खंड-1

गणित – I

(कॅल्क्युलस आणि लिनियर बीजगणित)

संगणकविरहित अभियांत्रिकी शाखांसाठी

लेखक:

रीना गर्ग

अनुवादक:

डॉ. सत्यवान धोंडगे

श्री. सतीशकुमार बरोट

पुनरावलोकनकर्ता:

प्रशांत पी. महाजन

KHANNA BOOK PUBLISHING CO. (P) LTD.

PUBLISHER OF ENGINEERING AND COMPUTER BOOKS

4C/4344, Ansari Road, Darya Ganj, New Delhi-110002

Phone: 011-23244447-48 **Mobile:** +91-99109 09320

E-mail: contact@khannabooks.com

Website: www.khannabooks.com

Dear Readers,

To prevent the piracy, this book is secured with HIGH SECURITY HOLOGRAM on the front title cover. In case you don't find the hologram on the front cover title, please write us to at contact@khannabooks.com or whatsapp us at +91-99109 09320 and avail special gift voucher for yourself.

Specimen of Hologram on front Cover title:

Moreover, there is a SPECIAL DISCOUNT COUPON for you with EVERY HOLOGRAM.

How to avail this SPECIAL DISCOUNT:

Step 1: Scratch the hologram
Step 2: Under the scratch area, your "coupon code" is available
Step 3: Logon to www.khannabooks.com
Step 4: Use your "coupon code" in the shopping cart and get your copy at a special discount
Step 5: Enjoy your reading!

ISBN: 978-93-5538-037-1
Book Code: UG063MA

MATHEMATICS - I
(Calculus and Linear Algebra)
Vol-1 ***For Non-Computer Science Engineering Branches*** *by* Reena Garg
[Marathi Edition]

First Edition: 2021

Published by:
Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
Visit us at: **www.khannabooks.com**
Write us at: **contact@khannabooks.com**
CIN: U22110DL1998PTC095547

To view complete list of books, Please scan the QR Code: KPH

Printed in India.

प्रो. अनिल डी. सहस्रबुद्धे
अध्यक्ष
Prof. Anil D. Sahasrabudhe
Chairman

सत्यमेव जयते

अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्
(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)
(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)
नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली–110070
दूरभाष : 011–26131498
ई–मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION
(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)
(Ministry of Education, Govt. of India)
Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070
Phone : 011-26131498
E-mail : chairman@aicte-india.org

प्रास्ताविक

शतकानुशतके भारतीय समाजाच्या प्रगती आणि विस्तारामध्ये अभियांत्रिकीने अत्यंत महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावली आहे. भारतीय उपखंडात उगम पावलेल्या अभियांत्रिकी संकल्पनांचा जगावर प्रभाव पडला आहे.

ऑल इंडिया कौन्सिल फॉर टेक्निकल एज्युकेशन (एआयसीटीई) 1987 मध्ये स्थापनेपासून तंत्रशास्त्राच्या विद्यार्थ्यांना शक्य त्या सर्व प्रकारे मदत करण्यात नेहमीच आघाडीवर असते. एआयसीटीईचे ध्येय तांत्रिक शिक्षणाला प्रोत्साहन देणे आणि त्याद्वारे उद्योगाला अधिक उंचीवर नेणे आणि शेवटी आपल्या प्रिय मातृभूमी भारताला आधुनिक विकसित राष्ट्र बनण्याचे आहे. येथे हे नमूद करणे योग्य ठरेल की अभियंते आधुनिक समाजाचा कणा आहेत – चांगले अभियंते, म्हणजे चांगले उद्योग आणि चांगले उद्योग म्हणजे चांगला देश.

NEP 2020 मध्ये प्रादेशिक भाषांमध्ये सर्वांना शिक्षणाची कल्पना मांडण्यात आली आहे, ज्यामुळे प्रत्येक विद्यार्थी पुरेसा सक्षम होईल आणि राष्ट्रीय विकासासाठी योगदान देण्याच्या स्थितीत येईल याची खात्री होईल.

