षेत्रात असे म्हणू या आणि हे माहित आहे की त्याचा दर्जा कमी आहे, तर तो खूप कार्यक्षमतेने आणि सहजपणे परत मिळवला जाऊ शकतो.
- रँक अगदी प्रतिमेच्या परिमाणाबद्दल कल्पना देते. उदाहरणार्थ, थ्रीडी स्पेसचे २ डी विमानात मॅपिंग करण्यासाठी "पूर्ण रँक" नसेल.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत -NPTEL)

Rank of a Matrix

System of Linear Equations-II

System of Linear Equations

3.8 समीकरणाची रेषीय प्रणाली

समजा माझ्या शेजारी एक विलक्षण दुकानदार आहे. त्यांचा असा विश्वास आहे की काही भारतीय तांदळापेक्षा जास्त गहू खातात आणि काही भारतीय गव्हापेक्षा जास्त तांदूळ खातात. म्हणून तो फक्त दोन मानक पॅकेट्स ऑफर करतो N नावाच्या पहिल्या

पॅकेटमध्ये 5 किलो गहू आणि 2 किलो तांदूळ आहे, तर S नावाच्या दुसऱ्या पॅकेटमध्ये 2 किलो गहू आणि 5 किलो तांदूळ आहे. चला एक शॉर्टहँड शोधूया. जेव्हा आपण (m, n) लिहितो, तेव्हा आमचा अर्थ m किलो गहू आणि n किलो तांदूळ असा होतो. आता मी N ची 3 पॅकेट्स खरेदी केली तर याचा अर्थ मी 15 किलो गहू आणि 6 किलो तांदूळ खरेदी करत आहे, म्हणजे 3N = 3 (5, 2) = (15, 6). त्याचप्रमाणे, S चे 2 पॅकेट म्हणजे 4 किलो गहू आणि 10 किलो तांदूळ म्हणजे 2S = 2 (2, 5) = (4, 10).

जर मी प्रत्येक पॅकेटपैकी एक विकत घेतले तर मी 7 किलो गहू आणि 7 किलो तांदूळ खरेदी केला असता, म्हणजे

$$N + S = (5, 2) + (2, 5) = (5 + 2, 2 + 5) = (7, 7)$$

अशाप्रकारे मला N ची m पॅकेट्स किंवा S किंवा दोन्हीची पॅकेट्स हवी आहेत, कोणतीही अडचण नाही. समजा मला 19 किलो गहू आणि 16 किलो तांदूळ हवा आहे. मी काय करू? मला N ची x पॅकेट आणि S ची y पॅकेट खरेदी करण्याची गरज आहे जेणेकरून

x(5, 2) + y(2, 5) = (19, 16)

म्हणजेच (5x, 2x) + (2y, 5y) = (19, 16) किंवा (5x + 2y, 2x + 5y) = (19, 16) अशा प्रकारे मी रेषीय समीकरणांची एक प्रणाली सोडवतो.

$$5x + 2y = 19$$
$$2x + 5y = 16$$

n- अज्ञात मध्ये n समीकरणाच्या दृष्टीने स्पष्टीकरण:

n अज्ञात मध्ये n समीकरणांची एक रेषीय प्रणाली $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ या फॉर्मच्या समीकरणाचा संच असा आहे की

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad \ldots (1)$$

जेथे a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ ज्ञात गुणांक आहेत, द्वि, b_i $(1 \le i \le n)$ संख्या दिली आहेत.

टिप्पणी : जर सर्व b_i's शून्य असतील तर प्रणालीला (एकसंध) होमोजिनिअस म्हणतात.

नाहीतर ते होमोजिनिअस नसल्याचे(नॉन होमोजिनिअस) म्हटले जाते.

मॅट्रिक्स नोटेशनमध्ये, सिस्टम (1) अशा प्रकारे म्हणून लिहिले जाऊ शकते

$$AX = B$$

जिथे

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

घटकांचे अगमेंटेड मॅट्रिक्स (augmented Matrix) (1) असे लिहिले जाऊ शकते:

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

समीकरण (1) चे उकल म्हणजे $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ या संख्यांचा संच आहे जो सर्व n समीकरणांचे उकल करतो.

टिप्पणी : ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स: समीकरणांच्या प्रणालीतील एक वर्धित मॅट्रिक्स हे संख्यांचे मॅट्रिक्स आहे ज्यात प्रत्येक पंक्ती एका समीकरणातील स्थिरांक दर्शवते (समान चिन्हाच्या दुसऱ्या बाजूला गुणांक आणि स्थिर दोन्ही) आणि प्रत्येक स्तंभ सर्व गुणांक दर्शवितो एकच व्हेरिएबल

3.8.1 रेषिय(लिनिअर) समीकरणांचे प्रकार

A. होमोजिनिअस नसलेली समीकरणे(नॉन होमोजिनिअस)

B. होमोजिनिअस समीकरणे(होमोजिनिअस)

3.8.1.1 नॉन-होमोजिनिअस(नॉन होमोजिनिअस) प्रणाली

i. कंसिस्टन्ट: (Consistent): समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्ट असल्याचे म्हटले जाते, जर त्यांच्याकडे एक किंवा अधिक उकल असतील म्हणजेच

$x+2y=4$	$x+2y=4$
$3x+2y=2$	$3x+6y=12$
अद्वितीय उकल	अनंत उकल

ii. इनकंसिस्टन्ट: (Inconsistent): जर समीकरणाच्या प्रणालीला काही उकल नसेल तर ते इनकंसिस्टन्ट असल्याचे म्हटले जाते.

$$x+2y=4$$
$$3x+6y=5$$

रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीची कंसिस्टन्टता(Consistency):

समजा n समीकरणाची प्रणाली असू द्या

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots.+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

मॅट्रिक्स नोटेशनमध्ये, ही समीकरणे खालीलप्रमाणे लिहिली आहेत:

$$AX=B$$

इथे $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स आहे

$$C=[A:B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

a. कंसिस्टन्ट समीकरण:

जर रँक A = रँक $[A:B]$

i. अद्वितीय उकल: रँक A = रँक $[A:B]=n$ (चलांची संख्या)

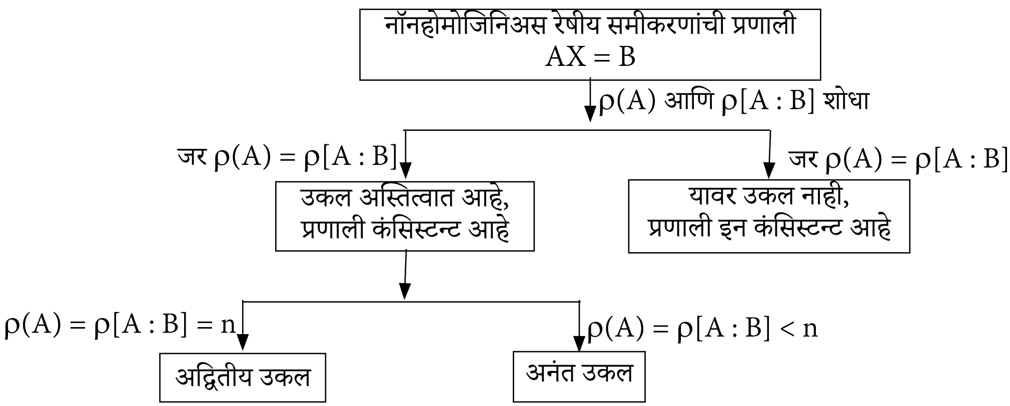
ii. अनंत उकल: रँक A = रँक $[A:B]<n$ (चलांची संख्या)

b. इनकंसिस्टन्ट समीकरण:

जर रँक $\text{A} \neq$ रँक $[\text{A}:\text{B}]$

अशा प्रकारे आपण असे म्हणू शकतो की रेषीय समीकरणांची प्रणाली एकतर होमोजिनिअस (होमोजिनिअस)किंवा नॉन होमोजिनिअस(नॉन होमोजिनिअस) आहे. हे b_i वर अवलंबून असते, मग होमोजिनिअस नसलेल्या समीकरणाची प्रणाली एकतर कंसिस्टन्ट किंवा इनकंसिस्टन्ट असते ज्यानुसार प्रणालीमध्ये अनन्य उकल असते किंवा अनंत उकल असतात.

थोडक्यात



- जेथे n = चलांची संख्या

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.42 खालील समीकरणे कंसिस्टन्ट नाहीत हे दाखवा.

$$2x+6y=-11$$
$$6x+20y-6z=-3$$
$$6y-18z=-1$$

कंसिस्टंट नाहीत.

उकल : मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची दिलेली प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

येथे
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स
$$C=[A:B]=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0 & : & -11\\ 6 & 20 & -6 & : & -3\\ 0 & 6 & -18 & : & -1\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-3R_1,$
$$C\sim\begin{bmatrix}2 & 6 & 0 & : & -11\\ 0 & 2 & -6 & : & 30\\ 0 & 6 & -18 & : & -1\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3-3R_2$
$$C\sim\begin{bmatrix}2 & 6 & 0 & : & -11\\ 0 & 2 & -6 & : & 30\\ 0 & 0 & 0 & : & -91\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\quad \rho(A)=2$ आणि $\rho(A:B)=3$

$\Rightarrow$ $\quad \rho(A)\neq\rho(A:B)$

म्हणून, समीकरणे कंसिस्टन्ट नाहीत.

उदाहरण 3.43. कंसिस्टन्सी तपासा आणि सोडवा.
$$5x+3y+7z=4$$
$$3x+26y+2z=9$$
$$7x+2y+10z=5$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची दिलेली प्रणाली आहे
$$\begin{bmatrix}5 & 3 & 7\\ 3 & 26 & 2\\ 7 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 9\\ 5\end{bmatrix}$$
$$AX=B$$

इथे
$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 7\\ 3 & 26 & 2\\ 7 & 2 & 10\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4\\ 9\\ 5\end{bmatrix}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स
$$C=[A:B]=\begin{bmatrix}5 & 3 & 7 & : & 4\\ 3 & 26 & 2 & : & 9\\ 7 & 2 & 10 & : & 5\end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1\left(\frac{1}{5}\right)$
$$C\sim\begin{bmatrix}1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5\\ 3 & 26 & 2 & : & 9\\ 7 & 2 & 10 & : & 5\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-3R_1,\ R_3 \to R_3-7R_1$
$$C\sim\begin{bmatrix}1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5\\ 0 & 121/5 & -11/5 & : & 33/5\\ 0 & -11/5 & 1/5 & : & -3/5\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \frac{1}{11} R_2$ $$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & : & 33/5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\rho(A) = 2$ आणि $\rho(A:B) = 2$

म्हणून, दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्सी आहे.

परंतु $\rho(A) = \rho[A:B] < n$ (चलांची संख्या)

त्यामुळे त्याचे अनंत उकल आहेत.

$$\therefore \quad x + \frac{3}{5}y + \frac{7}{5}z = \frac{4}{5} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{121}{5}y - \frac{11}{5}z = \frac{33}{5} \Rightarrow 11y - z = 3$$

$z = k$ घेतल्यावर $11y = 3 + k$

$$y = \frac{3}{11} + \frac{k}{11}$$

y आणि z चे मूल्य समीकरण (1) मध्ये ठेवा

$$x + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{11} + \frac{k}{11}\right) + \frac{7}{5}k = \frac{4}{5}$$

$$x + \frac{9}{55} + \frac{3k}{55} + \frac{7k}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} - \frac{9}{55} - \left(\frac{3k}{55} + \frac{7k}{5}\right)$$

$$x = \frac{7}{11} - \frac{16}{11}k$$

उदाहरण 3.44 खालील समीकरणांच्या प्रणालीच्या कंसिस्टन्टतेसाठी चाचणी करा:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 10 \\ 11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 &= 15 \\ 16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 &= 20 \\ 21x_1 + 22x_2 + 23x_3 + 24x_4 &= 25 \end{aligned}$$

उकल : मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स
$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9: & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14: & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19: & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24: & 25 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 6R_1, R_3 \to R_3 - 11R_1, R_4 \to R_4 - 16R_1, R_5 \to R_5 - 21R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15: & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30: & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45: & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60: & -80 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$
$$C \sim (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15: & 20 \\ 0 & 10 & 20 & 30: & 40 \\ 0 & 15 & 30 & 45: & 60 \\ 0 & 20 & 40 & 60: & 80 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 3R_2, R_5 \to R_5 - 4R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15: & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0: & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0: & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0: & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\rho(A) = 2$ आणि $\rho(A:B) = 2$

म्हणून, दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्ट आहे.

परंतु $\rho(A) = \rho[A:B] < n$

तर, त्याचे उकल अनंत आहेत

उदाहरण 3.45 k च्या कोणत्या मूल्यासाठी प्रणालीकडे एक उकल आहे.

$$x + y + z = 1$$
$$2x + y + 4z = k$$
$$4x + y + 10z = k^2$$ उकल आहे.

उकल : मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1: & 1 \\ 2 & 1 & 4: & k \\ 4 & 1 & 10: & k^2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1$ $$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1: & 1 \\ 0 & -1 & 2: & k-2 \\ 0 & -3 & 6: & k^2-4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$ $$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1: & 1 \\ 0 & -1 & 2: & k-2 \\ 0 & 0 & 0: & k^2-3k+2 \end{bmatrix}$$

जर दिलेल्या प्रणालीमध्ये उकल असेल तर $\rho(A) = \rho(A : B)$

आणि $\rho(A : B) = 2$ **आहे तर** $k^2 - 3k + 2 = 0$

$$k^2 - 2k - k + 2 = 0$$

$$(k-2)(k-1) = 0$$

$$k = 2,\ k = 1$$

स्थिति I : जेव्हा $k = 1$, मग आमच्याकडे आहे

$$x + y + z = 1 \qquad \dots (1)$$

$$-y + 2z = 1 - 2 = -1 \qquad \dots (2)$$

समजा $z = \lambda$

समीकरण (2) मध्ये $z = \lambda$ ची किंमत ठेऊ $y = 2\lambda + 1$

समीकरण (1) मध्ये y आणि z ची किंमत ठेऊन,

$$x + (2\lambda + 1) + \lambda = 1$$

$$x + 3\lambda + 1 = 1$$

$$x = -3\lambda$$

स्थिति II : जेव्हा $k = 2$, मग आपल्याकडे असेल

$$x + y + z = 1 \qquad \dots (3)$$

$$-y + 2z = 2 - 2 = 0 \qquad \dots (4)$$

समजा $z = c$

समीकरण (4) मध्ये z ची किंमत ठेऊन, $-y + 2c = 0$

$$y = 2c$$

समीकरण (3) मध्ये y आणि z ची किंमत ठेऊन,

$$x + 2c + c = 1$$

$$x = 1 - 3c$$

उदाहरण 3.46 λ आणि μ ची किंमत अशा प्रकारे शोधा कि दिलेली समीकरणांची साठी.

$$2x+3y+5z=9$$
$$7x+3y-2z=8$$
$$2x+3y+\lambda z=\mu$$

i.उकल नाही

ii.एक अद्वितीय सोल्यूशन (a unique solution)

iii.समाधानाची अनंत संख्या.(*an infinite no. of solution.*)

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 7 & 3 & -2\\ 2 & 3 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 8\\ \mu\end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $$C=[A:B]=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 : 9\\ 7 & 3 & -2: 8\\ 2 & 3 & \lambda : \mu\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - \frac{7}{2}R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ $$C \sim \begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & : & 9\\ 0 & -15/2 & -39/2 & : & -47/2\\ 0 & 0 & \lambda-5 & : & \mu-9\end{bmatrix}$$

i.उकल नाही : $\rho(A)\neq\rho(A:B)$

$\lambda-5=0$ आणि $\mu-9\neq 0$

$\lambda=5$ आणि $\mu\neq 9$

ii.एक अद्वितीय सोल्यूशन $\rho(A)=\rho(A:B)=n$

$\lambda-5\neq 0$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

$\lambda\neq 5$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

iii.समाधानाची अनंत संख्या $\rho(A)=\rho(A:B)<n$

$\lambda-5=0$ आणि $\mu-9=0$

$\lambda=5$ आणि $\mu=9$

उदाहरण 3.47 खालील समीकरणासाठी λ आणि μ चे मूल्य किती आहे ते निश्चित करा

.

$$x+y+z=6$$
$$x+2y+3z=10$$
$$x+2y+\lambda z=\mu$$

i. उकल नाही

ii. अद्वितीय सोल्यूशन

iii. समाधानाची अनंत संख्या

उकल : मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\10\\\mu\end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $\qquad C=[A:B]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1: & 6\\1 & 2 & 3: & 10\\1 & 2 & \lambda: & \mu\end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1 \qquad C\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & : & 6\\0 & 1 & 2 & : & 4\\0 & 1 & \lambda-1: & & \mu-6\end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_2 \qquad C\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & : & 6\\0 & 1 & 2 & : & 4\\0 & 0 & \lambda-3: & & \mu-10\end{bmatrix}$

i. उकल नाही: $\rho(A)\neq\rho(A:B)$

$\lambda-3=0$ किंवा $\mu-10\neq 0$

$\lambda=3$ किंवा $\mu\neq 10$

ii. अद्वितीय सोल्यूशन: $\rho(A)=\rho(A:B)=n$

$\lambda-3\neq 0$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

$\lambda\neq 3$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

iii. अनंत संख्या सोल्यूशन :

$\rho(A)=\rho(A:B)<n$

$\lambda-3=0$ किंवा $\mu-10=0$

$\lambda=3$ किंवा $\mu=10$

उदाहरण 3.48 खालील समीकरणला

$$-2x+y+z=a$$
$$x-2y+z=b$$
$$x+y-2z=c$$

$a+b+c=0$ असल्याशिवाय उकल नाही हे दाखवा. कोणत्या बाबतीत त्यांच्याकडे अनंत उकल आहेत? $a=1, b=1$ आणि $c=-2$ असताना हे उकल शोधा.

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स आहे (ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स)

$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 : a \\ 1 & -2 & 1 : b \\ 1 & 1 & -2 : c \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2,$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 : b \\ -2 & 1 & 1 : a \\ 1 & 1 & -2 : c \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 : & b \\ 0 & -3 & 3 : & a+b \\ 0 & 3 & -3 : & c-b \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 : & b \\ 0 & -3 & 3 : & a+2b \\ 0 & 0 & 0 : & a+b+c \end{bmatrix}$$

स्थिति I : जर $a+b+c \neq 0$

$$\rho(A) = 2, \text{ आणि } \rho(A:B) = 3$$

$\therefore$ $\rho(A) \neq \rho(A:B)$

म्हणून, घटक इनकंसिस्टन्ट असल्याने, यावर कोणताही उकल नाही.

स्थिति II : जर $a+b+c = 0$

$\Rightarrow$ $\rho(A) = 2$ आणि $\rho(A:B) = 2$

$\therefore$ $\rho(A) = \rho(A:B)$

म्हणून, दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्ट आहे.

परंतु $\rho(A) = \rho(A:B) < n$

तर, त्याच्याकडे असंख्य उकल आहेत.

स्थिति III : $a = 1, b = 2, c = -2$ ठेवुन

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 : & 1 \\ 0 & -3 & 3 : & 3 \\ 0 & 0 & 0 : & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 2y + z = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$-3y + 3z = 3 \quad \Rightarrow \quad -y + z = 1 \qquad \ldots (2)$$

समजा $z = k$ $\qquad y = k - 1$

Y आणि z चे मूल्य (1) मध्ये ठेवा

$$x - 2(k-1) + k = 1$$

$$x - 2k + 2 + k = 1$$

$$x - k + 2 = 1$$

$$x = k - 1$$

$$\therefore \quad x = k - 1, y = k - 1, z = k$$

3.8.1.2 होमोजिनिअस (Homogeneous) समीकरणे

होमोजिनिअस रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीसाठी $AX = 0$.

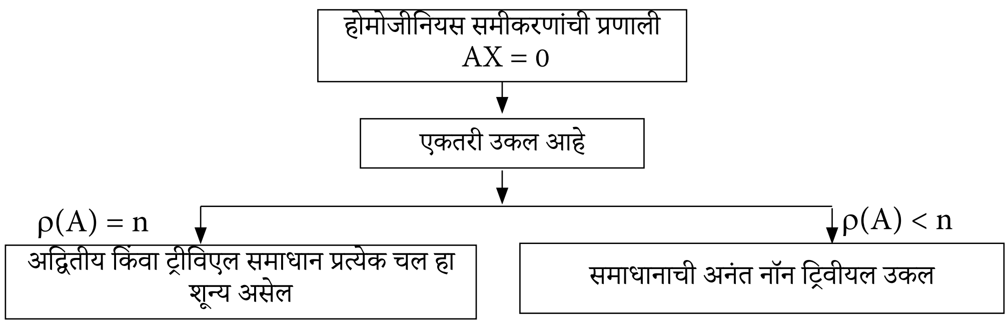
i. $X = 0$ हा नेहमीच एक उकल असतो. हे उकल ज्यामध्ये प्रत्येक अज्ञात मूल्य शून्य आहे त्याला शून्य उकल(नल सोलुशन) किंवा ट्रिव्हियल उकल म्हणतात. अशा प्रकारे होमोजिनिअस प्रणाली नेहमीच कंसिस्टन्ट असते.

- होमोजिनिअस रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीमध्ये एकतर ट्रिव्हियल उकल किंवा अनंत संख्येने समाधाने असतात.

ii. जर ρ (A) = चलांची संख्या प्रणालीकडे फक्त ट्रिव्हियल उकल आहे.

iii.जर ρ (A) < चलांची संख्या, प्रणालीकडे असीम संख्या आहे. ट्रिव्हियल निराकरणाचे.

थोडक्यात:



उदाहरण 3.49 b ची किंमत अशी ठरवा जसे की होमोजिनिअस समीकरणांच्या प्रणालीला खालीलप्रमाणे उकल असेल.

$$2x + y + 2z = 0\,,\ x + y - 3z = 0\,,\ 4x + 3y + bz = 0$$

i. ट्रिव्हियल उकल आहे.

ii. नॉन ट्रिव्हियल उकल आहे. मॅट्रिक्स पद्धत वापरून नॉन ट्रिव्हियल उकल शोधा.

उकल: i. **ट्रिव्हियल उकल साठी**: आम्हाला माहित आहे की $x = 0, y = 0, z = 0$, म्हणून b चे कोणतेही मूल्य असू शकते.

ii. नॉन ट्रिव्हियल उकल साठी: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = 0$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे

$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 : 0 \\ 1 & 1 & -3 : 0 \\ 4 & 3 & b : 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2,$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 : 0 \\ 2 & 1 & 2 : 0 \\ 4 & 3 & b : 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 : 0 \\ 0 & -1 & 8 : 0 \\ 0 & -1 & b+12 : 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 : 0 \\ 0 & -1 & 8 : 0 \\ 0 & 0 & b+4 : 0 \end{bmatrix}$$

ट्रिव्हियल उकल साठी $\quad \rho(A) = \rho(A:B) < n$

$$b + 4 = 0$$
$$b = -4$$

उदाहरण 3.50 k ची अशी किंमत शोधा कि समीकरणांच्या प्रणालीला नॉन ट्रीविएल समाधान असेल.

$$x + ky + 3z = 0$$
$$4x + 3y + kz = 0$$
$$2x + y + 2z = 0$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणाची दिलेली प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 4 & 3 & k \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$AX = 0$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे

$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} 1 & k & 3 : 0 \\ 4 & 3 & k : 0 \\ 2 & 1 & 2 : 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3,$
$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 : 0 \\ 4 & 3 & k : 0 \\ 1 & k & 3 : 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1,$ $$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : 0 \\ 0 & k-(1/2) & 2 & : 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - \left(k - \frac{1}{2}\right)R_2,$ $$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : 0 \\ 0 & 0 & 2-(k-1/2)(k-4) & : 0 \end{bmatrix}$$

ट्रिव्हियल उकल साठी $\rho(A) = \rho(A:B) < n$

$$2-(k-1/2)(k-4)=0$$

$$2-k^2+4k+\frac{k}{2}-2=0$$

$$-k^2+\frac{9}{2}k=0$$

$$k\left(-k+\frac{9}{2}\right)=0$$

$$k=0,\ k=\frac{9}{2}$$

अभ्यास 3.7

खालील समीकरणांच्या प्रणालीची कंसिस्टन्सी तपासा. उकल सेट देखील शोधा:

1. $$\begin{aligned} x+2y-z&=3 \\ 3x-y+2z&=1 \\ 2x-2y+3z&=2 \\ x-y+z&=-1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x+3y-z&=4 \\ 2x+y+z&=7 \\ 2x-4y+4z&=6 \\ 3x+4y&=1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=6 \\ 3x_1-1x_2+2x_3&=3 \\ 4x_1-3x_2+x_3&=9 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x-4y-3z&=-16 \\ 2x+7y+12z&=48 \\ 4x-y+6z&=16 \\ 5x-5y+3z&=0 \end{aligned}$$

5. समीकरणाच्या कंसिस्टन्सी वर चर्चा करा.

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=0 \\ 2x+3y+4z-1&=0 \\ 3x+4y+t&=2 \\ 4x+z+2t&=3 \end{aligned}$$

ते कंसिस्टन्ट असल्यास समाधान शोधा.

6. λ च्या कोणत्या किमतीसाठी खालील समीकरणाला अद्वितीय समाधान नसेल.

$$3x-y+\lambda z=1$$
$$2x+y+z=2$$
$$x+2y-\lambda z=-1$$ एक अद्वितीय उकल नसेल.

λ च्या या मूल्यासाठी समीकरणाला काही उकल असेल का?

7. खालील समीकरणांची प्रणाली इनकंसिस्टन्ट आहे हे दर्शविण्यासाठी रँक चाचणी वापरा:

$$2x-y+z=4$$
$$3x-y+z=6$$
$$4x-y+2z=7$$
$$-x+y-z=9$$

8.खालील समीकरणे कंसिस्टन्ट आहेत हे दाखवा आणि त्यांना सोडवा:

$$x+2y-5z=-9$$
$$3x-y+2z=5$$
$$2x+3y-z=3$$
$$4x-5y+z=-3$$

9. समीकरणांची प्रणाली सोडवा:

$$\lambda x+2y-2z=1$$
$$4x+2\lambda y-z=2$$
$$6x+6y+\lambda z=3$$ विशेषतः जेव्हा $\lambda = 2$ विचार करा

10. a आणि b च्या कोणत्या किमतीसाठी समीकरणाला खालील प्रकारचे समाधान असेल.

$$x+y+5z=0$$
$$x+2y+3az=b$$
$$x+3y+az=1$$

i. उकल नाही ii. अद्वितीय उकल iii. अनंत प्रकारचे उकल आहेत

खालील समीकरणाची प्रणाली सोडवा:

11.
$$x-y+z=0$$
$$-3x+y-4z=0$$
$$7x-3y-9z=0$$
$$4x-2y+5z=0$$

12.
$$x+3y-2z=0$$
$$2x-y+4z=0$$
$$x-11y+14z=0$$

13.
$$2w+3x-y-z=0$$
$$4w-6x-2y+2z=0$$
$$-6w+12x+3y-4z=0$$
$$8w-24x-4y+8z=0$$

14.
$$3x+4y-z-6w=0$$
$$2x+3y+2z-3w=0$$
$$2x+y-14z-9w=0$$
$$x+3y+13z+3w=0$$

15. k चे मूल्य असे शोधा कि खालील समीकरणांच्या प्रणालीमध्ये नॉन ट्रीव्हीएल समाधान असेल.

$$(3k-8)x+3y+3z=0$$
$$3x+(3k-8)y-3z=0$$
$$3x+3y+(3k-8)z=0$$

16. λ च्या एकमेव वास्तविक मूल्यासाठी खालील समीकरणाला शून्य नसलेले समाधान आहेत हे दाखवा.

$$x+2y+3z=\lambda x$$
$$3x+y+2z=\lambda y$$
$$2x+3y+z=\lambda z$$ एक ट्रिव्हियल उकल 6 आहे.

उत्तरे

1. -1,4,4
2. कंसिस्टेंट नाही
3. -1, 4, 4
4. $\frac{17}{5}-\frac{4}{5}k, \frac{1}{5}+\frac{3}{5}k, k$
5. कंसिस्टेंट, $\frac{9}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{-1}{11}$
6. कंसिस्टेंट नाही. $\lambda=-\frac{7}{2}$
8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
9. $x=\frac{1}{2}-k, y=k, z=0$
10. $i. a=1, b\neq\frac{1}{2}$ $ii. a\neq 1, b\in R$ $iii. a=1, b=\frac{1}{2}$
11. $x=y=z=0$
12. $x=\frac{-10}{7}k,\ y=\frac{8}{7}k,\ z=k$
13. $x=\frac{1}{3}k_1,\ y=k_2,\ z=k_1, w=\frac{1}{2}k_2$
14. $x=11k_1+6k_2,\ y=-8k_1-3k_2, z=k_1, w=k_2$
15. $k = 11/3$ किंवा $k = 2/3$ असल्यास ट्रिव्हियल उकल आहे.

3.9 डिटरमिनेंट वापरुन रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीचे उकल

3.9.1 क्रॅमरचा नियम

ही पद्धत स्विस गणितज्ञ गॅब्रिएल क्रॅमर यांनी दिली आहे. आपण खालील पद्धतींच्या समीकरणाचा विचार करून ही पद्धत स्पष्ट करू:

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

समजा, $$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

नंतर
$$xD = \begin{vmatrix} xa_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + yC_2 + zC_3$ ऑपरेशन लागू केल्यावर, आपल्याला मिळते
$$xD = \begin{vmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$xD = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 = \mathrm{D}_1$$ (समजा)

नंतर
$$x = \frac{D_1}{D}$$

$\Rightarrow$
$$= \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

त्याचप्रमाणे, $y = \frac{D_2}{D}$ आणि $z = \frac{D_3}{D}$

येथे $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ आणि $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

अशा प्रकारे, $x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}$ हि समीकरणांच्या प्रणालीत दिलेली अज्ञातांची मूल्ये आहेत.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.51 क्रॅमरच्या नियमाचा वापर करून दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली सोडवा.
$$x + y + z = 1, 3x + 5y + 6z = 4, 9x + 2y - 36z = 17$$

उकल: दिलेले आहे कि
$$x+y+z=1$$
$$3x+5y+6z=4$$
$$9x+2y-36z=17$$

येथे
$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 6\\ 9 & 2 & -36\end{vmatrix}$$
$$=1(-180-12)-1(-108-54)+1(6-45)$$
$$=-192+162-39=-69\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 6\\ 17 & 2 & -36\end{vmatrix}$$
$$=1(-180-12)-1(-144-102)+1(8-85)$$
$$=-192+246-77$$
$$=-23$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 6\\ 9 & 17 & -36\end{vmatrix}$$
$$=1(-144-102)-1(-108-54)+1(51-36)$$
$$=-246+162+15=-69$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 4\\ 9 & 2 & 17\end{vmatrix}$$
$$=1(85-8)-1(51-36)+1(6-45)$$
$$=77-15-39=23$$

क्रॅमरच्या नियमानुसार, आपल्याकडे आहे,
$$x=\frac{D_1}{D},\ y=\frac{D_2}{D},\ z=\frac{D_3}{D}$$

$\therefore$
$$x=\frac{-23}{-69}=\frac{1}{3},\ y=\frac{-69}{-69}=1,\ z=\frac{23}{-69}=-\frac{1}{3}$$ **उकल**

उदाहरण 3.52 क्रॅमरच्या नियमाचा वापर करून दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली सोडवा.
$$3x+y+2z=3,\ 2x-3y-z=-3,\ x+2y+z=4$$

उकल: दिलेले आहे कि $3x+y+2z=3$

$$2x-3y-z=-3$$
$$x+2y+z=4$$

येथे

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3(-3+2)-1(2+1)+2(4+3)$$
$$=3(-1)-1(3)+2(7)$$
$$=-3-3+14=8\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -3 & -3 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3(-3+2)-1(-3+4)+2(-6+12)$$
$$=3(-1)-1(1)+2(6)$$
$$=-3-1+12=8$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3(-3+4)-3(2+1)+2(8+3)$$
$$=3(1)-3(3)+2(11)$$
$$=3-9+22=16$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -3\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=3(-12+6)-1(8+3)+3(4+3)$$

क्रॅमरच्या नियमानुसार, आपल्याकडे आहे, $=3(-6)-1(11)+3(7)$

$$=-18-11+21=-8$$

$\therefore$ $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{8}{8}=1,,\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{16}{8}=2,,\ z=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-8}{8}=-1$ उकल

अभ्यास 3.8

क्रॅमरचा नियम वापरुन खालील समीकरणे सोडवा:

1. $x+3y+6z=2,\ 3x-y+4z=9,\ x-4y+2z=7$
2. $x+y+z=-1,\ x+2y+4z=-5,\ 6x+4y+2z=0$
3. $x-4y-z=11, 2x-5y+2z=39,\ -3x+2y+z=1$

4. $x+2y+3z=6, 2x+4y+z=7, 3x+2y+9z=14$

उत्तरे

1. $x=2, y=-1, z=1/2$
2. $x=1, y=-1, z=-1$
3. $x=-1, y=-5, z=8$
4. $x=y=z=1$

3.9.2 गॉस एलिमिनेशन पद्धत (रेषीय समीकरणांची प्रणाली सोडवण्यासाठी)

खलील समीकरनांची प्रणाली विचारात घेवून,

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (1)$$

प्रणालीला मॅट्रिक्सच्या स्वरूपात $AX=B$ असे लिहिता येते,

जेथे $$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \text{ आणि } X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ऑगमेंटेड अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ घेवून ,

$$[A:B]=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \vdots & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \vdots & d_3 \end{pmatrix} \qquad \ldots (2)$$

आता समीकरण (2) ला वरच्या त्रिकोणी मॅट्रिक्समध्ये मध्ये रूपांतरित केले जाऊ शकते, समजा $a_1 \neq 0$,तेव्हा

$$R_2 \to R_2-\frac{a_2}{a_1}R_1, R_3 \to R_3-\frac{a_3}{a_1}R_1, \ [A:B]\sim\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & d_1 \\ 0 & b_2' & c_2' & \vdots & d_2' \\ 0 & b_3' & c_3' & \vdots & d_3' \end{pmatrix} \qquad \ldots (3)$$

येथे a_1 ला प्रथम पिवोट (Pviot) म्हणतात.

आता, b_2' ला पिवोट घेऊन ($b_2' \neq 0$), तेव्हा

$$R_3 \to R_3-\frac{b_3'}{b_2'}R_1, \qquad [A:B]\sim\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & d_1 \\ 0 & b_2' & c_2' & \vdots & d_2' \\ 0 & 0 & c_3'' & \vdots & d_3'' \end{pmatrix} \qquad \ldots (4)$$

आता समीकरण (4) वरून $c_3'' \neq 0$ ला पिवोट (Pviot) घेऊन, दिलेली रेषीय समीकरणाची प्रणाली समतुल्य असेल

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

$$b_2'y+c_2'z=d_2'$$

$$c_3''z=d_3''$$

किंवा $$z = \frac{c_3''}{d_3''}$$

पुन्हा प्रतिस्थापन करून $$y = \frac{c_3'' d_2' - c_2' d_3''}{b_2' \, c_3''}$$

$$x = \frac{1}{a_1 b_2' \, c_3''}\left(d_1 b_2' \, c_3'' + b_1 c_2' \, d_3'' - b_2' \, c_1 \, d_3'' - b_1 \, c_3'' d_2''\right)$$

टीप :

1. a_1, b_2', c_3'' यापैकी कोणीही शून्य झाल्यास ही पद्धत अपयशी ठरते. अशा प्रकरणांमध्ये रो ची अदलाबदल करून, आपण नॉनझीरो पिव्हॉट्स मिळवू शकतो
2. **पर्शियल पिवोटिंग:** समीकरण (2) च्या पहिल्या स्तंभावरुन, सर्वात मोठ्या अब्सोलुट मूल्यासह घटक निवडा. याला पिवोट म्हणतात. मग दुसऱ्या टप्प्यावर, म्हणजे समीकरण (३) च्यादुसर् या स्तंभावरून, पुन्हा एकदा पिवोट म्हणून सर्वात मोठा अब्सोलुट मूल्य असलेला घटक निवडा. ही प्रक्रिया चालू ठेवा. या प्रक्रियेला पर्शियल पिवोटिंग म्हणतात..
3. **पूर्ण पिवोट:** जर एखाद्याला विशिष्ट क्रमाने x, y, z काढून टाकण्यात रस नसेल तर प्रत्येक टप्प्यावर संपूर्ण गुणांक मॅट्रिक्सचा सर्वात मोठा गुणांक निवडा. यासाठी समीकरणांची अदलाबदल आणि व्हेरिएबल्सच्या पदांची अदलाबदल आवश्यक आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.53 $3x + y - z = 3, 2x - 8y + z = -5, x - 2y + 9z = 8$ ही समीकरणे सोडवण्यासाठी गॉस एलिमिनेशन पद्धत वापरा.

उकल: दिलेली प्रणाली $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ च्या समकक्ष आहे

अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ असा आहे कि

$$[A:B] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 2 & -8 & 1 & \vdots & -5 \\ 1 & -2 & 9 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_1, \quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{26}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & -7 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{28}{3} & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

दुसऱ्या स्तंभातून $-26/3$ ला पिवोट म्हणून घेऊन, आपल्याकडे असेल

$R_3 \to R_3 - \frac{7}{26} R_2,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{26}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & \frac{2079}{234} & \vdots & \frac{231}{26} \end{pmatrix}$$

किंवा $$3x + y - z = 3$$

$$-\frac{26}{3} y + \frac{5}{3} z = -7$$

$$\frac{2079}{234} z = \frac{231}{26} \Rightarrow z = \frac{231 \times 234}{26 \times 2079} = 1$$

आता z = 1 परत प्रतिस्थापन करून

$$-26y = -26 \Rightarrow y = 1$$
$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

आणि $x = 1, y = 1, z = 1$ उकल

उदाहरण 3.54 गॉस एलिमिनेशन पद्धतीचा वापर करून, समीकरणांची प्रणाली सोडवा

$$3.15x - 1.96y + 3.85z = 12.95$$
$$2.13x + 5.12y - 2.89z = -8.61$$
$$5.92x + 3.05y + 2.15z = 3.88$$

उकल: दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली आपण खलील प्रमाणे लिहू शकतो

$$\begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 \\ 2.13 & 5.12 & -2.89 \\ 5.92 & 3.05 & 2.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.95 \\ -8.61 \\ 6.88 \end{pmatrix}$$
$$AX = B$$

अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे,

$$[A:B] = \begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 & : & 12.95 \\ 2.13 & 5.12 & -2.89 & : & -8.61 \\ 5.92 & 3.05 & 2.15 & : & 6.88 \end{pmatrix}$$

3.15 ला पिवोट म्हणून निवडणे

$R_2 \to R_2 - \frac{2.13}{3.15} R_1, R_3 \to R_3 - \frac{5.92}{3.15} R_1,$

$$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 & : & 12.95 \\ 0 & 6.4453 & -5.4933 & : & -17.3667 \\ 0 & 6.7335 & -5.0855 & : & -17.4578 \end{pmatrix}$$

6.4453 ला पिवोट म्हणून निवडणे

$R_3 \to R_3 - \frac{6.7335}{6.4453} R_2$, $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 3.15 & -1.96 & 3.85 & : & 12.95 \\ 0 & 6.4453 & -5.4933 & : & -17.3667 \\ 0 & 0 & 0.6534 & : & 0.6854 \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad 3.15x - 1.96y + 3.85z = 12.95$$

$$6.4453y - 5.4933z = -17.3667$$

$$0.6534z = 0.6854 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{0.6854}{0.6534} = 1.04897459$$

आता z = 1.04897459 परत प्रतिस्थापीत करून

$$y = \frac{5.4933z - 17.3667}{6.4453} = -1.80043875$$

आणि

$$x = \frac{1.96y - 3.85z + 12.95}{3.15} = 1.70875806$$

उदाहरण 3.55 गॉस एलिमिनेशन पद्धतीचा वापर करून खलील समीकरणांची प्रणाली सोडवा

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2$$

उकल: दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली आपण लिहू शकतो

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे,

$$[A:B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & : & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & : & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & : & -2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - R_1,$

$$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & : & -4 \end{pmatrix}$$

दूसरी रो आणि दूसरा स्तंभ यांचातील घटक शून्य असल्यामुळे, दुसऱ्या आणि तिसऱ्या रो ची अदलाबदल करून म्हणजे पिवोट घटक 1 मिळेल.

$R_2 \leftrightarrow R_3,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & : & -4 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to R_4 - R_2,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & : & -7 \end{pmatrix}$$

आता पिवोट 2 आहे म्हणून

$R_4 \to R_4 - \frac{3}{2} R_3,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & : & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & : & 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \quad \ldots (1)$$
$$x_2 - 3x_3 = 3 \quad \ldots (2)$$
$$2x_3 - 3x_4 = -8 \quad \ldots (3)$$

समीकरणे सोडवताना, $\frac{5}{2} x_4 = 5 \Rightarrow x_4 = 2$

आणि $x_3 = \frac{1}{2}(-8 + 3x_4) = \frac{1}{2}(-8 + 6) = -1$

आता परत प्रतिस्थापन करून $x_2 = 3 + 3x_3 = 3 - 3 = 0$

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 - 0 - (-1) - 2 = 1$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1, x_4 = 2.$$ उकल

अभ्यास 3.9

गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे समीकरनांची प्रणाली सोडवा:

1. $$x + 2y + z = 3$$
$$2x + 3y + 3z = 10$$
$$3x - y + 2z = 13$$

2. $$2x + 3y - z = 5$$
$$4x + 4y - 3z = 3$$
$$2x - 3y + 2z = 2$$

3. $$5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = -5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -6$$

उत्तरे

1. $x = 2, y = -1, z = 3$, **2.** $x = 1, y = 2, z = 3,$ **3.** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$

3.9.3 गॉस-जॉर्डन पद्धत (रेषीय समीकरणांची प्रणाली सोडवण्यासाठी)

ही पद्धत गॉस एलिमिनेशन पद्धतीचा सुधारित प्रकार आहे. $AX = B$ चे गुणांक मॅट्रिक्स A ला त्याचा प्रिन्सिपल डायगोनल च्या खालचे आणि वरचे सर्व घटक शून्य करून डायगोनल मॅट्रिक्स किंवा यूनिट मॅट्रिक्स मध्ये बदलून. येथे अतिरिक्त गणना जरी करायची असली तरीही पूर्व-प्रतिस्थापन वेळ येथे वाचवला जातो.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.56 गॉस-जॉर्डन पद्धतीने समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$$10x + y + z = 12$$
$$2x + 10y + z = 13$$
$$x + y + 5z = 7$$

उकल: दिलेली प्रणाली मॅट्रिक्स च्या स्वरूपात लिहून

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे,

$$[A:B] = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & \vdots & 12 \\ 2 & 10 & 1 & \vdots & 13 \\ 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - 9R_3$,

$$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & -44 & \vdots & -51 \\ 2 & 10 & 1 & \vdots & 13 \\ 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$,

$$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & -44 & \vdots & -51 \\ 0 & 26 & 89 & \vdots & 115 \\ 0 & 9 & 49 & \vdots & 58 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to 3R_3 - R_2$,

$$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & -44 & \vdots & -51 \\ 0 & 1 & 58 & \vdots & 59 \\ 0 & 9 & 49 & \vdots & 58 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + 8R_2, R_3 \to R_3 - 9R_2$,

$$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 420 & \vdots & 421 \\ 0 & 1 & 58 & \vdots & 59 \\ 0 & 0 & -473 & \vdots & -473 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to -\frac{1}{473} R_3.$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 420 & \vdots & 421 \\ 0 & 1 & 58 & \vdots & 59 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 - 420R_3, R_2 \to R_2 - 58R_3,$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

तर $AX = B$ प्रणाली रूपांतरित होते आशाप्रकारे $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

दुसऱ्या शब्दात $\quad x = 1 = y = z$ $\quad$ **उकल**

उदाहरण 3.57. समीकरणे $10x_1 + x_2 + x_3 = 12,\ x_1 + 10x_2 - x_3 = 10$ आणि $x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 9$ गॉस-जॉर्डन पद्धतीने सोडवा.

उकल: दिलेली प्रणाली मॅट्रिक्स च्या स्वरूपात लिहून

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे, $\quad [A:B] = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & \vdots & 12 \\ 1 & 10 & -1 & \vdots & 10 \\ 1 & -2 & 10 & \vdots & 9 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 - 9R_2,$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 1 & 10 & -1 & \vdots & 10 \\ 1 & -2 & 10 & \vdots & 9 \end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1,$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 0 & 99 & -11 & \vdots & 88 \\ 0 & 87 & 0 & \vdots & 87 \end{pmatrix}$

$R_2 \to \frac{R_2}{11},\ R_3 \to \frac{R_3}{87},$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 0 & 9 & -1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 8R_3,$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -89 & 10 & \vdots & -78 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 89R_2,\ R_3 \to R_3 - R_2,$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -79 & \vdots & -78 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 79R_3,\ R_2 \to R_2 - R_3,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

तर $AX = B$ प्रणाली रूपांतरित होते आशाप्रकारे

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = x_2 = x_3 = 1$$ **उकल**

उदाहरण 3.58 गॉस-जॉर्डन पद्धतीने समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$$5x - y - 2z = 142$$
$$x - 3y - z = -30$$
$$2x - y - 3z = -5$$

उकल: दिलेली प्रणाली मॅट्रिक्स च्या स्वरूपात लिहून

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ -30 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे,

$$[A:B] = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & \vdots & 142 \\ 1 & -3 & -1 & \vdots & -30 \\ 2 & -1 & -3 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -30 \\ 5 & -1 & -2 & \vdots & 142 \\ 2 & -1 & -3 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 5R_1,\ R_3 \to R_3 - 2R_1,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -30 \\ 0 & 14 & 3 & \vdots & 292 \\ 0 & 5 & -1 & \vdots & 55 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to \dfrac{R_2}{14},$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -30 \\ 0 & 1 & 3/14 & \vdots & 146/7 \\ 0 & 5 & -1 & \vdots & 55 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + 3R_2,\ R_3 \to R_3 - 5R_2,$ $$[A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/14 & \vdots & 228/7 \\ 0 & 1 & 3/14 & \vdots & 146/7 \\ 0 & 0 & -29/14 & \vdots & -345/7 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to \left(-\frac{14}{29}\right)R_3,$ $\qquad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/14 & \vdots & 228/7 \\ 0 & 1 & 3/14 & \vdots & 146/7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 690/29 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + \frac{5}{14}R_3,\ R_2 \to R_2 - \frac{3}{14}R_3,$ $\qquad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 8337/203 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3199/203 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 690/29 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\qquad x = \frac{8337}{203},\ y = \frac{3199}{203},\ z = \frac{690}{29}$ $\qquad$ उकल

उदाहरण 3.59 गॉस-जॉर्डन पद्धतीद्वारे समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 0$$

उकल: दिलेली समीकरणे

$$6x + 3y + 2z = 6$$
$$6x + 4y + 3z = 0$$
$$20x + 15y + 12z = 0$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे,

$$[A:B] = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & \vdots & 6 \\ 6 & 4 & 3 & \vdots & 0 \\ 20 & 15 & 12 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \to \frac{R_1}{6},$ $\qquad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \vdots & 1 \\ 6 & 4 & 3 & \vdots & 0 \\ 20 & 15 & 12 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 6R_1, R_3 \to R_3 - 20R_1,$ $\qquad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & 5 & 16/3 & \vdots & -20 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2, R_3 \to R_3 - 5R_2,$ $\qquad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 1/3 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$

$R_3 \to 3R_3,$ $\qquad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + \frac{1}{6}R_2, R_2 \to R_2 - R_3,$ $\quad [A:B] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -36 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 30 \end{pmatrix}$

$\therefore \quad x = 9, y = -36, z = 30$

अभ्यास 3.10

गॉस-जॉर्डन पद्धतीने समीकरणांची प्रणाली सोडवा:

1.
$$x + y + z + w = 2$$
$$2x - y + 2z - w = -5$$
$$3x + 2y + 3z + 4w = 7$$
$$x - 2y - 3z + 2w = 5$$

2.
$$10x + y + z = 12$$
$$2x + 10y + z = 13$$
$$x + y + 5z = 7$$

3.
$$3x + 4y + 5z = 18$$
$$2x - y + 8z = 13$$
$$5x - 2y + 7z = 20$$

4.
$$x + 2y + z - w = -2$$
$$2x + 3y - z + 2w = 7$$
$$x + y + 3z - 2w = -6$$
$$x + y + z + w = 2$$

5.
$$10x + y + z = 18.141$$
$$x + 10y + z = 28.140$$
$$x + y + 10z = 38.139$$

उत्तरे

1. $x = 0, y = 1, z = -1, w = 2$ **2.** $x = 1, y = 1, z = 1$

3. $x = 3, y = 1, z = 1$ **4.** $x = 1, y = 0, z = -1, w = 2$

5. $x = 1.234, y = 2.348, z = 3.455$

3.9.4 मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्यासाठी गॉस एलिमिनेशन पद्धत

समजा A हा ऑर्डर तीन असलेला एक नॉन सिंगुलर चौरस मॅट्रिक्स आहे. मग मॅट्रिक्स A चा व्यस्त X असा आहे कि $AX = I$ समीकरनाचे उकल करतो, जेथे I हा ऑर्डर तीन चा युनिट मॅट्रिक्स आहे. आता, आपल्याला व्यस्त मॅट्रिक्स X चे घटक शोधावे लागतील.