एआयसीटीई गेल्या काही वर्षांपासून अविरतपणे काम करत असलेल्या क्षेत्रांपैकी एक म्हणजे सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांना विविध प्रादेशिक भाषांमध्ये तयार केलेल्या आंतरराष्ट्रीय दर्जाची पुस्तके माफक किमतीमध्ये उपलब्ध करून देणे. ही पुस्तके सोप्या भाषेत, वास्तविक जीवनातील उदाहरणे, समृद्ध सामग्री आणि बदलत्या जगाच्या उद्योगाच्या गरजा लक्षात घेऊनच तयार केलेली आहेत. ही पुस्तके अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञानासाठी एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रम – 2018 नुसार आहेत.

संपूर्ण भारतातील प्रख्यात, उत्तम ज्ञान आणि अनुभव संपन्न प्राध्यापकांनी शैक्षणिक क्षेत्राच्या सोईसाठी ही पुस्तके लिहिली आहेत. एआयसीटीईला विश्वास आहे की ही पुस्तके त्यांच्या समृद्ध सामग्रीसह तांत्रिक विद्यार्थ्यांना अधिक सहजतेने आणि गुणवत्तेसह विषयांवर प्रभुत्व मिळविण्यात मदत करतील.

या अभियांत्रिकी विषयांना अधिक सुबक बनविण्याच्या प्रयत्नांसाठी एआयसीटीई मूळ लेखक, समन्वयक आणि अनुवादकांच्या मेहनतीचे कौतुक करते.

(Anil D. Sahasrabudhe)

ऋणनिर्देश

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान विद्यार्थ्यांसाठी तांत्रिक पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी काळजीपूर्वक नियोजन आणि अंमलबजावणी केल्याबद्दल लेखक एआयसीटीईचे आभारी आहेत.

या पुस्तकाच्या समीक्षक प्रोफेसर गरिमा सिंग यांच्या, हे पुस्तक विद्यार्थ्यांकरीता मैत्रीपूर्ण बनवण्यासाठी आणि कलात्मक पद्धतीने चांगला आकार देण्याच्या मौल्यवान योगदानाची आम्ही मनापासून दखल घेतो.

हे पुस्तक एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रमाशी आणि राष्ट्रीय शिक्षण धोरण (एनईपी) -2020 च्या मार्गदर्शक तत्त्वांच्या अनुषंगाने आहे, हे देखील आम्ही मोठ्या सन्मानाने नमूद करतो. प्रादेशिक भाषांमध्ये शिक्षणाला चालना देण्याच्या दिशेने या पुस्तकाचे रूपांतर नियोजित भारतीय प्रादेशिक भाषांमध्ये केले जात आहे.

डॉ. सत्यवान धोंडगे आणि श्री सतीशकुमार बरोट यांनी भाषांतरासाठी दिलेल्या योगदानाबद्दल आम्ही त्यांचे आभार मानू इच्छितो आणि मराठी भाषेत पुनरावलोकन करण्यासाठी श्री. प्रशांत पी. महाजन यांचे देखील आभार मानू इच्छितो.

आम्ही श्री. बुद्धा चंद्रशेखर, CCO NEAT AICTE, ज्यांचे AI आधारित अनुवादक साधन भाषांतराच्या उद्देशाने वापरले गेले यासाठी त्यांचे मनापासून आभार व्यक्त करतो.

शेवटी, आम्ही नवी दिल्ली येथील एम/एस खन्ना बुक पब्लिशिंग कंपनी प्रायव्हेट लिमिटेड या प्रकाशन संस्थेचे मनापासून आभार मानतो, ज्यांची संपूर्ण टीम प्रकाशनाच्या सर्व पैलूंवर सहकार्य करण्यास नेहमीच तत्पर होती, जेणेकरून तो एक अदभूत अनुभव बनवेल.

रीना गर्ग

प्रस्तावना

गणित हा वैज्ञानिक ज्ञानाचा एक आवश्यक मार्ग आहे जो मानसिक क्षमतेचे नवीन मार्ग उघडतो. अभियांत्रिकी गणित सिद्धांत आणि अभ्यासाचा समतोल देते, जे बौद्धिक उत्तेजक आहे. वास्तविक जगाच्या समस्यांवर गणित लागू करण्याची कला शिकणे अभियांत्रिकीच्या विद्यार्थ्याला समस्येचे निराकरण शोधण्याची परवानगी देते.