समजा
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

समीकरण बनते $\quad AX = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

हे मॅट्रिक्स तीन समीकरणांच्या बरोबरीचे आहे, जे समीकरणांच्या तीन प्रणालींच्या बरोबरीचे आहेत.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \ldots (3)$$

(1), (2) आणि (3) समीकरनांची प्रणाली मधे. (1)-(3) गॉस-एलिमिनेशन प्रक्रियेद्वारे सोडवता येते.

प्रत्येक प्रणाली (1), (2) आणि (3) समीकरणांचे उकल संच हे व्यस्त मॅट्रिक्स X चे संबंधित स्तंभ असतील.

गुणांक मॅट्रिक्स सर्व (1), (2) आणि (3), समीकरणांमध्ये समान असल्याने सर्व एकसामायिक निश्चित प्रणाली तयार करून सोडवता येतात

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.60 गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ चे व्यस्त शोधा.

उकल: ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:I]$ खलील प्रमाणे आहे

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

अवयव, घटक $a_{11} = 0$असल्याने, आम्ही पहिल्या आणि दुसऱ्या पंक्तीचे अदलाबदल करू, नंतर रूपांतरित प्रणाली असेल

$$[A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - 3R_1$,
$$[A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 + 7R_2$,
$$[A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x_{11}+2x_{21}&=0\\ x_{21}+x_{31}&=1\\ 3x_{31}&=7\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_{11}=\frac{7}{3}, x_{21}=-\frac{4}{3}, x_{11}=\frac{8}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{12}+2x_{22}&=1\\ x_{22}+x_{32}&=0\\ 3x_{32}&=-3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_{32}=-1, x_{22}=1, x_{12}=-1$$

$$\left.\begin{aligned} x_{13}+2x_{23}&=0\\ x_{23}+x_{33}&=0\\ 3x_{33}&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_{33}=\frac{1}{3}, x_{23}=-\frac{1}{3}, x_{13}=\frac{2}{3}$$

म्हणून
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & \frac{2}{3}\\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\ \frac{7}{3} & -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

उदाहरण 3.61: गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{pmatrix}$ चा व्यस्त शोधा.

उकल:
$$[A/I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2+5R_1, R_3 \to R_3-\frac{5}{3}R_1,$
$$[A/I]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0\\ 0 & -1/3 & 1/3 & -5/3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3+\frac{1}{3}R_2,$
$$[A/I]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1\end{array}\right)$$

आता ही प्रणाली तीन सिस्टिमच्या बरोबरीची आहे.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3\end{array}\right)$$

आणि
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{r} 3x_{11} - x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{21} = 5 \\ \frac{1}{3}x_{31} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{31} = 0, \\ x_{21} = 5, \\ x_{11} = 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_{12} - x_{22} + x_{32} = 0 \\ x_{22} = 1 \\ \frac{1}{3}x_{32} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{32} = 1, \\ x_{22} = 1, \\ x_{12} = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x_{13} - x_{23} + x_{33} = 0 \\ x_{23} = 0 \\ \frac{1}{3}x_{33} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{33} = 3, \\ x_{23} = 0, \\ x_{13} = -1 \end{array}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

अभ्यास 3.11

1. गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे खालील मॅट्रिसिसचे व्यस्त शोधा:

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$

उत्तरे

1. (i). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ iii. $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.9.5 गॉस-जॉर्डन पद्धतीद्वारे मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधणे

जर A हा ऑर्डर तीन असलेला चौरस मॅट्रिक्स आहे आणि $|A| \neq 0$ तर A मॅट्रिक्स चा व्यस्त X असा आहे जो $AX = I$

समीकरण पूर्ण करतो, जेथे I हा ऑर्डर तीन चा युनिट मॅट्रिक्स आहे. आता, आपल्याला व्यस्त मॅट्रिक्स X चे घटक शोधावे लागतील.

समजा $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

आणि $$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}$$

मग, $$AX=I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

हे समीकरण तीन समीकरणांच्या बरोबरीचे आहे, जे समीकरणांच्या तीन प्रणालींच्या बरोबरीचे आहेत. गॉस-जॉर्डन पद्धतीने प्रत्येक प्रणालीचे निराकरण करा. प्रत्येक प्रणालीचा उकल संच व्यस्त मॅट्रिक्सचा संबंधित स्तंभ असेल. येथे देखील आम्ही वर्धित प्रणाली तयार करून एकाच वेळी सर्व प्रणाली सोडवू शकतो.

$$[A/I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.62 गॉस-जॉर्डन पद्धतीने $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ चे व्यस्त शोधा.

उकल: वर्धित प्रणाली $[A/I]$ आहे.

$$[A/B]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$R_1 \to \frac{R_1}{3}$, $$[A/B]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2-2R_1$, $$[A/B]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4/3 & -2/3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$R_2 \to (-1)R_2$, $$[A/B]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$R_2 \to R_1 + R_2$ आणि $R_3 \to R_3 + R_2$, $[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$R_3 \to (-3)R_3$, $\quad [A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right)$

$R_2 \to R_2 + \frac{4}{3}R_3$, $\quad [A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right)$

$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ उकल

अभ्यास 3.12

1. गॉस-जॉर्डन पद्धतीद्वारे खालील मॅट्रिक्सचे व्यस्त शोधा:

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$ iv. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

v. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

उत्तरे

i. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ iii. $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ iv. $\begin{pmatrix} -4/3 & 2 & 7/3 \\ 5/3 & -2 & -8/3 \\ 7/3 & -3 & -10/3 \end{pmatrix}$

v. $\begin{pmatrix} 8/3 & -1 & 2/3 \\ -4/3 & 1 & -1/3 \\ 7/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$

मनोरंजक माहिती

- पर्यावरण शास्त्रांच्या क्षेत्रात त्याचा एक अनोखा अनुप्रयोग आहे, जसे की, विशिष्ट माशांचे सरासरी उष्मांक मूल्य ठरवणे, जंगलाची वाढ आणि त्याचे प्रकार इत्यादी. उदाहरणार्थ, जर जंगलात 5 वेगवेगळ्या प्रकारची झाडे असतील तर आपण तयार करू शकतो त्यांचे वय मोजण्यासाठी एक रेषीय समीकरण. त्याचप्रमाणे, सागरी जीवनातील कार्बोहायड्रेट्सचा आहार त्यांच्या आहारावर आधारित शोधण्यासाठी आपण रेषीय समीकरणे तयार करू शकतो आणि अशी अनेक उदाहरणे आहेत.

- वास्तविक जगात, आम्ही हे ट्रॅफिक कंट्रोल मॅनेजमेंटमध्ये गॉस जॉर्डन पद्धतीचा वापर करून ट्रॅफिक जामच्या समस्येचा सामना करण्यासाठी लागू करू शकतो, ज्यामध्ये मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्याचे तंत्र समाविष्ट आहे, न्यूट्रोसोफिक रेखीय समीकरणे तयार करून (जे अवास्तव डेटासेटभोवती फिरते आणि निर्धारीत आणि/ किंवा अनिश्चित माहिती) आणि MATLAB प्रोग्रामिंग लागू करणे.

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- अज्ञात परिमाणांची मूल्ये शोधणे; ते वय, खर्च किंवा इतर कोणतीही गोष्ट असू द्या
- विमानतळांवर, जिथे उड्डाणे, प्रवासी इत्यादींची माहिती मोजण्यासाठी आणि एन्कोड करण्यासाठी हाय-एंड संगणकांचा वापर केला जातो.
- सर्किट विश्लेषणामध्ये, गॉस जॉर्डन प्रक्रिया जाळीने जोडलेल्या प्रोसेसरवर वापरली जाते.
- हे शेड्यूलिंग अल्गोरिदम मध्ये वापरले जाते.
- फिंगरप्रिंट प्रतिमा संवर्धनासाठी उपयुक्त, ज्यात गौसियन एलिमिनेशन पद्धतीचा वापर समाविष्ट आहे.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत - NPTEL)

Gauss Elimination

Gauss-Jordon Method

System of Linear Equations –Gauss Elimination

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

उदाहरण 1 k च्या मूल्यांची संख्या निश्चित करा ज्यासाठी समीकरणाच्या प्रणालीला

$$(k+1)x+8y=4k$$
$$kx+(k+3)y=3k-1$$

असंख्य उकल आहे.

उकल: रेषीय समीकरणाची दिलेली प्रणाली आहे

$$(k+1)x+8y=4k$$
$$kx+(k+3)y=3k-1$$

हे $AX=B$ असे लिहिले जाऊ शकते,

येथे

$$A=\begin{bmatrix}k+1 & 8\\ k & k+3\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4k\\ 3k-1\end{bmatrix}$$

आता

$$[A:B]=\begin{bmatrix}k+1 & 8 & \vdots & 4k\\ k & k+3 & \vdots & 3k-1\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - \frac{k}{k+1}R_1$ ऑपरेशन लागू करून,

$$[A:B]\sim\begin{bmatrix}k+1 & 8 & \vdots & 4k\\ 0 & (k+3)-\frac{8k}{k+1} & \vdots & (3k-1)-\frac{4k^2}{k+1}\end{bmatrix}$$

$$[A:B]\sim\begin{bmatrix} k+1 & 8 & \vdots & 4k \\ 0 & \dfrac{k^2-4k+3}{k+1} & \vdots & \dfrac{-k^2+2k-1}{k+1} \end{bmatrix}$$

हे दिलेले आहे की समीकरणांच्या प्रणालीला अनंत उपाय आहेत.

$\therefore$ $$\rho(A)=\rho(A:B)<n(=2)$$

यासाठी, $$\frac{k^2-4k+3}{k+1}=0 \qquad \ldots(1)$$

आणि $$\frac{-k^2+2k-1}{k+1}=0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) वरून, $$k^2-4k+3=0$$
$$(k-3)(k-1)=0$$
$$k=3,1$$

समीकरण (2) वरून, $$-k^2+2k-1=0$$
$$k^2-2k+1=0$$
$$(k-1)^2=0$$
$$k=1$$

$\therefore$ $k=1$ हा एकमेव उपाय आहे ज्यासाठी समीकरणांच्या प्रणालीला अनंत उपाय आहेत.

उदाहरण 2. हे सिद्ध करा की डिटरमिनेंट $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix}=0$ जर a, b, c हे भूमिति श्रेणीत (G.P.) असतील.

उकल : समजा

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_3\to R_3-(\alpha R_1+R_2)$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ 0 & 0 & -a\alpha^2-2b\alpha-c \end{vmatrix}$$

R_3 च्या बाजूने विस्तार केल्यावर आपल्याला मिळते

$$\Delta=0\begin{vmatrix} b & a\alpha+b \\ c & b\alpha+c \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} a & a\alpha+b \\ b & b\alpha+c \end{vmatrix}-(a\alpha^2+2b\alpha+c)\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$
$$=-(a\alpha^2+2b\alpha+c)(ac-b^2)$$
$$=(b^2-ac)(a\alpha^2+2b\alpha+c)$$

याचप्रमाणे, $\Delta=0$ जर $$b^2-ac=0$$

किंवा $$a\alpha^2+2b\alpha+c=0$$

$\therefore$ $$b^2 = ac$$

किंवा $$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

$\therefore$ a, b, c भूमिति श्रेढ़ित आहे म्हणून $\Delta = 0$

उदाहरण 3. जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 + cA + dI\right)$ जेथे $c, d \in R$, तर (c, d) चे मूल्य काढ़ा.

उकल: दिलेले आहे $$|A| = 1(4+2) - 0 + 0 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

आता $$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

तसेच $$cA = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix}$$

आणि $$dI = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

दिलेले आहे $$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 + cA + dI\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+c+d & 0 & 0 \\ 0 & -1+c+d & 5+c \\ 0 & -10-2c & 14+4c+d \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सच्या समानतेने, संबंधित घटकांची बरोबरी करून, आपल्याला मिळते

$$6 = 1 + c + d \Rightarrow 5 = c + d$$

$$-1 = 5 + c \Rightarrow -6 = c$$

$$5 = -6 + d \Rightarrow d = 11$$

म्हणून, $(-6, 11)$ अपेक्षित मूल्य आहे. **उकल**

उदाहरण4. समजा मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{bmatrix}$ आणि व्हेक्टर $X = [X_1\ X_2]^T$ दिलेले आहे. k चे विभिन्न वास्तव मूल्य

काढा,

ज्यासाठी $AX = 0$ या समीकरणाला अनंत उकल असेल.
उकल : दिलेले आहे की प्रणालीला अनंत उकल आहे.

म्हणून $$|A| = 0$$

किंवा $$\begin{vmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{vmatrix} = 0$$

म्हणजेच $$k^3 - 2k\left(k^2 - k\right) = 0$$
$$k^3 - 2k^3 + 2k^2 = 0$$
$$-k^3 + 2k^2 = 0$$
$$k^2\left(-k + 2\right) = 0$$
$$k = 0 \quad \text{किंवा} \quad k = 2$$

म्हणून,k ला दोन मूल्य आहेत ज्या साठी एक रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीला अनंत उकल आहे.

उदाहरण 5.मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ साठी $det(A) = 100$ आणि $trace(A) = 14$ आहे .मग $|a - b|$ चे मूल्य काढा.

उकल : दिलेले आहे की $trace(A) = 14$.
$$a + 5 + 2 + b = 14$$
$$a + 7 + b = 14$$
$$a + b = 7 \qquad \ldots (1)$$

दिलेले आहे $$\det .A = 100$$

R_4 सोबत विस्तार केल्यानंतर आपल्याला मिळेल ,
$$b\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 100$$
$$\Rightarrow \quad b\left[a(10 - 0) - 0 + 3(0)\right] = 100$$
$$\Rightarrow \quad 10ab = 100$$
$$\Rightarrow \quad ab = 10$$
$$b = \frac{10}{a} \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2)वरून b ची किंमत (1) मध्ये ठेवल्यावर आपल्याला मिळेल
$$a + \frac{10}{a} = 7$$
$$a^2 + 10 = 7a$$

$$a^2-7a+10=0$$
$$(a-5)(a-2)=0$$
$$a=5\ or\ 2$$

समीकरण (2) वरून $\quad b=2\ or\ 5$

आता $\quad |a-b|=|5-2|\ or\ |2-5|=3 \quad$ उकल

उदाहरण 6. मॅट्रिक्स $J_6=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ विचरत घेऊन,जो आयडेंटिटी मॅट्रिक्स I_6च्या कॉलम ची ऑर्डर रिव्हर्स करून मिळालेला आहे . समजा की $P=I_6+\alpha J_6$ जिथे $\alpha\geq 0, \alpha\in R$. α ची किंमत काढा ज्यासाठी $det\,(P)=0$ आहे.

उकल : समजा की $\quad P=I_2+\alpha J_2$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\alpha\\\alpha&1\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad |P|=1-\alpha^2$

$$P=I_4+\alpha I_4$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&\alpha\\0&1&\alpha&0\\0&\alpha&1&0\\\alpha&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad |P|=\begin{vmatrix}1&\alpha&0\\\alpha&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}-0+0-\alpha\begin{vmatrix}0&1&\alpha\\0&\alpha&1\\\alpha&0&0\end{vmatrix}$

$$=1[1(1-0)-\alpha(\alpha-0)+]-\alpha\left[\alpha\left(1-\alpha^2\right)\right]$$
$$=1-\alpha^2-\alpha\left(\alpha-\alpha^3\right)=1-\alpha^2-\alpha^2+\alpha^4$$
$$=1-2\alpha^2+\alpha^4=\left(1-\alpha^2\right)^2$$

आशाप्रकारे जर $\quad P=I_6+\alpha I_6$

तर $\quad |P|=\left(1-\alpha^2\right)^3$

$$\det P=0 \;\Rightarrow\; \left(1-\alpha^2\right)^3=0$$

$\Rightarrow \quad 1-\alpha^2=0$

$\Rightarrow \quad (1-\alpha)(1+\alpha)=0$

$\Rightarrow \qquad \alpha = 1, -1$

$\alpha \geq 0$ असल्यामुळे

$\therefore \qquad \alpha = 1$

उदाहरण 7 समजा की A, $m \times n$ मॅट्रिक्स आहे आणि B, $n \times m$ मॅट्रिक्स आहे . दिलेले आहे की $det\ (I_m + AB) = det\ (I_n + BA)$, जिथे I_k हा $k \times k$ ऑर्डर चा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे. वर दिलेल्या प्रॉपर्टिचा उपयोग करून,

मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ च्या डिटरमिनेंट ची किंमत काढा.

उकल : दिलेले आहे की $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

समजा $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \times B$$

आणि $$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$\therefore \qquad |I_4| = 1$

दिलेले आहे की, $\qquad |I_m + AB| = |I_n + BA|$

$\Rightarrow$ $$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [4]$$

$$\det(I_n + BA) = |[4] + [1]| = |5| = 5$$

उदाहरण 8. ट्रेस 14 असणारया सर्व 2 × 2 वास्तविक सममित मॅट्रिक्समध्ये डिटरमिनेंट चे जास्तीत जास्त मूल्य शोधा.

उकल : सामान्य 2 × 2 वास्तविक सीमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$|A| = ac - b^2$$

आणि $$traceA = a + c = 14 \qquad \ldots (1)$$

| A | च्या मक्सीमम मूल्यसाठी, b^2 मिनिमम असायला पाहिजे.

म्हणजे b^2 नॉन निगेटिव्ह संख्या आहे ज्यासाठी मिनिमम मूल्य

$$b^2 = 0$$

म्हणजे, मॅक्सिमम डिटरमिनेंट ज्यासाठी $b = 0$.

$$|A| = ac = a(14 - a) = 14a - a^2 = 0 \qquad \text{[समीकरण (1) ने}$$

| A | च्या मॅक्सिमम किंमत साठी, आपण लिहू शकतो

$$\frac{d}{da}|A| = 0$$

$$14 - 2a = 0$$

$$a = 7$$

समीकरण (1) वरून, $$c = 14 - a = 14 - 7 = 7$$

$\therefore$ मॅक्सिमम डिटरमिनेंट $|A| = a\,c = 7 \times 7 = 49$ आहे.

उदाहरण 9. दोन कुटुंब आहेत. कुटुंब P मध्ये 3 पुरुष, 3 महिला आणि 12 मुले आहेत . कुटुंब Q मध्ये 2 पुरुष, 2 महिला आणि 4 मुले आहेत. कॅलरीजसाठी शिफारस केलेला दैनंदिन भत्ता पुरुष : 2400, महिला : 2000, मूल : 1400 आणि प्रथिनांसाठी पुरुष : 60 ग्रॅम, स्त्री : 40 ग्रॅम आणि मूल : 35 ग्रॅम आहे. मॅट्रिक्स गुणाकार वापरून, प्रत्येक दोन कुटुंबाच्या कॅलरी आणि प्रथिनांची एकूण आवश्यकता मोजा.

उकल : समजा मॅट्रिक्स A हा कुटुंबातील पुरुष, स्त्रिया आणि मुलांची संख्या P आणि Q मध्ये दर्शविणारे मॅट्रिक्स असेल. मग A असे लिहिले जाऊ शकते,

$$A = \begin{array}{c} \\ P \\ Q \end{array}\begin{bmatrix} \text{Men} & \text{Women} & \text{Children} \\ 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

समजा B हे कॅलरी आणि प्रथिनांसाठी शिफारस केलेल्या दैनंदिन भत्त्याचे प्रतिनिधित्व करणारे मॅट्रिक्स असेल. मग B असे लिहिले जाऊ शकते,

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Man} \\ \text{Woman} \\ \text{Child} \end{array}\begin{array}{c} \text{Calories Proteins} \\ \begin{bmatrix} 2400 & 60 \\ 2000 & 40 \\ 1400 & 35 \end{bmatrix} \end{array}$$

P आणि Q कुटुंबामधील कॅलरी आणि प्रोटीन च्या एकूण आवश्यकता मॅट्रिक्स त्यांच्या गुणाकाराने दर्शविली जाते, म्हणजे,

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2400 & 60 \\ 2000 & 40 \\ 1400 & 35 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3\times2400+3\times2000+12\times1400 & 3\times60+3\times40+12\times35 \\ 2\times2400+2\times2000+4\times1400 & 2\times60+2\times40+4\times35 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7200+6000+16800 & 180+120+420 \\ 4800+4000+5600 & 120+80+140 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ P \\ Q \end{array} \begin{bmatrix} \text{Calories} & \text{Protiens} \\ 30000 & 720 \\ 14400 & 340 \end{bmatrix}$$

म्हणून, कुटुंब P साठी कॅलरी आणि प्रोटीन ची एकूण आवश्यकता क्रमशः 30000 कॅलरी आणि 720 ग्राम प्रोटीन आहे. आणि कुटुंब Q साठी क्रमशः 14400 कैलोरी आणि 340 ग्राम प्रोटीन आहे.

सारांश

1. मॅट्रिक्स म्हणजे $(m \times n)$ घटकांची सारणी मध्ये मांडणी आणि या प्रकारे लिहा. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, i=1,2,\ldots m,\ j=1,2,\ldots n$

2. **आयडेम्पोटंट मॅट्रिक्स:** मॅट्रिक्स A ला आयडेम्पोटंट मॅट्रिक्स म्हटले जाते जेव्हा, $A^2 = A$ असेल.

3. **एनवोलूटरी मॅट्रिक्स:** मॅट्रिक्स 'A' ला एनवोलूटरी मॅट्रिक्स म्हटले जाते जेव्हा $A^2 = I$ असेल, जेथे I आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे. आयडेंटिटी मॅट्रिक्स नेहमी एक इनवॉल्यूटरी मॅट्रिक्स असतो.

4. **रँक:** इचिलॉन फॉर्ममध्ये असलेल्या मॅट्रिक्स मधील शून्येतर रो च्या संख्येला , मॅट्रिक्स ची रँक म्हटले जाते.

5. नॉन होमोजीनियस प्रणाली साठी

    a. जेव्हा $\rho(A)=\rho(A:B)$ = अज्ञात ची संख्या, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून एकमेव उत्तर असते.

    b .जेव्हा $\rho(A)=\rho(A:B)$ < अज्ञात ची संख्या आहे, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून अनंत उत्तरे असतात.

    c. जेव्हा $\rho(A)\neq\rho(A:B)$, तेव्हा प्रणाली इनकंसिस्टन्ट असते.

6.होमोजीनियस प्रणाली साठी

    a.जेव्हा $\rho(A)$ = अज्ञात ची संख्या, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून (ट्रीविएल) एकमेव उत्तर असते.

    b.जेव्हा $\rho(A)$ < अज्ञात ची संख्या आहे, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून अनंत उत्तरे असतात (नॉन ट्रीविएल).

7. जर डिटरमिनेंट $= 0$ आसेल, तर क्रॅमर चा नियम लागू होऊ शकत नाही.

8. जर एखाद्या मॅट्रिक्स चा डिटरमिनेंट शून्य नसेल, तर त्याचा व्यस्त अस्तित्वात असतो आणि तो नेहमी एकच असेल.

वस्तुनिष्ट प्रश्न

1. जेव्हा $2\begin{bmatrix} x & 9 \\ y & 6 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$, तेव्हा x आणि y ची किंमत आहे

    a. $x = 6, y = 3$ b. $y = 6, x = 3$ c. $x = 9/2, y = 6$ d. $x = -1, y = -2$

2. जेव्हा $X+Y=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ आणि $X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ तेव्हा मॅट्रिक्स X ची किंमत

    a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. जेव्हा $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, तेव्हा BA चा गुणाकार आहे.

a. 15 b, $\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\4 & 2 & -6\\6 & 3 & -9\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\1 & 2 & 3\\-3 & -6 & -9\end{bmatrix}$ d. 26

4. y च्या कोणत्या किमती साठी खालील मॅट्रिक्स सारखे आहेत.

$$\begin{bmatrix}3x+7 & 5\\x+y & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}$$

a. 4 b. 3 c. 0 d. −1

5. जर $A=\begin{bmatrix}6 & -1\\2 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}$ आणि $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$, तर

a. AB अस्तित्वात आहे. b. BA अस्तित्वात आहे.

c. $(A + B)$ अस्तित्वात आहे. d. $(A - B)$ अस्तित्वात आहे.

6. समजा स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ची ऑर्डर तीन आहे, तर $|kA|$ बरोबर आहे.

a. $3k|A|$ b, $k|A|$ c. $k^2|A|$ d. $k^3|A|$

7. जेव्हा $\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 3\\2x & 5\end{vmatrix}$, तेव्हा x ची किंमत आहे

a. 3 b. 4 c. 2 d. −1

8. जेव्हा A ऑर्डर 2 चा एक इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स आहे, तेव्हा $det\,(A^{-1})$ बरोबर आहे.

a. 0 b. det(A) c. 1 d. $\dfrac{1}{\det A}$

9. डिटरमिनेंट $\begin{vmatrix}0 & 9 & 12\\1 & -3 & -4\\1 & 9 & 12\end{vmatrix}$ ची किंमत आहे

a. 1 b. −1 c. 0 d. 2

10. जेव्हा $\begin{vmatrix}x+2 & 3\\x+5 & 4\end{vmatrix}=3$ तेव्हा x ची किंमत आहे

a. 7 b. 8 c. 12 d. 10

11. जेव्हा एक मॅट्रिक्स A सिमेट्रिक आणि विषम- सिमेट्रिक दोन्ही आहे., तो

a. A एक डायगोनल मॅट्रिक्स आहे. b. A एक शून्य मॅट्रिक्स आहे.

c. A एक स्केलार मॅट्रिक्स आहे. d. A एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे.

12. जेव्हा $A=\begin{bmatrix}a+ib & c+id\\-c+id & a-ib\end{bmatrix}$ आणि $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ तेव्हा A^{-1} ची किंमत आहे

a. $\begin{bmatrix} a+ib & -c+id \\ -a+id & a-ib \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} a-ib & c-id \\ -c-id & a+ib \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$

13. जर $A(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta} \end{bmatrix}$, तर $A(\alpha, \beta)^{-1}$

a. $A(-\alpha, \beta)$ b. $A(-\alpha, -b)$ c. $A(\alpha, -\beta)$ d. $A(\alpha, \beta)$

14. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ आशाप्रकारे की $A^{-1} = kA$, तर k ची किंमत आहे

a. 1/19 b. −1/19 c. 1/17 d. −1/17

15. मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ ची रँक 3 आहे., आणि a, b, c वास्तविक आहे, तेव्हा

a. $a = b = c$

b. a,b,c सर्व भिन्न आहेत परंतु $a + b + c = 0$

c. a,b,c यापैकी दोन संख्या समान आहेत परंतु तिसऱ्यापेक्षा भिन्न आहेत

d. a,b,c सर्व भिन्न आहेत आणि $a + b + c \neq 0$

16. P चे मूल्य शोधा ज्यासाठी, दिलेल्या मॅट्रिक्सची रँक *1* आहे

$$\begin{bmatrix} 3 & p & p \\ p & 3 & p \\ p & p & 3 \end{bmatrix}$$

a. 4 b. 2 c.3 d.1

17. गॉस एलिमिनेशन पद्धतीचा उपयोग करून खालील समीकरणे सोडवा:

$x + 2y + 3z = 4$, $2x + 3y + 4z = 5$, $3x + 4y + 5z = 6$

a. $x = 0.5$, $y = 0$ आणि $z = 1$ b. $x = 0.5$, $y = 0$ आणि $z = -1$

c. $x = -0.5$, $y = 0$ आणि $z = 1.5$ d. $x = 0.5$, $y = 0$ आणि $z = -1.5$

18. गॉस जॉर्डन पद्धती मध्ये कोणत्या रूपांतराची परवानगी आहे?

a. डायगोनल रूपांतरन b. कॉलम रूपांतरन

c. रो रूपांतरन d. स्क्वेअर रूपांतरन

19. क्रॅमर चा नियम वापरुन खालील समीकरणे सोडवा:

$3x + y + 2z = 3$, $2x - 3y - z = -3$, $x + 2y + z = 4$

a. $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ b. $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$

c. $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ d. $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

20. क्रॅमर चा नियम कशासाठी उपयोगी नाही.

a. डिटरमिनेंट > 0

b. डिटरमिनेंट <0

c. डिटरमिनेंट $= 0$

d. डिटरमिनेंट = अवास्तविक

उत्तरे

1. b	**2.** c	**3.** b	**4.** b
5. a	**6.** d	**7.** c	**8.** d
9. c	**10.** d	**11.** b	**12.** c
13. b	**14.** a	**15.** d	**16.** c
17. c	**18.** c	**19.** a	**20.** C

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

1. जर A ला झिरो रो असेल तर AB ला सुद्धा झिरो रो असतो हे दाखवा.
2. जर B चा एक कॉलम शून्य असेल , तर AB चा पण एक कॉलम शून्य असतो हे दाखवा.
3. समजा रँक m असलेला A हा $m \times n$ ऑर्डर चा मॅट्रिक्स आहे आणि B हा रँक n आणि ऑर्डर $n \times p$ चा मॅट्रिक्स आहे. तर AB ची रँक ठरवा. आपल्या उत्तराला न्यायसंगत बनवा.
4. जर B हा एक 3×1 चा मॅट्रिक्स आहे आणि C हा 1×3 चा मॅट्रिक्स आहे, तर ऑर्डर 3×3 असलेला मॅट्रिक्स BC ची जास्तीत जास्त रँक 1 असते हे दाखवा. याउलट , जर A हा कोणताही 3×3 ऑर्डर चा मॅट्रिक्स आहे ज्याची रँक 1 आहे, तर तेथे, 3×1 चा मॅट्रिक्स B आणि 1×3 चा मॅट्रिक्स C असे अस्तित्वात असतील कि $A = BC$ हे दाखवा.
5. 2×2 ऑर्डर चे इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स A आणि B असे शोधा की $A + B$ शून्य च्या बरोबर नाही आणि $A + B$ इन्व्हर्टिबल नाही.
6. समजा की $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(F)$ कोणत्या परिस्थितीत, $det\,(-A) = det\,(A)$ आहे.
7. एक निश्चित अर्थव्यवस्था मध्ये दोन क्षेत्र आहेत: माल आणि सेवा. समजा, सर्व मालापैकी 60% आणि सर्व सेवांपैकी 30% वस्तूंच्या उत्पादनात वापरले जाते. एकूण आर्थिक उत्पादनाचे कोणते प्रमाण वस्तूंच्या उत्पादनात वापरले जाते?
8. खालील वाक्याच्या संबंधित एक काऊंटर उदाहरण द्या: जर n अज्ञात मधील m एक रेषीय समीकरण प्रणालीचा गुणांक मॅट्रिक्स ची रँक m आहे, तर त्या प्रणालीला उकल असते.

प्रकल्प / प्रात्यक्षिक /क्रियाकलाप

प्रकल्प

आलेख सिद्धांतात विविध प्रकारचे मॅट्रिक्स आणि त्यांचे अनुप्रयोग दर्शविणारे मॉडेल तयार करा.

प्रात्यक्षिक

1. एक MATLAB फंक्शन लिहा ज्यामध्ये मॅट्रिक्स , रो आणि कॉलम घ्यायचा आहे. फंक्शनला पास केलेल्या रो संखे पासून सुरुवात करून, फंक्शनला दिल्या गेलेल्या कॉलमला खाली स्क्रोल करा आणि ज्या कॉलम मध्ये सर्वात मोठी अबसोल्यूट किंमत आहे त्या रो संख्या सांगा.
2. मॅटलॅब चा वापर करून 3×3 मॅट्रिक्सचे डिटरमिनेंट शोधा.

क्रियाकलाप

1. एक दुकानदार 1 किलो गहू, 1 किलो तांदूळ आणि 1 किलो बाजरी ची P_1 पाकिटे आणि P_2 ज्यामध्ये 1 किलो गहू, 0 किलो तांदूळ आणि 1 किलो बाजरी आहे आणि P_3 ज्यामध्ये 0 किलो गहू , 1 किलो तांदूळ आणि 1 किलो बाजरी आहे अशी तीन पकिटे विकतो. फक्त एक किलो बाजरी खरेदी करणे शक्य आहे का हे तपासा? जर असेल तर कसे काय?
2. व्हेक्टर म्हणजे काय? तो मॅट्रिक्स चा प्रकार आहे का? एक उदाहरण देऊन आपल्या उत्तरावर विचार करा आणि समर्थन करा.
3. वेगवेगळ्या शहरांच्या विद्यार्थ्यांचा एक समूह बनवा ,एक आलेख बनवा आणि त्याच्यासाठी एक ॲडजन्सी मॅट्रिक्स बनवा, ज्यामध्ये व्हार्टाइसेस म्हणजे शहर आणि बाजू म्हणजे मालांच्या वाहतुकीचा खर्च घेऊन त्यासाठी अडजेसन्सी मॅट्रिक्स तयार करा.

अधिक जाणून घ्या

1. xyz गुणाकाराची मिनिमम किंमत ज्यासाठी डिटरमिनेंट $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$ ऋणात्मक नाही,

   a. -8 b. -1 c. $-2\sqrt{2}$ d. $-16\sqrt{2}$

2. जेव्हा $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$ एक ऑर्थोगोनाल मॅट्रिक्स असेल, तो अंदाजीत ट्रिपलेट (a, b, g) ची संख्या आहे.

   a. 8 b. 6 c. 4 d. 2

3. जेव्हा a, b $\neq 0$ आणि $f(n) = \alpha^n + \beta^n$ आणि $\begin{vmatrix} 3 & 1+f(1) & 1+f(2) \\ 1+f(1) & 1+f(2) & 1+f(3) \\ 1+f(2) & 1+f(3) & 1+f(4) \end{vmatrix} = k(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\alpha-\beta)^2$,

   तेव्हा k ची किंमत

   a. ab b. 1/ab c. 1 d. -1

4. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$ ची रँक काढा

5. 'a' ची किंमत काढा जेव्हा मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ची रँक 3 पेक्षा कमी असेल.

उत्तरे

1. a 2. a 3. C

4. $\rho(A) = \begin{cases} 3 & \text{जेव्हा } x \neq y,\ y \neq z,\ z \neq x \\ 2, & \text{एक तर } x = y, \text{ किंवा } x = z, \text{ आणि } y \neq z \ \ x \\ 1 & \text{जेव्हा } x = y = z \end{cases}$ 5. 0, 3

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
2. Dettman, J.W. (1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.
3. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
4. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
5. Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.
6. Hohn, E. Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
9. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
10. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
11. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.

4 व्हेक्टर स्पेसेस I

युनिट निर्दिष्टे

हे युनिट खालील विषय विस्तृतपणे स्पष्ट करते- व्हेक्टर स्पेस,व्हेक्टर चे लिनियर डिपेन्डंस आणि लिनियर इंडिपेन्डंस, लिनियर कॉम्बिनेशन, लिनियर स्पॅन बेसिस, डाइमेंशन, लिनियर ट्रांसफ़ोरमेशन(मॅप्स), लिनियर मॅप ची रेंज आणि कर्नल, रँक आणि नलिटि, लिनियर ट्रांसफ़ोरमेशन चा व्यस्त, रँक- नलिटि प्रमेय, लिनियर मॅप ची रचना, लिनियर मॅप शी संबंधित मॅट्रिक्स. सर्व संकल्पना विद्यार्थ्यांना सिद्धांत आणि अनुप्रयोग भाग अधिक स्पष्ट करण्यासाठी पुरेशा उदाहरणांशी जोडल्या गेल्या आहेत.

तर्कशास्त्र

रेषीय बीजगणित सर्वत्र लागू केले जाते, परंतु कधीकधी ते पाहणे कठीण होऊ शकते. आजकाल, गणित, विज्ञान आणि अभियांत्रिकीमध्ये व्हेक्टर स्पेस उपयोगी पडते. रेषीय समीकरणांच्या प्रणालींना सामोरे जाण्यासाठी ते योग्य रेषीय-बीजगणित कल्पना आहेत. एक रेषीय रूपांतरण स्वतः एक अनुप्रयोग नाही; उलट, ते एक प्रतिमान आहे. रेषीय बीजगणिताच्या मुख्य सामग्रीपैकी एक रेषीय रूपांतरण आहे. रेषीय रूपांतरणाची संकल्पना म्हणजे निर्देशक भूमितीतील निर्देशकांचे रूपांतरण, त्याचा सिद्धांत आणि पद्धती निर्देशक भूमिती, डिफरन्शिअल समीकरणे आणि इतर अनेक क्षेत्रांमध्ये आहेत आणि त्याचा व्यापक वापर देखील आहे. मॅट्रिक्सचा वापर संदेश संकेत लेखन करण्यासाठी केला जाऊ शकतो आणि संकेतन म्हणजेच मॅट्रिक्सचा व्यस्त असतो.मॅट्रिक्स हा व्हेक्टर स्पेस मधील एक रेषीय नकाशा आहे आणि आपण प्रतल परिवलनाचा अभ्यास करण्यासाठी काही मॅट्रिक्सचा वापर करू शकतो.

पूर्वतयारी

1. मॅट्रिक्सची रँक, व्यस्त आणि मॅट्रिक्सचा डिटरमिनंट यांची चांगली समज.
2. रेषीय समीकरणाच्या प्रणालीच्या समाधानाच्या निर्मिती आणि विश्लेषणावर प्रभुत्व असणे.
3. मॅट्रिक्सवर प्राथमिक क्रिया कशी लागू करावी हे विद्यार्थ्याला माहित असले पाहिजे.
4. सुरजेक्टिव्ह फंक्शन, इंजेक्टिव्ह फंक्शन इत्यादी फंक्शनच्या वर्तनाबद्दल स्पष्ट समज.

युनिट आउटकम (UO)

हा घटक पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी सक्षम होतील:

U4-O1: व्हेक्टर स्पेस, सब स्पेस, बेसिस, डायमेंशन आणि त्यांचे गुणधर्म या संकल्पना समजून घेतील.

U4-O2: रेषीय रूपांतरणाच्या गुणधर्मांबद्दल जाणून घेतील; R^n ते R^m पर्यंत रेषीय रूपांतरण, मॅट्रिक्स चे कोरिलेशन चा अर्थ लावतील तसेच उलटपक्षी.

U4-O3: तपासा आणि निर्धारित करा कि मॅट्रिक्स कसे बदलतात, जेव्हा त्यांचे बेसिस बदलले जातात; रँक नलिटी

प्रमेयाबद्दल जाणून घ्या.

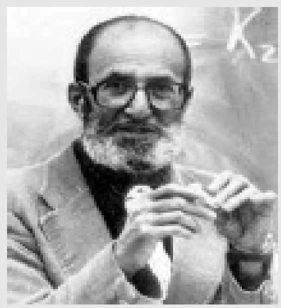
U4-O4: रेंज स्पेस, नल स्पेस, कर्नल स्पेस आणि रेषीय रूपांतरणाच्या विशेष प्रकारांच्या संकल्पनेचे मूल्यांकन करा; आधार/रेषीय नकाशे मॅट्रिक्स आणि तसेच या उलट.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध:

युनिट 4 परिणाम	अभ्यासक्रम निष्पत्तीचे अपेक्षित प्रतिचित्रण (1- कमकुवतपरस्परसंबंध; 2- मध्यमपरस्परसंबंध; 3- मजबूतपरस्परसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U4-O1	-----	----	----	3	1
U4-O2	----	----	2	3	2
U4-O3	----	----	1	3	2
U4-O4	----	----	2	3	2

इतिहास

सामान्य दोन- आणि त्रिमितीय रिक्त स्थानांच्या कल्पनेतून वेक्टर स्पेसची कल्पना विकसित झाली आहे, वास्तविक संख्या {a, b, c, …} च्या संबंधित क्षेत्रासह {u, v, w, …} वेक्टरचा समूह म्हणून. अमूर्त बीजगणित घटक म्हणून वेक्टर स्पेस प्रथम इटालियन गणिततज्ञ ज्युसेप्पे पियानो यांनी 1888 मध्ये परिभाषित केले. पियानोने त्याच्या वेक्टर स्पेस ला “रेषीय प्रणाली” म्हटले कारण त्याने अचूकपणे पाहिले की कोणीही अवकाशातील कोणताही वेक्टर परिष्कृतपणे अनेक वेक्टर आणि स्केलरच्या रेषीय संयोजनातून मिळवू शकतो — av + bw +… + cz.



- पॉल हलमोस

4.1 व्हेक्टर स्पेस

समजा F हे एक क्षेत्र आणि अरिक्त संच V आहे, दोन द्विपद क्रियेसह ज्याला व्हेक्टर बेरीज '+' आणि स्केलर गुणाकार म्हणतात. जर ही रचना खालील अटींची पूर्तता करत असेल तर त्याला क्षेत्र F वर व्हेक्टर स्पेस म्हणतात.

i. V हा बेरजे अंतर्गत क्लोज्ड आहे म्हणजेच $u+v \in V$ सर्व $u, v \in V$ साठी.

ii. असोसीएटीविटी म्हणजे $u+(v+w) = (u+v)+w$ सर्व $u, v, w \in V$ साठी.

iii. ॲडिटिव्ह अडेन्टिटीचे अस्तित्व: तेथे एक घटक $0 \in V$ असा अस्तित्वात असतो की $u + 0 = 0 + u = u$ सर्व $u \in V$ साठी.

iv. ॲडिटिव्ह व्यस्ताचे अस्तित्व: प्रत्येक $u \in V$ साठी, एकच घटक असा अस्तित्वात आहे $-u \in V$ की

$$u + (-u) = 0 = (-u) + u.$$

v. कम्यूटेटिव्हिटी: $u + v = v + u$ सर्व $u, v \in V$ साठी.

vi. V स्केलर गुणाकार क्लोज्ड आहे; म्हणजेच, $au \in V$ सर्व $a \in F, u \in V$ साठी.

vii. $a(u + v) = au + av$ सर्व $a \in F, u, v \in V$ साठी.

viii. $(a + b) u = au + bu$ सर्व $a, b \in F, u \in V$ साठी.

ix. $(ab) u = a (bu)$ सर्व $a, b \in F, u \in V$ साठी.

x. $1u = u$ सर्वांसाठी $u \in V$ आणि '1' हे F ची गुणात्मक आयडेंटीटी आहे.

म्हणून V(F) हा व्हेक्टर स्पेस आहे.

टिप्पणी: V च्या घटकांना व्हेक्टर म्हणतात आणि F च्या घटकांना स्केलर म्हणतात.

उदाहरणार्थ. Z (Q) हा व्हेक्टर स्पेस आहे की नाही हे तपासा?

उकल. समजा $1 \in Z$ आणि $\frac{1}{2} \in Q$

गुणधर्म (vi) वरून $au \in V$ सर्व $a \in F$ आणि $u \in V$.

$\therefore \qquad 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \notin Z$

अशा प्रकारे, Z (Q) व्हेक्टर स्पेस नाही.

4.1.1 R^n मधील व्हेक्टर

n (वास्तविक) डायमेंशन मधील व्हेक्टर ला क्रमित n-टपल (a_1, a_2, a_n) म्हणून परिभाषित केले आहे, जेथे प्रत्येक a_i ही वास्तविक संख्या आहे ($a_i \in R$). सर्व n डायमेंशन व्हेक्टर चा संच R^n द्वारे दर्शविला जातो. वास्तविक संख्यांच्या क्रमित n-टपलला वास्तविक n-व्हेक्टर म्हणतात. गणिताच्या भाषेनुसार, असे लिहिले आहे,

$$\Re^n = \{a_1, a_2, ...a_n \mid a_i \in \Re, 1 \le i \le n\}$$

4.1.2 मॅट्रिक्समधील व्हेक्टर

$M_{m \times n}(F)$ = सर्व $m \times n$ मॅट्रिक्सचा संच ज्यांचे घटक F मध्ये आहेत.

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in F$$

4.1.3 जास्तीत जास्त डिग्री n असलेल्या बहुपदातील व्हेक्टर

$P_n(F)$ = F च्या गुणांकासह किमान n डिग्री असलेल्या सर्व बहुपदांचा संच आणि शून्य बहुपदि.

$$= \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \ a_i \in F, n \in N \cup \{0\}\}$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.1. सिद्ध करा की R वरील सर्व डायगोनल मॅट्रिक्सचा संच हा मॅट्रिक्सच्या बेरीज आणि स्केलर गुणाकाराच्या संदर्भात एक व्हेक्टर स्पेस आहे.

उकल. समजा $\qquad V = n \times n$ ऑर्डर असलेल्या सर्व डायगोनल मॅट्रिक्सचा संच

$$= [a_{ii}]_{n \times n}, a_{ii} \in R$$

जसे आपल्याला माहित आहे की $n \times n$ समान ऑर्डर असलेल्या मॅट्रिक्सची बेरीज परिभाषित केली आहे आणि मॅट्रिक्सचा गुणाकार

आहे.

$$\alpha A = [\alpha\, a_{ii}]_{n\times n}$$

i. समजा $[a_{ii}]_{n\times n}, [b_{ii}]_{n\times n} \in V$, तर

$$[aii]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n} = [a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n}$$

हा देखील एक डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.

ii. समजा $[a_{ii}]_{n\times n}, [b_{ii}]_{n\times n}, [c_{ii}]_{n\times n} \in V$

$$\therefore\ [a_{ii}]_{n\times n} + \{[b_{ii}]_{n\times n} + [c_{ii}]_{n\times n}\} = [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii} + c_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii} + c_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii} + (b_{ii} + c_{ii})]_{n\times n}$$

$$= [(a_{ii} + b_{ii}) + c_{ii}]_{n\times n}$$ [∵ बेरीज हि R वर असोसिएटिव्ह आहे]

$$= [a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n} + [c_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n} + [c_{ii}]_{n\times n}$$

iii. समजा $A = [aii]_{n\times n} \in V.$

आपल्याला माहित आहे कि $n\times n$ ऑर्डर चा संच V मधील मॅट्रिक्स ला 0 ने दर्शविले जाते.

$$0 = [0]_{n\times n}$$

$$A + 0 = [a_{ii}]_{n\times n} + [0]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii} + 0]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii}]_{n\times n} = A$$

त्याचप्रमाणे, $0 + A = A$

iv. समजा $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$, तेव्हा अस्तित्वात आहे.

$$-A = [-a_{ii}]_{n\times n} \in V$$

आता, $A + (-A) = [a_{ii}]_{n\times n} + [-a_{ii}]_{n\times n}$

$$= [a_{ii} - a_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [0]_{n\times n}$$

$$= 0$$

त्याचप्रमाणे, $(-A) + A = 0$

v. समजा $A = [a_{ii}]_{n\times n}, B = [b_{ii}]_{n\times n} \in V$

$$\therefore\ A + B = [a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [a_{ii} + b_{ii}]_{n\times n}$$

$$= [b_{ii} + a_{ii}]_{n\times n}$$ [∵ बेरीज हि R वर असोसिएटिव्ह आहे]

$$= [b_{ii}]_{n\times n} + [a_{ii}]_{n\times n}$$

$$= B + A$$

vi. समजा $a \in R, A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$

आता, $aA = a[a_{ii}]_{n\times n}$

$= [aa_{ii}]_{n\times n}$

$= n \times n$ चा डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.

vii. समजा $A = [a_{ii}]_{n\times n}, B = [b_{ii}]_{n\times n} \in V$ आणि $a \in R$

$\therefore \quad a(A + B) = a([a_{ii}]_{n\times n} + [b_{ii}]_{n\times n})$

$= a\ [a_{ii} + b_{ii}]\ _{n\times n} = [a\ (a_{ii} + b_{ii})]\ _{n\times n}$

$= [a.\ a_{ii} + a.\ b_{ii}]\ _{n\times n}$ [$\because$ गुणाकार हा R वर डिस्ट्रीब्युटिव्ह आहे]

$= [a\ a_{ii}]_{n\times n}+[a.\ b_{ii}]_{n\times n}$

$= a\ [a_{ii}]_{n\times n}+ a[b_{ii}]_{n\times n}$

$= aA + aB$

viii. समजा $a, b \in R$ आणि $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$

$\therefore \quad (a + b)\ A = (a + b)\ [a_{ii}]_{n\times n}$

$= [(a + b).\ a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a\ .\ a_{ii} + b\ .\ a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a\ .\ a_{ii}]_{n\times n} + [b\ .\ a_{ii}]_{n\times n}$

$= a[a_{ii}]_{n\times n} + [b\ .\ a_{ii}]_{n\times n}$

$= a[a_{ii}]_{n\times n} + b\ .\ [a_{ii}]_{n\times n}$

$= aA + bA$

ix. समजा $a, b \in R$ आणि $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$

$\therefore \quad (ab)A = (ab)\ [a_{ii}]_{n\times n}$

$= [(ab)\ a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a(ba_{ii})]_{n\times n}$

$= a[b\ .a_{ii}]_{n\times n}$

$= a\ ([b[a_{ii}]_{n\times n})$

$= a(bA)$

x. समजा $A = [a_{ii}]_{n\times n} \in V$, तर

$1\ .\ A = 1\ .\ [a_{ii}]_{n\times n} = [1\ .\ a_{ii}]_{n\times n}$

$= [a_{ii}]_{n\times n} = A$

अशा प्रकारे V व्हेक्टर स्पेसचे सर्व गुणधर्म पूर्ण करते आणि म्हणून V(R) हा एक व्हेक्टर स्पेस आहे.

उदाहरण 4.2. सर्व $m \times n$ मॅट्रिक्सचा संच त्यांच्या वास्तविक संख्यांच्या घटकांसह क्षेत्र R वरील वास्तविक संख्यांच्या संदर्भात मॅट्रिक्सची मॅट्रिक्स बेरीज आणि मॅट्रिक्सचा स्केलरने गुणाकार म्हणजे अदिश गुणाकार हा व्हेक्टर स्पेस आहे हे दाखवा.

उकल. समजा $M = \{[a_{ij}]_{m\times n}; a_{ij} \in R\}$

समान ऑर्डर $m \times n$ च्या मॅट्रिक्सची बेरीज परिभाषित केली जाते आणि मॅट्रिक्स गुणाकार देखील परिभाषित केले जातो.

i. समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M$, तेव्हा

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \in M$$

ii. समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M, C = [c_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore$ $[a_{ij}]_{m\times n} + \{[b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}\}$
$$= [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m\times n}$$ [$\because$ बेरीज हि R वर असोसिएटिव्ह आहे]
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} + [c_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\} + [c_{ij}]_{m\times n}$$

iii. समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

आपल्याला माहित आहे की 0 ने दर्शविला जाणारा $m \times n$ ऑर्डरचा शून्य मॅट्रिक्स संच M मध्ये असतो.

म्हणजेच $0 = [0]_{m\times n}$

आता, $A + 0 = [a_{ij}]_{m\times n} + [0]_{m\times n}$
$$= [a_{ij} + 0]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

त्याचप्रमाणे, $0 + A = A$

iv. समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$, तेव्हा अस्तित्वात आहे.
$$-A = [-a_{ij}]_{m\times n} \in M$$

आता , $A + (-A) = [a_{ij}]_{m\times n} + [-a_{ij}]_{m\times n}$
$$= [a_{ij} - a_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [0]_{m\times n}$$
$$= 0$$

त्याचप्रमाणे $(-A) + A = 0$

v. समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M$
$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n}$$ [$\because$ बेरीज हि R वर कम्यूटेटिव्ह आहे]
$$= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n}$$
$$= B + A$$

vi. समजा $a \in R$ आणि $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

आता , $aA = a[a_{ij}]_{m\times n}$
$$= [aa_{ij}]_{m\times n} \in M.$$

vii. समजा $a \in R$ आणि $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore$ $a(A + B) = a\{[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\}$

$= a[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ [∵ गुणाकार हा R वर डिस्ट्रीब्युटिव्ह आहे]

$= [a(a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a \cdot a_{ij} + a \cdot b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a \cdot a_{ij}]_{m\times n} + [a \cdot b_{ij}]_{m\times n}$

$= [a \cdot a_{ij}]_{m\times n} + [a \cdot b_{ij}]_{m\times n}$

$= a[a_{ij}]_{m\times n} + a[b_{ij}]_{m\times n}$

$= aA + aB$

viii. समजा $a, b \in R$ आणि $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore \quad (a+b)A = (a+b)\,[a_{ij}]_{m\times n}$

$= [(a+b) \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a \cdot a_{ij} + b \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a \cdot a_{ij}]_{m\times n} + [b \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

$= a[a_{ij}]_{m\times n} + b[a_{ij}]_{m\times n}$

$= aA + bA.$

ix. समजा $a, b \in R$ आणि $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$

$\therefore \quad (ab)A = (ab)\,[a_{ij}]_{m\times n}$

$= [(ab)a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a(b \cdot a_{ij})]_{m\times n}$

$= a[b \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

$= a\{b[a_{ij}]_{m\times n}\}$

$= a(bA)$

x. समजा $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M$, तेव्हा

$1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [1 \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

$= [a_{ij}]_{m\times n} = A$

अशाप्रकारे, M हा व्हेक्टर स्पेसचे सर्व गुणधर्म पूर्ण करतो आणि म्हणून M हा R वर व्हेक्टर स्पेस आहे.

उदाहरण 4.3. व्हेक्टर चा संच $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ असा आहे की $x_2 > 0$ नेहमीच्या बेरीज आणि स्केलर गुणाकार साठी व्हेक्टर स्पेस आहे किंवा नाही ?

उकल. समजा $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_2 > 0, \forall x_i \in R; 1 \le i \le 4\}$

समजा $-1 \in R$ आणि $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ जेथे $x_2 > 0$

आता, गुणधर्म (vi) द्वारे $au \in V \ \forall\, a \in F$ आणि $u \in V$

$\Rightarrow \quad -1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4) \notin V$

कारण $x_2 < 0$

$\therefore$ V (R) व्हेक्टर स्पेस नाही.

अभ्यास 4.1

1. सिद्ध करा.
   i. C हा C वरील व्हेक्टर स्पेस आहे.
   ii. R हा C वरील व्हेक्टर स्पेस नाही.
   iii. C हा Q वरील व्हेक्टर स्पेस आहे.
   iv. Z हा Q वरील व्हेक्टर स्पेस नाही.
   v. C हा R वरील व्हेक्टर स्पेस आहे.
2. समजा $V = \{(a, b); a, b \in R\}$ तर V हा खालील प्रत्येक केसमध्ये परिभाषित केल्याप्रमाणे वास्तविक बेरीज आणि स्केलर गुणाकार याच्यामध्ये व्हेक्टर स्पेस नाही हे दाखवा.
   i. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ आणि $k (a, b) = (0, kb)$
   ii. $(a, b) + (c, d) = (0, b + d)$ आणि $k (a, b) = (ka, kb)$
   iii. $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$ आणि $k (a, b) =(ka, kb)$
   iv. $(a, b) + (c, d) = (0, 0)$ आणि $k (a, b) = (ka,kb)$
3. R^4 चे खालीलपैकी कोणते उपसंच नेहमीच्या बेरीज आणि स्केलर गुणाकारासाठी व्हेक्टर स्पेस आहेत? सदिशांचा संच $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ असे आहेत.
   a. $x_1 = 0$ b. $x_1 < 0$ c. $x_4 = 0$ d. $3x_3^2 \geq 0$
   e. $2x_1 + 3x_2 = 0$
4. हे सिद्ध करा की सर्व मॅट्रिक्सचा संच $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ जेथे $x, y \in C$ हे C वर मॅट्रिक्स बेरीज आणि स्केलर गुणाकाराच्या संदर्भात एक व्हेक्टर स्पेस आहे.

उत्तरे

1. a. होय b. नाही c. होय d. होय
   e. होय

4.2 व्हेक्टर चे लिनिअरली डिपेन्डन्स आणि इनडिपेन्डन्स

लिनिअरली डिपेन्डन्ट व्हेक्टर्स: समजा V(F) हा एक व्हेक्टर स्पेस आहे. व्हेक्टर $\{v_1, v_2, ...v_n\} \in V$ ला लिनिअरली डिपेन्डन्ट (L.D.) असे म्हटले जाते, जर असे स्केलर $a_1, a_2 .... \in F$ (सर्व शून्य नाहीत) अस्तित्वात असतील कि

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट व्हेक्टर्स: समजा V(F) हा एक व्हेक्टर स्पेस आहे. व्हेक्टर $\{v_1, v_2, ...v_n\} \in V$ ला लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट (L.I.) असे म्हटले जाते, जर तेथे

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0 \text{ सर्व } a_i \in F, 1 \leq i \leq n \text{ साठी}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ...a_n = 0$$

निष्पत्ती

i. रिक्त संच लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट म्हणून परिभाषित केला जातो.

ii. केवळ शून्य व्हेक्टर असलेला एक संच म्हणजेच {0} हा लिनिअरली डिपेन्डन्ट असतो.

iii. केवळ एक शून्य नसलेला व्हेक्टर चा संच लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट असतो.

iv. दोन व्हेक्टर लिनिअरली डिपेन्डन्ट असतील जर त्यापैकी एक इतरांच्या स्केलर पटीमध्ये असेल.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.4. खालील व्हेक्टर च्या संचाचे लिनिअरली डिपेन्डन्ट/इनडिपेन्डन्ट तपासा:

i. $\{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 2, 3)\}$ R^3 मध्ये ii. $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 3)\}$ R^3 मध्ये.

उकल. समजा $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 0, 0)$, $w = (0, 2, 3)$

समजा $au + bv + cw = 0$ काही स्केलर a, b, c साठी

$\therefore \quad a(1, 2, 3) + b(1, 0, 0) + c(0, 2, 3) = 0$

$\Rightarrow \quad (a + b, 2a + 2c, 3a + 3c) = (0, 0, 0)$

संबंधित घटकांची तुलना केल्यावर आपल्याला मिळते

$$a + b = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$2a + 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad a + c = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$3a + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad a + c = 0$$

समीकरण (1), वरून $a = -b$

समीकरण (2), वरून $a = -c$

$\therefore \quad a = -b, \quad a = -c,$ a च्या प्रत्येक मूल्यासाठी उकल आहे.

जर $a = 1, b = -1, c = -1$, उकल आहे. तर दिलेल्या व्हेक्टर्सचा संच L.D.आहे.

पर्यायी पद्धत: मॅट्रिक्स 'A' तयार करा ज्यांचे कॉलम हे दिलेले व्हेक्टर असतील.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_3 \to R_3 - \frac{3}{2}R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

हा मॅट्रिक्स A चा रो इचीलॉन फॉर्म आहे आणि $\rho(A)$ = A ची रॅंक = **2** < A च्या कॉलम ची संख्या.

म्हणून दिलेले व्हेक्टर्स हे L.D आहेत**.**

ii. कॉलम मध्ये व्हेक्टर लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा, म्हणजे,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हा मॅट्रिक्स A चा रो इचीलॉन फॉर्म आहे आणि $\rho(A) = 3$ =A च्या कॉलम ची संख्या.

म्हणून, दिलेला व्हेक्टर L.I आहे.

टिप्पणी: व्हेक्टर लिनिअरली डिपेन्डन्ट/ लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत की नाही हे मॅट्रिक्स पद्धतीने तपासण्यासाठी.

i. मॅट्रिक्स A तयार करा ज्याचे कॉलम दिलेले व्हेक्टर असतील.

ii. प्राथमिक रो ऑपरेशन वापरून मॅट्रिक्स A ला रो इचीलॉन स्वरूपात संक्षेपीत करा.

iii. $\rho(A)\begin{cases} = n = L.I \\ < n = L.D \end{cases}$ जेथे n = कॉलमची संख्या

उदाहरण 4.5 व्हेक्टर $\{(1, -1, 3), (1, 2, -3), (\alpha, 0, 1)\}$ L.D असल्यास α शोधा.

उकल. समजा $u = (1, -1, 3)$, $v = (1, 2, -3)$ आणि $w = (\alpha, 0, 1)$.

व्हेक्टर्स लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहेत, म्हणून

$$au + bv + cw = 0$$

जेथे a, b, c स्केलर आहेत आणि सर्व शून्य नाहीत.

$$a(1, -1, 3) + b(1, 2, -3) + c(\alpha, 0, 1) = 0$$

$$(a + b + \alpha c, -a + 2b, 3a - 3b + c) = (0, 0, 0)$$

संबंधित घटकांची तुलना केल्यावर आपल्याला मिळते.

$$a + b + \alpha c = 0 \quad \ldots(1)$$

$$-a + 2b = 0 \quad \ldots(2)$$

$$3a - 3b + c = 0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (2) ला 2 ने गुणाकार करा आणि (3) मध्ये मिळवा

$$3a - 3b + c = 0$$

$$-2a + 4b = 0$$

$$a + b + c = 0 \quad \ldots(4)$$

समीकरण (1) मधून (4) वजा केल्यास आपल्याला मिळते

$$\alpha c - c = 0$$

किंवा $c(\alpha - 1) = 0$

परंतु $c \neq 0$, म्हणून $\alpha - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$

उदाहरण 4.6 $\{x^3 - x + 1, x^3 + 2x + 1, x + 1\}$, वास्तविक संख्यांच्या फिल्ड वरील सर्व बहुपदी च्या व्हेक्टर स्पेस मधील व्हेक्टर चा संच लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहे हे दाखवा.

उकल. समजा $a, b, c \in R$

$\therefore \quad a(x^3 - x + 1) + b(x^3 + 2x + 1) + c(x + 1) = 0$

$(a + b)x^3 + (-a + 2b + c)x + (a + b + c) = 0$

दोन्ही बाजूंच्या x च्या घातांकाचे समान गुणांकाची तुलना करून, आपल्याला मिळते

$$a + b = 0 \qquad ..(1)$$

$$-a + 2b + c = 0 \qquad ...(2)$$

$$a + b + c = 0 \qquad ...(3)$$

(3) मधून (1) वजा केल्यावर आपल्याला मिळते

$$c = 0$$

(2), वरून $-a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2b$

(3), वरून $a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b$

अशा प्रकारे $-b = 2b \quad \Rightarrow \quad 3b = 0$

$b = 0$ आणि म्हणून $a = 0$

एकमेव उकल $a = 0, b = 0, c = 0$ आहे. म्हणून दिलेले व्हेक्टर्स हे लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत.

पर्यायी पद्धत: मॅट्रिक्स 'A' तयार करा ज्यांचे कॉलम हे दिलेले व्हेक्टर असतील.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

क्रिया करून $R_2 \to R_2 + R_1, R_4 \to R_4 - R_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

क्रिया करून $R_4 \leftrightarrow R_3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

हा मॅट्रिक्स A चा रो इचीलॉन फॉर्म आहे आणि $\rho(A)$ = A ची रँक = 3 = A च्या कॉलम ची संख्या.
म्हणून दिलेले व्हेक्टर्स हे लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत.

उदाहरण 4.7 व्हेक्टर चा दिलेला संच लिनिअरली डिपेन्डन्ट किंवा लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत की नाही ते ठरवा.
$u = (1, -5, -2, 3), v = (1, 0, 0, -1), w = (1, 0, 2, 4)$

उकल. समजा $u = (1, -5, -2, 3), v = (1, 0, 0, -1), w = (1, 0, 2, 4)$.
समजा $au + bv + cw = 0$ काही स्केलर $a, b, c \in R$ साठी

$\therefore \quad a(1, -5, -2, 3) + b(1, 0, 0, -1) + c(1, 0, 2, 4) = 0$

$\Rightarrow \quad (a + b + c, -5a, -2a + 2c, 3a - b + 4c) = (0, 0, 0, 0)$

संबंधित घटकांची बरोबरी केल्यास, आपल्याला मिळते

$$a + b + c = 0 \qquad ...(1)$$
$$-5a = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$-2a + 2c = 0 \qquad ...(2)$$
$$3a - b + 4c = 0 \qquad ...(3)$$

समीकरण (2) वरून, आपल्याला मिळते $c = 0$
समीकरण (1) मध्ये $a = 0$ आणि $c = 0$ वापरून, आपल्याला मिळेल $b=0$
एकमेव उकल $a = 0, b = 0, c = 0$ आहे. म्हणून दिलेले व्हेक्टर्स हे लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत.

अभ्यास 4.2

1. खालीलपैकी कोणते व्हेक्टर्स हे लिनिअरली डिपेन्डन्ट किंवा लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत हे ठरवा.
   i. {(2,3,1),(-1,4,-2),(1,18,-4)}
   ii. {(0,2,-4),(1,-2,-1),(1,-4,3)}
   ii. {(1,2,3),(0,1,2),(-1,4,5)}
   iv. {(2,3,-1,-1),(1,-1,-2,-4),(3,1,3,-2),(6,3,0,-7)}
2. व्हेक्टर (1, -1, 3), (1, p, 3) आणि (1, 0, 1) लिनिअरली डिपेन्डन्ट असल्यास p शोधा.
3. व्हेक्टर (2, 0, k), (3, -1, 5), (5, -1, 1) लिनिअरली डिपेन्डन्ट असल्यास k शोधा.
4. डिग्री ≤ 4 च्या बहुपदीच्या व्हेक्टर स्पेसमध्ये, खालीलपैकी कोणते संच लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत?
   i. $x+1, x^3+x^2, x+x^2, x^3+x^4, x^4-1$
   ii. x^3+1, x^3-1, x, x^4-x

उत्तरे

1. i. लिनिअरली डिपेन्डन्ट ii. लिनिअरली डिपेन्डन्ट iii. लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट
   iv. लिनिअरली डिपेन्डन्ट
2. p = -1 3. k = -4 4. i. लिनिअरली डिपेन्डन्ट ii. लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट

4.3 व्हेक्टरचे रेषीय संयोजन

V(F) एक व्हेक्टर स्पेस असू द्या. व्हेक्टर $v \in V$ हे $v_1, v_2, ...v_n \in V$, $v_n \in V$ व्हेक्टरचे रेखीय संयोजन (L.C.) असे म्हटले जाते जर V ला $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ...a_nv_n$ म्हणून लिहिले जाऊ शकते.
जेथे a_i's $\in$ F स्केलर आहे.

उदाहरण:

i. समजा $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, तेव्हा

$$V = (2,3,4)$$

व्हेक्टर v_1, v_2 आणि v_3 चे एक रेखीय संयोजन आहे आणि ते असे व्यक्त केले जाऊ शकते.

$$(2, 3, 4) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$$

$$V = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

ii. शून्य व्हेक्टर 0 देखील मर्यादित संख्येने व्हेक्टर L.C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते.

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.8. व्हेक्टर u = (2, -5, 4) हा व्हेक्टर स्पेस $v_1 = (1, -3, 2)$ आणि $v_2 = (2, -1, 1)$ यांचे व्हेक्टर स्पेस व $V_3(R)$ मध्ये रेषीय संयोजन म्हणून लिहा.

उकल. समजा $u = av_1 + bv_2;\ a, b \in R$

$$\Rightarrow \quad (2, -5, 4) = a(1, -3, 2) + b(2, -1, 1)$$

$$(2, -5, 4) = (a + 2b, -3a - b, 2a + b)$$

संबंधित घटकांची तुलना केल्यावर आपल्याला मिळते

$$a + 2b = 2 \qquad \ldots(1)$$

$$-3a - b = -5 \qquad \ldots(2)$$

$$2a + b = 4 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) आणि (3) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$a = 1$$

समीकरण (3) वरून, आपल्याला मिळेल b=2

परंतु a = 1, b = 2, समीकरण (1) चे समाधान करत नाही.

जस की $a + 2b = 1 + 4 = 5 \neq 2$

म्हणून, दिलेला व्हेक्टर v_1 आणि v_2 हे L.C. स्वरूपात व्यक्त केला जाऊ शकत नाही.

उदाहरण 4.9. a, b, c यासाठी अटी शोधा ज्यासाठी मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ हे L.C मध्ये आहेत.

उकल. समजा

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

जेथे $a_1, a_2, a_3 \in R$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

दोन मॅट्रिक्सच्या समानतेच्या व्याख्येतून आपल्याला मिळते

$$a = a_1 + a_2 + a_3 \qquad ...(2)$$

$$-b = a_1 + a_2 - a_3 \qquad ...(3)$$

$$b = -a_2 \qquad ...(4)$$

$$c = -a_1 \qquad ...(5)$$

समीकरण (2) आणि (3) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळते.

$$a - b = 2a_1 + 2a_2 \qquad ...(6)$$

समीकरण (6) मध्ये (4) आणि (5) वापरून आपल्याला मिळते.

$$a - b = -2c - 2b$$

$$a + b + 2c = 0$$

जी एक आवश्यक अट आहे.

पर्यायी पद्धत: आपण रो मध्ये मॅट्रिक्सचे घटक लिहून मॅट्रिक्स $[A:b]$ तयार करू, म्हणजे,

$$[A:b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & 1 & -1 & : & -b \\ 0 & -1 & 0 & : & b \\ -1 & 0 & 0 & : & c \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_4 \rightarrow R_4 + R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & 0 & -2 & : & -b-a \\ 0 & -1 & 0 & : & b \\ 0 & 1 & 1 & : & c+a \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_4 \rightarrow R_4 + R_3,\ R_2 \rightarrow \frac{-R_2}{2}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{b+a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & : & b \\ 0 & 0 & 1 & : & c+a+b \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_3 \rightarrow (-1)R_3,\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & a \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{a+b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & -b \\ 0 & 0 & 0 & : & \frac{a+b+2c}{2} \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_3 \leftrightarrow R_3$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & a \\ 0 & 1 & 0 & : & -b \\ 0 & 0 & 1 & : & \dfrac{a+b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & : & \dfrac{a+b+2c}{2} \end{bmatrix}$$

a + b + 2c = 0 हि आवश्यक अट आहे.

उदाहरण 4.10. k चे मूल्य शोधा जेणेकरून u = (1, 2, 3) आणि v = (2, 3, 1) चे L.C, w = (1, k, 4) हा असेल.

उकल. w हा u आणि v चा L.C असल्याने, स्केलर a_1, $a_2 \in R$ असे अस्तित्वात आहे.

$$w = a_1u + a_2v$$

$$(1,k,4) = a_1(1,2,3) + a_2(2,3,1)$$

$$= (a_1 + 2a_2,\ 2a_1 + 3a_2,\ 3a_1 + a_2)$$

संबंधित घटकांची तुलना केल्यावर आपल्याला मिळते.

$$a_1 + 2a_2 = 1 \qquad ...(1)$$

$$2a_1 + 3a_2 = k \qquad ...(2)$$

$$3a_1 + a_2 = 4 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) आणि (3) वरून, आपल्याला मिळेल.

$$a_1 = \frac{7}{5}, \qquad a_2 = \frac{-1}{5}$$

ही मूल्ये समीकरण (2) मध्ये ठेऊन, आपल्याला मिळेल.

$$\frac{14}{5} - \frac{3}{5} = k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{11}{5}$$

पर्यायी पद्धत: रो मध्ये u आणि v लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा, म्हणजे,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \ [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 4 \end{bmatrix}$$

तर

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 2 & 3 & : & k \\ 3 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & -1 & : & k-2 \\ 0 & -5 & : & 1 \end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_3 \to R_3 - 5R_2$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & -1 & : & k-2 \\ 0 & 0 & : & 11-5k \end{bmatrix}$$

w हे u आणि v चे L.C असल्याने,

$$11-5k=0$$

$$\Rightarrow \qquad k=\frac{11}{5}$$

उदाहरण 4.11. बहुपदी $3x^2-5x+7$, बहुपदी $2x^2+7x-3$ आणि x^2+3x-5 चे L.C म्हणून व्यक्त करता येईल का?

उकल. समजा $3x^2-5x+7=a(2x^2+7x-3)+b(x^2+3x-5)$ जेथे $a,b\in R$

$$3x^2-5x+7=(2a+b)x^2+(7a+3b)x+(-3a-5b)$$

x च्या घातांकाच्या सहगुणकाची तुलना करून, आपल्याला मिळेल.

$$3=2a+b \qquad ...(1)$$

$$-5=7a+3b \qquad ...(2)$$

$$7=-3a-5b \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) आणि (2) वरून, आपल्याला मिळेल, $a=-14$, $b=31$

ही मूल्ये (3) मध्ये ठेऊन,

$$-3(-14)-5(31)=42-155=-113\neq 7 \qquad \text{[समीकरण (3) ची उजवी बाजू]}$$

म्हणून, (1), (2) आणि (3) समीकरणांना काही उकल नाही.

अशा प्रकारे, $3x^2-5x+7$ ला $2x^2+7x-3$ आणि x^2+3x-5 यांचे (लिनियर कॉम्बिनेशन) L.C म्हणून व्यक्त करता येत नाही.

पर्यायी पद्धत: कॉलम मध्ये x च्या वेगवेगळे घातांक लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा. म्हणजे,

$$[A]=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\quad [B]=\begin{bmatrix}7\\ -5\\ 3\end{bmatrix}$$

$$[A:B]=\begin{bmatrix}-3 & -5 & : & 7\\ 7 & 3 & : & -5\\ 2 & 1 & : & 3\end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_2\to R_2+\frac{7}{3}R_1,\ R_3\to R_3+\frac{2}{3}R_1$

$$\sim\begin{bmatrix}-3 & -5 & : & 7\\ 0 & -26/3 & : & 34/3\\ 0 & -7/3 & : & 25/3\end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_2\to 3R_2,\ R_3\to 3R_3$

$$\sim\begin{bmatrix}-3 & -5 & : & 7\\ 0 & -26 & : & 34\\ 0 & -7 & : & 25\end{bmatrix}$$

क्रिया करून $R_3\to R_3-\frac{7}{26}R_2$, $\sim\begin{bmatrix}-3 & -5 & : & 7\\ 0 & -26 & : & 34\\ 0 & 0 & : & 206/13\end{bmatrix}$

$\rho(A) = 2, \rho(A : B) = 3$, प्रणालीला कोणतीही उकल नाही.

म्हणून $3x^2 - 5x + 7$ ला दिलेल्या बहुपदांमध्ये L.C(लिनियर कॉम्बिनेशन) च्या स्वरूपात व्यक्त करता येत नाही.

4.3.1 लिनिअर स्पॅन

समजा V(F) हा एक व्हेक्टर स्पेस आहे आणि $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, व्हेक्टर स्पेस V(F) चे रिक्त नसलेले उपसंच आहेत. S च्या मर्यादित घटकांच्या सर्व संचाच्या L.C. हा लिनिअर स्पॅन आहे.
त्याला L(S) द्वारे दर्शविले जाते.

$$L(S) = \langle S \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i v_i;\ a_i \in F,\ v_i \in S$$, येथे n मर्यादित आहे.

म्हणजेच, V मधील प्रत्येक व्हेक्टर हा s मधील व्हेक्टर्स चा L.C असतो.

उदाहरणार्थ: संच {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} $R^3(R)$ चा स्पॅनिंग संच आहे कारण

$R^3(R)$ चा प्रत्येक व्हेक्टर तीन व्हेक्टरचे LC म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.12. (1, -3, 5) हा S = {(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)} द्वारे तयार झालेल्या व्हेक्टर स्पेसचे आहेत की नाही ते तपासा.

उकल: दिलेला संच $S = \{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)\}$

समजा $a, b, c \in R$ स्केलर आहेत. आपल्याला हे तपासावे लागेल की (1, -3, 5) हा S व्हेक्टरच्या L.C मध्ये व्यक्त केले जाऊ शकते कि नाही.

$$(1, -3, 5) = a(1, 2, 1) + b(1, 1, -1) + c(4, 5, -2)$$

$$(1, -3, 5) = (a + b + 4c,\ 2a + b + 5c,\ a - b - 2c)$$

संबंधित घटकांची तुलना केल्यावर, आपल्याला मिळेल,

$$1 = a + b + 4c \qquad ...(1)$$

$$-3 = 2a + b + 5c \qquad ...(2)$$

$$5 = a - b - 2c \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) आणि (3) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$2a + 2c = 6 \quad \Rightarrow \quad a + c = 3 \qquad ...(4)$$

(1) मधून (2) वजा केल्यास, आपल्याला मिळेल,

$$-a - c = 4 \quad \Rightarrow \quad a + c = -4 \qquad ...(5)$$

समीकरणे (4) आणि (5) याची कोणतीही उकल नाही.

म्हणून, दिलेला व्हेक्टर (1, -3, 5) हा S च्या व्हेक्टरचा L.C म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकत नाही.

उदाहरण 4.13. $S = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ हा R^3 वर विस्तारते हे दाखवा आणि व्हेक्टर (2, 4, 8) हा S मधील व्हेक्टर चा रेषीय संयोजन म्हणून लिहा.

उकल: येथे $S = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

समजा $(x, y, z) \in R^3$ कोणताही व्हेक्टर आहे.

आता (x,y,z) ला S च्या व्हेक्टर्स च्या L.C. मध्ये व्यक्त करा.

तेथे स्केलर $a, b, c \in R$ असे आहेत कि

$$a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (x, y, z)$$

$$(b + c, a + c, a + b) = (x, y, z)$$

संबंधित घटकांची तुलना केल्यावर, आपल्याला मिळेल

$$b + c = x \quad \text{...(1)}$$

$$a + c = y \quad \text{...(2)}$$

$$a + b = z \quad \text{...(3)}$$

समीकरण (2) मधून (1) वजा केल्यावर आपल्याला मिळते

$$a - b = y - x \quad \text{...(4)}$$

समीकरण (3) आणि (4) यांची बेरुज करून, आपल्याला मिळेल

$$a = \frac{y-x+z}{2}$$

समीकरण (4) वरून,

$$\begin{aligned} b &= a - y + x \\ &= \frac{y-x+z}{2} - y + x \\ &= \frac{x-y+z}{2} \quad \text{...(5)} \end{aligned}$$

(1) वरून, आपल्याला मिळेल,

$$\begin{aligned} c &= x - b \\ &= x - \frac{x-y+z}{2} \quad [(5) \text{ वरून}] \\ &= \frac{x+y-z}{2} \end{aligned}$$

अशा प्रकारे,

$$(x, y, z) = \frac{y-x+z}{2}(0,1,1) + \frac{x-y+z}{2}(1,0,1) + \frac{x+y-z}{2}(1,1,0)$$

संच S हा R^3 ला स्पॅन करतो म्हणजेच R^3 मधील प्रत्येक व्हेक्टर हा S च्या व्हेक्टर्स च्या L.C. मध्ये व्यक्त केला जाऊ शकतो.

$$(x, y, z) = (2,4,8) \Rightarrow x = 2,\ y = 4,\ z = 8$$

$$(2,4,8) = \frac{4-2+8}{2}(0,1,1) + \frac{2-4+8}{2}(1,0,1) + \frac{2+4-8}{2}(1,1,0)$$

$$(2,4,8) = 5(0,1,1) + 3(1,0,1) - 1(1,1,0)$$

अशा प्रकारे, (2, 4, 8) याला S मधील व्हेक्टर्सच्या L.C मध्ये व्यक्त केले जाते.

अभ्यास 4.3

1. व्हेक्टर v = (4, -5, 9, -7) ला $v_1 = (1,1,-2,1), v_2 = (3,0,4,-1), v_3 = (-1,2,5,2)$ व्हेक्टर चे L.C म्हणून व्यक्त करा.
2. $R^3(R)$ मधील व्हेक्टर V = (1, -2, k) चा विचार करा. K (जर असल्यास) च्या कोणत्या मूल्यासाठी व्हेक्टर v हे व्हेक्टर $v_1 = (3,0,-2)$ आणि $v_2 = (2,-1,-5)$ यांचे L.C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते?
3. 2×2 मॅट्रिक्स च्या व्हेक्टर स्पेस मधील मॅट्रिक्स $v = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ हा $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ यांचे L.C म्हणून व्यक्त करा.
4. खालीलपैकी कोणते व्हेक्टर $< (1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2) >$, यांचे L.C म्हणून लिहिले जाऊ शकतात.
   i. $(2, -1, -8)$ ii. $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
5. खालीलपैकी कोणते बहुपद हे व्हेक्टर स्पेसचे आहेत जे $\{x^3, x^2 + 2x, x^2 + 2, 1 - x\}$ या द्वारे पसरलेले/व्युत्पन्न केले आहे.
   i. $3x+2$ ii. $3x^2+x+5$
   iii. $2x^3+3x^2+3x+7$ iv. x^4+7x+2

उत्तरे

1. $v = -3v_1 + 2v_2 - v_3$ 2. $k = -8$ 3. $v = 2v_1 - v_2 + 2v_3$
4. $(2, -1, -8)$ 5. $3x^2 + x + 5$

4.3.2 व्हेक्टर स्पेसचा बेसिस

V(F) एक व्हेक्टर स्पेस असून व्हेक्टर्सचा संच $S = \{v_1, v_2, v_3, ...\} \in V$ ला V चा बेसिस म्हटले जाते जर

i. $v_1, v_2, ... v_n$ हे लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट असतील.

ii. $v_1, v_2, ... v_n$ स्पेस V म्हणजेच V चा प्रत्येक व्हेक्टर हा S च्या व्हेक्टर्सचा एक रेषीय संयोजन आहे.

टिप्पणी:

i. बेसिस मधील व्हेक्टर्सची संख्या अद्वितीय आहे परंतु व्हेक्टर्सचा बेसिस हा अद्वितीय नाही.

उदाहरण: {(1, 0), (0, 1)} R^2 (R) चा बेसिस आहे आणि तसेच {(1, 1), (1, 0)} R^2 चा बेसिस आहे. बेसिस मधील व्हेक्टर्सची संख्या = 2 परंतु R^2 साठी बेसिस अनंत असू शकतात.

ii. व्हेक्टर स्पेस चा बेसिस लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट संच आहे पण लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट व्हेक्टर्सचे संच व्हेक्टर स्पेस असणे आवश्यक नाही. **उदाहरण:** {(1, 0)} हा लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट संच आहे परंतु R^2 चा बेसिस नाही आणि {(1, 0), (0, 1)} R^2 चा बेसिस आहे तसेच हे व्हेक्टर लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत.

4.3.3 व्हेक्टर स्पेसचे डायमेंशन

व्हेक्टर स्पेस V (F) च्या कोणत्याही बेसिस मधील घटक/ व्हेक्टर्सच्या संख्येला V चे डायमेंशन असे म्हणतात आणि त्याला dim V द्वारे दर्शविले जाते.

जर dim V = n असेल तर V ला n- डायमेंशनल व्हेक्टर स्पेस म्हणतात.

फायनाईट डायमेंशन असलेल्या व्हेक्टर स्पेसला फायनाईट डायमेंशनल व्हेक्टर स्पेस म्हणतात.

उदाहरण: $\{(1, 0), (0, 1)\}$ हे R^2 चे बेसिस आहेत. $\therefore \dim R^2 = 2$

निष्पत्ती

i. व्हेक्टर $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$ चा संच V चा बेसिस आहे जर आणि फक्त जर V चा प्रत्येक घटक व्हेक्टर $v_1, v_2, \ldots v_n$ चे रेषीय संयोजन म्हणून अद्वितीयपणे व्यक्त केला जाऊ शकतो.

ii. जर V हा सान्त रूपाने उत्पन्न झालेला व्हेक्टर स्पेस असेल, तर V च्या कोणत्याही दोन बेसिस वर सारखेच घटक असतात.

iii. जर $\dim V = n$ आणि $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ हा V चा लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट उपसंच असेल, तर S हा V चा बेसिस आहे.

iv. जर $\dim V = n$ आणि $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ हा V उत्पन्न करतो, तर S हा V चा बेसिस आहे.

v. जर $\dim V = n$ आणि $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n, v_{n+1}\}$ मध्ये $(n + 1)$ व्हेक्टर असल्यास, S लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहे किंवा संच S मध्ये डायमेंशन पेक्षा अधिक व्हेक्टर असतील तर ते लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट असतात.

vi. dim (शून्य व्हेक्टर) = 0 आणि शून्य व्हेक्टर चा बेसिस = {} किंवा ϕ

व्हेक्टर स्पेस	स्टँडर्ड बेसिस	डायमेंशन
$C^n(C)$	$\{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0),\ldots, (0,0,\ldots1)\}$	n
$C^n(R)$	$\{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0),\ldots, (0,0,\ldots1), (i,0,\ldots0),(0,i,\ldots0),\ldots,(0,0,\ldots,i)\}$	2n
$R^n(R)$	$\{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0),\ldots, (0,0,\ldots1)$	n
$P_n(C)$ ओवर C	$\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$	n+1
$P_n(C)$ ओवर R	$\{1,x,x^2,\ldots,x^n,i,ix,ix^2,\ldots,ix^n\}$	2(n+1)
$P_n(R)$ ओवर R	$\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$	n+1
$M_{m,n}(C)$ ओव्हर C	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$	mn

$M_{m,n}(C)$ ओव्हर R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & i & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & i \end{bmatrix}$	2mn
$M_{m,n}(R)$ ओवर R	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$	mn

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.14. व्हेक्टर (2, -1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2) हे R^3 चा बेसिस बनवतात हे दाखवा.

उकल. आपल्याला माहित आहे की dim (R^3) = 3 आणि S = {(2, -1, 0), (3, 5, 1), (1, 1, 2)} हा तीन व्हेक्टरचा एक संच आहे तर S हा R^3 चा बेसिस होण्यासाठी हे दाखविणे पुरेसे आहे कि S चे व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेंडंट आहेत.

समजा a, b, c ∈ R असे आहेत कि

$$a(2,-1,0)+b(3,5,1)+c(1,1,2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2a+3b+c,-a+5b+c,b+2c)=0$$

$$\Rightarrow \quad 2a+3b+c=0$$

$$-a+5b+c=0$$

$$b+2c=0$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$a=0,,b=0,c=0$

म्हणून, S हा लिनिअरली इंडिपेंडंट आहे आणि R^3 चा बेसिस बनतो.

पर्यायी पद्धत: व्हेक्टर कॉलम मध्ये लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा म्हणजे,

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&5&1\\0&1&2\end{bmatrix}_{3\times3}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \leftrightarrow R_1$ $$\sim\begin{bmatrix}-1&5&1\\2&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to R_2+2R_1$ $$\sim\begin{bmatrix}-1&5&1\\0&13&3\\0&1&2\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to R_2-13R_3$ $$\sim\begin{bmatrix}-1&5&1\\0&0&-23\\0&1&2\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \leftrightarrow R_3$ $$\sim\begin{bmatrix}-1&5&1\\0&1&2\\0&0&-23\end{bmatrix}$$

हा A चा रो इचीलॉन फॉर्म आहे तर, $\rho(A)=3$ = कॉलम ची संख्या.

म्हणून, दिलेले व्हेक्टर L.I आहेत. आणि R^3 चा बेसिस बनतात.

तसेच dim (R^3) = 3.

उदाहरण 4.15. व्हेक्टर (-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0), (1, 1, 1) द्वारे स्पॅन केलेल्या स्पेस चा बेसिस निश्चित करा.

उकल. समजा S = {(−3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0), (1, 1, 1)}

स्पष्टपणे, {(−3, 1, 2)} हा शून्य नसलेल्या व्हेक्टर चा सिंगलटन संच असल्याने लिनिअरली इंडिपेंडंट आहे.

तसेच, $\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3)\}$ हा लिनिअरली इंडिपेंडंट व्हेक्टर चा संच आहे कारण कोणताही व्हेक्टर इतरांचा गुणक नाही.
आता आपण तीन व्हेक्टर $\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0)\}$ च्या संचाचा विचार करू.

समजा $$a(-3,1,2)+b(0,1,3)+c(2,1,0)=0$$

$$\Rightarrow \quad (-3a+2c, a+b+c, 2a+3b)=0$$

$$\Rightarrow \quad -3a+2c=0 \quad \text{...... (1)}$$

$$a+b+c=0 \quad \text{....... (2)}$$

$$2a+3b=0 \quad \text{....... (3)}$$

समीकरण (2) ला 2 ने गुणाकार करा आणि ते (1) मधून वजा केल्यास, आपल्याला मिळते.

$$-5a-2b=0 \quad \Rightarrow \quad 5a+2b=0 \quad \text{.......(4)}$$

(3) आणि (4), सोडवून आपल्याला मिळेल.

$$a=0, b=0$$

समीकरण (1) वरून, $c=0$

अशा प्रकारे, फक्त एकच उकल आहे $a = 0, b = 0, c = 0$.

अशा प्रकारे, व्हेक्टर चा संच $\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0)\}$ एक लिनिअरली इंडिपेंडंट संच आहे.

तसेच, $S \in R^3$ चे घटक

$$\therefore \quad \dim R^3 = 3$$

n-डायमेन्शनल व्हेक्टर स्पेस V चा प्रत्येक (n + 1) व्हेक्टर चा संच लिनिअरलि डिपेंडन्ट असल्याने

$\therefore$ S हा लिनिअरलि डिपेंडन्ट आहे.

म्हणून, $\{(-3, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 1, 0)\}$ लिनिअरली इंडिपेंडंट आहे. आणि R^3 ला स्पॅन करतो, म्हणून तो R^3 चा बेसिस आहे.

> **टिप्पणी: व्हेक्टर चा विस्तार**
> i. एक मॅट्रिक्स A तयार करा ज्याचे रो दिलेले व्हेक्टर आहेत.
> ii. प्राथमिक रो -ऑपरेशन वापरून मॅट्रिक्स A ला रो-एचेलॉन स्वरूपात कमी करा.
> iii. असा कॉलम निवडा ज्यामध्ये कोणताही पिव्होट नाही.
> iv. व्हेक्टर चा संच वाढवून अशा व्हेक्टर ची निवड करा की सर्व कॉलम मध्ये पिव्होट असेल.

उदाहरण 4.16. R^3 चा बेसिस तयार करण्यासाठी व्हेक्टर $\{(1, 2, 3), (2, 2, 3)\}$ चा संच वाढवा.

उकल. मॅट्रिक्स A तयार करा ज्याचे रो हे दिलेले व्हेक्टर असतील, म्हणजे,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

जो रो-एचेलॉन फॉर्म आहे आणि तिसरा कॉलम पिव्होट समाविस्ट करत नाही.

$\therefore$ तीन व्हेक्टर $\{(1, 2, 3), (2, 2, 3), (0, 0, 1)\}$ लिनिअरली इंडिपेंडंट आहेत आणि R^3 चा बेसिस फॉर्म करतात.

> **टिप्पणी:** बेसिस चा विस्तार अद्विितीय नाही.

उदाहरण 4.17. R^3 चा बेसिस तयार करण्यासाठी {(1, 2, 3), (2, 1, 0)} व्हेक्टर चा संच वाढवा.

उकल. $\dim R^3 = 3$ म्हणून

समजा $A = \{(1, 2, 3), (2, 1, 0)\}$

स्पष्टपणे A हा लिनिअरली इंडिपेंडंट संच आहे कारण त्यापैकी कोणीही इतरांपेक्षा स्केलर मल्टिपल नाही

आता, R^3 चा एक बेसिस तयार करण्यासाठी आपल्याला आणखी एका व्हेक्टर ची आवश्यकता आहे.

R^3 चे स्टँडर्ड बेसिस {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} हे आहेत.

आपण S = {(1, 2, 3), (2, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} याचा विचार करू.

पहिल्या तीन व्हेक्टर सह प्रारंभ करा आणि ते लिनिअरली इंडिपेंडंट संच तयार करतात किंवा नाही ते तपासा.

समजा $a(1,2,3)+b(2,1,0)+c(1,0,0)=0$

$$\Rightarrow \quad (a+2b+c, 2a+b, 3a)=0$$

$$\Rightarrow \quad a+2b+c=0 \qquad ....(1)$$

$$2a+b=0 \qquad ....(2)$$

$$3a=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \qquad ....(3)$$

(2) मध्ये (3) वापरून, आपल्याला मिळेल $b=0$

आता, समीकरण (1) वरून, आपल्याला $a=0$ मिळेल

अशाप्रकारे, समीकरण (1), (2) आणि (3) चे फक्त एकच समाधान a = 0, b = 0, c = 0 हे आहे.