कॅल्क्युलस आणि लिनियर बीजगणित हे मुख्यत्वे 21 व्या शतकातील बी.टेक (NON CSE) च्या पदवीधर विद्यार्थ्यांसाठी आहे ज्याचा हेतू गणिताच्या विषयात अचूक समज प्रदान करणे आहे. हे पुस्तक ओबीई आणि ब्लूम वर्गीकरणावर आधारित नवीन राष्ट्रीय शिक्षण धोरणानुसार विद्यार्थी केंद्रित आणि स्वयं-शिक्षण उपक्रमांचा समावेश असलेल्या एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रमाशी काटेकोरपणे जोडलेले आहे. अभियांत्रिकी आणि विज्ञान शाखांमध्ये गणिताची साधने अभ्यासण्यासाठी आणि लागू करण्यासाठी वाचकांमध्ये स्वारस्य निर्माण करणे हा हेतू आहे. पुस्तकात प्रामुख्याने युनिट्समध्ये चर्चा केलेल्या संकल्पनांच्या व्यावहारिक अनुप्रयोगांवर भर देण्यात आला आहे ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना समस्या सोडवण्याच्या कौशल्यांवर मुद्दाम लक्ष केंद्रित करण्यास मदत होईल.

पुस्तकामध्ये 5 युनिट्स आहेत. विषय अधिक समजून घेण्यासाठी, प्रत्येक युनिटच्या शेवटी लहान प्रश्न, असाइनमेंट्स, बहुपर्यायी प्रश्न, स्वाध्याय आणि अधिक माहितीच्या स्वरूपात तुलनेने स्पर्धात्मक समस्या चांगल्या संख्येने दिल्या गेल्या आहेत. विद्यार्थ्यांची क्षमता वाढवण्यासाठी आणि सांघिक कार्याची भावना वाढवण्यासाठी प्रत्येक युनिटमध्ये व्यावहारिक/प्रकल्प/क्रियाकलाप देखील दिले आहेत. विषय स्पष्ट करण्यासाठी, मजकूर नोट्स, निरीक्षणे आणि टिप्पण्यांद्वारे पूरक आहेत. जिथे शक्य असेल तिथे भूमितीचा जास्तीत जास्त वापर करून विषय समजावून सांगण्याचा प्रयत्न करण्यात आला आहे.

युनिट -1 डेरिव्हेटिव्ह्ज, वक्रता, प्रॉपर आणि इमप्रॉपर इंटिग्रल्स, बीटा-गामा फंक्शन्स त्यांच्या गुणधर्मांसह वापरले आहेत.

युनिट -2 रोलचे प्रमेय, मीन व्हॅल्यू प्रमेय, टेलर आणि मॅक्लॉरिनचे प्रमेय, L-हॉस्पिटल नियम आणि मॅक्सिमा-मिनिमा यांचा वापर करून एका वेरिएबलसाठी उपाय शोधण्यासाठी संबंधित आहेत.

युनिट -3 अनुक्रम, कॉन्व्हर्जंट, डायव्हर्जन्ट ऑसिलेटरी अनुक्रम, अनंत श्रेणी, टेलरची अनंत श्रेणी, मॅकलॉरीनची अनंत श्रेणी, पॉवर श्रेणी, फोरियर श्रेणी उदाहरणांसह स्पष्ट करते.

युनिट -4 मल्टिव्हेरिएबल कॅल्क्युलस, फंक्शनचे लिमिट, डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह, पार्शल डेरीवेटीव्ह, होमोजिनिअस फंक्शन्स, टोटल डिफरन्शिअल सहगुणक, दोन चलांसाठी टेलरचे प्रमेय जॅकोबियन, अनेक चलांच्या फंक्शनचा एक्सट्रीमा आणि लॅग्रांजेची सहगुणकाची पद्धत, व्हेक्टर्स, वेक्टर डिफरंशिअल ऑपरेटर, यावर लक्ष केंद्रित केले आहे.

युनिट -5 मॅट्रायसेस मध्ये मॅट्रायसेसची व्याख्या, एलिमेंटरी ऑपरेशन्स, मॅट्रिक्सचा इचिलॉन फॉर्म, डिटरमिनंटस, गॉस एलिमिनेशन पद्धत, गॉस जॉर्डन पद्धत, सिमेट्रिक आणि स्क्यू सिमेट्रिक आधारित प्रमेय,ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स, व्हेक्टर्स, मॅट्रिक्सची रँक, मॅट्रिक्स चा नॉर्मल फॉर्म, मॅट्रिक्सचे आयजेन मूल्ये आणि आयजेन वेक्टर्स, कॅले हॅमिल्टन प्रमेय, मॅट्रिक्सचे डायगोनलायझेशन, क्वाड्रॅटिक फॉर्म, क्वाड्रॅटिक फॉर्मचे डायगोनलायझेशन यावर चर्चा केली आहे.

गणित हा एक विषय आहे ज्यावर केवळ कठोर परिश्रम आणि सरावाने प्रभुत्व मिळवता येते. गणित शिकण्याच्या प्रक्रियेत सराव हा एकमेव महत्त्वाचा शब्द आहे.

मला आशा आहे की हे पुस्तक सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांच्या आवश्यकता आणि अपेक्षा पूर्ण करेल. जरी चुकीची छापे आणि चुका टाळण्यासाठी प्रत्येक काळजी घेतली गेली असली तरी परिपूर्णतेचा दावा करणे कठीण आहे. मी शिक्षक आणि विद्यार्थ्यांकडून प्रत्येक टिप्पणी आणि सूचना कृतज्ञतेने स्वीकारते.

रीना गर्ग

आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशन

आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशनच्या अंमलबजावणीसाठी सर्वप्रथम आऊटकम बेस्ड अभ्यासक्रम विकसित करून आऊटकम बेस्ड आसेसमेंट पद्धतीचा शिक्षण पद्धतीत अंतर्भाव होणे गरजेचे आहे. आऊटकम बेस्ड आसेसमेंट पद्धतीच्या वापरामुळे विद्यार्थ्यांनी निर्धारित निष्पत्ती साध्य केल्याचे मूल्यमापन निश्चित निकषांद्वारे मोजता येईल. आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशनच्या सुयोग्य अंमलबजावणीमुळे सर्व विद्यार्थी एकसमान किमान कौशल्ये साध्य करू शकतील अशी मानके निर्धारित करता येतील. आऊटकम बेस्ड एज्यूकेशनवर आधारित अभ्यासक्रम पूर्ण केल्यानांतर विद्यार्थी खालील निष्पत्ती साध्य करू शकतील.

प्रोग्राम आउटकम्स (ग्रॅज्यूएट अट्रिब्युट्स)

PO-1: अभियांत्रिकी ज्ञान: जटिल अभियांत्रिकी समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी गणित, विज्ञान, अभियांत्रिकी मूलभूत आणि अभियांत्रिकी विशेषज्ञतेचे ज्ञान लागू करा.

PO-2: समस्यांचे विश्लेषण: गणिताचे पहिले तत्त्व, नैसर्गिक विज्ञान आणि अभियांत्रिकी विज्ञानाचा वापर करून ठोस निष्कर्षांपर्यंत पोहोचणाऱ्या जटिल अभियांत्रिकी समस्या ओळखणे, सूत्रांत मांडणे, संशोधन साहित्याचे पुनरावलोकन करणे आणि त्यांचे विश्लेषण करणे.

PO-3: समाधानांची रचना/विकास: जटिल अभियांत्रिकी समस्यांसाठी समाधानांची रचना आणि प्रणालीच्या घटकांची रचना किंवा प्रक्रिया जे सार्वजनिक आरोग्य आणि सुरक्षिततेसाठी आणि सांस्कृतिक, सामाजिक आणि पर्यावरणीय विचारांसाठी योग्य विचारात घेऊन निर्दिष्ट गरजा पूर्ण करतात.

PO-4: जटिल समस्यांचा तपास करा: वैध निष्कर्ष देण्यासाठी संशोधन-आधारित ज्ञान प्रयोगांच्या रचनेसह संशोधन पद्धती, विश्लेषण आणि डेटाचे स्पष्टीकरण आणि माहितीचे संश्लेषण वापरा.

PO-5: आधुनिक साधनाचा वापर: मर्यादा समजून घेऊन जटिल अभियांत्रिकी कार्यासाठी निर्मिती , निवड आणि योग्य तंत्र लागू करणे, आणि आधुनिक अभियांत्रिकी आणि आयटी साधने अंदाज आणि प्रतिकृतीसह तयार करने.