$\therefore$ संच {(1, 2, 3), (2, 1, 0), (1, 0, 0)} लिनिअरली इंडिपेंडंट आहे.

$\dim R^3 = 3$ असल्याने

$\therefore$ संच {(1, 2, 3), (2, 1, 0), (1, 0, 0)} एक बेसिस बनवते आणि त्यासाठी विस्तारित संचा ची आवश्यकता आहे.

पर्यायी पद्धत. रो मध्ये व्हेक्टर लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा, म्हणजे,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to \left(\frac{-1}{3}\right)R_2$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

जो A चा रो इचीलॉन फॉर्म आहे आणि तिसरा कॉलम पिव्होट समाविस्ट करत नाही.

म्हणून, व्हेक्टर {(1, 2, 3), (2, 1, 0), (0, 0, 1)} लिनिअरली इंडिपेंडंट आहेत आणि R^3 चा बेसिस बनवतात.

उदाहरण 4.18. R^3 च्या व्हेक्टर (1, -1, 1), (8, 4, 2),(2, 2, 0), (3, 9, -3) द्वारे व्युत्पन्न झालेल्या W चा बेसिस आणि डायमेंशन निश्चित करा.

उकल. आपल्याला हे तपासावे लागेल की या चार व्हेक्टर मध्ये किती व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेंडंट आहेत.

रोमध्ये सदिश लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 8 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 9 & -3\end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to R_2 - 8R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - 3R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_2 \to \frac{1}{6}R_2, R_3 \to \frac{1}{2}R_3, R_4 \to \frac{1}{6}R_4$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग, $R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to R_4 - R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेले रो w चा बेसिस बनवतात.

$\therefore$ {(1, –1, 1), (0, 2, –1)} हे w चा बेसिस फॉर्म करतात.

dim(w) = 2

पर्यायी पद्धत. स्पष्टपणे (1, -1, 1) शून्य नसलेला व्हेक्टर असल्यामुळे L.I. आहे आणि {(1, -1, 1), (8, 4, 2)} L.I आहेत कारण त्यापैकी कोणीही इतरांचे स्केलर मल्टिपल नाहीत.

आता तपासा कि {(1, -1, 1), (8, 4, 2), (2, 2, 0)} हे व्हेक्टर L.D. आहेत किंवा L.I.

समजा a, b, c $\in$ R हे स्केलर्स असे आहेत कि a (1, –1, 1) + b (8, 4, 2) + c (2, 2, 0) = 0

[a + 8b + 2c, –a + 4b + 2c, a + 2b] = 0

$\Rightarrow$ $a + 8b + 2c = 0$ ...(1)

$-a + 4b + 2c = 0$ ...(2)

$a + 2b = 0$ ...(3)

(1) मधून (2) वजा केल्यास, आपल्याला मिळेल

$$2a + 4b = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 2b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -2b$$

(1) वरून, $-2b + 8b + 2c = 0$

$$6b + 2c = 0$$

$$c = -3b$$

$\therefore$ b च्या प्रत्येक किमतीसाठी $a = -2b, c = -3b$, हि उकल आहे.

विशेषतः, जर $b = 1 \Rightarrow a = -2, b = -3$ हि उकल आहे.

म्हणून {(1, –1, 1), (8, 4, 2), (2, 2, 0)}, हे L.D. आहेत

त्याचप्रमाणे हा संच तपासा {(1, –1, 1), (8, 4, 2), (3, 9, -3)}

हा संच सुद्धा L.D. आहे

अशा प्रकारे w चा बेसिस, $w = \{(1, -1, 1), (8, 4, 2)\}$ आणि $\dim w = 2$.

अभ्यास 4.4

1. खालील व्हेक्टर्सचा संच हे R^4 चे बेसिस आहेत हे दाखवा.
   i. $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$
   ii. $\{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 2, 0, 4)\}$
2. खालील व्हेक्टर्सचा संच हे R^3 चे बेसिस बनवतात हे दाखवा.
   i. $\{(4, 3, 2), (2, 1, 0), (-1, 1, -1)\}$ ii. $\{(-1, 1, 0), (0, 3, -3), (2, 0, 1)\}$
   iii. $\{(2, 1, 4), (1, -1, 2), (3, 1, -2)\}$
3. $\{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)\}$ या व्हेक्टर द्वारे स्पॅन केलेल्या सब स्पेस चा बेसिस निश्चित करा.
4. $\{(3, 2, 4), (1, 0, 2), (1, -1, -1), (6, 7, 5)\}$ या व्हेक्टर द्वारे स्पॅन केलेल्या सब स्पेस चा बेसिस निश्चित करा.
5. R^3 चा बेसिस तयार करण्यासाठी खालील व्हेक्टर चे संच वाढवा.
   i. $\{(1, 2, 3), (2, -2, 0)\}$ ii. $\{(2, 1, -3), (1, -2, 2)\}$
   iii. $\{(0, 1, 2), (2, -1, 4)\}$
6. समजा V हा $n \times n$ ऑर्डरच्या मॅट्रिक्सचा R वर व्हेक्टर स्पेस आहे आणि $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ द्वारे निर्माण झालेली w हि सबस्पेस असेल. दाखवा कि हे $\left\{\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\right\}$ बेसिस फॉर्म करतात आणि $\dim w = 2$.

उत्तरे

3. $\{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (3, -1, 0)\}$ 4. $\{(3, 2, 4), (1, 0, 2), (1, -1, -1)\}$
5. i. $(1, 2, 3), (2, -2, 0), (1, 0, 0)$ ii. $(2, 1, -3), (1, -2, 2), (1, 0, 0)$
   iii. $(0, 1, 2), (2, -1, 4), (1, 0, 0)$

4.4 लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन

समजा U आणि V एकाच फिल्ड F वरील दोन व्हेक्टर आहेत, तर मॅप फंक्शन $T: U \to V$ ला लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन किंवा व्हेक्टर स्पेस होमोमॉर्फीजम म्हणतात जर

i. T बेरीज ऑपरेशन जोपासते, म्हणजे

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \text{ सर्व } u, v \in U \text{ साठी}$$

ii. T स्केलर गुणाकार जोपासते, म्हणजे

$$T(au) = a\,T(u) \text{ सर्व } a \in F, u \in U \text{ साठी}$$

टिपण्णी

1. L.T. च्या व्याख्येतील दोन गुणधर्म एकच गुणधर्म म्हणून सारांशित केले जाऊ शकते.

$$T(au + v) = aT(u) + T(v) \text{ सर्व } a \in F, u, v \in U \text{ साठी}$$

2. जर U = V, तर L.T., $T: U \to U$ हे एक रेषीय ऑपरेटर असल्याचे म्हटले जाते.
3. लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T: U \to F$ जेथे F हे स्केलरचे फिल्ड आहे, त्याला लिनिअर फंक्शनल म्हणतात.
4. शून्य ट्रान्सफॉरमेशन. शून्य मॅप $0: V \to V$ असा की $0(v) = 0$ सर्व $v \in V$ साठी.
5. अडेन्टीटी ट्रान्सफॉरमेशन. अडेन्टीटी मॅप $I: V \to V$ असा की $I(v) = V$ सर्वांसाठी $v \in V$.
6. जर L.T. मध्ये परिभाषित केलेले मॅपिंग रेखीय नसेल तर, तर मॅपिंग L.T. नसते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.19. $T(x, y, z) = (3x - y, x + y - 2z)$ द्वारे परिभाषित केलेले फंक्शन $T: R^3 \to R^2$ लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे हे दाखवा.

उकल. समजा $u = (x_1, y_1, z_1) \in R^3$ आणि $v = (x_2, y_2, z_2) \in R^3$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad T(u+v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= (3x_1 + 3x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, -2z_1 - 2z_2) \\
&= \{(3x_1 - y_1) + (3x_2 - y_2), (x_1 + y_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2 - 2z_2)\} \\
&= (3x_1 - y_1, x_1 + y_1 - 2z_1) + (3x_2 - y_2, x_2 + y_2 - 2z_2) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

तसेच $a \in R$ आणि $u = (x_1, y_1, z_1) \in R^3$, साठी आपल्याकडे आहे,

$$\begin{aligned}
T(au) &= T(ax_1, ay_1, az_1) \\
&= (3ax_1, -ay_1, ax_1 + ay_1 - 2az_{1)}) \\
&= a(3x_1 - y_1, x_1 + y_1 - 2z_1) \\
&= a\,T(u)
\end{aligned}$$

$\therefore$ T हे लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे.

उदाहरण 4.20. $T(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ द्वारे परिभाषित केलेले फंक्शन $T: R^2 \to R^3$ लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन नाही हे दाखवा.

उकल. समजा $u = (x_1, y_1) \in R^2$ आणि $v = (x_2, y_2) \in R^2$ हे अहेतूक आहे.

$$\therefore \quad T(u) = T(x_1, y_1) = (x_1 + 1, 2y_1, x_1 + y_1)$$

$$T(v) = T(x_2, y_2) = (x_2 + 1, 2y_2, x_2 + y_2)$$

आता, $$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + 2, 2y_1 + 2y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \qquad \text{...(1)}$$

तसेच, $$T(u) + T(v) = (x_1 + x_2 + 2, 2y_1 + 2y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \qquad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) आणि (2) वरून, आपल्याला मिळेल,

$$T(u+v) \neq T(u)+T(v)$$

म्हणून T हे एक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन नाही.

उदाहरण 4.21. सिद्ध करा की फंक्शन $T:V \to P_2(x)$ एक L.T आहे, जेथे V हे $T(A) = a + (b + c)x + dx^2$ द्वारे $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$ साठी परिभाषित केलेल्या स्क्वेअर मॅट्रिसचे व्हेक्टर स्पेस आहे.

उकल. समजा $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$ आणि $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in V$

$$\therefore \quad T(A+B) = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a+c)+(b+f+c+g)x+(d+h)x^2$$

$$= \left[a+(b+c)x+dx^2\right]+\left[e+(f+g)x+hx^2\right]$$

$$= T(A)+T(B)$$

तसेच $\alpha \in R$ आणि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$ साठी, आपल्याकडे आहे,

$$T(\alpha A) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha a + (\alpha b + \alpha c)x + \alpha dx^2$$

$$= \alpha\left[a+(b+c)x+dx^2\right]$$

$$= \alpha T(A)$$

म्हणून हे एक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे.

लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन शोधण्यासाठी

समजा $T: U \to V$ एक L.T आहे.

आवश्यकता i. U चा बेसिस.

ii. T अंतर्गत बेसिसची प्रतिमा.

उदाहरण 4.22. समजा $T: R^2 \to R^3$ एक L.T अशी आहे की $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ आणि $T(0, 1) = (2, 1, -1)$. मॅपिंगचे पूर्णपणे वर्णन करा.

उकल. आपण पाहू शकतो कि, $u_1 = (1, 2)$ आणि $u_2 = (0, 1)$ हे L.I. आणि R^2 चा बेसिस देखील आहे.

समजा $u = (x_1, x_2) \in R^2$ अहेतुक आहे म्हणून, u ला u_1 आणि u_2 चे L.C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते.

$\therefore$ तेथे a आणि b असे स्केलर आहेत कि,

$$u = au_1 + bu_2$$

$$(x_1, x_2) = a(1, 2) + b(0, 1) \quad \ldots(1)$$

$$(x_1, x_2) = (a, 2a + b)$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = a$$
$$x_2 = 2a + b \quad \Rightarrow \quad b = x_2 - 2x_1$$

(1) मध्ये a आणि b च्या किमती ठेऊन, आपल्याला मिळते,

$$(x_1, x_2) = x_1(1, 2) + (x_1 - 2x_1)\,(0, 1)$$

आता दोन्ही बाजूला T ऑपरेट करून,

$$T(x_1, x_2) = T[(x_1(1, 2) + (x_2 - 2x_1)\,(0, 1)]$$
$$= x_1\ T(1, 2) + (x_2 - 2x_1)T(0, 1)[\because T,\ L.T\text{आहे}]$$
$$T(x_1, x_2) = x_1(3, -1, 5) + (x_2 - 2x_1)(2, 1, -1)$$
$$= (3x_1, -x_1, 5x_1) + (2x_2 - 4x_1, x_2 - 2x_1, -x_2 + x_1)$$
$$T(x_1, x_2) = (2x_2 - x_1, -3x_1 + x_2, 7x_1 - x_2)$$ जे L.T. साठी आवश्यक आहे.

उदाहरण 4.23. एक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T : R^3 \to R^2$ असे शोधा की $T(1, 1, 1) = (1, 1)$ आणि $T(1, -1, 1) = (0, 1)$.

उकल. $\dim R^3 = 3$ आणि संच $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$ R^3 चा बेसिस बनवत नाही, तर, आपण R^3 चा बेसिस मिळवण्यासाठी व्हेक्टर च्या संचाचा विस्तार करू.

R^3 चा स्टॅंडर्ड बेसिस = $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

समजा $S = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\text{क्रिया करून } R_2 \to R_2 - R_1]$$

जे A चा रो-इचीलॉन फॉर्म आहे.

$$\rho(A) = 3 = \text{कॉलमची संख्या.}$$

म्हणून, $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ हे L.I आहेत आणि R^3 चा बेसिस बनवतात.

दिलेले आहे
$$T(1, 1, 1) = (1, 1)$$
$$T(1, -1, 1) = (0, 1)$$
समजा
$$T(0, 0, 1) = (0, 0)$$

समजा $u = (x, y, z) \in R^3$ हे अहेतुक आहे आणि बेसिसचे व्हेक्टर L.C. म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते.

$a, b, c \in R$ असे स्केलर आहेत कि

$$u = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(0, 0, 1)$$
$$\Rightarrow \qquad (x, y, z) = (a + b, a - b, a + b + c)$$
$$\Rightarrow \qquad x = a + b$$
$$y = a - b,\ z = a + b + c$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते,

$$a = \frac{x+y}{2},\ b = \frac{x-y}{2},\ c = z - x$$

या किमती (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याला मिळते,

$$u=\frac{x+y}{2}(1,1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1,1)+z-x(0,0,1)$$

दोन्ही बाजूला T ऑपरेट करून, आपल्याला मिळेल,

$$T(x,y,z)=\frac{x+y}{2}T(1,1,1)+\frac{x-y}{2}T(1,-1,1)+z-x(0,0,1) \quad [\because \text{T, L.T. आहे}]$$

$$T(x,y,z)=\frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{x-y}{2}T(0,1)+(z-x)(0,0)$$

$$=\left(\frac{x+y}{2},x\right)$$

जे आवश्यक L.T. आहे.

टिपण्णी. उत्तरे अद्वितीय असू शकत नाहीत कारण ती विस्तारित व्हेक्टर आणि निवडलेल्या प्रतिमेवर अवलंबून असते.

उदाहरण 4.24. लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T:R^3\to R^3$ असे शोधा कि ज्यासाठी $T(x)=AX$ जेथे $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$.

उकल. समजा $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in R^3$

$$T(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)$$

$\Rightarrow$ $$T(X)=Y$$

तेव्हा $$Y=AX \qquad [\because T(X)=AX]$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\2x_1+x_2+x_3\\-2x_1+x_2+2x_3\end{bmatrix}$$

$$y_1=x_1+x_3$$

$$y_2=2x_1+x_2+x_3$$

$$y_3=-x_1+x_2+2x_3$$

म्हणून आवश्यक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे.

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,2x_1+x_2+x_3,-x_1+x_2+2x_3).$$

अभ्यास 4.5

1. खालीलपैकी कोणते मॅपिंग लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे ते ठरवा:
   i. $T:R^3\to R^2$ द्वारा परिभाषित $T(x,y,z)=(z,2x+y)$
   ii. $T:R^3\to R^2$ द्वारा परिभाषित $T(x,y,z)=(|x|,0)$
   iii. $T:R^2\to R^3$ द्वारा परिभाषित $T(x,y)=(x+y,x-y,y)$
   iv. $T:R^3\to R$ द्वारा परिभाषित $T(x,y,z)=x_1^2+x_2^2+x_3^3$
   v. $T:R^2\to R$ द्वारा परिभाषित $T(x,y)=|2x-3y|$

vi. $T : R^2 \to R$ द्वारा परिभाषित $T(x, y) = xy$

vii. $T : R^2 \to R^3$ द्वारा परिभाषित $T(x, y) = (x + 2y, 3x - 5y, y)$

viii. $T : R^2 \to R^2$ द्वारा परिभाषित $T(x, y) = (x^2, y)$

ix. $T : R^2 \to R^2$ द्वारा परिभाषित $T(x,y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$

2. समजा P हा वास्तविक संख्यांवरील सर्व बहुपदांचा व्हेक्टर स्पेस आहे. तर $T[p(x)] = \frac{d}{dx}p(x),\ p(x) \in P$ द्वारे परिभाषित केलेले फंक्शन $T: P \to P$ हे P वर एक रेखीय ऑपरेटर आहे

3. खालील प्रत्येक उदाहरणात एक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन शोधा:

i. $T : R^2 \to R^2$ अशा प्रकारे आहे कि $T(2, 3) = (4, 5)$ आणि $T(1, 0) = (0, 0)$.

ii. $T : R^3 \to R^2$ अशा प्रकारे आहे कि $T(1, 1, -1) = (1, 0), T(4, 1, 1) = (0, 1)$ आणि $T(1, -1, 2) = (1, 1)$

iii. $T : R^3 \to R^2$ अशा प्रकारे आहे कि (1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, 2, 2) R^3 मधून (1, 1), (1, 1) (1, 0) R^2 मध्ये L.T. नुसार रूपांतरित होते.

4. खालील प्रत्येक उदाहरणात एक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन शोधा:

i. $T : R^3 \to R^2$ अशा प्रकारे आहे कि $T(1, 2, 3) = (1, 1)$ आणि $T(0, 1, 2) = (1, 2)$

ii. $T : R^3 \to R^2$ अशा प्रकारे आहे कि $T(1, 1, 0) = (1, 0)$ आणि $T(1, -1, 0) = (1, 1)$

iii. $T : R^3 \to R^2$ अशा प्रकारे आहे कि $T(1, 1, 1) = (1, 0)$ आणि $T(1, 1, 2) = (1, -1)$

5. लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T: R^3 \to R^3$ असे शोधा कि ज्यासाठी $T(x) = AX$ जेथे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

उत्तरे

1. i. होय ii. नाही iii. होय
 iv. नाही v. नाही vi. नाही
 vii. होय viii. नाही ix. होय

3. i. $T(x,y) = \left(\frac{4y}{3}, \frac{5y}{3}\right)$ ii. $T(x,y,z) = (5x - 12y - 8z,\ x - 2y - z)$
 iii. $T(x,y,z) = (y,\ x + y - z)$

4. i. (0, 0) वर शेवटचा व्हेक्टर घेऊन, उत्तर $T(x,y,z) = (-x + y, -3x + 2y)$ अद्वितीय नाही.
 ii. $T(x,y,z) = \left(x, \frac{x-y}{2}\right)$ iii. $T(x,y,z) = (x, x - z)$

4.5 मॅट्रिक्स संबंधित लिनियर मॅप/ट्रान्सफॉर्मेशन

ऑर्डर बेसिस: व्हेक्टर स्पेसच्या बेसिसला ऑर्डर बेसिस म्हणतात जर त्याचे व्हेक्टर विशिष्ट क्रमाने लिहिलेले असतील. समजा $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ हा व्हेक्टर स्पेस V चा बेसिस आहे. आता व्हेक्टर चा क्रम बदलून समजा $B' = \{v_2, v_1, v_3\}$.

B आणि B′ एकच बेसिस आहेत परंतु भिन्न ऑर्डर बेसिस आहेत कारण B आणि B′ मधील तीन व्हेक्टर चा क्रम वेगळा आहे.

4.5.1 ऑर्डर बेसिसशी संबंधित लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशनचे मॅट्रिक्स

समजा $B=\{u_1,u_2,\ldots u_n\}$ आणि $B'=\{v_1,v_2,\ldots v_m\}$ हे फायनाईट डायमेन्शनल व्हेक्टर स्पेस U आणि V साठी चे ऑर्डर बेसिस आहेत. समजा T: U $\rightarrow$ V हे एक लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे. $T(u_1),T(u_2),\ldots T(u_n)\in V$ आणि $\{v_1,v_2,\ldots v_m\}$ हे V चे बेसिस आहेत म्हणून प्रत्येक $T(u_i), 1\le i\le n$ अद्वितीयपणे या व्हेक्टर चे $\{v_1,v_2,\ldots v_m\}$ L.C. म्हणून व्यक्त करू शकतो.

समजा
$$T(u_1)=a_{11}v_1+a_{12}v_2+\ldots a_{1m}v_m$$
$$T(u_2)=a_{21}v_1+a_{22}v_2+\ldots a_{2m}v_m$$
....

$$T(u_n)=a_{n1}v_1+a_{n2}v_2+\ldots a_{nm}v_m,\ a_{i,j}\in F \text{ सर्व } 1\le i\le n,\ 1\le j\le m \text{ साठी}$$

या समीकरणाच्या प्रणालीचे गुणांक मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nm} \end{bmatrix}$ आहे.

या मॅट्रिक्स चा ट्रान्स्पोज हा m × n मॅट्रिक्स आहे, ज्याला T चा ऑर्डर बेसिस B आणि B′ शी संबंधित मॅट्रिक्स म्हणतात, त्याला [T : B, B′] द्वारे दर्शविले जाते ,

$$[T:B,B']=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & .. & a_{nm} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

टिपण्णी.

i. लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन T : U $\rightarrow$ V च्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर m × n आहे, म्हणजे dim V × dim U.

ii. जर U = V आणि B हा दोन्ही बाजूंनी वापरलेला बेसिस असेल तर T चा मॅट्रिक्स [T : B', B] ऐवजी [T : B] द्वारे दर्शविले जाते.

iii. जर B किंवा B' किंवा दोन्ही बदलले, तर त्यानुसार मॅट्रिक्स देखील बदलतो .

लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन T: $R^m \rightarrow R^n$ चे मॅट्रिक्स शोधण्यासाठी दोन्ही बाजूंच्या स्टॅंडर्ड बेसिसवर T चे सूत्र ठरवताना पहिला निर्देशक निवडून मॅट्रिक्स तयार होतो आणि मॅट्रिक्सच्या पहिल्या रो मध्ये x, y, z चे निर्देशक लिहा आणि असेच.

उदाहरणार्थ: T : $R^2 \rightarrow R^2$ हे T(x, y) = (x, −y) द्वारे परिभाषित केलेले आहे. समजा $B=B'=\{(1,0),\ (0,1)\}$, हा R^2 चा स्टॅंडर्ड बेसिस आहे तर $[T:B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

जर आपल्याला T चे परिभाषित सूत्र शोधण्याची आवश्यकता असेल, जेव्हा मॅट्रिक्स [T : B, B'] असेल, येथे प्रक्रिया: [जेव्हा स्टॅंडर्ड बेसिस दिले जातात]. पहिल्या रांगेतील स्केलरला x, y, z इत्यादींनी गुणाकार करा आणि बेरीज करा. हे परिभाषित सूत्राचा प्रथम निर्देशक देते. त्याचप्रमाणे, इतर निर्देशक शोधले जाऊ शकतात.

उदाहरणार्थ: $T : R^2 \rightarrow R^3$ ज्याचा मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ आहे.

समजा $B=\{(1,0),\ (0,1)\}$ आणि $B'=\{(1.0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ हे अनुक्रमे R^2 आणि R^3 चे, स्टँडर्ड बेसिस आहेत तर $T(x, y) = (x - y, -2x + 3y, y)$.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.25. $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ द्वारे परिभाषित केलेल्या लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T : R^3 \rightarrow R^2$ चा मॅट्रिक्स $[T: B, B']$ शोधा खाली दिलेल्या उदाहरणामध्ये $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ आणि $B' = \{(1, 2), (0, 1)\}$

उकल: दिलेला लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन आहे

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

ऑर्डर बेसिस साठी $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$, आपल्याकडे आहे

$$\left.\begin{aligned} T(1,1,1)&=(2,2)\\ T(1,0,0)&=(1,0)\\ T(1,1,0)&=(2,1)\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(1)$$

आता $T(1, 1, 1), T(1, 0, 0), T(1, 1, 0)$ याला $B'=\{(1,2),(0,1)\}$ च्या व्हेक्टर च्या L.C म्हणून लिहिल्यावर

$$T(1, 1, 1) = (2, 2) = a(1, 2) + b(0, 1) \text{ स्केलर } a, b \in R \text{ साठी,} \qquad \ldots(2)$$

आपल्याकडे आहे, $\quad (2, 2) = (a, 2a + b)$

$\Rightarrow \quad a = 2$

आणि $\quad 2a + b = 2 \Rightarrow \quad b = -2$

ही मूल्ये (2) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याला मिळते,

$$T(1, 1, 1) = (2, 2) = 2(1, 2) + (-2)(0, 1)$$

त्याचप्रमाणे,

$$T(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 2) + (-2)(0, 1)$$

$$T(1, 1, 0) = (2, 1) = 2(1, 2) + (-3)(0, 1)$$

B आणि B' शी संबधित मॅट्रिक्स T हे वरील प्रणालीतील गुणांकांच्या मॅट्रिक्सचा ट्रान्स्पोज आहे

$$[T:B,B']=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

उदाहरण 4.26. रेखीय परिवर्तन शोधा $T:R^3 \rightarrow R^2$ ज्याचे मॅट्रिक्स $[T:B,B']=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ आहे, येथे $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$ आणि $B' = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

उकल: येथे $\quad [T:B,B']=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$T(1, 1, 1) = [T : B, B']$ च्या पहिल्या स्तंभाच्या स्केलरचा वापर करून B' च्या सदिशांचे रेखीय संयोजन

$$= 1(1, 1) + 3(1, -1)$$

$$= (4, -2)$$

त्याचप्रमाणे, $T(1, 2, 3) = -1(1, 1) + 1(1, -1) = (0, -2)$

आणि $(1, 0, 0) = 2(1, 1) + 0(1, -1) = (2, 2)$

समजा, $(x, y, z) \in R^3$ कोणताही व्हेक्टर आहे आणि

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3) + c(1, 0, 0) \quad \text{...(1)}$$

$$(x, y, z) = (a + b + c, a + 2b, a + 3b)$$

$$\Rightarrow \quad x = a + b + c$$

$$y = a + 2b$$

$$z = a + 3b$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$$a = 3y - 2z, b = z - y, c = x - 2y + z$$

(1) मध्ये ही मूल्ये वापरून, आपल्याला मिळते

$$(x, y, z) = (3y - 2z)(1, 1, 1) + (z - y)(1, 2, 3) + (x - 2y + z)(1, 0, 0)$$

दोन्ही बाजूंनी T लागू केल्यावर,

$$T(x, y, z) = (3y - 2z)\, T(1, 1, 1) + (z - y)\, T(1, 2, 3) + (x - 2y + z)\, T(1, 0, 0)$$

[$\because$ T, हे रेखीय परिवर्तन आहे]

$$= (3y - 2z)(4, -2) + (z - y)(0, -2) + (x - 2y + z)(2, 2)$$

$$= (12y - 8z + 2x - 4y + 2z - 6y + 4z - 2z + 2y + 2x - 4y + 2z)$$

तर, $T(x, y, z) = (2x + 8y - 6z, 2x - 8y + 4z)$

जे आवश्यक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे.

उदाहरण 4.27. स्टँडर्ड बेसिस च्या संबंधित R^3 वरील लिनिअर ऑपरेटर T चा मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ आहे तर T चा मॅट्रिक्स $B' = \{(1, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$ च्या संबंधित शोधा.

उकल: येथे $$[T, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (1, -1, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1) = (1, 1, -1)$$

$$T(0, 0, 1) = -1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (-1, 1, 1)$$

समजा, $(a,b,c) \varepsilon R^3$ हे अहेतुक आहे, म्हणूनच (a, b, c) व्हेक्टर्सला $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ला L. C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते, आपल्याकडे आहे.

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

दोन्ही बाजूना T लागू केल्यावर,

$$T(a, b, c) = aT(1, 0, 0) + bT(0, 1, 0) + cT(0, 0, 1)$$

[$\because$ T, हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे]

$$\Rightarrow \quad T(a, b, c) = a(1, -1, 1) + b(1, 1, -1) + c(-1, 1, 1)$$
$$= (a + b - c, -a + b + c, a - b + c)$$

जे आवश्यक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे.

पर्यायी पद्धत: समजा $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \in R^3$ स्टँडर्ड बेसिस आहे. मग

$$T(x, y, z) = (x + y - z, -x + y + z, x - y + z)$$

आता ऑर्डरड बेसिस b' = {(1, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1)}, वरून, आपल्याकडे आहे.

$$T(1, 2, 2) = (1, 3, 1)$$
$$T(1, 1, 2) = (0, 2, 2)$$
$$T(1, 2, 1) = (2, 2, 0)$$

आता T(1, 2, 2), T(1, 1, 2), T(1, 2, 1) ला B' = {(1, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1)} व्हेक्टर्सला L. C मध्ये लिहून,

$$T(1, 2, 2) = (1, 3, 1) = a(1, 2, 2) + b(1, 1, 2) + c(1, 2, 1) \quad ...(1)$$
$$(1, 3, 1) = (a + b + c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + c)$$
$$\Rightarrow \quad a + b + c = 1$$
$$2a + b + 2c = 3$$
$$2a + 2b + c = 1$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$$a = 1, b = -1, c = 1$$

ही मूल्ये (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याला मिळते

$$T(1, 2, 2) = (1, 3, 1) = 1(1, 2, 2) + (-1)(1, 1, 2) + 1(1, 2, 1)$$

त्याचप्रमाणे, $T(1, 1, 2) = (0, 2, 2) = 4(1, 2, 2) + (-2)(1, 1, 2) + (-2)(1, 2, 1)$

आणि $T(1, 2, 1) = (2, 2, 0) = -4(1, 2, 2) + 2(1, 1, 2) + 4(1, 2, 1)$

अशा प्रकारे मॅट्रिक्स T हा बेसिस B′ शी संबंधित आहे

$$[T, B'] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

अभ्यास 4.6

1. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^2 \to R^2$ साठी , T(x, y) = (x, −y) ने परिभाषित केलेले आहे, मॅट्रिक्स [T: B, B′] शोधा. जेथे

   i. $B = (e_1, e_2)$ आणि B′ = {(1, 1), (1, −1)} ii. B = {(1, 1), (1, 0)} आणि B′ = {(2, 3), (4, 5)}

2. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T: P_3(R) \to P_2(R)$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_3 + (a_2 + a_3)x + (a_0 + a_1)x^2$ द्वारे परिभाषित, अनुक्रमे बेसिस $B = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$ आणि $B' = \{1, x, x^2\}$ संबंधित मॅट्रिक्स लिहा.

3. समजा काही वास्तविक फंक्शनचा व्हेक्टर स्पेस V आहे आणि $B = \{1, t, e^t, te^t\}$ हा, V चा बेसिस आहे, समजा $D: V \to V$, हा V वर डिफरन्शिअल ऑपरेटर आहे म्हणजे $D(f) = \frac{df}{dt}$. मॅट्रिक्स [D,B] शोधा.

4. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T: R^3 \to R^4$ साठी $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + z, 2y - z, 6y)$, परिभाषित केलेले आहे, R^3 आणि R^4 स्टँडर्ड बेसिस संबंधित मॅट्रिक्स शोधा.

5. ट्रान्सफॉर्मेशन $T: R^2 \to R^3$ ने सादर केलेल्या $T(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2, 5x_1 - 6x_2)$, स्टँडर्ड बेसिस R^2 आणि R^3 च्या संदर्भात मॅट्रिक्स शोधा.

6. i. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T: R^3 \to R^3$ साठी $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - z/2, x + y - 2z)$ परिभाषित केलेले ऑर्डरड बेसिस $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ आणि $B' = \{1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$ च्या संदर्भात मॅट्रिक्स शोधा.

   ii. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T: R^2 \to R^2$ साठी $T(x, y) = (2y, 3x - y)$, परिभाषित केलेले आहे, बेसिस $\{(1, 3), (2,5)\}$ च्या संबंधित मॅट्रिक्स शोधा.

7. ऑर्डरड बेसिस $B = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ आणि $B' = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ च्या संदर्भात लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T: R^2 \to R^3$ शोधा ज्याचे मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ आहे.

8. मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 2/3 & 4 \end{bmatrix}$ ने निर्धारित केलेल्या आणि ऑर्डरड बेसिस $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ च्या संदर्भात R^2 वरील लिनिअर ऑपरेटर T चे वर्णन करा.

9. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ने निर्धारित केलेल्या आणि ऑर्डरड बेसिस $B = \{(1, 1), (0, 2)\}$ आणि $B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ च्या संदर्भात लिनिअर ऑपरेटर $T: R^2 \to R^3$ चे वर्णन करा.

10. लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T: R^3 \to R^3$ शोधा ज्याचे मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ऑर्डरड बेसिसशी संबंधित आहेत.

   a . $B = B' = \{e_1, e_2, e_3\}$

   b. $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$; $B' = \{1, 2, 3), (1, -1, 1), (2, 1, 1)\}$

11. बेसिस (5, 1, 3), (3, 2, 2), (1, 2, 1) शी संबंधित लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन $T: R^3 \to R^3$ शोधा, जेव्हा ट्रान्सफॉरमेशनचा मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ आहे.

12. ऑर्डरड बेसिस $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ च्या संदर्भात जर $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ हा लिनिअर ट्रान्सफॉरमेशन T चा मॅट्रिक्स असेल तर बेसिस $B' = \{(0, 1, -1), (-1, 1, 0)$ च्या संदर्भात मॅट्रिक्स शोधा

उत्तरे

1. a. $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -9/2 & -5/2 \\ 5/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

6. i. $[T:B,B'] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/4 \\ 1 & 11/2 & -5/4 \end{bmatrix}$ ii $[T:B] = \begin{bmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{bmatrix}$

7. $T(x,y) = (2y-x, y, -3x+3y)$ 8. $T(x,y) = \left(\dfrac{7x+23y}{6}, \dfrac{2x+10y}{3}\right)$

9. $T(x,y) = (-4x+2y,\ x,\ -2x+y)$

10. a. $T(x,y,z) = (x,y,z)$ b. $T(x,y,z) = (x+2y-2z, -x+y+2z, x+y+z)$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.6 दोन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची रचना

समजा F फील्डवर U, V, W हे तीन व्हेक्टर स्पेस आहेत. समजा $T_1 : U \to V$ आणि $T_2 : V \to W$ दोन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहेत. $T_2T_1 : U \to W$ ला T_2 आणि T_1 चा प्रॉडक्ट (रचना) असे म्हणतात आणि तो $(T_2T_1)(u) = T_2(T_1(u))$ असा परिभाषित केला जातो $\forall\ u \in V$ साठी.

टिप्पणी:

i. दोन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची रचना पुन्हा एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असते.

ii. T_1 ची रेंज $\subseteq$ T2 चा डोमेन हि T2T1 परिभाषित करण्यासाठी अट आहे.
किंवा पोस्ट-फॅक्टर रूपांतरणाची श्रेणी $\subseteq$ पूर्व- घटक रूपांतरणाचे डोमेन.

iii. समजा U आणि V हे दोन व्हेक्टर स्पेस फील्ड F वर आहेत. जर $T_1 : U \to V$ आणि $T_2 : U \to V$ हे दोन L.T.आहेत तर

a. T1 आणि T2 ची बेरीज $T_1 + T_2 : U \to V$ हि लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असते आणि ती याप्रमाणे परिभाषित केली जाते.

$$(T1 + T2)(u) = T1(u) + T2(u) \text{ सर्व } u\ V, \text{साठीं.}$$

b. जर a ∈ F कोणताही स्केलर असेल तर a सह T चा स्केलर मल्टिपल यापद्धतीने दर्शविले जाते द्वारे दर्शविले जाते $aT : U \to V$ जे कि एक L.T आहे. आणि (aT) (u) = a(T(u)) सर्व u ∈ U याप्रमाणे परिभाषित केले जाते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.28. समजा $T_1 : R^3 \to R^2$ असा आहे की $T_1(x, y, z) = (3x, 4y - z)$ आणि $T_2 : R^2 \to R^2$ असा आहे की $T_2(x, y) = (-x, y)$ तर T_1T_2 आणि T_2T_1 ची गणना करा.

उकल: येथे $T_2(=R^2)$ ची रेंज $\not\subseteq$ $T_1(=R^3)$ चे डोमेन

$\therefore$ T_1T_2 परिभाषित केलेले नाही

आता, T_2T_1 परिभाषित केले आहे कारण $T_1(=R^2)$ ची रेंज $\subseteq T_2(=R^2)$ चे डोमेन

$T_2T_1 : R^3 \to R^2$ एक L.T आहे आणि परिभाषित केले जाते.

$$T_2T_1(x, y, z) = T_2\left(T_1(x, y, z)\right) = T_2\left(T_1(3x, 4y - z)\right) = (-3x, 4y - z)$$

उदाहरण 4.29. समजा T आणि S दोन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहेत, $R^3 \to R^2$, तर $T(x, y, z) = (2x - 3y, 7y + 2z)$ आणि $S(x, y, z) = (x - z, y)$ द्वारे परिभाषित केले आहे, म्हणून $S + T$, $3S$, $2S - 3T$, ST, TS, $T^2(TT)$ ची गणना करा.

उकल: i. S आणि T हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहेत म्हणून S + T हे देखील लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे.

$S + T : R^3 \to R^2$ द्वारे परिभाषित केले आहे

$$\begin{aligned}(S + T)(x, y, z) &= S(x, y, z) + T(x, y, z)\\ &= (x - z, y) + (2x - 3y, 7y + 2z)\\ &= (3x - 3y - z, 8y + 2z).\end{aligned}$$

ii. S हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे म्हणून 3S हे देखील लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे.

$3S : R^3 \to R^2$ द्वारे परिभाषित केले आहे

$$\begin{aligned}((3S)(x, y, z) &= 3S(x, y, z) = 3(x - z, y)\\ &= (3x - 3z, 3y).\end{aligned}$$

iii. S आणि T हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहेत म्हणून 2S, 3T हे देखील लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहेत

$\therefore$ $2S - 3T$, हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे.

$2S - 3T : R^3 \to R^2$ द्वारे परिभाषित केले आहे.

$$\begin{aligned}(2S - 3T)(x, y, z) &= 2S(x, y, z) - 3T(x, y, z)\\ &= 2(x - z, y) - 3(2x - 3y, 7y + 2z)\\ &= (2x - 2z, 2y) - (6x - 9y, 21y + 6z)\\ &= (-4x + 9y - 2z, -19y - 6z)\end{aligned}$$

iv. $T(=R^2)$ ची रेंज $\not\subseteq$ $S(=R^3)$ चे डोमेन.

$\therefore$ ST परिभाषित केलेले नाही.

v. $S(=R^2)$ ची रेंज $\not\subseteq$ $T(=R^3)$ चे डोमेन.

$\therefore$ TS परिभाषित केलेले नाही.

vi. $T(=R^2)$ ची रेंज $\not\subseteq$ $T(=R^3)$ चे डोमेन.

$\therefore$ T^2 परिभाषित केलेले नाही.

उदाहरण 4.30. दोन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन T_1 आणि T_2 यांचे उदाहरण असे द्या कि $T_1T_2 = 0$ आणि $T_2T_1 \neq 0$.

उकल: समजा

$T_1 : R^2 \to R^2$ द्वारे $T_1(x, y) = (0, y)$

आणि $T_2 : R^2 \to R^2$ द्वारे $T_2(x, y) = (y, 0)$

$\therefore$ T_1T_2 आणि T_2T_1 दोन्ही परिभाषित केले जाते.

आता, $$(T_2T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(0, y) = (y, 0)$$

$\Rightarrow$ $$T_2T_1 = (y, 0) \neq 0$$

तसेच, $$(T_2T_1)(x, y) = T_1(T_2(x, y)) = T_1(y, 0) = (0, 0)$$

$$T_1T_2 = 0.$$

4.6.1 लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनचा व्यस्त(ऑपरेटर)

लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : U \to V$ ला इन्व्हर्टिबल म्हणतात जर तो वन-वन, ऑनटू आणि T चा व्यस्त T^{-1} : $V \to U$ असा आहे की $T^{-1}(v) = u$, जर आणि फक्त जर $T(u) = v$.

टिप्पणी:

i. $T^{-1}: V \to U$ हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनआहे.

ii. $T_1: U \to V$ आणि $T_2: V \to w$ दोन इन्व्हर्टिबल लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहेत, तर $(T_2T_1)^{-1}$ इन्व्हर्टिबल लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनआहे आहे आणि $(T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1}.T_2^{-1}$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.31. समजा T हा R^3 वरील, $T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$ द्वारा परिभाषित केलेले लिनिअर ऑपरेटर आहे. T हे इन्व्हर्टिबल आहे हे दाखवा आणि T^{-1} शोधा.

उकल: आपल्याला माहित आहे कि, T हा इन्व्हर्टिबल आहे जर आणि फक्त जर T हा वन-वन आणि ऑनटु असेल.

T वन-वन आहे : समजा $u = (x_1, y_1, z_1)$ आणि $v = (x_2, y_2, z_2) \in R^3$ अहेतुक व्हेक्टर असे आहेत कि

$$T(u) = T(v)$$

$$\Rightarrow \quad T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2)$$

$$\Rightarrow \quad (2x_1, 4x_1 - y_1, 2x_1 + 3y_1 - z_1) = (2x_2, 4x_2 - y_2, 2x_2 + 3y_2 - z_2)$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

$$4x_1 - y_1 = 4x_2 - y_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$$

$$2x_1 + 3y_1 - z_1 = 2x_2 + 3y_2 - z_2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow \quad (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\Rightarrow \quad u = v$$

म्हणून T वन-वन आहे :

T ऑनटु आहे: समजा $(x, y, z) \in R^3$, एक व्हेक्टर आहे आणि समजा $(a, b, c) \in R^3$ असा व्हेक्टर आहे की

$$T(a, b, c) = (x, y, z)$$

$$(2a, 4a - b, 2a + 3b - c) = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \quad 2a = x$$

$$4a - b = y$$

$$2a + 3b - c = z$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$$a = \frac{x}{2},\ \ b = 2x - y,\ \ c = 7x - 3y - z$$

म्हणून $\quad x, y, z \in R \quad \Rightarrow \quad a, b, c \in R$

$\therefore \quad (a, b, c) \in R^3$

अशा प्रकारे, T ऑनटु आहे.

$\therefore$ T हे वन-वन, ऑनटु असल्यामुळे इन्व्हर्टिबल आहे.

अशा प्रकारे $\quad T(a, b, c) = (x, y, z)$

$$T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$$

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, 2x - y, 7x - 3y - z\right)$$

पर्यायी पद्धत: $\quad T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$

स्टँडर्ड बेसिसच्या संदर्भातील T शी संबंधित मॅट्रिक्स आहे.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A, इन्व्हर्टिबल आहे जर आणि फक्त जर $|A| \neq 0$

$$|A| = 2(1 - 0) - 0 + 0 \qquad [R_1 \text{ वर विस्तार करून}]$$

$$\Rightarrow \quad |A| = 2 \neq 0$$

आपल्याला माहीत आहे कि, $\quad A^{-1} = \dfrac{adjA}{|A|} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

अशा प्रकारे, $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 14 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

किंवा $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

अशा प्रकारे, लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T^{-1} : R^3 \rightarrow R^3$ स्टँडर्ड बेसिसशी संबंधित आहे.

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2},\ 2x - y,\ 7x - 3y - z\right)$$

अभ्यास 4.7

1. समजा लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T_1 : R^3 \to R^2$ असे आहे कि $T_1(x, y, z) = (4x, 3y - 2z)$ आणि $T_2 : R^2 \to R^2$ असे आहे कि $T_2(x, y) = (-2x, y)$. T_1T_2 आणि T_2T_1 ची गणना करा.
2. $T_1 : R^3 \to R^2$, $T_2 : R^3 \to R^2$ आणि $T_3 : R^2 \to R^2$ हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहेत कि $T_1(x, y, z) = (y, x + z)$, $T_2(x, y, z) = (2z, x - y)$, $T_3(x, y) = (y, 2x)$ अस्तित्वात असल्यास, खालील लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनसाठी परिभाषित सूत्र शोधा:

   i. T_1T_3 ii. T_2T_3 iii. T_3T_1 iv. T_3T_2 v. $T_3T_1 + T_3T_2$
3. समजा T_1 आणि T_2, हे R^2 वर परिभाषित केले आहे, $T_1(x, y) = (0, x)$ आणि $T_2(x, y) = (y, x)$, वर लिनिअर ऑपरेटर आहेत. गणना करा.

   i.. $T_1 + T_2$ ii. $2T_2 - 3T_1$ iii. $T_2\ T_1$ iv. T_1T_2 v. T_2^2 vi. T_1^2
4. समजा $T : R^4 \to R^2$, $T(x, y, z, t) = (x - y + 2z, y - t)$ द्वारे दिले आहे आणि समजा $S : R^2 \to R^3$ $S(x, y) = (x + 3y, -x + y, 2y)$ असे आहे तर दाखवा की ST लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे.
5. समजा T आणि S, R^3 लिनिअर ऑपरेटर असे परिभाषित केले आहे आहेत की, $T(x, y, z) = (x - 3y, - 2z, y - 4z)$ आणि $S(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y)$. तर दाखवा की $ST \neq TS$.
6. समजा $T : R^3 \to R^3$ हे $T(x, y, z) = (0, x, y)$ द्वारा परिभाषित केले आहे तर दाखवा की $T^2 \neq 0$ परंतु $T^3 = 0$.
7. समजा $T : R^3 \to R^3$ वर लिनिअर ऑपरेटर असे परिभाषित केले आहे आहेत की $T(x, y, z) = (0, 0, x)$ तर दाखवा की $T \neq 0$ परंतु $T^2 = 0$.
8. उदाहरणाच्या मदतीने स्पष्ट करा की येथे एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T_1 : R^2 \to R^2$ आणि $T_2 : R^2 \to R^2$ असे अस्तित्वात आहे कि $T_2T_1 = 0$ परंतु $T_1T_2 \neq 0$.
9. जर $T : R^3 \to R^3$ लिनिअर ऑपरेटर असे परिभाषित केले आहे की $T(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$, तर दाखवा की T इन्व्हर्टिबल आहे आणि T^{-1} शोधा.
10. खालील R^3 वरील प्रत्येक ऑपरेटर T हा इन्व्हर्टिबल आहे हे दाखवा आणि T^{-1} शोधा

    i. $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$ ii. $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$
11. समजा $T : T^2 \to R^2$ लिनिअर ऑपरेटर असे परिभाषित केले आहे की $T(x, y) = (y, 2x - y)$ तर दाखवा की T हा इन्व्हर्टिबल आहे आणि T^{-1} चे सूत्र शोधा.

उत्तरे

1. T_1T_2 परिभाषित नाही; $T_2T_1(x, y, z) = (-8x, 3y - 2z)$
2. i. परिभाषित नाही ii. परिभाषित नाही

   iii. $T_3T_1(x, y, z) = (x + z, 2y)$

   iv. $T_3T_2(x, y, z) = (x - y, 4z)$

   v. $T_3T_1 + T_3T_2(x, y, z) = (2x - y + z, 2y + 4z)$
3. i. $(T_1 + T_2)(x, y) = (y, 2x)$

   ii. $(2T_2 - 3T_1)(x, y) = (2y, - x)$

   iii. $(T_2T_1)(x, y) = (x, 0)$ iv. $(T_1T_2)(x, y) = (0, y)$

v. $(T2)(x,y)=(x,y)$ vi. $(T_1)(x,y)=(0,0)$

8. $T_1(x, y) = (0, x), T_2(x, y) = (x, 0)$ 9. $T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}, z, \frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

10. i $T^{-1}(x,y,z)=(x+3y+14z,\ y+4z,\ z)$ ii $T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3}-y, z-x+y\right)$

4.7 लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची नल स्पेस किंवा कर्नल

समजा $T : U \rightarrow V$ एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे. T चा नल स्पेस (कर्नल), हा U चा उपसंच आहे जो असे व्हेक्टर धारण करतो कि T मध्ये त्याची प्रतिमा शून्य आहे. याला N(T) किंवा Ker (T) द्वारे दर्शविले जाते

$$\text{Ker}(T) = N(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}.$$

4.8 लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची रेन्ज किंवा प्रतिमा

समजा $T : U \rightarrow V$ एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे. T ची रेन्ज स्पेस (प्रतिमा) म्हणजे V च्या अशा व्हेक्टर्स चा संच आहे ज्या U मधील T च्या प्रतिमा आहेत. याला R(T) द्वारे दर्शविले जाते

$$R(T) = \{T(u), u \in U\}.$$

4.9 लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची रँक आणि नलिटी

समजा $T : U \rightarrow V$ एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे. T च्या रँक ला $\rho(T)$ द्वारे दर्शविले जाते आणि हे R(T) चे डायमेन्शन म्हणून परिभाषित केले जाते.

T ची नलिटी $\mu(T)$ द्वारे दर्शविली जाते आणि $N(T)$ चे डायमेन्शन म्हणून परिभाषित केले जाते.

4.9.1 सिल्वेस्टरचा नियम/रँक नलिटी प्रमेय

समजा $T : U(F) \rightarrow V(F)$ एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे तर

रँक (Rank) T + नलिटी (Nullity) T = dim U

म्हणजे,
$$\rho(T)+\mu(T)=\dim U$$

किंवा
$$\dim(R(T))+\dim(N(T))=\dim U$$

सिद्धता: समजा $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, N(T) चे असे बेसिस आहेत कि

$$\dim N(T)=\mu(T)=n$$

S हा $N(T)$ चा बेसिस आहे म्हणून S हा $N(T)$ मध्ये L.I आहे आणि $N(T) \subseteq U$.

$\Rightarrow$ S हा U मध्ये L.I आहे आणि U साठी बेसिस $S' = \{u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_m\}$ वाढवता येतो.

म्हणून
$$\dim N(T)=\mu(T)=n$$
$$\dim U = m$$

आता आपण तोच संच दाखऊ

$P = \{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), ..., T(u_m)\}$ हा R(T) चा बेसिस आहे.

S′ हा U चा बेसिस असल्याने आणि कोणत्याही व्हेक्टर साठी $u \in U$ हे S′ च्या सदिशांचे L.C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते.

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n + a_{n+1}u_{n+1} + ... + a_mu_m$$

दोन्ही बाजूंनी T लावून, आपल्याला मिळते

$$T(u) = a_1\, T(u_1) + a_2\, T(u_2) + \ldots + a_n\, T(u_n) + a_{n+1}\, T(u_{n+1}) + \ldots + a_m\, T(u_m)$$

[$\because$ T, हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे]

$$T(u) = 0 + 0 + \ldots + 0 + a_{n+1}\, T(u_{n+1}) + \ldots + a_m\, T(u_m) \quad [\because u_i \in N(T),\ 1 \le i \le n]$$

$$T(u) = a_{n+1}\, T(u_{n+1}) + \ldots + a_m\, T(u_m)$$

$\therefore$ T(u) हे P च्या संचाचा L.C आहे आणि अशा प्रकारे P चा विस्तार R (T) आहे

आता, P हे L.T आहे हे दाखवण्यासाठी

$$a_{n+1}\, T(u_{n+1}) + a_{n+2}\, T(u_{n+2}) + \ldots + a_m\, T(u_m) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(a_{n+1}\, u_{n+1} + a_{n+2}\, u_{n+2} \ + a_m\, u_m) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1}\, u_{n+1} + a_{n+2}\, u_{n+2} + \ldots + a_m\, u_m \in N(T)$$

$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ हा N(T) चा बेसिस आहे म्हणून.

$$\therefore \quad a_{n+1}\, u_{n+1} + a_{n+2}\, u_{n+2} + \ldots + a_m\, u_m = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n$$

$$\Rightarrow \quad (-b_1)u_1 + (-b_2)u_2 + \ldots + (-b_n)u_n + a_{n+1}\, u_{n+1} + a_{n+2}\, u_{n+2} + \ldots + a_m\, u_m = 0$$

म्हणून $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m\}$, हा $U = S'$ चा बेसिस आहे आणि L.I. आहे.

$$\therefore \quad -b_1 = -b_2 = \ldots = -b_n = a_{n+1} = \ldots = a_m = 0$$

विशेषतः, $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_m = 0.$

म्हणून, P हा L.I आहे आणि त्याचा विस्तार R (T) आहे.

$\therefore$ $P = \{T(u_{n+1}), T(u_{n+2}), \ldots, T(u_m)\}$, हा R(T) चा बेसिस आहे.

$$\dim\,(R(T)) = \rho(T) = m - n$$

$$\rho(T) = \dim U - \mu(T)$$

$\rho(T) + \mu(T) = \dim U$ जे प्रमेय सिद्ध करते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.32. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन साठी $T : R^2 \to R^3$ जसे की $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ तर रेन्ज स्पेस आणि नल स्पेस चे बेसिस आणि डायमेन्शन शोधा. तसेच रँक नलिटी प्रमेयाची पडताळणी करा.

उकल: 1. T ची नल स्पेस आणि डायमेन्शन शोधण्यासाठी; नल स्पेस च्या परिभाषानुसार

$$= \{u \in R^2 : T(u) = 0 \in R\}$$

समजा $u = (x, y) \in R^2$ चे नल स्पेस अहेतुक घटक आहे

$$\Rightarrow \quad T(u) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T\,(x, y) = 0$$

$$(x + y, x - y, y) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 0$$

$$x - y = 0$$

$$y = 0$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$$x = 0, \quad y = 0$$

अशा प्रकारे, नल स्पेस हे शून्य व्हेक्टर आहे.

$$N(T) = \{0\}$$

$\therefore$ $$\text{Nullity of } T = \dim (N(T)) = 0.$$

2. T ची रेन्ज स्पेस आणि डायमेन्शन शोधण्यासाठी

समजा $V \in R(T) \in R^3$ हा अहेतुक घटक आहे.

मग तेथे $(x, y) \in R^2$ असे आहे की $V = T(x, y)$

आता, $$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$$

जेथे $$e_1 = (1, 0) \text{ आणि } e_2 = (0, 1)$$

दोन्ही बाजूंनी T लावून, आपल्याला मिळते

$$T(x, y) = T(xe_1 + ye_2)$$
$$= x\,T(e_1) + y\,T(e_2) \qquad [\because T, \text{ हे लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे }]$$

आता, $$T(e_1) = T(1, 0) = (1 + 0, 1 - 0, 0)$$
$$= (1, 1, 0)$$
$$T(e_2) = T(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1, 1) = (1, -1, 1)$$
$$T(x, y) = x(1, 1, 0) + y(1, -1, 1)$$
$$V = x\,(1, 1, 0) + y(1, -1, 1) \qquad ...(1)$$

$V \in R(T)$ अहेतुक असल्याने, म्हणून हे असे सूचित करते $R(T)$, व्हेक्टर $S = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ द्वारे विस्तृत केले आहे

3. S हे L.I आहे हे तपासण्यासाठी

समजा $a, b \in F$ हे असे स्केलर आहेत की

$$a(1, 1, 0) + b(1, -1, 1) = 0$$
$$(a + b, a - b, b) = (0, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ $$a + b = 0$$
$$a - b = 0$$
$$b = 0$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$$a = 0, \quad b = 0$$

म्हणून S हे L.I आहे आणि, म्हणून R(T) हा S चा बेसिस संच आहे.

$\therefore$ $$\dim (R(T)) = 2$$

तसेच, $$\dim U = \dim R^2 = 2$$

$\therefore$ $$\text{Rank } (T) + \text{Nullity } (T) = 2 + 0 = 2$$
$$= \dim R^2$$

उदाहरण 4.33. एक लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^2 \to R^3$ असे आहे $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ आणि $T(0, 1) = (2, 1, -1)$, T साठी परिभाषित सूत्र शोधा आणि नंतर रेन्ज स्पेस, रँक, नल स्पेस आणि नलिटी शोधा.

उकल: $u_1 = (1, 2)$ आणि $u_2 = (0, 1)$, L.I. आहेत आणि R^2 चे बेसिस आहेत.

असे समजा $u = (x, y) \in R^2$ अहेतुक (आर्बिट्ररी) आहे.

म्हणून u ला u_1 आणि u_2 चे L.C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते

तेथे $a, b \in F$ असे स्केलर आहेत

$$u = au_1 + bu_2$$

$$(x, y) = a(1, 2) + b(0, 1) \qquad ...(1)$$

$$(x, y) = (a, 2a+b)$$

$$\Rightarrow \qquad x = a$$

$$y = 2a + b \quad \Rightarrow \quad b = y - 2x$$

a, b चे मूल्य (1) मध्ये टाकल्यास आपल्याला मिळते

$$(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)$$

आता दोन्ही बाजूना T लावून,

$$T(x, y) = x\,T(1, 2) + (y - 2x)\,T(0, 1) \quad [\because T,\ \text{L.T. आहे}]$$

$$T(x, y) = x(3, -1, 5) + (y - 2x)(2, 1, -1)$$

$$= (-x + 2y, -3x + y, 7x - y)$$

जे T चे परिभाषित सूत्र आहे.

मॅट्रिक्स, जे L.T. शी संबंधित आहे

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेशन $R_2 \to R_2 - 3R_1,\ R_3 \to R_3 + 7R_1$ करून,

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{ऑपरेशन } R_3 \to R_3 + 13/5R_2 \text{ करून}]$$

$$R(T) = \text{रेंज स्पेस}$$

$$= \langle (-1, -3, 7), (2, 1, -1) \rangle \subseteq R^3.$$

$$= R(T) \text{ चा बेसिस.}$$

$$\dim(R(T)) = 2 = \rho(T)$$

N(T) चे डायमेन्शन (Dimension of N(T))

समजा $\qquad u = (x, y) \in N(T) \subseteq R^2$

$\therefore \qquad T(u) = 0$

$$(-x + 2y, -3x + y, 7x - y) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad -x + 2y = 0$$
$$-3x + y = 0$$
$$7x - y = 0$$

ही समीकरणे सोडवल्यावर आपल्याला मिळते

$$x = 0, \quad y = 0$$

याप्रमाणे, $N(T) = \{0\}$

$$\dim (N(T)) = 0 = \mu (T)$$

तसेच, $\rho (T) + \mu (T) = 2 + 0 = 2$

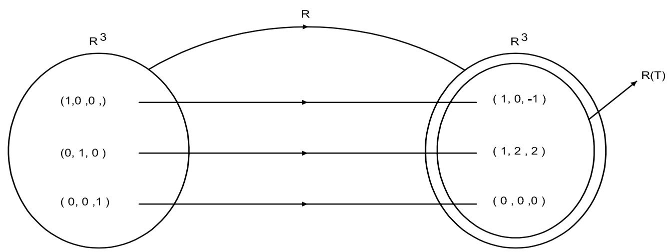
$$= \dim R^2$$

उदाहरण 4.34. L.T शोधा , $T : R^3 \to R^3$ ज्याची रेंज स्पेस $(1, 0, -1)$ आणि $(1, 2, 2)$ द्वारे तयार केली जाते.

उकल: $R(T)$ चा बेसिस $= \{(1, 0, -1), (1, 2, 2)\}$

आपल्याला माहित आहे कि

R^3 चा बेसिस (डोमेन) $= \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$



आकृती 4.1

कारण R^3 ही त्रिमितीय व्हेक्टर स्पेस असल्याने आणि $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ R^3 एक बेसिस असल्याने, एक अद्वितीय(युनिक) L.T., T असा अस्तित्वात आहे की:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$$
$$T(0, 1, 0) = (1, 2, 2)$$
$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

समजा $u = (x, y, z) \in R^3$ अहेतुक (आर्बिट्ररी) आहे . म्हणून u ला e_1, e_2, e_3 च्या L.C (रेषीय संयोजन) म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते.

तेथे स्केलर $a, b, c \in F$ असे अस्तित्वात आहेत कि

$$u = ae_1 + be_2 + ce_3$$
$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(1, 0, 0) + c(0, 0, 1) \qquad ...(1)$$
$$(x, y, z) = (a, b, c)$$

$\Rightarrow \qquad a = x, \quad b = y, \quad c = z$

a, b आणि c ही मूल्ये (1) मध्ये टाकल्यास आपल्याला मिळते

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

दोन्ही बाजूंनी T लावून, आपल्याला मिळते

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \quad [\because \text{T,L.T.आहे}]$$

$$T(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(1, 2, 2) + z(0, 0, 0)$$

$$T(x, y, z) = (x + y, 2y, -x + 2y) \qquad \text{जे आवश्यक L.T. आहे.}$$

उदाहरण 4.35. एक रेषीय परिवर्तन $T: R^4 \to R^3$ शोधा ज्याची नल स्पेस (2, 3, 4, 1) आणि (1, 0, 1, 1) द्वारे स्पॅन केलेली असेल.

उकल: N(T) चा बेसिस $= \{(2, 3, 4, 1), (1, 0, 1, 1)\}$

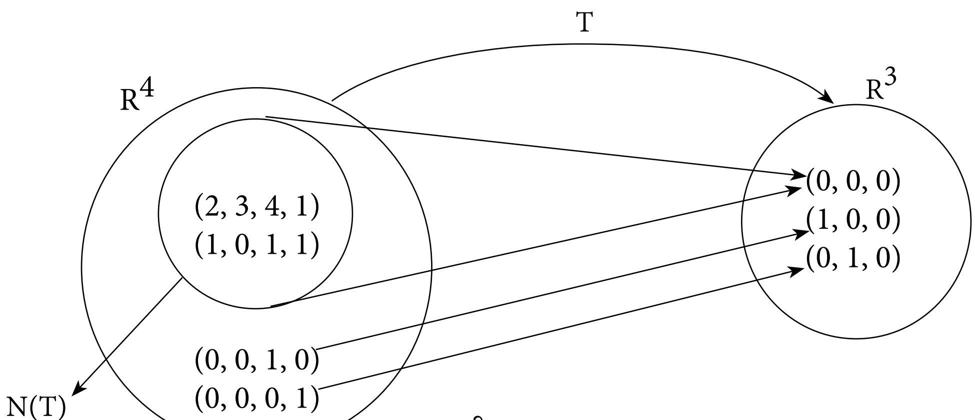
$$u(T) = \dim (N(T)) = 2$$

$$d\,im\, R^4 = 4$$

म्हणून आपल्याला N(T) चा बेसिस विस्तृत करणे आवश्यक आहे जेणेकरून संच R^4 चा बेसिस होईल.

स्टॅण्डर्ड बेसिस $R^4 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

गृहीत धरा की $S = \{(2, 3, 4, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$



आकृती 4.2

स्तंभांमध्ये 4 व्हेक्टर लिहून मॅट्रिक्स A तयार करा म्हणजे,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेशन करून $R_1 \leftrightarrow R_4$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ऑपरेशन करून $R_2 \to R_2 - 3R_1, R_3 \to R_3 - 4R_1, R_4 \to R_4 - 2R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ऑपरेशन करून $R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to R_4 - \frac{R_2}{3}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ρ (A) = 4 = स्तंभांची संख्या

तर {(2, 3, 4, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}, R^4 चा बेसिस आहे

आता, T(2, 3, 4, 1) = (0,0, 0) $[\because \in N(T)]$

T(1, 0, 1, 1) = (0, 0, 0)

असे समजा T(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0)

T(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0)

इतर व्हेक्टर च्या प्रतिमा L.I असणे आवश्यक आहे. अन्यथा हे व्हेक्टर N (T) चे आहेत जे शक्य नाही dim(N (T)) = 2 म्हणून

समजा u = (x, y, z, w) $\in$ R^4 आर्बिट्ररी आणि S चे व्हेक्टर, L.C म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते

तेथे स्केलर a, b, c, d $\in$ F असे आहेत की

u = a(2, 3, 4, 1) + b(1, 0, 1, 1) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1) ...(1)

$\Rightarrow$ (x, y, z, w) = (2a + b, 3a, 4a + b + c, a + b + d)

$\Rightarrow$ x = 2a + b

$y = 3a \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{3} = a$

$z = 4a + b + c$

$w = a + b + d$

सोडवल्यावर, आपल्याला मिळते

$$a = \frac{y}{3}, b = x - \frac{2y}{3}, c = z - x - \frac{2y}{3}, d = w - x + \frac{y}{3}$$

ही मूल्ये (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याला मिळते

$$(x, y, z, w) = \frac{y}{3}(2,3,4,1) + \left(x - \frac{2y}{3}\right)(1,0,1,1) + \left(z - x - \frac{2y}{3}\right)(0,0,1,0) + \left(w - x + \frac{y}{3}\right)(0,0,0,1)$$

दोन्ही बाजूंनी T लावून, आपल्याला मिळते

$$T(x, y, z, w) = \frac{y}{3}T(2,3,4,1) + \left(x - \frac{2y}{3}\right)T(1,0,1,1) + \left(z - x - \frac{2y}{3}\right)T(0,0,1,0) + \left(w - x + \frac{y}{3}\right)T(0,0,0,1)$$

[$\because$ T, L.T. आहे]

$$T(x,y,z,w)=\frac{y}{3}(0,0,0)+\left(x-\frac{2y}{3}\right)(0,0,0)+\left(z-x-\frac{2y}{3}\right)(1,0,0)+\left(w-x+\frac{y}{3}\right)(0,1,0,)$$

$$T(x,y,z,w)=\left(z-x-\frac{2y}{3},w-x+\frac{y}{3},0\right)$$

जे L.T चे सूत्र परिभाषित करत आहे.

अभ्यास 4.8

1. खालील लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनसाठी R(T), रँक(T), N(T), आणि नलिटी(T) शोधा आणि सिल्वेस्टरच्या नियमाची पडताळणी करा:
   i. $T : R^3 \to R^2$ द्वारे परिभाषित $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$
   ii. $T : R^4 \to R^3$ द्वारे परिभाषित $T(x, y, z, w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w)$
   iii. $T : R^2 \to R^2$ द्वारे परिभाषित $T(x, y) = (x + y, x)$
   iv. $T : R^2 \to R^3$ द्वारे परिभाषित $T(x, y) = (x,\ x + y,\ y)$
2. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^3 \to R^4$ शोधा , ज्याची रेन्ज स्पेस (1, 2, 0, -4) आणि (2, 0, -1, -3) द्वारे तयार केली जाते.
3. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^3 \to R^3$ शोधा , ज्याची रेन्ज स्पेस (1, 2, 3) आणि (4, 5, 6) द्वारे तयार केली जाते.
4. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^3 \to R^4$ शोधा , ज्यांची रेन्ज स्पेस (null space) (0, 1, −3) आणि (0, −3,4) द्वारे तयार केली जाते.
5. लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^4 \to R^3$ शोधा , ज्यांची रेन्ज स्पेस (null space) (1, 2, 3, 4) आणि (0, 1, 1, 1) द्वारे तयार केली जाते.
6. शून्य ट्रान्सफॉर्मेशनसाठी रेन्ज, रँक, नल स्पेस आणि नलिटी शोधा आणि फायनाईट डायमेन्शन व्हेक्टर स्पेस V वर इडेन्टिटी ट्रान्सफॉर्मेशन शोधा.
7. समजा $T : V \to V$ हा एक रेषीय नकाशा असा आहे कि R(T) = N(T), जेथे V हा फायनाईट डायमेन्शनल आहे. सिद्ध करा की dimV सम आहे.
8. समजा $T : R^5 \to R^3$ लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे आहे कि μ (T) = 2, तर dim R(T) शोधा.
9. असे काही लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^4 \to R^2$ आहे का ज्यासाठी ρ (T) = 3, μ (T) = 2 तर dim R(T) शोधा.
10. जर $T : R^4 \to R^3$ द्वारे परिभाषित $T(e_1) = (1, 1, 1), T(e_2) = (1, -1, 1), T(e_3) = (1, 0, 0)$, $T(e_4) = (1, 0, 1)$ लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे मग ρ (T) + μ (T) = dim R^4 = 4 याची पडताळणी करा.

उत्तरे

1. i. $R(T) = R^2$, ρ (T) = 2, N(T) = {(1, −1, 1)}, μ (T) = 1
   ii. R(T) = {(1, 1, 1), (0, 1, 2)}, ρ (T) = 2, N(T) = {(2, −1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)}, μ (T) = 2
   iii. $R(T) = R^2$, ρ (T) = 2, N(T) = {0}, μ (T) = 0
   iv. R(T) = {(1, 1, 0), (0, 1, 1)}, ρ (T) = 2, N(T) = {0}, μ (T) = 0
2. T(x, y, z) = (x + 2y, 2x, −y, −4x − 3y)
3. T(x, y, z) = (x + 4y, 2x + 5y, 3x + 6y)
4. T(x, y, z) = (x, 0, 0, 0)
5. T(x, y, z, t) = (z − y − x, t − 2x − y, 0)

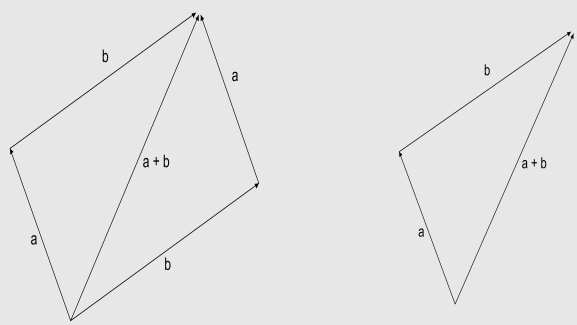
7. शून्य ट्रान्सफॉर्मेशन: रेन्ज (range) = {0}, रँक (rank) = 0, नल स्पेस= V, नलिटी = div V,
इडेन्टिटी ट्रान्सफॉर्मेशन: रेन्ज = V, रँक = div V, नल स्पेस = {0}, नलिटी = 0

8. 3.

9. नाही

मनोरंजक तथ्य

व्हेक्टर स्पेस म्हणजे गणिती वस्तूंचा संग्रह ज्याला व्हेक्टर म्हणतात.



आकृती 4.3

- व्हेक्टर स्पेसमध्ये दोन ऑपरेशन्स परिभाषित केले जातात: दोन व्हेक्टर ची बेरीज आणि व्हेक्टरचा स्केलर सोबत गुणाकार. ही ऑपरेशन्स व्हेक्टर चा आकार आणि ती निर्देशित केलेली दिशा बदलू शकतात. पण परिणाम अद्याप व्हेक्टर स्पेसमध्ये आहे.
- आपण व्हेक्टर ला अशा प्रकारे बदलू शकत नाही की तो आता व्हेक्टर नाही.
- व्हेक्टरची स्केलर सोबत बेरीज शक्य नाही कारण ते स्पेस मधील वेगवेगळ्या डायमेन्शन मध्ये येतात.

दैनंदिन जीवनाचे अनुप्रयोग:

रँक विरुद्ध L.D. आणि L.I

A हा माझ्या जागेच्या 4 किमी उत्तर आणि 4 किमी पूर्वेला आहे.तेव्हा ते माझ्या वर्तमान स्थानावरून बिंदू A चे अद्वितीय निर्देशांक देते. पण त्या व्यतिरिक्त, जर मी म्हणतो की A हा बिंदू ईशान्य दिशेला 5 किमी आहे, तर त्याचा काही उपयोग नाही! याचा अर्थ असा आहे की दोन गोष्टी दोन्ही वेगवेगळ्या दिशानिर्देशांशी संबंधित आहेत, 2 डी प्रतलातील कोणताही बिंदू शोधण्यासाठी पुरेसे आहे. अशीच संकल्पना उच्च मितीय प्रतलासाठी आहे. आकार $n \times m$ च्या मॅट्रिक्स A च्या बाबतीत, जर लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट व्हेक्टरची संख्या 'r' असेल, तर याचा अर्थ असा की या 'r' व्हेक्टर च्या मदतीने, कोणीही या मॅट्रिक्सशी संबंधित सर्व दिशानिर्देशांचे वर्णन करू शकतो.

आता मॅट्रिक्सच्या लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट व्हेक्टरची संख्या म्हणजेच मॅट्रिक्सची रँक. याचा अर्थ असा की जेव्हा तुम्हाला कोणत्याही मॅट्रिक्ससाठी रँक शोधण्यास सांगितले जाते, तेव्हा याचा अर्थ असा की तुम्ही मॅट्रिक्सशी संबंधित पुरेशा सूचना देत आहात.

मॅट्रिक्स आणि लिनियर ट्रान्सफॉर्ममधील संबंध

मी कॅमेरा आणि रोबोटिक हाताने समजावण्याचा प्रयत्न करतो. समजा तुमच्याकडे रोबोटिक आर्म आहे जे कॅमेराच्या इनपुटवर आधारित काहीतरी करते .

आता कॅमेरा खोलीच्या कोपऱ्यात ठेवण्यात आला आहे. मग, कॅमेराच्या दृष्टिकोनातून, अंतर भिन्न असेल. कधीकधी आपल्याला अभिमुखतेनुसार स्केल अप, स्केल डाउन किंवा फिरवावे लागते. या सर्वांसाठी लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची आवश्यकता असते. आपल्याला मॅट्रिक्सला त्याच्या मूळ स्वरूपापासून वेगळ्या स्वरूपात रूपांतरित करण्याची आवश्यकता आहे जेणेकरून आपण त्यावर कार्य करू शकतो.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत NPTEL)

Vector Spaces –Basis and Dimension

Linear Transformations

Invertible Linear Transformations and Matrices

The Matrix of a Linear Transformation

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेले प्रश्न

उदाहरण 1. सूचित फील्डवर खालील प्रत्येक व्हेक्टर स्पेससाठी बेसिस शोधा:

i $R\left(\sqrt{2}\right)$, R वर ii $Q\left(2^{1/4}\right)$, Q वर

जिथे Q, R हे परिमेय आणि वास्तविक संख्यांचे क्षेत्र आहेत.

उकल: i. आपल्याकडे आहे $R\left(\sqrt{2}\right)=\left(a+\sqrt{2}b : a,b\in R\right)$

आता $R\left(\sqrt{2}\right)$ चे शून्य घटक $0+0.\sqrt{2}$ म्हणून लिहिले जाऊ शकते.

समजा a, b $\in$ R, या प्रकारात आहे

$$a.1+\sqrt{2}b=0$$

$$\Rightarrow \quad a+\sqrt{2}b=0+0.\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad a=0,\ b=0$$

$\Rightarrow$ S लनिअिरली इंडपिेन्डन्ट आहे.

समजा $x+\sqrt{2}y$, $R\left(\sqrt{2}\right)$ चा कोणताही घटक आहे तर $x+\sqrt{2}y=x.1+\sqrt{2}.y$

$R\left(\sqrt{2}\right)$ चे प्रत्येक घटक S च्या घटकांचे रेषीय संयोजन म्हणून व्यक्त करता येते.

$$\Rightarrow \quad L(S)=R\left(\sqrt{2}\right)$$

तर , $S=\left\{1,\sqrt{2}\right\}$ हा दोन घटक असणाऱ्या $R\left(\sqrt{2}\right)$ चा बेसिस आहे म्हणून $\dim R\left(\sqrt{2}\right)=2$

ii. आपल्याकडे आहे $Q\left(2^{1/4}\right)=\left\{a+\left(2^{1/4}\right)b : a,b\in Q\right\}$

आता $Q\left(2^{1/4}\right)$ चा शून्य घटक $0=0+0\left(2^{1/4}\right)$ आहे.

समजा $S=\{1, 2^{1/4}\}$, मग $S\subseteq Q(2^{1/4})$.

आता आपण ते पाहू S , $Q(2^{1/4})$ चा बेसिस बनवते.

समजा $a, b \in Q$ अशा प्रकारे $a . 1 + b (2^{1/4}) = 0$

$\Rightarrow \qquad a + b (2^{1/4}) = 0 + 0 (2^{1/4})$

$\Rightarrow \qquad a = 0, b = 0$

$\Rightarrow$ S लनिअिरली इंडपिन्डन्ट आहे.

समजा $x + (2^{1/4})y$, $Q(2^{1/4})$ चा कोणताही घटक आहे.

मग, $\qquad x + (2^{1/4})y = x.1 + (2^{1/4}).y$

$\Rightarrow$ $Q(2^{1/4})$ चा प्रत्येक घटक, S च्या घटकांचे रेषीय संयोजन म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो.

$\Rightarrow \qquad L(S) = Q(2^{1/4})$

म्हणून $S = \{1, 2^{1/4}\}$, $Q(2^{1/4})$ चा बेसिस आहे म्हणून $\dim Q(2^{1/4}) = 2.$

उदाहरण 2. स्पेस $c(0,\pi)$ मध्ये समजा f, g, h आणि j द्वारे $f(x)=1, g(x)=x, h(x)=\cos x, j(x)=\cos^2\frac{x}{2}$ परिभाषित केलेले व्हेक्टर आहेत. $0 \le x \le \pi$. f, g, h आणि j हे लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहेत हे f, g आणि h हा j चे रेषीय संयोजन म्हणून लिहून दाखवा.

उकल: आपल्याला माहित आहे $\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

x ला $\frac{x}{2}$ ने प्रतिस्थापन केल्यावर आपल्याला मिळते

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \qquad \cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\cos x + 1}{2} = \cos^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1) + \frac{\cos x}{2}(1)$$

$$j(x) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}f(x)$$

किंवा $$j(x) = \frac{1}{2}.h(x) + 0.g(x) + \frac{1}{2}.f(x)$$

उदाहरण 3. समजा T एक व्हेक्टर स्पेस V(F) वर एक लिनिअर ऑपरेटर आहे . जर $T^2 = 0$, T च्या रेन्ज चा त्याच्या नल स्पेस शी काय संबंध आहे याबद्धल आपल्याला काय म्हणता येईल? $V_2(R)$ वर रेषीय ऑपरेटरचे उदाहरण असे द्या कि $T^2 = 0$ पण $T \neq 0$.

उकल: $T^2 = 0$, असल्याने, तर $\alpha \in V$ साठी

$$T^2(\alpha) = 0(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad T[T(\alpha)] = 0$$

$$T(\alpha) \in N(T) \qquad \text{[नल स्पेसच्या व्याख्येनुसार]}$$

परंतु $$T(\alpha) \in R(T) \;\forall\; \alpha \in V$$

$$R(T) \subset N(T)$$

म्हणून जेव्हा $T^2 = 0$, तेव्हा T ची रेंज T च्या नल स्पेस मध्ये असेल.

उदाहरण 4. समजा V(R), x सर्व बहुपदांचे व्हेक्टर स्पेस आहे ज्यांचे गुणक R फिल्डमध्ये आहेत. समजा D आणि T, V वर दोन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहात कि

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \forall f(x) \in V \text{ आणि } T(f(x)) = x f(x) \forall f(x) \in V$$

मग दाखवा कि $DT \neq TD$ तसेच, दाखवा कि $DT - TD = I$.

उकल: समजा $f(x) \in V$ मग

$$(DT)(f(x)) = D[T(f(x))] = D[xf(x)]$$

$$= \frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + x\frac{d}{dx}f(x) \quad \ldots(1)$$

तसेच , $$(TD)(f(x)) = T[D(f(x))]$$

$$= T\left[\frac{d}{dx}(f(x))\right] = x.\frac{d}{dx}(f(x)) \quad \ldots(2)$$

म्हणून, (1) आणि (2) पासून आपण असे म्हणू शकतो की $f(x) \in V$ अस्तित्वात आहे .

$$(DT)(f(x)) \neq (TD)(f(x))$$

म्हणून, $$DT \neq TD$$

तसेच, $(DT)(f(x)) - (TD)(f(x)) = f(x) = 1.f(x)$

$$\therefore \quad DT - TD = 1$$

उदाहरण 5. परिभाषित करा कि $T : R^3 \to R^4$, $T(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_1 - 2x_2)$ सर्व $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, साठी

a. $T(1, -2, 3)$ शोधा.

b. व्हेक्टर $x \in R^3$ शोधा जसे कि $T(x) = (8, 9, -5, 0)$

उकल: $T : R^3 \to R^4$ द्वारे परिभाषित

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_1 - 2x_2)$$

a. $$T(1, -2, 3) = (1 - 3, 1 + (-2), 3 - (-2), 1 - 2(-2))$$
$$= (-2, -1, 5, 5)$$

b. समजा $x = (u, v, w) \in R^3$ अशा प्रकारे कि

$$T(u, v, w) = (8, 9, -5, 0)$$

$$(u - w, u + v, w - v, u - 2v) = (8, 9, -5, 0)$$

तुलना केल्यावर आपल्याला मिळते

$$u - w = 8 \quad \ldots(1)$$

$$u + v = 9 \quad \ldots(2)$$

$$w - v = -5 \quad \ldots(3)$$

$$u - 2v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2v \quad \ldots(4)$$

समीकरण (2) मधून (1) वजा केल्यास आपल्याला मिळते

$$v + w = 1 \quad \ldots(5)$$

समीकरणे (3) आणि (5) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळते

$$w = -2$$

समीकरण (5) वरून, $v - 2 = 1 \Rightarrow v = 3$

समीकरण (4) वरून , $u = 6$

अशा प्रकारे, $(u, v, w) = (6, 3, -2)$, R^3 इच्छित व्हेक्टर आहे ज्याची प्रतिमा आहे T मध्ये $(8, 9, -5, 0)$ आहे.

उदाहरण 6. समजा $v_1 = (-1, 2, 0), v_2 = (3, 2, -1)$ आणि $v_3 = (1, 6, -1)$, $R^3(R)$ मध्ये तीन व्हेक्टर आहेत. मग ते दाखवा $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3]$.

उकल: स्पष्टपणे $[v_1, v_2] = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in R)$

आणि, $[v_1, v_2, v_3] = \{ \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$

असे समजा $v_3 = (1, 6, -1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

तेव्हा $(1, 6, -1) = (-\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_2)$

$\Rightarrow -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1, \; 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 6, -\alpha_2 = -1.$

$\Rightarrow \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1$

$(1, 6, -1) = 2(-1, 2, 0) + 1(3, 2, -1)$

$\Rightarrow \mu_3 (1, 6, -1) = 2\mu_3 (-1, 2, 0) + \mu_3 (3, 2, -1)$

$\Rightarrow \mu_3 v_3 = 2\mu_3 v_1 + \mu_3 v_2$

आता, $[v_1, v_2, v_3] = \{ \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + 2\mu_3 v_1 + \mu_3 v_2 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$

$\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = \{(\mu_1 + 2\mu_3)v_1 + (\mu_2 + \mu_3)v_2 : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R\}$

$\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$

$\Rightarrow [v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$

उदाहरण 7. समजा V हा R वर 2×2 सिमेट्रिक मॅट्रिक्स चा व्हेक्टर स्पेस आहे तर हे दाखवा की dim. V = 3.

उकल: एक आर्बिट्री 2×2 सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ आहे जेथे $a, b, c \in R$. आता घेऊन

i $a = 1, b = 0, c = 0$, ii. $a = 0, b = 1, c = 0$, iii. $a = 0, b = 0, c = 1$,

अशा प्रकारे आपल्याला खालील मॅट्रिक्स मिळते

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

संच $S = \{A, B, C\}$, हा V चा बेसिस आहे

आपण पहिले S हा लिनियरली इंडिपेंडन्ट आहे हे दाखवू

समजा $x, y, z \in R$ असे आहे की $xA + yB + zC = 0$

$$\Rightarrow \quad x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

$\Rightarrow$ $S = \{A, B, C\}$ लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट आहे.

आता,आपण दाखवू कि $L(S) = V$.

समजा $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, V चा कोणताही घटक आहे, मग आपल्याला मिळेल

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = aA + bB + cC$$

$\Rightarrow$ V चा प्रत्येक घटक S च्या घटकांचे रेषीय संयोजन आहे.

उदाहरण 8. समजा V फायनाईट डायमेन्शनल व्हेक्टर स्पेस आहे आणि T हा V वरील एक लिनिअर ऑपरेटर आहे. समजा की रँक (T^2) = रँक (T). सिद्ध करा की T ची रेन्ज आणि नल स्पेस विसंगत आहेत, म्हणजे फक्त शून्य व्हेक्टर सामान्य आहे.

उकल: आपल्याला माहित आहे कि,

$$\text{dim. V} = \text{रँक (T)} + \text{नलिटी (T)} \qquad \ldots (1)$$

आता, T^2 देखील V वर एक रेखीय ऑपरेटर आहे, तर

$$\text{dim. V} = \text{रँक } (T^2) + \text{नलिटी } (T^2) \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) आणि (2) वरून आपल्याला मिळते

$$\text{रँक (T)} + \text{नलिटी (T)} = \text{रँक } (T^2) + \text{नलिटी } (T^2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{नलिटी (T)} = \text{नलिटी } (T^2) \qquad [\because \text{रँक (T)} = \text{रँक } (T^2))]$$

$\Rightarrow$ T च्या नल स्पेसचे dim = T^2 च्या नल स्पेसचे dim .

जर $\alpha \in$ T ची नल स्पेस असेल तर

$$T(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T[T(\alpha)] = T(0)$$

$$\Rightarrow \quad T^2(\alpha) = 0 \qquad [\because T(0) = 0]$$

$\therefore \alpha \in T^2$ ची नल स्पेस

$\therefore$ T ची नल स्पेस $\subseteq$ T^2 ची नल स्पेस.

परंतु T ची नल स्पेस आणि T^2 ची नल स्पेस दोन्ही V चे सबस्पेस आहेत आणि त्यांची डायमेन्शन समान आहेत.

तर, T ची नल स्पेस = T^2 ची नल स्पेस

$\Rightarrow$ T^2 ची नल स्पेस $\subseteq$ T ची नल स्पेस

$$\Rightarrow \quad T^2(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(\alpha) = 0$$

समजा कि $\beta \neq 0$ आणि $\beta \in R(T) \cap N(T)$, तर $\beta \in R(T)$ आणि $\beta \in N(T)$.

आता , $\beta \in N(T) \quad \Rightarrow \quad T(\beta) = 0$

परत , $\beta = R(T) \quad \Rightarrow \exists\, \alpha \in V$ असे की $T(\alpha) = \beta$

आता, $T(\alpha) = \beta$

$$\Rightarrow \qquad T[T(\alpha)] = T(\beta) = 0$$

अशा प्रकारे $\alpha \in V$ अस्तित्वात आहे की $T[T(\alpha)] = 0$ परंतु $T(\alpha) = \beta \neq 0$ जे समीकरण (1) च्या विसंगत आहे. तर असा कोणताही $\beta \in R(T) \cap N(T)$ अस्तित्वात नाही जो $\beta \neq 0$ म्हणून $R(T) \cap N(T) = \{0\}$.

सारांश

1. व्हेक्टर स्पेस V(F) साठी, 'F' हे V चे नेहमीच सब फिल्ड असते, म्हणजेच, V ची व्याख्या केवळ त्याच्या सबफिल्डवरच करता येते.
2. जर $\rho(A)$ = स्तंभांची संख्या, मग 'A' चे व्हेक्टर्स L.I आहे अन्यथा एल.डी.
3. जर dim V = n (फायनाईट डायमेन्शनल) आणि $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ हा एल.आय. V चा उपसंच आहे, मग S, V चा बेसिस आहे.
4. V(F) च्या कोणत्याही बेसिस मधील व्हेक्टर ची संख्या V चे डायमेनशन असे म्हटले जाते.
5. रेंज स्पेस चे dim = रँक

   म्हणजे. $\dim R(T) = \rho(T)$

   नल स्पेस चे dim = नलीटी

   म्हणजेच, $\dim N(T) = \mu(T)$
6. रँक - नलीटी प्रमेय असे म्हणतो की,

   $\rho(T) + \mu(T) = \dim. U$, जेथे 'U' हा एक व्हेक्टर आहे.
7. लीनिअर मॅप $T : U(F) \rightarrow V(F)$ त्याला लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन म्हणतात, जर

   $T(au + v) = aT(u) + T(v) \ \forall \ a \in F, u, v \in U$
8. दोन लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनची रचना तेव्हाच परिभाषित केली जाते , जर फॅक्टरनंतरच्या ट्रान्सफॉर्मेशनची रेंज $\subseteq$ पूर्व-घटक ट्रान्सफॉर्मेशनचे डोमेन.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. [0, 1] वर परिभाषित केलेल्या सर्व फंक्शनच्या संचाचा विचार करा, जसे की,

   I. $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ II. $f\left(\frac{3}{4}\right)=1$ III. $f(x)=x\,f(x)$ IV. $f(0)=1$

   मग योग्य कोड आहे

   a. केवळ (I) व्हेक्टर स्पेस आहे. b. केवळ (I) आणि (IV) व्हेक्टर्स स्पेस आहे.

   c. केवळ (I), (III), आणि (IV) व्हेक्टर स्पेस आहे. d. सर्व व्हेक्टर स्पेस आहे.
2. समजा व्हेक्टर स्पेस V हा वास्तविक संख्येच्या फील्ड वर $S = \{(0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ या संचाने स्पॅन केलेला आहे. V चे डायमेनशन काय आहे?

   a. 1 b. 2 c. 3 d. 4
3. समजा $X = (3, 2, -1), Y = (2, 4, 1), Z = (4, 0, -3)$ आणि $W = (10, 4, -5)$, हे R^3 मधील व्हेक्टर आहेत, एक वास्तविक व्हेक्टर . खालीलपैकी कोणते बरोबर आहे?

   a. $2X + Z = W.Y + Z = W$ b. $2X - Y = Z.Y + 2Z = W$

   c. $X + Z = W.2X + Y = Z$ d. $Y + 2Z = W.X - Y = Z$

4. व्हेक्टर दिले आहे $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (3, 1, 0)$, $\gamma = (2, 1, 3)$ आणि $\delta = (-1, 3, 6)$.
   खालील विधानांचा विचार करा:
   I हे γ, α आणि β यांचे एक रेषीय संयोजन आहे.
   II δ हे α आणि β यांचे एक रेषीय संयोजन आहे, तर वर दिलेले आहे खालीलपैकी कोणते विधान बरोबर आहे?
   a. I केवळ b. II केवळ c. दोन्ही I आणि II d. I आणि II दोन्हीहि नाही.
5. खालीलपैकी कोणते R^3 चे बेसिस नाहीत?
   a. (3, 0, 0), (0, –1, 0), (0, 0, 1/2) b. (0, 0, –3), (1, 2, 3), (1, 2, 1)
   c. (1, 2, –1), (1, 1, 1), (1, 3, 5) d. (1, 1, 0), (1, 2, 3), (0, 0, 1)
6. खालीलपैकी कोणते लीनिअर नाही?
   a. $F : R^2 \rightarrow R^2$ असे आहे कि $F(x, y) = (2x - y, x)$
   b. $F : R^3 \rightarrow R^2$ असे आहे कि $F(x, y, z) = (z, x + y)$
   c. $F : R \rightarrow R^2$ असे आहे कि $F(x) = (2x, 3x)$
   d. $F : R^3 \rightarrow R^2$ असे आहे कि $F(x, y, z) = (x + 1, y + z)$
7. दोन ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^3 \rightarrow R^2$ आणि $S : R^3 \rightarrow R^2$ ला $T(x, y, z) = (x + 1, y + z)$ आणि $S(x, y, z) = (|x|, 0)$, स्वरूपात परिभाषित केले आहे तर
   a. T आणि S दोन्ही लीनिअर आहेत. b. T आणि S दोन्ही लीनिअर नाही.
   c. T लीनिअर आहे पण S लीनिअर नाही. d. T लीनिअर नाही पण S लीनिअर आहे.
8. अद्वितीय लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^2 \rightarrow R^2$ असे आहे कि $T(1, 2) = (2, 3)$ आणि $T(0, 1) = (1, 4)$, तर T ला नियम आहे.
   a. $T(x, y) = (y, -5x + 4y)$ b. $T(x, y) = (-5x + 4y, y)$
   c. $T(x, y) = (x, -5x + 4y)$ d. $T(x, y) = (-4x + 5y, y)$
9. लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $T : R^2 \rightarrow R^2$ असे आहे कि $T(3, 1) = (2, -4)$ आणि $T(1, 1) = (0, 2)$ तर $T(7, 8)$ असेल
   a. (–1, 3) b. (–1, 19) c. (2, –3) d. (–3, 2)
10. समजा F हे कोणतेही फिल्ड आहे आणि T, F^2 वर एक लीनिअर ऑपरेटर आहे आणि $T(a, b) = (a + b, a)$ परिभाषित केले तर $T^{-1}(a, b)$ या बरोबर आहे,
   a. (b, a – b) b. (a – b, b) c. (a, a + b) d. (a + b, a – b)
11. बेसिस $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ च्या संदर्भात R^3 वर लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहे कि, $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$, तर T चा मॅट्रिक्स आहे.

   a. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -6 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
12. समजा $T : R^3 \rightarrow R^2$ एक लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन आहे जे खालील प्रमाणे परिभाषित केले जाते,
   $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$ तर T चा मॅट्रिक्स ऑर्डरड बेसिस $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0)\}$ आणि $\{(1, 1), (1, 0)\}$ च्या संदर्भात आहे.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. समजा T_1 आणि T_2 हे R^3 वर दोन लीनिअर ऑपरेटर आहेत कि $T_1(x, y, z) = (x, x + y, x - y - z)$, $T_2(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x + y + z)$ परिभाषित केले आहे तर

a. T_1 ईनव्हर्‌टीबल आहे पण T_2 नाही. b. T_2 ईनव्हर्‌टीबल आहे पण T_1 नाही.
c. दोन्ही T_1 आणि T_2 ईनव्हर्टीबल आहेत. d. T_1 आणि T_2 दोन्ही ईनव्हर्टीबल नाही.

14. लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनसाठी $T : R^{10} \rightarrow R^6$, 5 डायमेन्शन असलेला कर्नल आहे, तर T च्या रेंज चे डायमेनशन आहे.

a. 5 b. 6 c. 4 d. 2

15. जर $T : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$, $T(a, b) = (a + b, a - b, b)$ एक लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन परिभाषित आहे तर, T ची नलीटी आहे .

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

16. समजा $T : R^2 \rightarrow R^3$ हे लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहे $T(x, y) = (-x - y, 3x + 8y, 9x - 11y)$, तर T ची रैंक आणि नलीटी अनुक्रमे

a. 2 आणि 0 b. 1 आणि 0 c. 1 आणि 1 d. −1 आणि 2

17. समजा $T : R^3 \rightarrow R^3$ हे लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहे $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x - 2z)$, तर कर्नेल T चे डायमेनशन आहे .

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

18. ट्रान्सफॉर्मेशन T_1, T_2 आणि T_3 साठी a, b, c आणि d बरोबर जुळणारा गट(समूह) II दिलेल्या विधानांसह समूह I मधे परिभाषित (मॅपिंग $R^2 \rightarrow R^3$) निवडा:

गट (समुह) I	गट (समुह) II
P. $T_1(x, y) = (x, x, 0)$	1. रँक 2 चा एल.टी (लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन)
Q. $T_2(x, y) = (x, x + y, y)$	2. लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन नाही आहे
R. $T_3(x, y) = (x, x + 1, y)$	3. रँक 1 चा एल.टी (लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन)

a. P–3, Q–1, R–2 b. P–1, Q–2, R–3 c. P–3, Q–2, R–1 d. P–1, Q–3, R–2

19. जर $T : R^4 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z, w) = (x - y + z + w, x + 2z - w, x + y + 3z - 3w)$, एक लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहे, तर डायमेनशन ची रेंज आहे

a. 3 b. 2 c. 1 d. 0

20. समजा $T : R^3 \rightarrow R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$ एक लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन असे परिभाषित केले आहे, तर T चा डायमेनशन स्पेस

a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

उत्तरे

1. c	2. c	3. b	4. b
5. b	6. d	7. b	8. a
9. b	10. a	11. a	12. b

13. a	14. a	15. a	16. a
17. a	18. a	19. b	20. b

विषयात्मक न सोडावलेले प्रश्न
(हॉट्स)

1. $Q\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ चे डायमेनशन Q वर शोधून काढा.
2. (-1, 1) मध्ये परिभाषित केलेल्या कन्टीनिवस फंक्शनचा व्हेक्टर स्पेस मधील फंक्शनचा संच {x, | x |} हा लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट असतो हे दाखवा.
3. समजा $\{\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_{r-1},\alpha_r,\alpha_{r+1},...,\alpha_k\}$ हा k व्हेक्टरचा R मधील लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट संच आहे आणि समजा $\beta_r=\sum_{j=1}^{k}a_j\alpha_j$ एकल $\alpha_r\neq 0$ आहे. सिद्ध करा कि $\{\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_{r-1},\beta_r,\beta_{r+1},...,\alpha_k\}$ हे लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट आहेत.
4. जर V(F) हा x मधील सर्व बहुपदीचा व्हेक्टर स्पेस आहे आणि D आणि T हा V वरील दोन लिनिअर ऑपरेटर खाली परिभाषित केल्याप्रमाणे आहेत.
$$D\left[f(x)\right]=\frac{df(x)}{dx},\ T\left[f(x)\right]=x\,f(x)$$
प्रत्येक $f(x)\in V$ साठी, तर सिद्ध करा कि ऑपरेटर्सचा गुणाकार कम्युटेटिव्ह नसतो, म्हनजे $DT\neq TD$ आणि $(TD)^2 = TD + T^2D^2$.
5. समजा $f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ आणि $f_3(x)=\sin x\left(x-\frac{\pi}{4}\right), 0\le x\le 2\pi$ साठी, तर सिद्ध करा कि, स्थिर α आणि β हे शोधण्यासाठी, असे कि $\alpha f_1 - 2f_2 - \alpha f_3 = 0$ हे $\{f_1,f_2,f_3\}$ लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहे.
6. समजा $T:R^3$ ते R^3 लिनिअर मॅप असा परिभाषित केला आहे कि
$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 3y + z, 4x + 7y - z)$
T चा कर्नल (भौमितिकद्दष्ट्या) .... आहे.
ज्याचे समीकरण (आहेत) आहे ....
T ची रेंज भौमितिकद्दष्ट्या......... आहे.
ज्याचे समीकरण (आहेत) आहे ....
7. P_n हा घातांक n पेक्षा कमी आहे अशा सर्व पॉलिनोमियल फंक्शनचा r वरील व्हेक्टर स्पेस आहे. P_n साठीचा नेहमीचा बेसिस हा बहुपदीचा $1, t, t^2, t^3, \ldots t^{n-1}$ संच आहे. $P_3 \rightarrow P_5$ ला परिभाषित करा
$$T\left(f(x)\right)=\int_0^x\int_0^u P(t)\,dt\ \ \forall x,u\in R$$
a. T च्या P_3 पासून P_5 पर्यंत नेहमीच्या बेसिस संदर्भात मॅट्रिक्स मांडणी शोधा.
b. T चा कर्नल काय आहे?
c. T ची रेंज स्पेस कोणत्या व्हेक्टर द्वारे पसरलेली आहे.
8. समजा T हे R^2 मधील y = x चे रिफ्लेक्शन आहे.
a. T चा स्टँडर्ड मॅट्रिक्स लिहा.
b. T(3, 4) गणना करण्यासाठी स्टँडर्ड मॅट्रिक्स वापरा.
9. $T(x, y, z) = (x + y + z, y - 2z, y - 3z)$ अशी परिभाषित केलेल्या T या लिनिअर मॅप $T:R^3\rightarrow R^3$ चा विचार

करा आणि R^3 मधील एकक स्फियर $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ आहे तर शोधा.

i $T(S)$ ii $T^{-1}(S)$

10. समजा $T : V \to V$ लिनिअर ऑपरेटर आहे तर सिद्ध करा कि i. $N(T) \subseteq N(T^2)$ ii. $R(T^2) \subseteq R(T)$

11. समजा $T : V \to V$ लिनिअर ऑपरेटर आहे जसे की रँक (T^2) = रँक (T), जेथे V फायनाईट डायमेन्शनल आहे. सिद्ध करा कि

i. $N(T) = N(T^2)$ ii. $R(T) = R(T^2)$ iii. $R(T^2) \cap N(T^2) = \{0\}$

उत्तरे

1. 4

5. $\alpha = \sqrt{3} - 1, \beta = \sqrt{6}$

6. रेखा $\frac{-x}{5} = \frac{y}{3} = z$, प्लेन $2x + y + z = 0$

7. a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix}$ b. $\{0\}$ c. $\{x, x^2, x^3\}$

8. a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. (4, 3)

9. i. $x^2 - 8xy + 26y^2 + 6xz - 38yz + 14z^2 = 1$ ii. $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2xz - 8yz + 14z^2 = 1$

अधिक जाणून घ्या

1. खालीलपैकी कोणते वास्तविक गुणांक असलेल्या बहुपदीच्या व्हेक्टर स्पेस चा सबस्पेस नाही.
   a. w मध्ये सर्व x ने भाग जाणाऱ्या सर्व बहुपदीचा समावेश आहे.
   b. $w = \{p(x) \in V : p(3) = 0\}$
   c. $w = \{p(x) \in V : p(a) = p(1 - a), a \in R\}$
   d. w मध्ये सर्व इंटिग्रल गुणांक असलेल्या बहुपदीचा समावेश आहे.

2. समजा V हा n डायमेन्शन असलेला F वरील व्हेक्टर स्पेस आहे. खालील विधानांचा विचार करा.
   I. V चा प्रत्येक उपसंच ज्या मधे 'n' घटक आहे आणि तो V चा बेसिस आहे.
   II. V च्या कोणत्याही लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट उपसंचात 'n' पेक्षा अधिक घटक नाहीत. पैकी कोणते विधान बरोबर आहे/ आहेत?
   a. (I) केवळ b. (II) केवळ
   c. दोन्ही (I) आणि (II) d. दोन्ही (I) आणि (II) नाही.

3. समजा V हा घातांक 2 पेक्षा जास्त नसलेल्या वास्तविक बहुपदीचा व्हेक्टर स्पेस आहे.

   समजा $f(x) = x - 1, \quad g(x) = x + 1$

   $h(x) = x^2 - 1, \quad j(x) = x^2 + 1$

   मग संच $\{f, g, h, j\}$ आहे.

   a. लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट b लिनिअरली डिपेन्डन्ट $f\,g = h$
   c. लिनिअरली डिपेन्डन्ट कारण $f + g - h = 0$ d लिनिअरली डिपेन्डन्ट कारण $f - g - h + j = 0$

4. समजा $w = \{[a_{ij}], a_{ij} = 0$ आहे, जर i हा सम आहे $\}$ सर्व 10×10 वास्तविक मॅट्रिक्सची सब-स्पेस आहे, तर w चे डायमेनशन आहे.

a. 25 b. 50 c. 75 d. 100

5. जर $T : R^3 \to R^3$ दिले आहे $T(x, y, z) = (x - y, y + 3z, x + 2y)$, मग T^{-1} आहे.

a. $\frac{1}{3}\left(2x+z, -x+z, \frac{x}{3}+y-\frac{z}{3}\right)$ b. $\frac{1}{3}\left(2x+y, -x+y, \frac{1}{3}x-\frac{x}{3y}+z\right)$

c. $\frac{1}{3}\left(x+2y, x-y, \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-z\right)$ d. $\frac{x+y+z}{3}$

6. $T : R^2 \to R^2$ ला $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2))$ यानुसार परिभाषित केले तर स्टॅण्डर्ड बेसिस च्या संदर्भात T^{-1} चा मॅट्रिक्स आहे.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

7. समजा N हा जास्तीत जास्त 3 डिग्री असलेल्या सर्व वास्तविक बहुविदाचा व्हेक्टर स्पेस आहे. $S : N \to N$, $(Sp)(x) = p(x + 1)$, $p \in N$, परिभाषित आहे तर बेसेस S, $\{1, x, x^2, x^3\}$ मधील मॅट्रिक्स, जो स्तंभ व्हेक्टर मानला जातो,दिले आहे.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. $x \in R^3$ चे सर्व व्हेक्टरचा संच ज्यासाठी व्हेक्टर $(1, x, 0), (0, x^2, 1)$ आणि $(0, 1, x)$, R^3 मध्ये लिनिअरली इंडिपेन्डन्ट आहे.

a. $\{ x \in R : x = 0 \}$ b. $\{ x \in R : x \neq 0 \}$ c. $\{ x \in R : x \neq 1 \}$ d. $\{ x \in R : x \neq -1 \}$

9. कोणत्याही $n \in N$, साठी समजा $n \in N$, P_n हा जास्तीत जास्त n घातांक आणि वास्तविक गुणांक असलेल्या सर्व बहुपदीचा व्हेक्टर स्पेस आहे. परिभाषित करा $T : P_n \to P_{n+1}$, $T(p)(x) = p'(x) - \int_0^x p(t)\,dt$ तर, T च्या नल स्पेसचे डायमेनशन आहे,

a. 0 b. 1 c. n d. $n + 1$

10. समजा V हा सर्व 2×2 वास्तविक मॅट्रिक्सचा व्हेक्टर स्पेस आहे. $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ साठी, V वर एक लीनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन T ला $T(P) = QP$ परिभाषित, तर T ची रँक आहे.

a. 1 b. 2 c. 3 d. 4

उत्तरे

1. d	2. b	3. d	4. b
5. a	6. c	7. b	8. c
9. a	10. b		

संदर्भ आणि अभ्यासासाठी सूचना

1. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
2. Dettman, J.W.(1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.
3. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
4. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
5. Halmos, P.R. (1958). Finite Dimensional Vector Space, D. Van Nostrand Company.
6. Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.
7. Hohn, E.Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.
8. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
9. Lang, S. (1987). Linear Algebra, Springer, New York.
10. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.

5 व्हेक्टर स्पेसेस II

युनिट निर्दिष्टे

आइजेन मूल्ये आणि आइजेन व्हेक्टर आणि त्यांच्याशी संबंधित गुणधर्मांच्या संकल्पना, आइजेन बेसेस, आइजेन स्पेस, सीमेट्रिक, स्क्यू सीमेट्रिक मॅट्रिक्स,यावर आधारित प्रमेय आणि ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स, डाइगोनलाईझेशन, इनर प्रॉडक्ट स्पेसेस, ग्राम-श्मिट ऑर्थोगॉनलायझेशन या युनिटमध्ये पूर्णपणे स्पष्ट केले आहे . विद्यार्थ्यांच्या गरजेनुसार या सर्व विषयांवर चर्चा केली जाते आणि त्यासोबत पुरेशा संख्येने उदाहरणे ही आहेत.

तर्कशास्त्र

आजकाल, मॅट्रिक्सचा वापर सामान्यत: सांख्यिकीय विश्लेषणात, अनेक कारणांसाठी केला जातो. हे प्रोग्रामिंगमध्ये अल्गोरिदम बनवण्यासाठी वापरले जाऊ शकतात, मुळात डेटाबेस म्हणून, परंतु अर्थशास्त्र आणि गणितासंबंधीच्या आकडेवारीसाठी जास्त वापरले जातात. आता, पुलाची नैसर्गिक वारंवारता म्हणजे पुलाचे मॉडेल असलेल्या सर्वात लहान परिमाण असलेल्या प्रणालीचे आइजेन मूल्य आहे. अभियंते त्यांच्या बांधकामांचे स्थैर्य सुनिश्चित करण्यासाठी या ज्ञानाचा शोध घेतात आइजेन मूल्य विश्लेषण कार स्टीरिओ सिस्टमच्या डिझाइनमध्येदेखील वापरले जाते, जेथे ते संगीतामुळे कारचे कंपन पुनरुत्पादित करण्यास मदत करते. सिमेट्रिक घटक परिवर्तनाद्वारे तीन टप्प्यांच्या प्रणाली डिकपलिंगसाठी आयजेन मूल्ये आणि आइजेन व्हेक्टर चा वापर उपयुक्त आहे. आइजेन मूल्ये आणि आइजेन व्हेक्टर आपल्याला साध्या समस्या वेगळ्या करण्यासाठी रेषीय ऑपरेशन कमी करण्यास अनुमती देतात. आइजेन मूल्यांचा उपयोग केवळ नैसर्गिक घटनांचे स्पष्टीकरण देण्यासाठीच नव्हे, तर भविष्यासाठी नवीन आणि चांगल्या डिझाइनचा शोध घेण्यासाठीदेखील केला जातो. डायगोनलायझेशनने आपण कंपनांची नैसर्गिक वारंवारता ठरवू शकतो.

पूर्वतयारी

1. व्हेक्टर स्पेसेस , बेसिस , डायमेन्शन याचे चांगले ज्ञान.
2. लिनिअर इंडिपेडन्स आणि लिनिअर डिपेन्डन्स चे सखोल ज्ञान.
3. लिनिअर इंडिपेडन्स चे मॅट्रिक्समध्ये रूपांतर करण्याचे सर्व तंत्र विद्यार्थ्याला माहित असणे आवश्यक आहे.
4. वेगवेगळ्या प्रकारच्या मॅट्रिक्सची जाणीव.

युनिट आउटकम (UO)

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी सक्षम होतील:

U5-O1: मॅट्रिक्सचा लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन सोबत संबंध जोडणे; आइजेन मूल्ये, मॅट्रिक्सचे आइजेन व्हेक्टर आणि मॅट्रिक्सला डायगोनलाइझ करण्यासाठी लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन काढा.

U5-O2: इनर प्रॉडक्ट स्पेसचे गुणधर्म शिका आणि या स्पेसचा संदर्भात ऑर्थोगोनॅलिटी निश्चित करा; सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आणि सबंधित नियमांशी परिचित.

U5-O3: लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशनचा ऍडजॉईंट तसेच त्याचा कॅनॉनिकल फॉर्म यांचे महत्व जाणून घेणे आणि ते विषद करणे.

U5-O4: कोची-श्वाझ्र असमानता आणि त्रिकोण असमानता इनर प्रॉडक्ट स्पेस मध्ये परिभाषित करा; ग्रामश्मिट ऑर्थोगॉनलायझेशन वापरून ऑर्थोनॉर्मल बेसिस मिळवा.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट 5 परिणाम	कोर्स परिणामांसह अपेक्षित प्रतिचित्रण (1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)				
	सीओ-1	सीओ-2	सीओ-3	सीओ-4	सीओ-5
U5-O1			1	3	3
U5-O2			2	1	3
U5-O3			1	3	2
U5-O4			2	3	1

इतिहास

आइजेन व्हेक्टर हळूहळू 18 व्या शतकात डिफरन्शिअल समीकरणे सोडविण्यात दिसले. हे विचित्र वाटेल परंतु आइजेन व्हेक्टर्स (आइजेन फंक्शन्स) रेषीय बीजगणिताच्या खूप आधी आणि "व्हेक्टर" हा शब्द सामान्य वापरात येण्यापूर्वी विविध नावांनी प्रकट झाला. छोट्या दोलायमानांच्या सिद्धांतात त्यांनी मध्यवर्ती भूमिका बजावली. नंतर लिओनहार्ड युलरने कडक बॉडी च्या रोटेशनल गतीचा अभ्यास केला आणि मुख्य अक्षाचे महत्त्व शोधून काढले. जोसेफ लुई लॅग्रांज यांना समजले की मुख्य अक्ष हे जडत्व मॅट्रिक्सचे आइजेन व्हेक्टर्स आहेत. कोची यांनी रेसीन कॅरॅक्टरिस्टिक (कॅरॅक्टरिस्टिक मूळ) ही संज्ञादेखील दिली, ज्याला आता आइजेन मूल्य म्हणतात; त्याची संज्ञा कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरणात टिकून राहते. 1920 च्या दशकात पहिली आवृत्ती असलेल्या हिल्बर्ट-कॉरेंट या पुस्तकाच्या प्रभावाखाली "आइजेन व्हेक्टर्स " हा शब्द जर्मनभाषेतून आला आहे.

-ऑगस्टिन लुई कॉची

5.1 आइजेन मूल्ये आणि एक लिनिअर ऑपरेटरचे आइजेन व्हेक्टर

T व्हेक्टर स्पेस V(F) वर एक लिनिअर ऑपरेटर आहे. जर नॉन-झिरो व्हेक्टर $v \in V$ असेल तर $T(v) = \lambda v$ काही $\lambda \in F$ साठी , मग v ला λ शी संबंधित T चे आइजेन व्हेक्टर म्हणतात आणि λ ला v च्या अनुषंगाने T चे आइजेन मूल्य म्हणतात.

कॅरॅक्टरिस्टिक आइजेन व्हेक्टर ला कॅरॅक्टरिस्टिक व्हेक्टर किंवा लाटेण्ट व्हेक्टर असेही म्हणतात आणि आइजेन मूल्याला कॅरॅक्टरिस्टिक मूल्य (मूळ) किंवा कॅरॅक्टरिस्टिक मूळ किंवा लाटेण्ट मूळ असेही म्हणतात

5.2 आइजेन मूल्ये आणि मॅट्रिक्सचे आइजेन व्हेक्टर

'A' एक चौरस मॅट्रिक्स आहे आणि X हा कॉलम व्हेक्टर आहे, मग मॅट्रिक्स समीकरण

$$AX = \lambda X$$

हे 'n' समीकरणांच्या समकक्ष आहे.

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+.....+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+.....+a_{2n}x_n&=0\\ &\vdots\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+.....+(a_{nn}-\lambda)x_n&=0\end{aligned}\right\}\qquad\ldots(1)$$

'n' अज्ञातांमध्ये लिनिअर होमोजिनिअस समीकरणांच्या वरील (1) प्रणालीमध्ये नेहमीच ट्रीव्हीएल सोल्युशन असते.

$$x_1=x_2=x_3=...........=x_n=0$$

नॉन ट्रीव्हीएल सोल्युशन शोधण्यासाठी समीकरण (1) च्या गुणांकांचे डिटरमिनंट नाहीसे होणे आवश्यक आहे; म्हणजे.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\qquad\ldots(2)$$

हे स्पष्ट आहे की समीकरण (2) λ च्या डिग्री n चे आहे याला मॅट्रिक्स A चे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण म्हणतात.

आपण ते असे लिहू शकतो

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n=0\qquad\ldots(3)$$

विशेषत: $p_1=-(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})=-(trace\ A)$ … (4)

आणि $p_n=(-1)^n\left|a_{ij}\right|=(-1)^n\left|A\right|$ … (5)

(3) या समीकरणाच्या डाव्या हाताच्या बाजूला कॅरॅक्टरिस्टिक बहुपदी म्हणतात.

समीकरण (3) ला n मूळे असतील. यांना कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे किंवा मॅट्रिक्स A चा प्रत्येक मुळाशी संबंधित आइजेन मूल्ये म्हणतात, समीकरण (1) ला नॉन-झीरो सोल्युशन असेल.

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

ज्याला कॅरॅक्टरिस्टिक व्हेक्टर किंवा आइजेन व्हेक्टर म्हणून ओळखले जाते.

जर A ची आइजेन मूल्ये $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...........\lambda_n$ असतील, तर आपण कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण खालील प्रमाणे लिहू शकतो.

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)......(\lambda-\lambda_n)=0\ ,$$

किंवा $\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+.....+(-1)^n\lambda_1\lambda_2....\lambda_n=0$

समीकरण (3) शी तुलना करताना आपण ते पाहू शकतो,

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=-p_1=\text{trace }A\qquad(4)\text{ वरून}$$

आणि $$\lambda_1\lambda_2....\lambda_n=(-1)^n p_n=\det.(A)\ ,\qquad(5)\text{ वरून}$$

टिप्पण्या:

1. आइजेन मूल्यांना कॅरॅक्टरिस्टिक मूल्य, प्रॉपर मूल्य, लाटेन्ट मूल्य किंवा स्पेक्ट्रल मूल्य म्हणूनही म्हटले जाते.

2. त्याचप्रमाणे, आइजेन व्हेक्टर ला कॅरॅक्टरिस्टिक व्हेक्टर , प्रॉपर व्हेक्टर , लाटेन्ट व्हेक्टर किंवा स्पेक्ट्रल व्हेक्टर म्हणूनही म्हटले जाते

5.2.1 आइजेन मूल्यांचे गुणधर्म:

a. चौरस मॅट्रिक्स A आणि त्याचा ट्रान्सपोज A चे आइजेन मूल्य समान असते.

b. मॅट्रिक्सच्या आइजेन मूल्यांची बेरीज प्रिन्सिपल डायगोनलच्या घटकांच्या बेरजेसारखीच असते.

c. मॅट्रिक्स A च्या आइजेन मूल्यांचा गुणाकार A च्या det.(A) इतका म्हणजे | A | एवढा असतो.

d. जर λ हे नॉन सिंगुलर मॅट्रिक्सचे आइजेन मूल्य असेल, तर $\frac{1}{\lambda}$ हे A^{-1} चे आइजेन मूल्य असते.

e. जर λ हे ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे आइजेन मूल्य असेल, तर $\frac{1}{\lambda}$ हे देखील त्याचे आइजेन मूल्य असते.

f. जर $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\ldots\lambda_n$ ही मॅट्रिक्स A ची आइजेन मूल्ये असतील, तर A^m ची आइजेन मूल्ये $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots\ldots\ldots\lambda_n^m$ असतात.(m एक धनात्मक पूर्णांक आहे)

g. इडेमपोटेंट मॅट्रिक्सची आइजेन मूल्ये एकतर शून्य किंवा एक असतात.

h. ट्रायअँग्युलर मॅट्रिक्स आणि डायगोनल मॅट्रिक्सची आइजेन मूल्ये त्या मॅट्रिक्सच्या डायगोनलच्या घटकांसारखीच असतात.

सिद्धता: d. जर X हा A च्या आइजेन मूल्य λ शी संबंधित दिलेला आइजेन व्हेक्टर असेल, तर

$$AX = \lambda X$$

दोन्ही बाजूंना A^{-1} ने पूर्व-गुणाकार करून

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X)$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = \lambda A^{-1}X \quad \Rightarrow \quad IX = \lambda A^{-1}X$$

किंवा $$\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X \qquad [\because \ IX = X]$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ हे A^{-1} चे आइजेन मूल्य आहे.

सिद्धता: f. जर X हा A च्या आइजेन मूल्य λ शी संबंधित दिलेला आइजेन व्हेक्टर असेल, तर

$$AX = \lambda X$$

दोन्ही बाजूंना 'A' ने पूर्व-गुणाकार करून

$$A(AX) = A(\lambda X) \quad \Rightarrow \quad (AA)X = \lambda(AX)$$

$$\Rightarrow \quad A^2X = \lambda AX$$

$$\Rightarrow \quad A^2X = \lambda^2 X$$ जसे $(AX = \lambda X)$

पुन्हा दोन्ही बाजूंना 'A' ने गुणाकार करून , आपल्याला अशाच प्रकारे मिळेल

$$A^3X = \lambda^3 X$$

त्याच पद्धतीने चालू ठेवा, आपल्याकडे असेल

$$A^mX = \lambda^m X$$

जे दर्शविते की λ^m हे A^m $(m > 0)$चे आइजेन मूल्य आहे

अशा प्रकारे, आपण असे म्हणू शकतो की जर $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\lambda_n$ ही A ची आइजेन मूल्ये असतील, तर

$\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n^m$ हि A^m ची आइजेन मूल्ये असतील.

5. 2. 2 आइजेन स्पेस

T हे $V(F)$ वर एक लिनिअर ऑपरेटर आहे. जर λ हे लिनिअर ऑपरेटर T चे आइजेन मूल्य असेल, तर λ च्या संदर्भात आइजेन स्पेस E_λ म्हणून दर्शविली जाते आणि खालीलप्रमाणे परिभाषित केली जाते

$$E_\lambda = \{v : T(v) = \lambda v\}$$

उदारणार्थ: जर $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

येथे $\lambda = 1, 1$ ही आइजेन मूल्ये आहेत (दिलेले मॅट्रिक्स ट्रायअँग्युलर स्वरूपात असल्यामुळे) आणि (1,0) संबंधित आइजेन व्हेक्टर आहे (येत्या उदाहरणांमध्ये विद्यार्थी शिकतील, दिलेल्या आइजेन मूल्यांसाठी आइजेन व्हेक्टर कसे शोधावे), तर

$E_{\lambda=1}$ (आइजेन स्पेस) = {(1, 0)}.

5.2.3 आइजेन बेसेस

'A' हा $n \times n$ मॅट्रिक्स (किंवा लिनिअर ऑपरेटर T) आहे

समजा $S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots v_n\}$ हा मॅट्रिक्सच्या सर्व आइजेन व्हेक्टर्सचा संग्रह आहे.

मग, S ने R^n चे बेस तयार केल्यास S ला A चे एक आइजेन बेस असल्याचे म्हटले जाते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.1.मॅट्रिक्स A चे कॅरॅक्टरिस्टिक बहुपदी शोधा, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

उकल: A चे कॅरॅक्टरिस्टिक मॅट्रिक्स खालीलप्रमाणे आहे

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A ची कॅरॅक्टरिस्टिक बहुपदी आहे

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 15$$

उदाहरण 5.2. मॅट्रिक्स A ची सर्व आइजेन मूल्ये आणि आइजेन व्हेक्टर शोधा $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

उकल: दिलेल्या मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $$(8-\lambda)\left[(7-\lambda)(3-\lambda)-16\right]+6\left[-6(3-\lambda)+8\right]+2\left[24-2(7-\lambda)\right]=0$$

$\Rightarrow$ $$(8-\lambda)\left(\lambda^2-10\lambda+5\right)+6(-10+6\lambda)+2(10+2\lambda)=0$$

$\Rightarrow$ $$8\lambda^2-80\lambda+40-\lambda^3+10\lambda^2-5\lambda-60+36\lambda+20+4\lambda=0$$

$\Rightarrow$ $$-\lambda^3+18\lambda^2-45\lambda=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda^3-18\lambda^2+45\lambda=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda\left(\lambda^2-18\lambda+45\right)=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda=0, \lambda^2-18\lambda+45=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda^2-15\lambda-3\lambda+45=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda(\lambda-15)-3(\lambda-15)=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda-3=0; \lambda-15=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda=3; \lambda=15; \lambda=0$$

आइजेन मूल्य $\lambda=0,3,15$

आइजेन व्हेक्टर शोधण्यासाठी: $[A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$\lambda=0$ साठी $$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $$8x_1-6x_2+2x_3=0 \quad \ldots (1)$$

$\Rightarrow$ $$-6x_1+7x_2-4x_3=0 \quad \ldots (2)$$

$\Rightarrow$ $$2x_1-4x_2+3x_3=0 \quad \ldots (3)$$

समीकरण (1) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवल्यानंतर, आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$10x_1-5x_2=0$$

$\Rightarrow$ $$10x_1=5x_2$$

$\Rightarrow$ $$x_2=2x_1 \quad \ldots (4)$$

समीकरण (3) ला 3 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवल्यानंतर, आपल्याला खालील

समीकरण मिळेल

$$-5x_2 + 5x_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $$-5x_2 = -5x_3$$

$\Rightarrow$ $$x_2 = x_3 \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (4) आणि (5) कडून, आपल्याला मिळेल

$$2x_1 = x_2 = x_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$$

$\lambda = 0$ शी संबंधित आइजेन व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ आहे.

$\lambda = 3$ साठी $\begin{bmatrix} 8-3 & -6 & 2 \\ -6 & 7-3 & -4 \\ 2 & -4 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \ldots (6)$$

$\Rightarrow$ $$-6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \qquad \ldots (7)$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 0 \qquad \ldots (8)$$

(8) वरून, $$2x_1 = 4x_2$$

$\Rightarrow$ $$x_1 = 2x_2$$

$x_1 = 2x_2$ समीकरण (7) मध्ये ठेवल्यानंतर, आपल्याला मिळेल

$\Rightarrow$ $$x_3 = -2x_2$$

अशाप्रकारे, $$x_1 = 2x_2 = -x_3$$

किंवा $$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-2}$$

$\lambda = 3$ शी संबंधित आइजेन व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ आहे.

$\lambda = 15$ साठी

$$\begin{bmatrix} 8-15 & -6 & 2 \\ -6 & 7-15 & -4 \\ 2 & -4 & 3-15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $$-7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \ldots (9)$$

$$-6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \qquad \ldots (10)$$

$$2x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0 \qquad \ldots (11)$$

समीकरण (11) ला 3 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (10) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल $x_2 = -2x_3$

समीकरण (9) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (10) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल $x_1 = -x_2$

$$x_1 = -x_2 = 2x_3$$

किंवा $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1}$

अशाप्रकारे, $\lambda = 15$ शी संबंधित आइजेन व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ आहे.

उदाहरण 5.3. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स चे सर्व आइजेन मूल्य, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.

उकल. समजा $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $(-2-\lambda)(-(1-\lambda)\lambda-12)-2(-2\lambda-6)-3(-4+1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $(-2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-12) - 2(-2\lambda-6) - 3(-3-\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0$

$\Rightarrow$ $(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-5) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = -3, -3, 5$

अशाप्रकारे, आइजेन मूल्य -3, -3, 5 आहेत.

आइजेन व्हेक्टर शोधण्यासाठी:

$\lambda = -3$ साठी, आइजेन व्हेक्टर आहे

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & 0+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $x+2y-3z = 0$

$$2x+4y-6z = 0$$

$$-x-2y+3z = 0$$

वरील समीकरणावरून असे लक्षात येते कि, $x+2y-3z=0$ फक्त एक स्वतंत्र समीकरण आहे.

म्हणून, समजा $z=0$ आपल्याला मिळेल $x+2y=0$

$$x=-2y$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}, z=0$$

म्हणून $\lambda=$ -3 साठी $(2,-1,0)$ हा आइजेन व्हेक्टर आहे.

तसेच, $\lambda=$ -3, साठी आणखी एक आइजेन व्हेक्टर शोधण्यासाठी.

समजा $y=0$ घेतले तर आपल्याला मिळेल

$$x-3z=0$$

$$\Rightarrow \quad x=3z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{z}{1}$$

$$\Rightarrow \quad y=0$$

म्हणून $(3,0,1)$ हा $\lambda=$ -3 साठी आणखी एक आइजेन व्हेक्टर आहे.

$\lambda=$ 5 साठी, आइजेन व्हेक्टर आहे.

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-5 & 2 & -3 \\ 2 & 1-5 & -6 \\ -1 & -2 & 0-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$-7x+2y-3z=0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x-4y-6z=0 \quad (2)$$

$$-x-2y-5z=0 \quad (3)$$

समीकरण (1) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$-12x-12z=0$$

किंवा

$$-12x=12z$$

$$\Rightarrow \quad x=-z$$

समीकरण (3) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$y=-2z$$

म्हणून

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$$

म्हणून, $(1,2,-1)$ हा $\lambda=5$ च्या संदर्भात आइजेन व्हेक्टर आहे.

सर्व आइजेन व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेंडंट असल्याने आणि R^3 चा बेसिस तयार करतात.

म्हणून आइजेन बेसिस $\{(2,-1,0),(3,0,1),(1,2,-1)\}$ आहे.

उदाहरण 5.4. $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स चे सर्व आइजेन मूल्य , आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.

उकल. समजा $$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

आणि $|A-\lambda I| = 0$ (कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण)

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (6-\lambda)\left((3-\lambda)^2-1\right)+2\left(-2(3-\lambda)+2\right)+2\left(2-2(3-\lambda)\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad (6-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right)+2(2\lambda-4)+2(2\lambda-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda+32=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-32=0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda\text{-}2)\ (\lambda^2-10\lambda+16)=0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda\text{-}2)\ (\lambda\text{-}2)(\lambda\text{-}8)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 2,\ 2,8$$

आइजेन मूल्य 2,2,8 आहेत.

$\lambda = 2$ साठी, आइजेन व्हेक्टर आहे.

$$[A-\lambda I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -2 & 2 \\ -2 & 3-2 & -1 \\ 2 & -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 4x-2y+2z&=0 \\ -2x+y-z&=0 \\ 2x-y+z&=0 \end{aligned}$$

येथे $2x-y+z=0$ हे एकमेव स्वतंत्र समीकरण आहे

म्हणून समजा $z=0$,

$\Rightarrow$ $$2x\text{-}y = 0$$

किंवा $$2x = y$$

अशा प्रकारे $$\frac{x}{1} = \frac{y}{2}, z = 0$$

म्हणून $(1,2,0)$ हा $\lambda = 2$ च्या संदर्भात आइजेन व्हेक्टर आहे.

पुन्हा, $\lambda = 2$ साठी आणखी एक आइजेन व्हेक्टर शोधण्यासाठी,

आपण $y=0$ घेऊ

येथे $2x-y+z=0$ हे $2x+z=0$ होईल

$\Rightarrow$ z = -2x

किंवा $\frac{x}{1}=\frac{z}{-2}, y=0$

म्हणून $(1,0,-2)$ हा आइजेन व्हेक्टर आहे.

$\lambda=8$ साठी आइजेन व्हेक्टर आहे.

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$\begin{bmatrix} 6-8 & -2 & 2 \\ -2 & 3-8 & -1 \\ 2 & -1 & 3-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $-2x-2y+2z=0$ (1)

$\Rightarrow$ $-2x-5y-z=0$ (2)

$\Rightarrow$ $2x-y-5z=0$ (3)

समीकरण (2) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (1) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$-6x-12y=0$$

$\Rightarrow$ x = -2y

समीकरण (2) व (3) ची बेरीज करून

$$y=-z$$

$\Rightarrow$ $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$

$(2, -1, 1)$ हा $\lambda=8$ च्याशी संबंधित आइजेन व्हेक्टर आहे.

यानंतर सर्व आइजेन व्हेक्टर्स लिनिअरली इंडिपेंडंट आहेत म्हणून R^3 चा बेसिस बनवतो.

म्हणून आइजेन बेसिस $\{(1,2,0),(1,0,-2),(2,-1,1)\}$.

उदाहरण 5.5. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ चे सर्व आइजेन मूल्ये, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $(1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-2]-0-1[2-4+2\lambda]=0$

किंवा $[\lambda^2-5\lambda+4-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda-2\lambda+2=0$

किंवा $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$

किंवा $$(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+6]=0$$

किंवा $$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

आइजेन मूल्ये 1,2,3 आहेत.

$\lambda=1$ साठी, आइजेन व्हेक्टर $[A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix}1-1 & 0 & -1\\ 1 & 2-1 & 1\\ 2 & 2 & 3-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

किंवा $$\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$-x_1=0 \quad \ldots(1)$$

$\Rightarrow$ $$x_1+x_2+x_3=0 \quad \ldots(2)$$

$$2x_1+2x_2+2x_3=0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1), (2) आणि (3) मधे ठेऊन,

$$x_1+x_2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-x_2$$

आणि $$2x_1+2x_2=0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{-1}=\frac{x_3}{0}$$

अशा प्रकारे $\lambda=1$ साठी $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ आइजेन व्हेक्टर आहे ,

$\lambda=2$ साठी, आइजेन व्हेक्टर $[A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix}1-2 & 0 & -1\\ 1 & 2-2 & 1\\ 2 & 2 & 3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

किंवा $$\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$-x_1-x_3=0 \Rightarrow x_1=-x_3$$

$$x_1+x_3=0$$

$$2x_1+2x_2+x_3=0 \;\Rightarrow\; x_1+2x_2=0$$

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{-1};\ x_3=-x_1$$

आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$

λ=3 साठी, आइजेन व्हेक्टर $\qquad [A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

किंवा
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1+0x_2-x_3=0 \quad \Rightarrow -2x_1=x_3 \qquad \ldots (1)$$

$\Rightarrow$
$$x_1-x_2+x_3=0 \qquad \ldots (2)$$

$$2x_1+2x_2+0x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-x_2 \qquad \ldots (3)$$

जर $x_1=1$ तर $\qquad x_2=-1$

आणि $\qquad x_3=-2(1)=-2 \qquad$ ((1) वरून)

आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

कारण सर्व आइजेन व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेण्डण्ट आहेत.

$\therefore$ आइजेन बेसिस $\{(1,-1,0),(2,-1,-2),(1,-1,-2)\}$ आहेत.

उदाहरण 5.6. $A=\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ चे सर्व आइजेन मूल्ये, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $\qquad |A-\lambda I|=0$

म्हणजे
$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow \qquad (-5-\lambda)(-2-\lambda)-4=0$

$\Rightarrow \qquad \lambda^2+7\lambda+10-4=0$

$\Rightarrow \qquad \lambda^2+7\lambda+6=0$

$\Rightarrow \qquad \lambda=-6,-1$

$\therefore$ आइजेन मूल्ये -6 आणि -1 आहेत.

$\lambda=-1$ साठी, आइजेन व्हेक्टर $\qquad [A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} -5+1 & 2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad -4x_1+2x_2=0$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$2x_1 - x_2$ हे एकमेव स्वतंत्र समीकरण आहे म्हणून.

आता $\quad 2x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x_1 = x_2$

किंवा $\quad \dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2}{2}$

आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = -6$ साठी, आइजेन व्हेक्टर $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} -5+6 & 2 \\ 2 & -2+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

$x_1 + 2x_2$ हे एकमेव स्वतंत्र समीकरण आहे म्हणून.

आता $\quad x_1 + 2x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = -2x_2$

किंवा $\quad \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{-1}$

आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

सर्व आइजेन व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेण्डण्ट आहेत म्हणून.

$\therefore$ आइजेन बेसिस $\{(1, 2), (2, -1)\}$ आहेत.

उदाहरण 5.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ चे सर्व आइजेन मूल्ये, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $\quad |A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad [(3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 0] - 1(0) + 4(0) = 0$

किंवा $\quad (3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) = 0$

$$\lambda = 2, 3, 5$$

आइजेन मूल्ये 2,3,5 आहेत.

$\lambda = 2$ साठी, आइजेन व्हेक्टर $\quad [A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 4 \\ 0 & 2-2 & 6 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$6x_3 = 0$$

$$3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (2),(1) मधे ठेऊन $$x_1 + x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{-x_2}{1}$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1}$$

अशा प्रकारे आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, λ=2 साठी.

λ=3 साठी, आइजेन व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$0x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-x_2 + 6x_3 = 0$$

$$2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

तसेच आपल्या कडे आहे $$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{0}$$

अशा प्रकारे आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

λ=5 साठी, आइजेन व्हेक्टर

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 1 & 4 \\ 0 & 2-5 & 6 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$$

$$3x_2 - 6x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 2x_3$$

$$2x_1 - 2x_3 - 4x_3 = 0 \qquad [\ x_2 = 2x_3 \text{ ठेऊन}]$$

किंवा $\quad 2x_1 - 6x_3 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 3x_3$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x_1}{3} = \dfrac{x_3}{1}$

तसेच $\quad x_2 = 2x_3$

$\therefore \quad \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_3}{1}$

(1)आणि (2) वरून $\quad \dfrac{x_1}{3} = \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_3}{1}$

अशा प्रकारे आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

सर्व आइजेन व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेण्डण्ट आहेत.

$\therefore$ आइजेन बेसिस $\{(1, -1, 0), (1,0,0), (3,2,1)\}$.

उदाहरण 5.8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ चे सर्व आइजेन मूल्ये, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad (2-\lambda)\ (-1-\lambda) - 10 = 0$

किंवा $\quad \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (\lambda+3)(\lambda-4) = 0$

$\Rightarrow \quad (\lambda+3)=0, \quad (\lambda - 4) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = -3, \qquad \lambda = 4$

$\therefore$ आइजेन मूल्ये -3 आणि 4 आहेत.

$\lambda = -3$ साठी, आइजेन व्हेक्टर $\quad [A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 2+3 & 2 \\ 5 & -1+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad 5x + 2y = 0$

$$5x + 2y = 0$$

तेथे केवळ 1 स्वतंत्र समीकरण आहे

अशा प्रकारे आपल्याकडे आहे $\quad 5x + 2y = 0$

$\Rightarrow \quad 5x = -2y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{5}$

तर आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$ साठी, आइजेन व्हेक्टर आहे

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$-2x + 2y = 0$$

$$5x - 5y = 0$$

पुन्हा दोघेही लिनिअरली डिपेण्डण्ट आहेत, आपल्याकडे आहे

$$x - y = 0$$

$\Rightarrow$ $$x = y$$

किंवा $$\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$$

तर आइजेन व्हेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

आइजेन व्हेक्टर लिनिअरली इंडिपेण्डण्ट आहे,
म्हणून आइजेन बेसिस आहे $\{(-2,5), (1,1)\}$.

उदाहरण 5.9. $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ साठी सर्व आइजेन मूल्य, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा

उकल: (विद्यार्थी हे वापरून पाहू शकतात) आइजेन मूल्ये 1, −2,-2 आहेत. आइजेन व्हेक्टर आहेत $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ आइजेन बेसीस नाही.

उदाहरण 5.10. सर्व आइजेन मूल्य, आइजेन व्हेक्टर आणि A चे आइजेन बेसिस शोधा $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

उकल. आइजेन मूल्य 1, 1, 5 आहेत. आइजेन व्हेक्टर आहेत $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. आइजेन बेसिस आहेत $\{(-2,1,0), (1,0,-1), (1,1,1)\}$.

उदाहरण 5.11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ ची सर्व आइजेन मूल्ये मिळवा. म्हणूनच A^{25} ची आइजेन मूल्ये शोधा आणि $A + 2I$.

उकल. $|A-\lambda I|=0$ कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

किंवा $(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

$$\lambda=-1, \lambda=3$$

A^{25} ची आइजेन मूल्ये

म्हणजे, $(-1)^{25}=-1$

आणि $(3)^{25}=3^{25}$

A + 2I चे आइजेन मूल्य

च्या साठी $A=3, A+2I=3+2=5$

च्या साठी $A=(-1), A+2I=-1+2=1$

कॉम्प्लेक्स आइजेन मूल्य

उदाहरण 5.12. असे दर्शवा की $0<\theta<\pi$ असल्यास, $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ला वास्तविक आइजेन मूल्य नाहीत आणि परिणामी आइजेन व्हेक्टर नाही.

उकल. $|A-\lambda I|=0$ कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे.

$$|A|=\begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta=0$$

$$\cos^2\theta-2\lambda\cos\theta+\lambda^2+\sin^2\theta=0$$

$$\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0$$

$$\lambda=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}$$

$$\lambda=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sqrt{1-\cos^2\theta}}{2}$$

$$=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

म्हणूनच मॅट्रिक्स A ला वास्तविक आइजेन मूल्य नसतात आणि परिणामी आइजेन व्हेक्टर नसतात.

उदाहरण 5.13. दिलेल्या मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ साठी. सर्व आइजेन मूल्य आणि आइजेन व्हेक्टर शोधा A साठी आइजेन बेसिस आहे का?

उकल. येथे $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे.

$$|A-\lambda I|=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$= \quad (1-\lambda)^2 = 0$$

$$= \lambda = 1,1$$

आइजेन मूल्य $\lambda = 1$ शी संबंधित आइजेन व्हेक्टर शोधण्यासाठी,

$$AX = \lambda X$$

$$[A-\lambda I]X = 0$$

$$[A-I]X = 0, (\lambda = 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[जर $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ संबंधित आइजेन व्हेक्टर असेल]

$\Rightarrow \qquad y = 0$

$x = 1$ घ्या, तर $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ हे $\lambda = 1$ शी संबंधित एक आइजेन व्हेक्टर आहे.

येथे आपण पाहु शकतो की X हा R^2 चा बेसिस बनत नाही, म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्स A साठी आपल्याकडे आइजेन बेसिस नाही.

उदाहरण 5.14. रेषीय ऑपरेटरसाठी $T : R^2 \to R^2$ आइजेन मूल्य शोधा जर

$$T(x, y) = (3x+5y, 2x+3y).$$

उकल. येथे, $T(x, y) = (3x+5y, 2x+3y).$

स्टॅण्डर्ड बेसिस R^2 च्या संबंधित T चा मॅट्रिक्स आहे.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$|A-\lambda I| = 0$ संबंधित कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3-\lambda)^2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 3 \pm \sqrt{10}$$

म्हणून $3+\sqrt{10}$ आणि $3-\sqrt{10}$ ही T ची आइजेन मूल्ये आहेत.

उदाहरण 5.15. रेषीय ऑपरेटर $T : R^2 \to R^2$ साठी आइजेन मूल्य, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा जेव्हा $T(x, y) = (y, x)$..

उकल. येथे, $T(x, y) = (y, x).$

R^2 च्या स्टॅण्डर्ड बेसिसशी संबंधित T चे मॅट्रिक्स आहे

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$|A-\lambda I| = 0$ संबंधित कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^2 - 1 = 0$$

किंवा $\lambda = \pm 1$ ही T ची आइजेन मूल्ये आहेत.

$\lambda = 1$ साठी, समजा $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ संबंधित आइजेन व्हेक्टर , मग

$$AX_1 = \lambda X_1$$

$$[A - \lambda I]X_1 = 0$$

$$[A - I]X_1 = 0, \ (\lambda = 1)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -x_1 + y_1 = 0$$

$$x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1$$

$y_1 = 1$ घेतल्यास, आपल्याकडे $x_1 = 1$ आहे

$\therefore \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ हे आइजेन मूल्ये $\lambda = 1$ शी संबंधित आइजेन व्हेक्टर आहे.

$\lambda = -1$ साठी, समजा $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ संबंधित आइजेन व्हेक्टर , मग

$$AX_2 = \lambda X_2$$

$$[A + \lambda I]X_2 = 0$$

$$[A + I]X_2 = 0, \ (\lambda = -1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 + y_2 = 0$$

$$x_2 = -y_2$$

$y_2 = 1$, $x_2 = -1$ घेतल्यास, तर $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ हे आइजेन मूल्ये $\lambda = -1$ शी संबंधित आइजेन व्हेक्टर आहे

येथे आपण पाहु शकतो की सर्व आइजेन व्हेक्टर R^2 चा बेसिस तयार करतात.

$\therefore$ T चे आइजेन बेसिस T = {(1,1),(-1,1)} आहेत.

अभ्यास 5.1

खालील मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे शोधा:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

खालील मॅट्रिक्ससाठी आइजेन मूल्य आणि संबंधित आइजेन व्हेक्टर शोधा:

4. $\begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

10. पुढीलपैकी प्रत्येक ऑपरेटर $T : R^2 \to R^2$ साठी, आइजेन मूल्य, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसिस शोधा.
 $i)\ T(x, y) = (y, -x)$ $ii) T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$

11. पुढीलपैकी प्रत्येक ऑपरेटर $T : R^3 \to R^3$ साठी, प्रत्येक आइजेन स्पेससाठी आइजेन मूल्ये आणि बेसेस शोधा
 $i)\ T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ $ii) T(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z)$
 $iii)\ T(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$ $iv) T(x, y, z) = (3x + y + 4z, 2y + 6z, 5z)$

12. $T : R^3 \to R^3$ एक रेषीय ऑपरेटर असा आहे की मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ज्याचा ऑर्डरड बेसिस $\{(1,2,3),(1,2,0),(1,0,0)\}$ आहे. T साठी आइजेन मूल्य, आइजेन व्हेक्टर आणि आइजेन बेसेस निश्चित करा.

उत्तरे

1. $-1,1,2$ 2. $2,3,-2$ 3. a,b,c

4. $0,(-3,1,0);1,(12,-4,-1);0,(-3,1,0)$ 5. $1,(1,1,-1);2,(2,1,0)$

6. $2;(1,0,0)$ 7. $1;(0,0,1)$ 8. $-1(-3,-1,3);2(0,1,0);3(1,1,1)$

9. $2(1,0,0);-2(0,1,1);-4(0,1,-1)$

10. i) आइजेन मूल्य नाही; आइजेन व्हेक्टर नाही; आइजेन बेसेस नाहीत.

 ii) आइजेन मूल्य (-1,4); आइजेन व्हेक्टर (-1,1) आणि (2,3); आइजेन बेसेस {(-1,1),(2,3)}.

11. i) आइजेन मूल्य (2,3); आइजेन बेसेस {(1,0,0),(1,1,-2)}.

 ii) आइजेन मूल्य (1); आइजेन बेसेस {(1,0,0)}.

 iii) आइजेन मूल्य (1,2,3); आइजेन बेसेस {(1,0,-1),(2,-2,-1) आणि (1,-2,-1)}.

 iv) आइजेन मूल्य (2,3,5); आइजेन बेसेस {(-1,1,0),(1,0,0) आणि (3,2,1)}.

12. आइजेन मूल्य (2,3,5); आइजेन व्हेक्टर (-1,1,0), (1,0,0), (3,2,1); आइजेन बेसेस {(-1,1,0),(1,0,0) आणि (3,2,1)}.

ट्रान्सपोजवर आधारित गुणधर्म: येथे आपण ट्रान्सपोजचे काही परिणाम लिहू जे संख्यात्मक समस्यांचे निराकरण शोधण्यासाठी आणि प्रमेयाच्या सिद्धतेसाठी खूप उपयुक्त आहेत.
जर A' आणि B^1 अनुक्रमे A आणि B मॅट्रिक्सचे ट्रान्सपोजदर्शवितात, तर पुढील परिणाम धारण करतात:

i) $(A')' = A$
ii) $(kA)' = kA'$, k स्केलार आहे.
iii) $(A+B)' = A'+B'$, A, B गुणाकारासाठी अनुरूप आहे.

5.3 सिमेट्रिक आणि स्किव-सिमेट्रिक(अँटी सिमेट्रिक) मॅट्रिक्स वर आधारित प्रमेय:

युनिट 3 मध्ये, आपण सिमेट्रिक आणि स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सच्या व्याख्येवर आधीच चर्चा केली होती.
येथे आपण त्यांच्या आधारे काही प्रमेयांवर चर्चा करू:

प्रमेय 1: मॅट्रिक्स A सिमेट्रिक होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट म्हणजे $A = A'$

सिद्धता: अट आवश्यक आहे.

समजा $A = \left[a_{ij}\right]$,n-रो स्क्वेयर सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

याचा अर्थ $a_{ij} = a_{ji}$ आणि A' म्हणजे A चा ट्रान्सपोज देखील n-रो स्क्वेयर मॅट्रिक्स आहे.

आता $(i, j)^{th}$, A' चे घटक

$= (j,i)^{th}$ A चे घटक

$\because A$ सिमेट्रिक आहे $\Rightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$,सर्व i, j साठी.

$= (j,i)^{th}$ A चे घटक.

$\therefore A = A'$

स्थिती पुरेशी आहे

येथे $A = A'$

सिद्ध करण्यासाठी: A सिमेट्रिक आहे,

जर $A = A'$, A हा n-रो स्क्वेयर सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

तसेच $= (i, j)^{th}$ A चे घटक $= = (i, j)^{th}$ A' चे घटक $[\because A = A']$

$= (j,i)^{th}$ A चे घटक

$\therefore A$ सिमेट्रिक आहे.

प्रमेय 2: A हा स्किव-सिमेट्रिक होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट $A' = -A$ आहे.

सिद्धता: समजा $A = \left[a_{ij}\right]$,n-रो स्क्वेयर स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, तर

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

A हा n-रो स्क्वेयर मॅट्रिक्स आहे म्हणून, A', -A देखील n-रो स्क्वेयर मॅट्रिक्स आहेत.

आता $(i, j)^{th}$ A' चे घटक $= (j, i)^{th}$ (-A) चे घटक

$\because A$ हा स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे

$\Rightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji}$,सर्व i, j साठी.

$= (j,i)^{th}$ (-A) चे घटक

$\Rightarrow \quad A' = -A$

याउलट; जर $A' = -A$ मग A एक स्क्वेयर मॅट्रिक्स असणे आवश्यक आहे.

तसेच, $(i, j)^{th}$ A चे घटक $= -(j,i)^{th}$ A' चे घटक $\quad [\because -A = A']$

$= -(j,i)^{th}$ A चे घटक

म्हणून A हा एक स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

प्रमेय 3: जर A हा एक स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल आणि X हा एक कॉलम मॅट्रिक्स असेल तर $X'AX$ हा शून्य मॅट्रिक्स आहे हे दाखवा.

सिद्धता: A हा एक स्क्यू-सिमेट्रिक आहे म्हणून $A' = -A$

समजा A हा n ऑर्डरचा स्क्वेयर मॅट्रिक्स आहे आणि X हा $n \times 1$ ऑर्डरचा कॉलम मॅट्रिक्स आहे. आता X' हा $1 \times n$ ऑर्डरचा रो मॅट्रिक्स आहे. म्हणून $X'AX$ हा 1×1 ऑर्डरचा मॅट्रिक्स आहे.

समजा $\quad X'AX = B \quad (1)$

जर B हा 1×1 ऑर्डरचा आहे तर $B' = B$ आणि म्हणून B हा सिमेट्रिक आहे.

गृहीत धरा $\quad (X'AX)' = B'$

$\therefore \quad X'A'(X')' = B' \Rightarrow X'A'X'' = B'$

परंतु $\quad X'' = X, A' = -A$ आणि $B' = B$

$\therefore$ आपल्याकडे आहे, $X'(-A)X = B$

$-(X'AX) = B$

$-B = B \quad$ [(1) वरून]

$\Rightarrow \quad 2B = 0$

$\therefore \quad B = 0$

$\Rightarrow$ $X'AX$ शून्य मॅट्रिक्स आहे.

प्रमेय 4: प्रत्येक स्क्वेअर मॅट्रिक्स हा अद्वितीयपणे दोन मॅट्रिक्स, एक सिमेट्रिक आणि दुसरा अँटी-सिमेट्रिक यांच्या बेरजेमध्ये व्यक्त केला जाऊ शकतो हे दाखवा.

सिद्धता: समजा दिलेला A हा स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे तर A ला असे लिहिता येईल

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

$$= \mathrm{P} + \mathrm{Q} \text{ (समजा)}$$

येथे
$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}(A + A'), \; Q = \frac{1}{2}(A - A')$$

आता आपण P हा सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आणि Q हा स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे हे दाखऊ.

यासाठी, समजा $\quad P' = \frac{1}{2}(A + A')' = \frac{1}{2}[(A') + (A')']$

$$= \frac{1}{2}[A' + A]$$

$$= \frac{1}{2}(A+A') = P$$

$\therefore$ P हा सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

तसेच
$$Q' = \frac{1}{2}\left[(A-A')'\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(A')-(A')')\right]$$
$$= \frac{1}{2}[A'-A] = -\frac{1}{2}(A-A')$$
$$= -Q$$

$\therefore$ Q हा अँटी-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

अशा प्रकारे, आपण A हा सिमेट्रिक आणि अँटी-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सच्या बेरजेमध्ये व्यक्त केला.

यूनिकनेस सिद्ध करण्यासाठी:

समजा A = R+S, जेथे R हा सिमेट्रिक आणि S हा स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असून A ची पर्यायी मांडणी आहे.

आता,
$$A' = (R+S)' = R'+S'$$
$$= R-S \qquad [\because R' = R, S' = -S]$$

$\therefore$
$$\frac{1}{2}(A+A') = \frac{1}{2}\left[(R+S)+(R-S)\right] = R$$

$\therefore$
$$R = P$$

आणि
$$\frac{1}{2}(A-A') = \frac{1}{2}\left[(R+S)-(R-S)\right] = S$$

$\therefore$
$$S = Q$$

म्हणून $A = P+Q$ ची मांडणी अद्वितीय आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.16. जर $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ मग त्याची मांडणी $A = B + C$ असे करा, जेथे B सिमेट्रिक आणि C स्किव-सिमेट्रिक आहे.

उकल . आपल्याजवळ आहे,
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ट्रान्सपोज केल्यावर आपल्याला मिळेल,
$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A आणि A' यांची बेरीज करून,
$$A + A' = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad \ldots (1)$$

A आणि A' यांची वजाबाकी केल्यावर आपल्याला मिळेल,

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{... (2)}$$

(1)आणि (2) यांची बेरीज केल्यावर, आपल्याला मिळेल,

$$2A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

किंवा

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9/2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & -2 \\ -5/2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

= सिमेट्रिक + स्किव-सिमेट्रिक

उदाहरण 5.17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ ला सिमेट्रिक आणि स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून व्यक्त करा.

उकल. समजा

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

ट्रान्सपोज केल्यावर आमच्याकडे आहे $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

A आणि A' यांची बेरीज करून, $A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ ... (1)

A आणि A' यांची वजाबाकी केल्यावर आमच्याकडे आहे

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{... (2)}$$

(1) आणि (2) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळेल,

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

किंवा
$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & 7 & 5\\ \frac{5}{2} & 5 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -4\\ \frac{5}{2} & 4 & 0\end{bmatrix}$$

= सिमेट्रिक + स्किव-सिमेट्रिक

उदाहरण 5.18. जर 'A' हा विषम किंवा सम ऑर्डर चा स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल, तर उदाहरण घेऊन हे सिद्ध करा की 'A' चे डिटरमिनंट अनुक्रमे '0' किंवा वास्तविक संख्या असते:

उकल. (1) समजा $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\\ -3 & -4 & 0\end{bmatrix}$ ही विषम ऑर्डर आणि स्किव-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे तर

$$|A|=0(0+16)-2(0+12)+3(8+0)$$
$$=0-24+24=0$$

(2) जर $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ म्हणजेच, 'A' सम ऑर्डर मॅट्रिक्स आणि स्किव-सिमेट्रिक आहे, तर

$|A|=0+1=1$ म्हणजेच, वास्तविक संख्या

इतिहास

इनर प्रॉडक्ट ची उत्पत्ती फोरीयर सिरीज सारख्या ऑर्थोगोनल फंक्शन विस्तारात होते. शास्त्रीय फोरीयर सिरीजच्या संबंधात फंक्शनची ऑर्थोगोनॅलिटी प्रथम पाहिली गेली.

म्हणून, इनर प्रॉडक्ट सिंगल स्पेस वरील फॉर्म होता. कित्येक दशकांनंतर ड्यूआलिटी (Duality)ची कल्पना आली, फक्त एकदा लोकांना असे आढळले की त्यांना स्पेसमधून ड्यूआलिटी (Duality) वेगळे करण्यास भाग पाडले गेले.. 1878 मध्ये, फोर्बेनियसने मॅट्रिक्सची रँक सादर केली आणि त्याचा उपयोग ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सच्या व्याख्येत केला. त्या शोधापासून मॅट्रिक्स हे क्रिप्टोग्राफी, संगणक विज्ञान, अभियांत्रिकी इत्यादी अग्रगण्य क्षेत्राचा कणा बनले आहे.

5.4 ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स

$AA' = A'A = I$ असल्यास वास्तविक स्क्वेयर मॅट्रिक्स A ला ऑर्थोगोनल म्हणतात.

5.4.1 ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे गुणधर्म

a. जर A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर $|A|=\pm 1$.

सिद्धता: रो आणि कॉलम ची अदलाबदल केल्याने डिटरमिनन्टची किंमत बदलत नसल्याने, $|A'|=|A|$

पुढे व्याख्येनुसार, जर A ऑर्थोगोनल असेल तर $AA' = I$

$$\therefore \quad |AA'|=|I|$$

$\Rightarrow \quad |A||A'| = |I|$

$\Rightarrow \quad |A|^2 = 1$

$\Rightarrow \quad |A| = \pm 1$

टीप: जर A या ऑर्थोगोनल स्क्वेअर मॅट्रिक्स ची ऑर्डर n असेल आणि $|A| = \pm 1$ तर A ची रँक = n.

b. जर A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर A^{-1} अस्तित्वात येतो आणि ते A' च्या बरोबर असते.

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे की जर A आणि B दोन मॅट्रिक्स असे आहेत की $AB = BA = I$, तर B ला A चे व्यस्त म्हणतात आणि A ला B चे व्यस्त म्हणतात. A ची व्यस्तता असण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट आहे $|A| \neq 0$

(a) मध्ये पाहिले आहे की जर A ऑर्थोगोनल असेल तर $|A| = \pm 1 \neq 0 \;\therefore\; A^{-1}$ अस्तित्वात आहे.

पुढे, $AA' = I \qquad \therefore \quad A^{-1}(AA') = A^{-1}.I$

$\therefore \quad (A^{-1}A).A' = A^{-1}$

$IA' = A^{-1}$

$\Rightarrow \quad A' = A^{-1}$

c.जर A आणि B हे ऑर्डर n चे दोन ऑर्थोगोनल स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत, तर AB आणि BA देखील ऑर्थोगोनल आहेत.

सिद्धता: A आणि B हे ऑर्डर n चे चौरस मॅट्रिक्स असल्याने AB आणि BA परिभाषित आहेत आणि ऑर्डर n चे चौरस मॅट्रायसेस आहेत.

A, B ऑर्थोगोनल असल्याने,

$|A| \neq 0, |B| \neq 0 \, (= \pm 1)$ आणि A^{-1}, B^{-1} अस्तित्वात आहेत.

पुढे, $|AB| = |A||B| \neq 0$

$\therefore \quad (AB)^{-1}$ अस्तित्वात आहे

आता, $(AB)' = B'A'$

पुढे,
$$\begin{aligned}(AB)'(AB) &= B'A'AB\\ &= B'(A'A)B\\ &= B'IB = B'B = I\end{aligned}$$

म्हणून $(AB)^{-1}$ हा AB चा व्यस्त आहे.

म्हणून AB हा ऑर्थोगोनल आहे.

टीप: जर A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर $|A| = \pm 1$

जर $|A| = 1$, तर A ला योग्य ऑर्थोगोनल प्रॉपर मॅट्रिक्स म्हणतात.

टिप्पणी: संख्यात्मक रेषीय बीजगणितासाठी संख्यात्मक विश्लेषण, ऑर्थोगोनल मॅट्रायसेसच्या अनेक गुणधर्मांचा लाभ घेते. उदाहरणार्थ, इनर प्रॉडक्ट स्पेस साठी किंवा बेसिस च्या ऑर्थोगोनल बदलासाठी ऑर्थोनॉर्मल बेसिस ची गणना करणे अनेकदा इष्ट असते;दोघेही ऑर्थोगोनल मॅट्रायसेसचे रूप धारण करतात.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.19. $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहे याची पडताळणी करा.

उकल. येथे,
$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$
$$\therefore \quad A'=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$
आणि
$$AA'=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$
$$AA'=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=I$$

म्हणून 'A' हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे.

उदाहरण 5.20. $\begin{bmatrix}0 & 2\beta & \gamma\\ \alpha & \beta & -\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल असताना α,β,γ ची मूल्ये निश्चित करा.

उकल. समजा,
$$A=\begin{bmatrix}0 & 2\beta & \gamma\\ \alpha & \beta & -\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{bmatrix}$$
A चा ट्रान्सपोज घेतल्यावर, आपल्याकडे आहे
$$A'=\begin{bmatrix}0 & \alpha & \alpha\\ 2\beta & \beta & -\beta\\ \gamma & -\gamma & \gamma\end{bmatrix}$$
जर A ऑर्थोगोनल असेल तर $AA'=I$
$$\therefore \quad AA'=\begin{bmatrix}0 & 2\beta & \gamma\\ \alpha & \beta & -\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \alpha & \alpha\\ 2\beta & \beta & -\beta\\ \gamma & -\gamma & \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0+4\beta^2+\gamma^2 & 0+2\beta^2-\gamma^2 & 0-2\beta^2+\gamma^2\\ 0+2\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2\\ 0-2\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad 4\beta^2+\gamma^2=1 \qquad (1)$

आणि $\quad -2\beta^2+\gamma^2=0 \quad \Rightarrow \quad \beta^2=\frac{\gamma^2}{2} \qquad ...(2)$

$(1) \Rightarrow \quad 4.\frac{\gamma^2}{2}+\gamma^2=1 \qquad$ (येथे, $\beta^2=\frac{\gamma^2}{2}$)

किंवा $\quad \beta^2=\frac{1}{6}$ ((2) पासून) $\quad \beta=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad [\because \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1]$

तसेच, आमच्याकडे आहे

$$\alpha^2=1-\beta^2-\gamma^2$$
$$=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$$
$$\alpha^2=\frac{6-1-2}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad \alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

उदाहरण 5.21. जर $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$, तर सिद्ध करा की $A^{-1}=A'$, A' हा A चा ट्रान्सपोज आहे.

उकल. येथे, $\quad A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$, आणि $A'=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -8\\ 4 & 7 & 4\end{bmatrix}$ तर

$$AA'=\frac{1}{81}\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8 & 4 & 1\\ 1 & 4 & -8\\ 4 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{81}\begin{bmatrix}64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16\\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32+28\\ -8-8+16 & 4-32+28 & 64+1+16\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{81}\begin{bmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad AA^{-1}=I \quad \Rightarrow \quad A'=A^{-1}$$

उदाहरण 5.22. मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 9\end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहे का?

उकल. A चा ट्रान्सपोज आहे $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ आहे.

लक्षात घ्या $$AA' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+16+9 & -6+12-3 & 2+4-27 \\ -6+12-3 & 9+9+1 & -3+3+9 \\ 2+4-27 & -3+3+9 & 1+1+81 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 3 & -21 \\ 3 & 19 & 9 \\ -21 & 9 & 83 \end{bmatrix} \neq I$$

म्हणून, मॅट्रिक्स A हा ऑर्थोगोनल नाही.

उदाहरण 5.23. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहे का?

उकल. A चा ट्रान्सपोज आहे $A' = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ आहे.

तर, $$A'A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + 0 + \sin^2\theta & 0+0+0 & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & 0+0+0 & \sin^2\theta + 0 + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

म्हणून दिलेला मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे.

अभ्यास 5.2

1. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, तर $(AB)'$ शोधा. तसेच $(AB)' = B'A$ याची पडताळणी करा

2. जर $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ तर दाखवा की AA' आणि $A'A$ दोन्ही सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहेत.

3. जर A आणि B हे सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहेत, तर दाखवा की $AB\text{-}BA$ हा एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

4. सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून खाली दिलेला मॅट्रिक्स 'A' व्यक्त करा

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

5. खालील मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे हे सिद्ध करा आणि म्हणून A^{-1} शोधा

$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

6. $A=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & a \\ 2/3 & 1/3 & b \\ 2/3 & -2/3 & c \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल असल्यास, a, b आणि c शोधा.

7. दिलेले मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे की नाही ते तपासा?

$$A=\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

8. खालील मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे का?

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. खालील मॅट्रायसेस ऑर्थोगोनल आहेत हे सिद्ध करा आणि म्हणून A^{-1} देखील शोधा.

i. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ *ii.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ *iii.* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. जर $3A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ आणि जर A ऑर्थोगोनल असेल तर a,b,c शोधा.

11. मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ सिमेट्रिक आणि स्क्यू सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून व्यक्त करा.

12. खालील मॅट्रायसेस प्रॉपर ऑर्थोगोनल आहेत की इमप्रॉपर ऑर्थोगोनल आहेत ते तपासा:

13. *i.* $\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$ *ii.* $\begin{bmatrix} 12/13 & 5/13 \\ -5/13 & 12/13 \end{bmatrix}$ *iii.* $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तरे

1. $\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5 & 9/2 \\ 3/2 & 9/2 & 3 \end{bmatrix}$; स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ -2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

5. A' हा A चा व्यस्त आहे

6. $a = \pm\frac{2}{3}, b = \pm\frac{2}{3}, c = \pm\frac{1}{3}$

7. नाही

8. नाही

9. *i.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ *ii.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ *iii.* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. $a = 2, b = 2, c = 1$

11. सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 11/2 \\ 0 & 7 & 3/2 \\ 11/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$; स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ 2 & 0 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$

12. *i.* इमप्रॉपर *ii.* प्रॉपर *iii.* ऑर्थोगोनल नाही

5.5 रेषीय ऑपरेटरचे डायगोनलायझेशन

एक रेखीय ऑपरेटर $T : V \to V$ चा विचार करा. मग T ला डायगोनलायझेबल म्हणून ओळखले जाऊ शकते. जर ते डायगोनल मॅट्रिक्स D द्वारे दर्शविले जाऊ शकते. अशाप्रकारे, T हा डायगोनलायझेबल करण्यायोग्य आहे जर आणि फक्त जर V चा बेसिस B असा असेल की B च्या संदर्भात T चा मॅट्रिक्स हा डायगोनल मॅट्रिक्स D असेल.

5.5.1 मॅट्रिक्सचे डायगोनलायझेशन

समजा, $x_1, x_2 x_3, \dots x_n$ हे स्क्वेयर मॅट्रिक्स A चे आइजेन व्हेक्टर आहेत, जे $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ या आइजेन मूल्यांच्या अनुक्रमे आहेत, मग

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

B स्क्वेयर मॅट्रिक्स द्वारे दर्शवा ज्याचे कॉलम $[x_1, x_2 x_3, \dots x_n]$ आहेत. संक्षीप्ततेसाठी, आपण P $[x_1, x_2 x_3, \dots x_n]$ म्हणून लिहू,मग

$$\begin{aligned} AP &= A\left[x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n\right] \\ &= \left[Ax_1, Ax_2, Ax_3, \ldots . Ax_n\right] \\ &= \left[\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots . \lambda x_n\right] \\ &= PD \end{aligned}$$

[P आणि D पूर्ण लिहून आणि गुणाकार करून याची पडताळणी केली जाऊ शकते]

जसे,
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & -- & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -- & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & -- & \lambda_n \end{bmatrix}$$

हे देते
$$P^{-1}AP = D$$

जेव्हा 'n' लिनियर्ली स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर A साठी अस्तित्वात नसतात तेव्हा ही पद्धत अपयशी ठरते. असे मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल नाहीत.

जेव्हा n लिनियर्ली स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर अस्तित्वात असतात, तेव्हा P हा नॉन सिंग्युलर आणि $P^{-1}AP$ हा डायगोनल मॅट्रिक्स ज्याचे सर्व डायगोनल घटक हे आइजेन मूल्य असतात.

मॅट्रिक्स A ला डायगोनलायझकरण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या मॅट्रिक्स P ला A चे मोडल मॅट्रिक्स म्हणतात. अशा प्रकारे मिळवलेले डायगोनल मॅट्रिक्सला A चे स्पेक्ट्रल मॅट्रिक्स म्हणून ओळखले जाते.

A आणि C हे दोन मॅट्रिक्स सारखे आहेत असे म्हटले जाते जर तेथे नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स B असा असेल कि

$$C = B^{-1}AB$$

स्पष्टपणे, एक डायगोनलायझेबल मॅट्रिक्स A डायगोनल मॅट्रिक्स D सारखेच असतात.

टीप: समान मॅट्रिक्सची मूल्ये समान असतात.

मनोरंजक तथ्ये

1. हे काही संगणकीय संगणकांना लक्षणीयरित्या सोपे करते. तथापि डायगोनलायझेशनचा पहिला वापर मार्कोव्ह प्रोसेस मध्ये केलेला आढळतो जेथे काही चौरस मॅट्रिक्सचा घातांक मोठ्या प्रमाणात वापरला जातो आणि मार्कोव्ह प्रक्रिया खरोखरच अनुप्रयोगांनी समृद्ध आहेत, जसे की
   - बाजार
   - हवामान अंदाज
   - अनुवांशिकता
   - गॅसचे मिश्रण
   - सर्वात प्रसिद्ध बहुधा गुगलचे पेज रँकिंग अल्गोरिदम आहे.
2. हे यांत्रिकीमध्ये सुद्धा वापरले जाते उदाहरणार्थ, जडत्वाचे मुख्य अक्ष शोधण्याचा एक मार्ग (जडत्वाच्या टेन्सरसह डायगोनल मॅट्रिक्स).
3. आणखी एक गोष्ट म्हणजे दोलायमान प्रणालीचे नॉर्मल मोडस शोधणे (ज्यासाठी गतिज आणि स्थितिज ऊर्जेच्या दोन मॅट्रिक्सचे एकसामायिक डायगोनलायझेशनची आवश्यकता असते).

वास्तविक जीवनाचे अनुप्रयोग

डायगोनलायझेशनचा एक महत्त्वाचा वापर म्हणजे मॅट्रिक्सच्या उच्च घातांकांची प्रभावीपणे गणना करणे

जर $A = M^{-1}DM$ तर $A^m = M^{-1}D^nM$

वरील गुणधर्म मॅट्रिक्सच्या उच्च घातांकांची गणना करणे सोपे करते, कारण D^n चे संगणन A^n च्या संगणनाच्या तुलनेत बरेच सोपे आहे .

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत NPTEL)

Eigenvalues & Eigenvectors

Method to Find Eigenvalues and Eigenvectors, Diagonalization of Matrices

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.24 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ मॅट्रिक्सला डायगोनलायझ करा आणि मोडल मॅट्रिक्स मिळवा.

उकल: दिलेल्या मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)[-\lambda(2-\lambda)+1] - 2[-\lambda+1] - 2[-1+2-\lambda] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda + 1] - 2[-\lambda+1] - [1-\lambda] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 4] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)(\lambda^2 - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1, \pm\sqrt{5}$$

आता, आपल्याला या आइजेन मूल्यांच्या अनुषंगाने आइजेन व्हेक्टर सापडतात.

$\lambda = 1$ साठी, समजा $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ असा आइजेन व्हेक्टर आहे कि,

$$AX_1 = \lambda X_1$$

$$(A - \lambda I)X_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + y_1 - z_1 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \qquad (2)$$

$$-x_1 - y_1 - z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \quad 2y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0$$

$$(2) \Rightarrow \quad -x_1 - z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1 = z_1$$

घेउन $z_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$

$$\therefore \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = \sqrt{5}$ साठी, समजा $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ असा आइजेन व्हेक्टर आहे कि,

$$AX_2 = \lambda X_2$$

$$[A - \sqrt{5}I]X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2-\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0-\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1-\sqrt{5})x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \qquad ...(3)$$

$$x_2 + (2-\sqrt{5})y_2 + z_2 = 0 \qquad ...(4)$$

$$-x_2 - y_2 - \sqrt{5}z_2 = 0 \qquad ...(5)$$

$(4)+(5) \Rightarrow$ $$(1-\sqrt{5})y_2 + (1-\sqrt{5})z_2 = 0 \qquad ...(6)$$

$\Rightarrow$ $$y_2 = -z_2$$

$z_2 = 1$ घेउन , तर $y_2 = -1$

(5) वरुन $$-x_2 = y_2 + \sqrt{5}z_2 = -1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$\therefore \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -\sqrt{5}$ साठी, समजा $X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$ असा आइजेन व्हेक्टर आहे कि,

$$AX_3 = \lambda X_3$$

$$\Rightarrow \qquad [A-(-\sqrt{5})I]X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1+\sqrt{5})x_3 + 2y_3 - 2z_3 = 0 \tag{7}$$

$$x_3 + (2+\sqrt{5})y_3 + z_3 = 0 \tag{8}$$

$$-x_3 - y_3 + \sqrt{5}z_3 = 0 \tag{9}$$

$(8)+(9) \quad \Rightarrow \quad (1+\sqrt{5})y_3 + (1+\sqrt{5})z_3 = 0$

$$\Rightarrow \qquad y_3 = -z_3$$

$z_3 = 1$ घेउन , तर $\qquad y_3 = -1$

(8) वरुन $\qquad -x_3 = y_3 - \sqrt{5}z_3 = -1-\sqrt{5}$

$$\therefore \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ मोडल मॅट्रिक्स $P = \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|P| = -2\sqrt{5}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{(-2\sqrt{5})}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2\sqrt{5} & 2+\sqrt{5} & -2+\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \qquad = \frac{1}{(-2\sqrt{5})}\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 5.25 मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ फिल्ड C वर डायगोनलायझेबल नाही हे दाखवा.

उकल: दिले $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

त्याअनुषंगाने कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = 2, 2$$

अशा प्रकारे एकमेव वेगळे आइजेन मूल्य 2 आहे.

जर $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ संबंधित आइजेन व्हेक्टर असेल, तर,

$$AX = \lambda X$$

किंवा
$$[A - \lambda I]X = 0$$

$\lambda = 2$ साठी
$$[A - 2I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad 0x + y = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = 0$$

$x = 1, y = 0$ घेउन , $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ हा $\lambda = 2$ शी संबंधित एकमेव आइजेन व्हेक्टर आहे.

अशा प्रकारे दिलेल्या स्क्वेयर मॅट्रिक्स A मध्ये फक्त एकच लिनियर्ली स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर आहे.
तर दिलेले स्क्वेयर मॅट्रिक्स A डायगोनलायझेबल नाही.
[दिलेले मॅट्रिक्स A डायगोनलायझेबल होण्यासाठी, त्यात 2 लिनियर्ली स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर असणे आवश्यक आहे]

उदाहरण 5.26 मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ डायगोनलायझेबल आहे हे दाखवा.

उकल: प्रथम आपण जसे केले आहे तसेच आइजेन मूल्ये आणि आइजेन व्हेक्टर शोधू उदाहरणार्थ पृष्ठ क्रमांक 345 वर उदाहरण 5.4. त्यानंतर, डायगोनलायझेबिलिटी तपासण्यासाठी. दिलेल्या मॅट्रिक्स A मध्ये 3 लिनियर्ली स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर आहेत. म्हनुन दिलेले मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल आहे.

उदाहरण 5.27 दिलेल्या मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ चा तिरपेपणा तपासा.

उकल: उदाहरण 5.5 प्रमाणे पृष्ठ क्रमांक 346 वर अशाच प्रकारे पुढे जात आहे. मग, डायगोनलायझेशन तपासण्यासाठी, दिलेल्या मॅट्रिक्स A मध्ये 3 लिनियर्ली स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर आहेत. म्हनुन दिलेले मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल आहे.

उदाहरण 5.28. रेखीय ऑपरेटर $T: R^2 \to R^2$ साठी $T(x,y)=(-5x+2y, 2x-2y)$ द्वारे दिलेले आहे. T ची डायगोनलायझेबिलिटी तपासा .

उकल: $T(x,y)=(-5x+2y, 2x-2y)$ दिलेले आहे .

R^2 च्या स्टँडर्ड बेसिस संबंधीत मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

अशा प्रकारे 348 पृष्ठ क्रमांकावरील उदाहरण 5.6 प्रमाणेच पुढे जाउ.

यानंतर T ला 2 रेखीय स्वतंत्र आइजेन व्हेक्टर असल्याने.

म्हणून T डायगोनलायझेबल आहे.

[अशाच प्रकारे, विद्यार्थी डायगोनलायझेबिलिटी या संकल्पनेवर आधारित आणखी अनेक प्रश्नांचा सराव करू शकतात]

अभ्यास 5.3

1. खालील मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल आहेत हे दाखवा.

   i. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *ii.* $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ हा मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल नाही हे दाखवा.

3. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स ची डायगोनलायजेबिलिटी तपासा.

4. दिलेला मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ हा डायगोनलायझेबल आहे किंवा नाही. तुमच्या उत्तराला योग्य कारण द्या.

उत्तरे

3. डायगोनलायझेबल

4. होय, डायगोनलायझेबल, प्रत्येक आइजेन मूल्याची A.M.= प्रत्येक आइजेन मूल्याची G. M..

5.6 इनर प्रॉडक्ट स्पेस

इनर प्रॉडक्ट सोबत परिभाषित केलेल्या व्हेक्टर स्पेसला इनर प्रॉडक्ट स्पेस म्हणतात.

दोन व्हेक्टर $\vec{u}$ आणि $\vec{v}$ चा इनर प्रॉडक्ट, $\langle u,v\rangle$ किंवा (u,v) याने दर्शविला जातो.

आपल्याला R^n मधील दोन व्हेक्टर $\vec{u}$ आणि $\vec{v}$ चा स्केलर प्रॉडक्ट माहित आहे. अशाच प्रकारे, आपण दोन-कॉलम व्हेक्टर $\vec{u}$ आणि $\vec{v}$ चा इनर प्रॉडक्ट परिभाषित करू शकतो. म्हणून

$$\langle u,v\rangle = u^T \bullet v$$

$\vec{u}$ आणि $\vec{v}$ चा मूलभूत गुणधर्म वापरून हि व्याख्या सामान्य रिअल व्हेक्टर स्पेस ला लागू केली जाऊ शकते.

समजा u आणि v हे दोन कॉलम व्हेक्टर वास्तविक फिल्ड R वर आहेत.

$$u=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ आणि } v=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

तर

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= u^T v \\ &= (x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)\end{aligned}$$

यालाच R^n चा स्टँडर्ड इनर प्रॉडक्ट म्हणतात.

व्याख्या: समजा V हा फील्ड F वर व्हेक्टर स्पेस आहे. तसेच $a,b\in F$ हे अहेतुक स्केलर आणि $u,v,w\in V$ हे अहेतुक व्हेक्टर आहेत. जर खालील गृहीतकांचे समाधान करणारे $\langle,\rangle$ $V\times V\to F$ असे फंक्शन अस्तित्वात असेल तर त्या व्हेक्टर स्पेस V ला इनर प्रॉडक्ट स्पेस म्हणतात.

1. $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}, i.e$ $\langle v,u\rangle$ चा कॉम्प्लेक्स कॉन्ज्युगेट.
2. $\langle u,u\rangle \geq 0$ आणि $\langle u,u\rangle = 0$ जर आणि फक्त जर $u=0$
3. $\langle au+bv,w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle$

(1),(2),(3) गुणधर्मांचे समाधान करणाऱ्या <,> फंक्शनला V वर चा इनर प्रॉडक्ट म्हणतात.

टिप्पणी: 1. रियल इनर प्रॉडक्ट स्पेस ला यूक्लिडीयन स्पेस म्हणतात आणि कॉम्प्लेक्स इनर प्रॉडक्ट स्पेस ला युनिटरी स्पेस म्हणतात.

2. जर $F=R$ (फील्ड रिअल बनते), तर अगझोम (1) फक्त असे सांगते कि

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ (सिमेट्रिक प्रॉपर्टी)

3. जर $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

$\therefore$ $\langle u,u\rangle = \overline{\langle u,u\rangle}$

जे दर्शविते की $\langle u,v\rangle$ ही वास्तविक संख्या आहे आणि म्हणून ॲक्सिओम (2) अर्थपूर्ण आहे

5.6.1 इनर प्रॉडक्ट स्पेस चे गुणधर्म:

समजा V व्हेक्टर स्पेस आहे. हे दाखवा की जर $a,b,c\in F$

हे अहेतुक स्केलर आणि $u,v,w\in V$ हे अहेतुक व्हेक्टर आहेत, मग खालील सत्य आहे:

i. $\langle au,v\rangle = a\langle u,v\rangle$

ii. $\langle u,av\rangle = \bar{a}\langle u,v\rangle$

iii. $\langle u,bv+cw\rangle = \bar{b}\langle u,v\rangle + \bar{c}\langle u,w\rangle$

iv. $\langle o,v\rangle = 0$

v. $\langle u,v\rangle = 0\ \forall\ v\in V \Rightarrow u=0$

उकल: i. आपल्याला माहित आहे की, इनर प्रॉडक्ट स्पेस

$$\langle au+bv,w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle \tag{1}$$

$b=0$ (1) मध्ये ठेऊन,

आपल्याला मिळते

$$\langle au,w\rangle = a\langle u,w\rangle + 0\langle v,w\rangle$$
$$= a\langle u,w\rangle$$
$$\therefore \quad \langle au,v\rangle = a\langle u,v\rangle$$

ii.
$$\langle v,au\rangle = \overline{\langle au,v\rangle}$$
$$= \left[\overline{a\langle u,v\rangle}\right]$$
$$= \bar{a}\overline{\langle u,v\rangle}$$
$$= \bar{a}\langle v,u\rangle$$

u आणि v यांची अदुलाबदल करून, आपल्याला मिळेल,

$$\langle u,av\rangle = a\langle u,v\rangle$$

iii.
$$\langle u,bv+cw\rangle = \overline{\langle bv+cw,u\rangle}$$
$$= \left[\overline{b\langle v,u\rangle + c\langle w,u\rangle}\right]$$
$$= \bar{b}\overline{\langle v,u\rangle} + \bar{c}\overline{\langle w,u\rangle}$$
$$= \bar{b}\langle u,v\rangle + \bar{c}\langle u,w\rangle$$

iv.
$$\langle o,v\rangle = 0$$

(विद्यार्थी प्रयत्न करू शकतात)

v. $\langle u,v\rangle = 0 \ \forall \ v \in V$

किंवा $\langle u,u\rangle = 0$

$u = 0$

5.6.2 व्हेक्टर ची लांबी (नॉर्म):

समजा V हा इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे . कोणत्याही व्हेक्टर $v \in V$ साठी, V चा नॉर्म (मानक) असा परिभाषित केला आहे $\sqrt{\langle v,v\rangle}$ आणि ते $\|v\|$ याने दर्शविले जाते.

म्हणजेच

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

टिप्पणी: 1. नॉर्म (मानक) 1 असलेल्या व्हेक्टरला एकक व्हेक्टर म्हणतात.
2. u आणि v व्हेक्टर मधील अंतर $d\,(u, v)$ द्वारे दर्शविले जाते आणि म्हणून परिभाषित केले जाते

$$d\,(u,v) = \|u - v\|$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.29. समजा $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ आणि $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ हे दोन कॉलम व्हेक्टर आहेत. त्यांचा इनर प्रॉडक्ट आणि प्रत्येक व्हेक्टर ची लांबी काढा.

उकल. दिलेले आहे

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{आणि} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

मग

$$\langle u,v\rangle = u^T v$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(2) + (2)(-1) + (3)(1)$$

$$= 3 \text{ (u आणि v चा इनर प्रॉडक्ट)}$$

आणि $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$\Rightarrow$ $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$

$= u^T.u$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (1)(1) + (2)(2) + (3)(3)$$

$$= 1+4+9=14$$

म्हणून $\|u\| = \sqrt{14}$

आणि $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$

किंवा $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$

$$= v^T v$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (2)(2)+(-1)(-1)+(1)(1) = 6$$

$\Rightarrow$ $\|v\| = \sqrt{6}$

उदाहरण 5.30. समजा $V(R)$ हा एकक इंटरव्हल $0 \le t \le 1$ वरील सर्व बहुपदीचा एक व्हेक्टर स्पेस आहे. जर $f(t), g(t) \in V$ आणि V वरील इनर प्रॉडक्ट खालीलप्रमाणे परिभाषित केले आहे $< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$, तर $< f, g >$ आणि $\|g\|$ शोधा जर $f(t) = t^2 + t - 4$ आणि $g(t) = t - 1$.

उकल. समजा $< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$

तेंव्हा $= \int_0^1 (t^2 + t - 4)(t-1)dt$

$$= \int_0^1 (t^3 - 5t + 4)dt$$

$$= \left| \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 4t \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 4$$

$$= \frac{7}{4}$$

तसेच $\|g\|^2 =< g, g >$

$$= \int_0^1 g(t)g(t)dt$$

$$= \int_0^1 (t-1)^2 dt$$

$$= \left| \frac{(t-1)^3}{3} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

अशा प्रकारे $\quad \|g\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

उदाहरण 5.31. समजा V हा $[\alpha, \beta]$ इंटरव्हल वरील कॉम्प्लेक्स मूल्य असलेल्या फंक्शनचा C वरील व्हेक्टर स्पेस आहे. V वरील इनर प्रॉडक्ट स्पेस परिभाषित असा करा सिद्ध करा कि. $< f(t), g(t) >= \int_\alpha^\beta f(t).\overline{g(t)}dt$ V हा इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे

उकल. समजा

$$< f(t), g(t) >= \int_\alpha^\beta f(t).\overline{g(t)}dt$$

आपण ते लिहू शकतो

$$< \overline{g(t).f(t)} > = \left[\overline{\int_\alpha^\beta g(t)\overline{f(t)}dt} \right]$$

$$= \int_\alpha^\beta \overline{g(t)}.f(t)dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(t).\overline{g(t)}dt$$

अशा प्रकारे

$$< f(t).g(t) >=< \overline{g(t).f(t)} >$$

ii. तसेच $\quad < f(t), f(t) >= \int_\alpha^\beta f(t).\overline{f(t)}dt$

$$= \int_\alpha^\beta [f(t)]^2 dt$$

आणि $\quad < f(t), f(t) >= 0$ फक्त आणि फक्त $|f(t)|^2 = 0$

फक्त आणि फक्त $\quad |f(t)| = 0$

iii. आता, $< af(t) + bg(t), h(t) >$

$$= \int_\alpha^\beta [af(t) + bg(t)]\overline{h(t)dt}$$

$$= a\int_\alpha^\beta f(t)\overline{h(t)}dt + b\int_\alpha^\beta g(t)\overline{h(t)}dt$$

$$= a < f(t), h(t) > + b < g(t), h(t) >$$

अशा प्रकारे प्रकारे, V एक इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे

टिप्पणी: जर V हा वास्तविक मूल्य असलेल्या सर्व फंक्शनचा व्हेक्टर स्पेस आहे तर वरील व्याख्या फॉर्म घेते

$$< f(t), g(t) >= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt$$

काही महत्वाची प्रमेये ज्यांचे परिणाम अनेक ठिकाणी वापरले जातात आणि विद्यार्थ्यांना जेव्हा ते इनर प्रॉडक्ट स्पेस या विषयाचा अभ्यास करत असतात तेव्हा त्यांना हे माहित असणे आवश्यक आहे.

1.कॉचीज स्क्वार्रज असमानता (Cauchy's Schwarz's Inequality)

विधान: समजा V हा इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे, तर $|< u, v >| \le \|u\| \|v\| \forall v, v \in V$.

सिद्धता: जर $u = 0$ तर $< u, v >=< 0, v >= 0$

आणि $\|u\| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{< 0, 0 >} = 0$

त्याचप्रमाणे, असमानता वैध आहे, जेव्हा $v = 0$.

जर $u \ne 0$ तर $\|u\| \ne 0$ म्हणून

$$\|u\| = 0 \Rightarrow \sqrt{< 0, 0 >} = 0$$

$$\Rightarrow \quad < u, u >= 0 \Rightarrow u = 0$$

समजा $$w = v - \frac{< v, u > u}{\|u\|^2} \qquad (1)$$

तर $$< w, u >=< \left(v - \frac{< v, u > u}{\|u\|^2}, u \right) >$$

$$=< v, u > - < \left(\frac{< v, u > u}{\|u\|^2}, u \right) >$$

$$=< v, u > - \frac{< v, u >}{\|u\|^2} < u, u > \qquad [\because < au, v >= a < u, v >]$$

$$= <v, u> - \frac{< v, u >}{\|u\|^2} \|u\|^2$$

$$= <v, u > - < v, u >$$

$$<w, u> = 0$$

तसेच $$\|w\|^2 = <w,w> = <\left(v - \frac{<v,u>u}{\|u\|^2}, w\right)> \qquad (2)$$

$$= <v,w> - \frac{<v,u><u,w>}{\|u\|^2}$$

$$= <v,w> - \frac{<v,u>}{\|u\|^2}\overline{<w,u>}$$

$$= <v,w> - \frac{<v,u>}{\|u\|^2}.\overline{0} \qquad [\ (2)\ \text{वरून}]$$

= <v, w>-0=<v,w>

$$= <v, v - \frac{<v,u>u}{\|u\|^2}> \qquad [\ (1)\ \text{वरून}]$$

$$= <v,v> - \frac{\overline{<v,u>}}{\|u\|^2}.<v,u>$$

$$= \|v\|^2 - \frac{|<v,u>|^2}{\|u\|^2} \qquad [\because \bar{z}.z = |z|^2]$$

आता $\|w\|^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|v\|^2\|u\|^2 - |<v,u>|^2}{\|u\|^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|^2\|v\|^2 - |<u,v>|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|\|v\| \geq |<u,v>| \qquad [\text{वर्गमूळ दोन्ही बाजूंनी घेऊन}]$$

किंवा $$|<u,v>| \leq \|u\|\|v\|$$

टिप्पणी: समजा $u = (a_1, a_2)$ आणि $v = (b_1, b_2)$ हे c^2 चे कोणताही सदस्य आहेत.
परिभाषित करा $<u,v> = u.v = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2}$ ही C^2 वरील इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे.

2. त्रिकोणाची असमानता (Triangle Inequality)

विधान: समजा V एक इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे, तर

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|.$$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= <u+v, u+v> \\
&= <u, u+v> + <v, u+v> \\
&= <u,u> + <u,v> + <v,u> + <v,v> \\
&= \|u\|^2 + <u,v> + \overline{<u,v>} + \|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\text{Re}<u,v> \quad \text{येथे Re}<u,v> = <u,v> \text{ चा वास्तविक भाग} \\
&\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\
&\qquad [\because \text{Re}<u,v> \le |<u,v>| \text{ आणि } |<u,v>| \le \|u\|\|v\|] \\
&\le [\|u\| + \|v\|]^2
\end{aligned}$$

किंवा $\|u+v\|^2 \le [\|u\| + \|v\|]^2$

अशा प्रकारे $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

5.6.3 ऑर्थोगोनल व्हेक्टर (Perpendicular Vector)

समजा V एक इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे. एक व्हेक्टर $u \in V$ ला $v \in V$ चा ऑर्थोगोनल असे म्हणतात जर $<u,v> = 0$

5.6.4 ऑर्थोनॉर्मल व्हेक्टर

एका इनर प्रॉडक्ट स्पेस V चे दोन व्हेक्टर u आणि v हे ऑर्थोनॉर्मल असल्याचे म्हटले जाते जर

$i. <u,v> = 0$

$ii.$ प्रत्येक व्हेक्टर u आणि v चे नॉर्म 1 आहे.

टिपण्णी: $i. 0 \perp u \forall u \in V$

$ii. u \perp u, u = 0$ फक्त आणि फक्त $u \in V$

iii. $u \perp v \Rightarrow v \perp u$ for $u, v \in V$

iv. $u \perp v \Rightarrow \alpha u \perp v$ कोणत्याही स्केलरसाठी $\alpha \in F$ आणि $u, v \in V$.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.32. जर व्हेक्टर $u_1 = (1, 2i, i), u_2 = (0, 1+i, 1), u_3 = (2, 1-i, i) \in C^3$ असल्यास तर

i. प्रत्येक व्हेक्टर u_i चे नॉर्म (लांबी) शोधा.

ii. दर्शवा की व्हेक्टर $v = (1 - i, -1, 1 - i)$ हा u_1 आणि u_2 दोन्हीसाठी ऑर्थोगोनल आहे.

iii. u_1 आणि u_3 दोन्हीसाठी ऑर्थोगोनल असलेला व्हेक्टर मिळवा.

उकल. i. व्हेक्टर u_i चे नॉर्म दिले आहे

$$\|u_1\| = \sqrt{<u_1, u_1>} = \sqrt{(1)(1)+(2i)(-2i)+(i)(-i)}$$
$$= \sqrt{6}$$
$$\|u_2\| = \sqrt{<u_2, u_2>} = \sqrt{0+(1+i)(1-i)+(1)(1)}$$
$$= \sqrt{3}$$
$$\|u_3\| = \sqrt{<u_3, u_3>} = \sqrt{(2)(2)+(1-i)(1+i)+(i)(-i)}$$
$$= \sqrt{7}$$

[$\because$ i. C_3 मध्ये जर $u=(a,b,c)$ तर $<u,u>= a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}$]

ii. व्हेक्टर v हा u_1 आणि u_2 ला ऑर्थोगोनल आहे जर $<v,u_1>=0$ आणि $<v,u_2>=0$

आता $<v,u_1>=(1-i)(1)+(-1)(-2i)+(1-i)(-i)$

$$=1-i+2i-i-1=0$$

तसेच $<v,u_2>=0$ (विद्यार्थी तपासू शकतो)

iii. समजा $u=(a,b,c)$ एक व्हेक्टर आहे, जे u_1 आणि u_3 दोन्हीसाठी ऑर्थोगोनल आहे.

$\Rightarrow$ $<u,u_1>=0, <u,u_3>=0$

$\Rightarrow$ $a(1)+b(-2i)+c(-i)=0$

आणि $a(2)+b(1+i)+c(-i)=0$

किंवा $a-2ib-ic=0$ -----(1)

आणि $2a+(1+i)b-ic=0$ ----- (2)

(1)आणि (2) सोडवून, आम्हाला मिळते

$$\frac{a}{-3+i}=\frac{b}{-i}=\frac{c}{1+5i}$$

अशा प्रकारे, u_1 आणि u_3 या दोन्हीसाठी व्हेक्टर $u=(-3+i,-i,1+5i)$ ऑर्थोगोनल आहे.

उदाहरण 5.33. समजा $u=(1,2,-1), v=(2,1,4), w=(3,-2,-1)$ हे R^3 मध्ये आहेत तर स्टँडर्ड यूक्लिडीयन इनर प्रॉडक्ट स्पेस अंतर्गत R^3 साठी ऑर्थोगोनल संच तयार करतात परंतु ऑर्थोनॉर्मल संच तयार करत नाहीत हे दाखवा. त्यांना व्हेक्टरच्या संचामध्ये रूपांतरित करा जे स्टँडर्ड यूक्लिडीयन इनर प्रॉडक्ट स्पेस अंतर्गत R^3 साठी ऑर्थोनॉर्मल संच तयार करतात.

उकल. i. दिलेले आहे $u=(1,2,-1), v=(2,1,4), w=(3,-2,-1)$ तर

$$<u,v>=(1)(2)+(2)(1)+(-1)(4)$$
$$=0$$

आणि $<v,w>=(2)(3)+(1)(-2)+(4)(-1)$

$$=0$$

शिवाय $\|u\|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}\neq 1$

म्हणून दिलेले व्हेक्टर ऑथोनॉर्मल सेट बनवत नाहीत.

ii. आता,
$$\frac{u}{\|u\|}=\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1+4+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

आणि
$$\frac{v}{\|v\|}=\frac{(2,1,4)}{\sqrt{4+1+16}}=\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

आणि
$$\frac{w}{\|w\|}=\frac{(3,-2,-1)}{\sqrt{9+4+1}}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

म्हणून, ऑर्थोनॉर्मल व्हेक्टर चा संच आहे

$$\left(\frac{1}{\sqrt{~}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)\text{ आणि }\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$$

5.7 ग्रॅम- शिमिड्ट ऑर्थोगोनलायझेशन प्रोसेस (GRAM-SCHMIDT ORTHOGONLIZATION PROCESS)

विधान: प्रत्येक मर्यादित मितीय (dimension)इनर प्रॉडक्ट च्या स्पेसला ऑर्थोनॉर्मल बेसिस असतो.

सिद्धता: समजा V(F) हा n डायमेन्शन असलेला इनर प्रॉडक्ट स्पेस आहे.

समजा $S=\{u_1,u_2,u_3,....u_n\}$ हा V चा बेसिस आहे.

प्रत्येक ऑर्थोनॉर्मल संच हा लिनिअरली इंडिपेण्डण्ट असल्याने आणि dim $V = n$, V चा ऑर्थोगोनल बेसिस तयार करणे पुरेसेआहे.

आता, S हा एक बेसिस लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहे म्हणून.

$$u_i \neq 0 \text{ करिता } i=1,2,3,....n$$

समजा $v_1=u_1$ परिभाषित करा $v_2=u_2-\dfrac{<u_2,v_1>v_1}{\|v_1\|^2}$

आता $\quad v_2=0$

$$\Rightarrow \quad u_2=\frac{<u_2,v_1>v_1}{\|v_1\|^2}= \quad v_1 \text{ चे स्केलर मल्टिपल}$$

किंवा $\quad u_2= u_1$ चे स्केलर मल्टिपल $\qquad [\because v_1=u_1]$

$\Rightarrow \quad (u_1,u_2)$ लिनिअरली डिपेण्डण्ट आहे.

जे एक विरोधाभास आहे $\{u_1,u_2\}$ हा लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट संच S चा उपसंच लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहे म्हणून.

अशा प्रकारे $\quad v_2 \neq 0$

तेव्हा
$$<v_2,v_1> \;=<u_2-\frac{<u_2,v_1>v_1}{\|v_1\|^2},v_1>$$

$$=\left\langle u_2-\frac{\langle u_2,u_1\rangle u_1}{\|u_1\|^2},u_1\right\rangle \qquad (\because v_1=u_1)$$

$$=< u_2, u_1 > - \frac{< u_2, u_1 >}{\|u_1\|^2} < u_1, u_1 > \qquad [\because \langle u_1, u_1 \rangle = \|u_1\|^2]$$

$\Rightarrow$ $$<v_2, v_1> = <u_2, u_1> - <u_2, u_1>$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ v_2 हा v_1 चा ऑर्थोगोनल आहे आणि म्हणून (v_1, v_2) हा ऑर्थोगोनल सेट आहे.

परिभाषित करा $$v_3 = u_3 - \frac{< u_3, v_1 > v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{< u_3, v_2 > v_2}{\|v_2\|^2}$$
$$= u_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{< u_3, v_i > v_i}{\|v_i\|^2}$$

पुन्हा $v_3 \neq 0$ म्हणून $v_3 = 0 \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहे.

परंतु $\{u_1, u_2, u_3\}$ हे S चे लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट उपसंच असल्याने लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहे.

तेव्हा $$<v_3, v_1> = <u_3 - \frac{< u_3, v_1 > v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{< u_3, v_2 > v_2}{\|v_2\|^2}, v_1>$$
$$=< u_3, v_1 > - \frac{< u_3, v_1 >< v_1, v_1 >}{\|v_1\|^2} - \frac{< u_3, v_2 >< v_2, v_1 >}{\|v_2\|^2}$$
$$= <u_3, v_1> - <u_3, v_1> - 0 = 0$$
$$\left[\because < v_1, v_1 > = \|v_1\|^2 \quad \text{आणि} < v_2, v_1 > = 0\right]$$

अशाच प्रकारे, आपण हे लक्षात घेतो

$$< v_3, v_2 > = 0 = < v_3, v_1 >$$

अशा प्रकारे $< v_i, v_j > \neq 0$ जेथे $i \neq j$ आणि $i, j = 1, 2, 3.....$

अशा प्रकारे, आपण n व्हेक्टर चा ऑर्थोगोनल सेट $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ तयार करू शकतो.

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \qquad \text{घ्या}$$

मग $\{w_1, w_2, ...w_n\}$ हा V मध्ये व्हेक्टर चा ऑर्थोनॉर्मल संच आहे.

इनर प्रॉडक्ट स्पेसमधील (inner product space) ऑर्थोनॉर्मल व्हेक्टरचा संच हा लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट संच असल्याने, $\{w_1, w_2, ...w_n\}$ लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत. तसेच dim $V = n$, अशा प्रकारे $\{w_1, w_2, ...w_n\}$ V चा ऑर्थोनॉर्मल बेसिस बनवते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.34. $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ आणि $u_3 = (1,2,1)$ द्वारे उत्पन्न केलेल्या R^3 चा बेसिस बदलण्यासाठी ग्रॅम स्मिथ ऑर्थोगोनललायझेशन प्रक्रिया वापरा.

i. ऑर्थोगोनल बेसिस मध्ये (v_1, v_2, v_3)

ii. ऑर्थोगोनल बेसिस मध्ये (w_1, w_2, w_3)

उकल. समजा $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ आणि $u_3 = (1,2,1)$ तर

$$\|u_1\|^2 = 3, \|u_2\|^2 = 2, \|u_3\|^2 = 6$$

आणि $\langle u_2, v_1\rangle = 0, \langle u_3, u_1\rangle = 4$ आणि $\langle u_3, u_2\rangle = 1$

परिभाषित करा $v_1 = u_1 = (1,1,1)$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle v_1}{\|v_1\|^2} = u_2 - 0$$

$$v_2 = u_2 = (-1,1,0)$$

तसेच
$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{\langle u_3, v_2\rangle v_2}{\|v_2\|^2}$$

$$= u_3 - \frac{4}{3}u_1 - \frac{u_2}{2}$$

$$= (1,2,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0)$$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

म्हणून ऑर्थोगोनल बेसिस असा आहे $\left\{(1,1,1), (-1,1,0), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$

ii.
$$\|v_1\| = \|u_1\| = \sqrt{3}$$

$$\|v_2\| = \|u_2\| = \sqrt{2}$$

$$\|v_3\| = \sqrt{\langle v_3, v_3\rangle}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right)} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

अशा प्रकारे ऑर्थोनॉर्मल बेसिस $\{w_1, w_2, w_3\}$ आहे.

$$\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\} = \left\{\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right\}$$

उदाहरण 5.35. समजा V हा व्हेक्टर स्पेस R च्या R[x] मधील बहुपदी ज्यांची डिग्री ≤ 2 वर आहे. V वर इनर प्रॉडक्ट असा परिभाषित करा कि

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

जर $\{1, x, x^2\}$ हा V चा बेसिस असेल तर V चा R वर एक ऑर्थोनॉर्मल बेसिस शोधा.

उकल. येथे $\{1, x, x^2\}$ हा V चा बेसिस आहे.

समजा $u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2$

V चा R वर ऑर्थोनॉर्मल बेसिस R, मिळवण्यासाठी आपण ग्रॅम स्मिथ ऑर्थोगोनललायझेशन प्रक्रिया लागू करूया.

आता
$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1 \rangle = \int_0^1 1.1\ dx$$
$$= [x]_0^1 = 1$$

तसेच
$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2 \rangle = \int_0^1 x.x\ dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

आणि
$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3 \rangle$$
$$= \int_0^1 x^2.x^2\ dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

घ्या
$$v_1 = u_1$$

$\therefore$
$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} v_1$$
$$= x - \frac{\left[\int_0^1 x.1\ dx\right]}{1}$$
$$= x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = x - \frac{1}{2}$$

त्याचप्रमाणे
$$\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle$$
$$= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx$$
$$= \frac{1}{12}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, u_1 \rangle v_1}{\|v_1\|^2} - \frac{\langle u_3, u_2 \rangle v_2}{\|v_2\|^2}$$
$$= x^2 - \frac{\left[\int_0^1 x^2.1\ dx\right].1}{1} - \frac{\left[\int_0^1 x^2.\left(x - \frac{1}{2}\right) dx\right]\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{12}}$$

$$= \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right)$$

अशा प्रकारे, $\|v_3\|^2 = \langle v_3, v_3 \rangle$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{36}x \right]_0^1 = \frac{1}{180}$$

ठेवा $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ आणि $w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$

म्हणून आवश्यक असलेला ऑर्थोनॉर्मल बेसिस आहे,

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ 1, \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2} \right), 3\sqrt{20}\left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \right\}$$

अभ्यास 5.4

1. $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$ आणि $(0,3,4)$ यांनी उत्पन्न केलेल्या R^3 च्या स्टँडर्ड इंनर प्रॉडक्ट संदर्भात सबस्पेस साठी ऑर्थोनॉर्मल बेसिस मिळवा.
2. व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ आणि $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहेत हे दाखवा.
3. समजा V हा व्हेक्टर स्पेस R च्या $R[x]$ मधील बहुपदी ज्यांची डिग्री ≤ 2 वर आहे. V वर इनर प्रॉडक्ट असा परिभाषित करा कि $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{g(x)\, dx}$

   जेथे $\langle f(x), g(x) \rangle \in V$. ग्रॅम स्मिथ ऑर्थोगोनललायझेशन प्रक्रियेचा वापर करून V चा ओर्थोगोनल बेसिस शोधा.
4. संच $u_1 = (1,2,1)$, $\mathrm{u}_2 = (2,1,4)$ आणि $u_3 = (4,5,6)$ वरून ऑर्थोनॉर्मल व्हेक्टर्स चा संच तयार करा.
5. k चे मूल्य असे शोधा कि पुढील राशी इंनर प्रॉडक्ट तयार करेल.

   $$(u, v) = u_1 v_1 - 3u_1 v_2 - 3u_2 v_1 + k u_2 v_2$$

   येथे $u = (u_1, v_1)$ आणि $v = (u_2, v_2)$ हे R^2 मध्ये आहेत.
6. व्हेक्टर $\mathrm{V} = (\mathrm{x, y, z}) \in \mathrm{R}^3$ असा मिळवा जेणेकरून V हा $(1, 0, 0)$ तसेच $(-1, 2, 0)$ला इंनर प्रॉडक्ट च्या संदर्भात लंब (perpendicular) असेल.
7. समजा $u = (1+i, i-1)$, $\mathrm{v} = (1+2i, 1-i, 2i)$, तर शोधा $\langle u, v \rangle$ आणि $\langle v, u \rangle$

   $\langle u, v \rangle$ आणि $\langle v, u \rangle$ हे बरोबर आहेत का? तसेच पडताळणी करा.

   i. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ii. $\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle u, v \rangle$

   iii. $\langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle = 2\,\mathrm{Im}\langle u, v \rangle$

उत्तरे

1. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0)\right\}$

3. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x,\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3x^2-1\right)\right\}$

4. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{93}},\frac{-5}{\sqrt{93}},\frac{8}{\sqrt{93}}\right),\left(\frac{7}{\sqrt{62}},\frac{-2}{\sqrt{62}},\frac{-3}{\sqrt{62}}\right)\right\}$

5. $k>9$ 6. $(0,0,z), z\in R$ 7. $\langle u,v\rangle = 2+2i,\ \langle v,u\rangle = 2-2i$

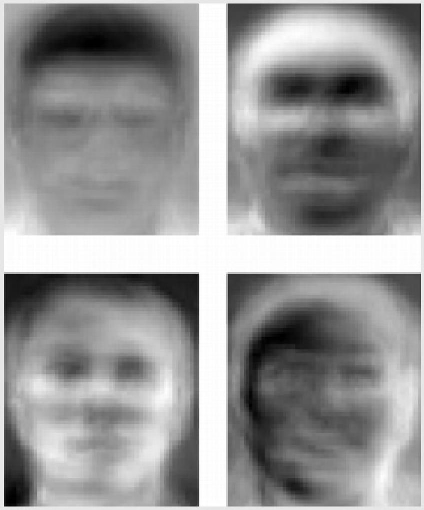
मनोरंजक माहिती

- रेषीय बीजगणिताच्या भाषेत विशेष सापेक्षता प्राप्त करणे अधिक नैसर्गिक आहे. खरं तर, आइन्स्टाईनची दुसरी पोस्ट्युलेट खरोखरच म्हणते की “प्रकाश हा लॉरेन्ट्झ ट्रान्सफॉर्मचा एक आइजेन व्हेक्टर आहे.” हा दस्तऐवज संपूर्ण व्युत्पत्तीवर तपशीलवार आहे. https://people.math.rochester.edu/faculty/chaessig/students/ Adams(S10).pdf
- **स्पेक्ट्रल क्लस्टरिंग.** क्लस्टरिंग आधुनिक माहिती विश्लेषणाचा एक अत्यंत महत्वाचा भाग आहे मग ते वनस्पती आणि जीवशास्त्र, वैद्यकीय इमेजिंग, व्यवसाय आणि विपणन असो, कि फेसबुकवरील फील्डमधील संबंध समजून घेणे किंवा गुन्हेगारी असो. हे लोकांना गोंगाट करणा -या माहिती संचामध्ये महत्वाची उपप्रणाली किंवा नमुने शोधण्याची परवानगी देते. अशीच एक पद्धत म्हणजे स्पेक्ट्रल क्लस्टरिंग जे नेटवर्कच्या आलेखाचे आइजेन मूल्य वापरते. लॅप्लॅशियन मॅट्रिक्सच्या दुसऱ्या सर्वात लहान आइजेन मूल्याचे आइजेन व्हेक्टर देखील आपल्याला नेटवर्कमधील दोन सर्वात मोठे क्लस्टर शोधण्याची परवानगी देते
- **परिमाण कमी / पीसीए.** मुख्य घटक $A'A$ च्या सर्वात मोठ्या आइजेन मूल्याशी संबंधित आहे आणि यामुळे लहान आकारमान अतिप्रतलावर (हायपरप्लेनवर) कमीतकमी स्क्वेअर प्रोजेक्शन मिळते आणि आइजेन व्हेक्टर अतिप्रतलाचे (हायपरप्लेनचे) अक्ष बनतात. परिमाण कमी करणे हे मशिन लर्निंग आणि डेटा विश्लेषणा मध्ये अत्यंत उपयुक्त आहे कारण यामुळे एखाद्या व्यक्तीला माहितीमधील बहुतांश फरक कोठून आला हे समजून घेता येते.
- **सहयोगी पूर्वानुमानासाठी कमी दर्जाचे घटक.** तुम्ही अद्याप न पाहिलेल्या चित्रपटासाठी तुम्ही कोणती दर्जा द्याल याचा अंदाज नेटफ्लिक्स करतो. हे SVD वापरते आणि $A'A$ चे सर्वात लहान आइजेन मूल्य गृहीत धरत नाही.
- **गूगल पृष्ठ रँक अल्गोरिदम.** इंटरनेटच्या आलेखाचा सर्वात मोठा आइजेन व्हेक्टर दर्शवितो की पृष्ठांची क्रमवारी कशी आहे.

वास्तविक जीवनामध्ये उपयोग

- मूलभूत पुनरुत्पादन क्रमांक (R_0) हा संसर्गजन्य रोग कसा पसरतो याच्या अभ्यासातील मूलभूत संख्या आहे. जर एखाद्या संसर्गजन्य व्यक्तीला पूर्णपणे संवेदनाक्षम लोकांमध्ये ठेवले तर R_0 ही एक सामान्य संसर्गजन्य व्यक्ती संक्रमित करणाऱ्या लोकांची सरासरी आहे. संक्रमणाच्या पिढीची वेळ tG म्हणजे एका व्यक्तीपासून संक्रमित होण्यापासून दुसऱ्या व्यक्तीला संसर्ग होण्याचा काळ. विषम लोकसंख्येमध्ये, पुढच्या पिढीचे मॅट्रिक्स हे निर्धारित करते की लोकसंख्येतील किती लोक tG काळ पूर्ण झाल्यानंतर संक्रमित होतील. तर R_0 हा पुढील पिढीच्या मॅट्रिक्सचा सर्वात मोठा आइजेन मूल्य आहे. अशा प्रकारे कोरोना विषाणूच्या संक्रमणाची गणना केली जात आहे.
- इमेज प्रोसेसिंगमध्ये, चेहऱ्यावर प्रक्रिया केलेल्या प्रतिमा व्हेक्टर म्हणून पाहिल्या जाऊ शकतात ज्यांचे घटक प्रत्येक पिक्सेलची चमक आहेत. या व्हेक्टर स्पेसचे डायमेन्शन पिक्सेलची संख्या आहे. चेहऱ्याच्या सामान्यीकृत चित्रांच्या मोठ्या संचाशी संबंधित कोव्हरियन्स मॅट्रिक्सच्या आइजेन व्हेक्टर ला आइजेनफेसेस म्हणतात; हे मुख्य घटक विश्लेषणाचे उदाहरण

आहे. त्यापैकी काही चे रेषीय संयोजन म्हणून कोणत्याही चेहऱ्याची प्रतिमा व्यक्त करण्यासाठी ते खूप उपयुक्त आहेत. बायोमेट्रिक्सच्या चेहर्यावरील ओळख शाखेत, आइजेनफेसेस ओळखण्याच्या हेतूने चेहऱ्यांना माहिती संक्षेपण लागू करण्याचे साधन प्रदान करते. हाताच्या हावभावांचे निर्धारण करणाऱ्या आइजेन दृष्टी प्रणालीशी संबंधित संशोधन देखील केले गेले आहे



आकृती क्रमांक 5. 1

- या संकल्पनेप्रमाणेच, एखाद्या भाषेतील शब्दासारख्या विशिष्ट उच्चारांच्या मानवी उच्चारांमध्ये परिवर्तनशीलतेची सामान्य दिशा आइजेनव्हॉईस दर्शविते. अशा आइजेनव्हॉईसच्या रेषीय संयोजनावर आधारित या शब्दाचा नवीन आवाज उच्चार तयार करता येईल. या संकल्पना स्पीकर अनुकूलनासाठी स्वयंचलित भाषण ओळख प्रणालीमध्ये उपयुक्त आढळल्या आहेत.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत NPTEL)

Inner Product and Orthogonality

Gram Schmidt Orthogonalization

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेले प्रश्न

उदाहरण 1. विचारात घ्या 5×5 मॅट्रिक्स
$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&6\\5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\end{bmatrix}$$

हे दिले आहे की A चे फक्त एक वास्तविक आइजेन मूल्य आहे, तर A चे ते वास्तविक आइजेन मूल्य शोधा.

उकल. कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण असे आहे.

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

क्रिया करून $R_1 \to R_1+R_2+R_3+R_4+R_5$,

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

आता, सामान्य घेऊन

$$(15-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(15-\lambda)\ |\text{मॅट्रिक्स}| = 0$$

$$\Rightarrow \quad 15-\lambda=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=15$$

$\therefore$ 15 हे A चे वास्तविक आइजेन मूल्य आहे.

दुसरा दृष्टिकोन

जर सर्व पंक्ती किंवा स्तंभांची बेरीज समान असेल तर ती बेरीज मॅट्रिक्सचे आइजेन मूल्य असते.

मॅट्रिक्स A मध्ये, सर्व पंक्तींची बेरीज = 15

$\therefore$ 15 हे A चे वास्तविक आइजेन मूल्य आहे.

उदाहरण 2. $A=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ दिले आहे तर A^3 चे मूल्य काय असेल.

उकल. $A=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ दिले आहे.

कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण असे आहे.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad (-5-\lambda)(-\lambda)+6=0$$

$$\Rightarrow \quad 5\lambda+\lambda^2+6=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2+5\lambda+6=0$$

प्रत्येक मॅट्रिक्स त्याच्या कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरणाचे समाधान करते (कॅले हॅमिल्टन प्रमेय) म्हणून,

$$\therefore \quad A^2+5A+6I=0$$

$$\Rightarrow \quad A^2=-5A-6I \qquad (1)$$

दोन्ही बाजूला A ने गुणाकार करून आपल्याला मिळेल,

$$A^3=-5A^2-6AI$$

$$A^3=-5(-5A-6I)-6AI \qquad ((1) \text{ वरून})$$

$$A^3=25A+30I-6AI$$

$$A^3=19+30I$$

उदाहरण 3. एक वास्तविक 4×4 मॅट्रिक्स A हे समीकरण $A^2=I$ चे समाधान करते, येथे I हा 4×4 अविकारक (अडेन्टिटी) मॅट्रिक्स आहे. A चे धन (पॉजिटीव्ह) आइजेन मूल्य शोधा.

उकल. A हे $A^2=I$ या समीकरणाचे समाधान करत असल्याने

$\therefore$ A हे अंतर्भूत (इन्व्होल्यूटरी) मॅट्रिक्स आहे आणि अंतर्भूत (इन्व्होल्यूटरी) मॅट्रिक्सची आइजेन मूल्ये ± 1 असतात.

$\therefore$ तर, A चे धन आइजेन मूल्य $=1$.

उदाहरण 4. विचारात घ्या मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, जिथे a आणि b या वास्तविक संख्या आहेत आणि $b\neq 0$.

a. A चे सर्व आइजेन मूल्ये शोधा.

b. A च्या प्रत्येक आइजेन मूल्यासाठी, आइजेन स्पेस E_λ निश्चित करा.

c. नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स S आणि डायगोनल मॅट्रिक्स D असे शोधून मॅट्रिक्स A डायगोनलाईझ करा कि $S^{-1}AS=D$.

उकल. a. मॅट्रिक्स A चे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण असे आहे.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad (a-\lambda)^2+b^2=0$$

$$\Rightarrow \quad (a-\lambda)^2=-b^2$$

$$\Rightarrow \quad (a-\lambda)=\pm bi$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=a\pm bi$$

अशा प्रकारे, A ची आइजेन मूल्ये $a\pm bi$ आहेत.

b. आइजेन मूल्य $a+ib$ च्या संदर्भात आइजेन व्हेक्टर .

$$[A-(a+ib)I]X=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a-(a+ib) & -b \\ b & a-(a+ib) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -bi & -b \\ b & -bi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\quad -bix_1 - bx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -ix_1$

$\quad bx_1 - bix_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = ix_2$

प्रणालीचे सामान्य समाधान असे आहे

$$x_1 = ix_2$$

म्हणून , $\quad E_{a+ib} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

आइजेन मूल्य a-ib च्या संदर्भात आइजेन स्पेस

$$[A-(a-ib)I]X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a-(a-ib) & -b \\ b & a-(a-ib) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} bi & -b \\ b & bi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\quad bix_1 - bx_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = ix_1$

आणि $\quad bx_1 + bix_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -ix_2$

प्रणालीचे सामान्य समाधान असे आहे

$$x_2 = ix_1$$

E_{a-ib} म्हणजेच आइजेन मूल्य $a-ib$ च्या संदर्भात आइजेन स्पेस $= \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

c. आता, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ आणि $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत आणि C^2 मध्ये विस्तारलेले आहेत, म्हणून, C^2 साठी आइजेन बेसिस तयार करते .

$\therefore$
$$S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$|S| = i^2 - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$S^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

$\therefore$
$$D = S^{-1}AS$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} ai-b & -bi-a \\ -a+bi & b+ai \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} ai^2 - bi - bi - a & ai - b - bi^2 - ai \\ -ai + bi^2 + b + ai & -a + bi + bi + ai^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -2(a+bi) & 0 \\ 0 & -2(a-bi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+bi) & 0 \\ 0 & (a-bi) \end{bmatrix}$$

जो डायगोनल मॅट्रिक्स आहे ज्याचे आइजेन मूल्ये $a+ib$ आणि $a-ib$ आहेत.

उदाहरण 5. समजा A आणि B हे $n \times n$ ऑर्डरचे मॅट्रिक्स आहेत. तसेच A आणि B मध्ये समान आइजेन मूल्ये $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ समान संबंधित आइजेन व्हेक्टर $X_1, X_2, ..., X_n$ लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहेत, तर $A = B$.

उकल. समजा A आणि B मध्ये n लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आइजेन व्हेक्टर $X_1, X_2, ..., X_n$ आहेत आणि ते डायगोनलायझेबल आहेत.

जर आपण $S = [x_1, x_2, ..., x_n]$ ठेवले तर S हा इन्व्हर्टिबल होईल आणि आपल्याला मिळेल

$$S^{-1}AS = D \text{ आणि } S^{-1}BS = D$$

येथे D हा डायगोनल मॅट्रिक्स आहे ज्याच्या डायगोनल एन्ट्रीज आइजेन मूल्ये आहेत

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .... & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_3 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

म्हणून त्याप्रमाणे $\qquad S^{-1}AS = D = S^{-1}BS$

आणि म्हणून $\qquad A = B$

उदाहरण 6. a. समजा u आणि v हे अनुक्रमे आइजेन मूल्ये 1 आणि 3 शी संबंधित A चे आइजेन व्हेक्टर आहेत. $u+v$ हे A चे आइजेन व्हेक्टर नाही हे सिद्ध करा.

b. समजा A आणि B या अशा वास्तविक मॅट्रिक्स आहेत की A च्या प्रत्येक पंक्तीची बेरीज 1 आणि B च्या प्रत्येक पंक्तीची बेरीज 2 आहे. तर 2 हे AB चे आइजेन मूल्य आहे हे दाखवा.

उकल. u आणि v हे अनुक्रमे आइजेन मूल्ये 1 आणि 3 शी संबंधित A चे आइजेन व्हेक्टर आहेत हे दिलेले आहे.

म्हणून
$$Au = 1u$$
$$Av = 3v$$

आता,
$$A(u+v) = Au + Av$$
$$= 1u + 3v$$

म्हणून $(u + v)$ हे A चे आइजेन व्हेक्टर नाही.

b. स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 7. समजा A हा 3×3 वास्तविक नॉन-डायगोनल मॅट्रिक्स आहे आणि $A^{-1} = A$ तर दाखवा की

$$tra(A) = -\det(A) = \pm 1.$$

उकल. दिलेले आहे $\qquad A^{-1} = A \quad \Rightarrow \quad A^2 = I$

तर, A^2 चे सर्व आइजेन मूल्ये 1 आहेत

तसेच, $$A^2 - I = 0$$

किंवा $$(A-I)(A+I) = 0$$

तर, A चे दोन आइजेन मूल्ये $+1$ आणि -1 आहेत.

A^2 चे आइजेन मूल्ये A च्या आइजेन मूल्यांच्या वर्गाबरोबर असतात म्हणून.

तर, A चे आइजेन मूल्ये एकतर $+1$ किंवा -1 होईल.

तर, तिसरे आइजेन मुल्य $+1$ किंवा -1 असू शकते.

मॅट्रिक्सचा डिटर्मिनंट हा त्याच्या आइजेन मूल्यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

तर, डिटरमिनन्ट ± 1 असू शकतो.

तिसरे आइजेन मुल्य $+1$ असल्यास, $tr(A) = 1,\ \det(A) = -1$

तिसरे आइजेन मुल्य -1 असल्यास, $tr(A) = -1,\ \det(A) = 1$

म्हणून, $tra(A) = -\det(A) = \pm 1$

सारांश

1. समजा n कोटिका असलेली स्क्वेयर मॅट्रिक्स फिल्ड F वर असेल आणि जर असा नॉन झिरो कॉलम व्हेक्टर $X \in F^n$ अस्तित्वात असेल कि $AX = \lambda X$ काही $\lambda \in F$ साठी तर X ला λ शी संबंधित A चा आइजेन व्हेक्टर म्हणतात आणि λ ला X शी संबंधित A चे आइजेन मूल्य म्हणतात.
2. आइजेन मूल्यांची बेरीज = ट्रेस(A)
   आइजेन मूल्यांचा गुणाकार = $\det(A)$
3. n × n कोटिका असलेली मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल करण्यायोग्य आहे फक्त जर त्यात n रेषीय अनधीन आइजेन व्हेक्टर असतील.
4. प्रत्येक मर्यादित आयामी इनर प्रॉडक्ट स्पेसला ऑर्थोनॉर्मल बेसिस असतो.
5. जर $\langle u, v\rangle = 0$ असेल तर व्हेक्टर $u \in V$ हा $v \in V$ सोबत ऑर्थोगोनल आहे असे म्हणतात.
6. दोन व्हेक्टर u आणि v ला ऑर्थोनॉर्मल म्हणतात जर (i) $\langle u, v\rangle = 0$ (ii) प्रत्येक व्हेक्टर u आणि v चा नॉर्म एक असेल.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. समजा $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ हा $P + Q$ म्हणून व्यक्त केला आहे , जेथे P सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे आणि Q विषमीत मॅट्रिक्स आहे, तर खालीलपैकी कोणते बरोबर आहे?

   a. $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ c. $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ d. $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

2. ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे कॉलम खालीलपैकी काय तयार करतात?

   a. सदिशांचा ऑर्थोगोनल संच b. ऑर्थोनॉर्मल सदिशांचा संच

   c. एक रेषीय इनडिपेन्डन्टता संच d. वरील सर्व

3. $\dim V = n$ साठी $T : V \to V$ रेषीय परिक्रमी आहे आणि T ला n विविध आइजेन मूल्ये आहेत तर

a. T व्यस्तक्षम असणे आवश्यक आहे. b. T डायगोनलायझेबल असणे आवश्यक आहे

c. T व्यस्तक्षम आणि डायगोनलायझेबल असणे आवश्यक आहे. d. T हा डायगोनलायझेबल नाही

4. समजा R^2 वर T हा व्हेक्टर स्पेस आहे आणि V द्वारे परिभाषित केलेले T रेखीय परिवर्तन आहे

$T(x, y) = (x + y, y)$.नंतर, T चे कॅरॅक्टरिस्टिक बहुपद आहे

a. $1-3x+x^2$ b. $2-2x$ c. $1-2x+x^2$ d. $1+x^2$

5. समजा $T : C^3 \to C^3$ हे $T(x, y, z) = (x + y + z, -x - y, -x - z)$ याने परिभाषित केलेले आहे आणि M हि मानक आदेशित बेसिसचा संदर्भात मॅट्रिक्स आहे. तर M ची आइजेन मूल्ये हि आहेत

a. -1, i, -i b. 1, i, -i c. 1, i, i d. -1, -i, -i

6. आइजेन व्हेक्टर $(1,-1)^T$ आणि $(2,1)^T$ च्या संदर्भात मॅट्रिक्स M ला आइजेन मूल्ये अनुक्रमे 1 आणि 4 आहेत तर

M हि मॅट्रिक्स खालीलप्रमाणे आहे

a. $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. जर $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ तर मोडल मॅट्रिक्स P अशी आहे

a. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

8. जर $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ची कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे λ_1 आणि λ_2 आहेत तर $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ याची कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे आहेत

a. $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2$ b. $2\lambda_1$ आणि $2\lambda_2$ c. $\frac{1}{\lambda_1}$ आणि $\frac{1}{\lambda_2}$ d. $\lambda_1 + \lambda_2$ आणि $|\lambda_1 - \lambda_2|$

9. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ आणि $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, खालीलपैकी कोनती मॅट्रिक्स शून्य मॅट्रिक्स आहे

a. $A^2 - A - 5I$ b. $A^2 + A - 5I$ c. $A^2 + A - I$ d. $A^2 - 3A + 5I$

10. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्सचे आइजेन मूल्ये आहेत.

a. 1,4 b. -1,2 c. 0,5 d.2,-5

11. खालीलपैकी कोणता मॅट्रिक्सचा एक आइजेन व्हेक्टर आहे

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a. $[1\ -2\ 0\ 0]^T$ *b.* $[0\ 0\ 1\ 0]^T$ *c.* $[1\ 0\ 0\ -2]^T$ *d.* $[1\ -1\ 2\ 1]^T$

12.मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ चे आइजेन व्हेक्टर हे $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ आणि $\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ स्वरूपात लिहिलेले आहेत तर a+b किती असेल

a. 0 *b.* $\frac{1}{2}$ *c.* 1 *d.* 4

13.A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ चे आइजेन व्हेक्टर आहे

a. $[-1\ 1\ 1]^T$ *b.* $[\ 1\ 2\ 1]^T$ *c.* $[1\ -1\ 2\ ]^T$ *d.* $[2\ 1\ -1\ ]^T$

14.खालील मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{bmatrix}$ विचारात घ्या. A चे आइजेन मूल्य 4 आणि 8 असतील तर

a. $x=4, y=10$ *b.* $x=5, y=8$ *c.* $x=-3, y=9$ *d.* $x=-4, y=10$

15.मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ साठी, आइजेन मूल्यांपैकी एक 3 आहे. इतर दोन आइजेन मूल्ये आहेत

a. 2,–5 *b.* 3,–5 *c.* 2, 5 *d.* 3, 5

16. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ द्या, नंतर A ची आइजेन मूल्ये आहेत

a. 2,1, 0 *b.* 2, $(1+i),(1-i)$ *c.* 2, –1,–1 *d.* 1, –1,0

17. खालीलपैकी कोणते मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल नाही?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *b.* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *c.* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *d.* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. व्हेक्टर (–2, 3, 7) चे प्रमाण काय आहे?

a. $\sqrt{60}$ *b.* $\sqrt{62}$ *c.* 7 *d.* $\sqrt{78}$

19. $u=(a_1,a_2)$ आणि $v=(b_1,b_2)$ हे R^2 चे अनियंत्रित सदस्य होऊ द्या, तर खालीलपैकी कोणते $R^2(R)$ वरील इनर प्रॉडक्ट स्पेस नाही.

a. $\langle u,v\rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 4a_2b_2$

b. $\langle u,v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$

c. $\langle u,v\rangle = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$

d. $\langle u,v\rangle = a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 5a_2b_2$

उत्तरे

1. c	2. d	3. b	4. c
5. a	6. d	7. b	8. c
9. c	10. c	11. b	12. b
13. b	14. d	15. b	16. c
17. c	18. b	19. c	

सब्जेक्टिव्ह न सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

1. a, b आणि c ची मूल्ये निश्चित करा जेणेकरून (1, 0, -1) आणि (0, 1, -1) मॅट्रिक्सचे आइजेन व्हेक्टर आहेत

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ a & 3 & 2\\ 3 & b & c\end{bmatrix}$$

2. P, D आणि A ला समान क्रमाने वास्तविक चौरस मॅट्रिक्स असू द्या जसे की P इन्व्हर्टिबल आहे, D डायगोनल आहे आणि D=PAP^{-1}. काही n $\in$ N साठी $A^n=0$ असल्यास, ते A = 0 दर्शवा.
3. A एक n × n वास्तविक सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असू द्या ज्यामध्ये n वेगवेगळे आइजेन मूल्ये आहेत. सिद्ध करा की तेथे ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स P आहे जसे AP = PD जेथे D हा एक वास्तविक डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.
4. संख्या शोधा आणि $\begin{bmatrix}1/3 & x\\ y & z\end{bmatrix}$ पासून ची सर्व 2 × 2 ऑर्थोगोनल मॅट्रिसिस प्रदर्शित करा
5. 3 × 3 ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स P शोधा ज्याच्या पहिल्या दोन ओळी गुणाकार आहेत:
   $a.$ $(1,2,3)$ आणि $(0,-2,3)$ $b.$ $(1,3,1)$ आणि $(1,0,-1)$
6. A ला एक वास्तविक तिरकस-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असू द्या, म्हणजेच $A^T=-A$. नंतर खालील विधाने सिद्ध करा
   a. वास्तविक स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स A चे प्रत्येक आइजेन मूल्ये एकतर 0 किंवा पूर्णपणे काल्पनिक संख्या आहे.
   b. A ची श्रेणी सम आहे.
7. हे सिद्ध करा की जर $A\in M_{n\times n}(F)$ मध्ये n वेगळे आइजेन मूल्ये असतील, तर A हे डायगोनलरेषा आहे.
8. सिद्ध करा की समान आइजेन मूल्ये शी संबंधित दोन वेगळे आइजेन व्हेक्टर नेहमी रेषीय अवलंबून असतात.
9. दिलेल्या 2 × 2 मॅट्रिक्ससाठी $\begin{bmatrix}a & b-a\\ 0 & b\end{bmatrix}$
   a. A ची आइजेन मूल्ये शोधा:
   b. A च्या प्रत्येक आइजेन मूल्य साठी, आइजेन व्हेक्टर निश्चित करा.
   c. मॅट्रिक्स A ला डायगोनलाईझ करा.
   d. डायगोनलाईझेणाचा परिणाम वापरून, प्रत्येक सकारात्मक पूर्णांक k साठी A^k ची गणना आणि सरलीकरण करा.
10. संच $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ रेषीय अवलंबून असू द्या जेव्हा ऑर्थोगोनलची ग्राम-श्मिट प्रक्रिया त्यावर लागू होते तेव्हा काय होते?
11. W = (1, -2, -1, 3) चे R^4 मध्ये व्हेक्टर होऊ द्या. शोधणे:
    a. $W^{\perp}$ साठी ऑर्थोगोनल बेसिस. b. $W^{\perp}$ साठी ऑर्थो-नॉर्मल बेसिस
12. $M=M_{2,2}$ इनर प्रॉडक्ट $<A,B>=tr(B^TA)$ सह घेऊ द्या. ऑर्थोगोनल पूरक साठी ऑर्थोगोनल बेसिस शोधा:
    a. डायगोनल मॅट्रिस b. सिमेट्रिक मॅट्रिक्स

उत्तरे

1. $[a=2, b=4, c=4]$

4. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ येथे $a=\frac{1}{3}$ आणि $b=\frac{\sqrt{8}}{3}$

5. a. $\left[\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}; 0, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{12}{\sqrt{157}}, \frac{-3}{\sqrt{157}}, \frac{-2}{\sqrt{157}}\right]$

b. $\left[\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{-2}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right]$

9. जेव्हा $a \neq b$

a. a, b b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ d. $A^k = \begin{bmatrix} a^k & b^k - a^k \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$

जेव्हा $a = b$

a. a, a b. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $x \neq 0, y \neq 0, x, y \in c$

c. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ d. $A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$

10. जर आधीच्या कालावधीत V_1 हा पहिला व्हेक्टर असेल तर ऑर्थोगोनल प्रक्रियेत संबंधित व्हेक्टर शून्य असेल

11. a. $u_1 = (0,0,3,1), u_2 = (0,5,-1,3), u_3 = (-14,-2,-1,3)$

b. $\frac{u_1}{\sqrt{10}}, \frac{u_2}{\sqrt{35}}, \frac{u_3}{\sqrt{210}}$

12 A a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

प्रकल्प/क्रियाकलाप/प्रात्यक्षिके

प्रकल्प

"डायगोनलाईझेशनमुळे A ची शक्ती ठरवण्यास मदत होते, म्हणजे n ते शक्ती n, जेथे n एक सामान्य पूर्णांक आहे." उदाहरणाच्या मदतीने गणिती तसेच स्पष्ट करा.

क्रियाकलाप

डिफरेंशीअल समीकरणांची एक रेषीय प्रणाली $({dx}/{dt}) = X$, जेथे X एक $m \times m$ डायगोनल मॅट्रिक्स आहे ज्यामध्ये सतत नोंदी असतात, डायगोनलरेषा संकल्पना वापरून कशी सोडवता येते.

प्रात्यक्षिके

मेटलाब मध्ये $A \in R_{n\times n}$ मॅट्रिक्सच्या आइजेन मूल्ये आणि आइजेन व्हेक्टर ची गणना करण्यासाठी पॉवर पद्धत (सामान्यीकरणासह) लागू करा.

अधिक जाणून घ्या

1. जर A हा (2×2) वर $Det(A+I)=1+Det(A)$ सह मॅट्रिक्स असेल तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो

   a. $Det(A)=0$ b. $A=0$ c. $Tr(A)=0$ d. A एकवचनी आहे

2. जर $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, तर A^9 मोजा.

   a. $511A+510I$ b. $309A+104I$ c. $154A+155I$ d. $\exp.(9A)$

3. V जवळजवळ 2 डिग्रीच्या वास्तविक बहुपदांची व्हेक्टर स्पेस असू द्या. एक रेषीय ऑपरेटर परिभाषित करा

   $$T:V\to V \; by \; T(x)=\sum_{j=0}^{i}x^j, i=0,1,2$$

   आइजेन मूल्ये 1 शी संबंधित T^{-1} च्या आइजेन जागेचे परिमाण आहे,

   a. 4 b. 3 c. 2 d. 1

4. जर $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, तर A^{50} आहे

   a. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 50 & 1 & 0\\ 50 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 48 & 1 & 0\\ 48 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 25 & 1 & 0\\ 25 & 0 & 1\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 24 & 1 & 0\\ 24 & 0 & 1\end{bmatrix}$

उत्तरे

1. c 2. a 3. d 4. c

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
2. Dettman, J.W. (1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.
3. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
4. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
5. Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.
6. Hohn, E.Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Philip, Franklin. (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
9. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
10. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
11. Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley , Reading, MA.

CO आणि PO अटेन्मेन्ट तक्ता

या कोर्सच्या समाप्तीनंतर कोर्ससाठीचे कोर्स आऊटकम्स (COs) यांचे प्रोग्रॅम आऊटकम्स सोबत मॅपिंग केले जाऊ शकते आणि त्या अनुषंगाने POs च्या अटेन्मेन्टबाबतीत विश्लेषण केले जाऊ शकते. या संपूर्ण विश्लेषणामार्फत POs च्या अटेन्मेन्टमधील तफावतीवर सुधारण्यासाठीच्या आवश्यक उपाययोजना केल्या जाऊ शकतील.

CO आणि PO अटेन्मेन्ट तक्ता

कोर्स आऊटकम्स	प्रोग्रॅम आऊटकम्सचे अटेन्मेन्ट (1- कमिन परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- घनिष्ट परस्परसंबंध)											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1												
CO-2												
CO-3												
CO-4												
CO-5												
CO-6												

या तक्त्यातील तपशीलानुसार तफावती सुधारता येतील.

सूची (इंडेक्स)