PO-6: अभियंता आणि समाज: सामाजिक, आरोग्य, सुरक्षा, कायदेशीर आणि सांस्कृतिक समस्या आणि व्यावसायिक अभियांत्रिकी सरावाशी संबंधित परिणामी जबाबदाऱ्यांचे मूल्यांकन करण्यासाठी संदर्भित ज्ञानाद्वारे सूचित केलेले तर्क लागू करा.

PO-7: पर्यावरण आणि टिकाऊपणा: सामाजिक आणि पर्यावरणीय संदर्भातील व्यावसायिक अभियांत्रिकी समाधानाचा प्रभाव समजून घ्या आणि शाश्वत विकासाचे ज्ञान आणि गरज प्रदर्शित करा.

PO-8: नैतिकता : नैतिक तत्त्वे लागू करा आणि अभियांत्रिकी अभ्यासाच्या व्यावसायिक नैतिकता आणि जबाबदाऱ्या आणि निकषांना वचनबद्ध करा.

PO-9: वैयक्तिक आणि सांघिक कार्य: एक व्यक्ती म्हणून आणि विविध संघांमध्ये सदस्य किंवा नेता म्हणून आणि बहु -अनुशासनात्मक सेटिंग्जमध्ये प्रभावीपणे कार्य करा.

PO-10: संवाद: जटिल अभियांत्रिकी कार्यांवर अभियांत्रिकी समुदायासह आणि मोठ्या प्रमाणात समाजाशी प्रभावीपणे संवाद साधा, जसे की, आकलनासाठी सक्षम, प्रभावी अहवाल लिहिणे आणि दस्तऐवजीकरणाची रचना समजून घेणे, प्रभावी सादरीकरण करणे आणि स्पष्ट सूचना देणे आणि प्राप्त करणे.

PO-11: प्रकल्प व्यवस्थापन आणि वित्त: अभियांत्रिकी आणि व्यवस्थापन तत्त्वांचे ज्ञान आणि समज प्रदर्शित करा आणि एखाद्या व्यक्तीच्या स्वतः च्या कार्याला एक संघाचे नेते म्हणून, प्रकल्पांचे व्यवस्थापन करण्यासाठी आणि बहु -विषयक वातावरणात हे लागू करा.

PO-12: आयुष्यभरासाठी शिक्षण: तांत्रिक बदलांच्या व्यापक संदर्भात स्वतंत्र आणि आयुष्यभरासाठीच्या शिक्षणामध्ये गुंतण्याची तयारी आणि क्षमता असणे आवश्यक आहे हे ओळखा.

कोर्स आउटकम

अभ्यासक्रम पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी हे करू शकतील:

CO-1: वक्रतेची कल्पना, वक्रता केंद्र आणि योग्य गणिती मर्यादा संकेतन वापरून इमप्रॉपर इंटिग्रलचे मूल्यमापन करण्यासाठी डिफरंशिअल कॅलक्युलस लागू करा. या अनुप्रयोगांव्यतिरिक्त त्यांना बीटा आणि गामा फंक्शन्सची मूलभूत समज असेल.

CO-2: दिलेल्या इंटरव्हलमध्ये फंक्शनचे वर्तन तपासा आणि त्रिकोणमितीय आणि ट्रान्सिडेंटल फंक्शनचा विस्तार, इनडिटरमिनेट फॉर्म्सबद्दल जाणून घ्या, समस्यांमध्ये त्यांचे अस्तित्व आणि त्याच्यामध्ये लिमिटची गणना करण्यासाठी L 'हॉस्पिटलच्या नियमाचा वारंवार वापर.

CO-3: इन्फिनिटी वर लिमिटची संकल्पना वापरून बाऊण्डेडनेस, कॉन्व्हर्जन्स आणि डायव्हर्जन्स निश्चित करा; अनुक्रमांची बेरीज म्हणून श्रेणीच्या संकल्पनेचा अर्थ लावा अल्टरनेट श्रेणीसह अनंत श्रेणी कॉन्व्हर्ज होतात किंवा डायव्हर्ज होतात हे ठरवण्यासाठी विविध चाचण्या लागू करा; पॉवर श्रेणी आणि फूरियर श्रेणीच्या संकल्पना जाणून घ्या.

CO-4: कंटिन्युइटी आणि डिफरंशियाबिलिटी कल्पनांची तुलना आणि विरोधाभास करा; पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज शोधण्याची संकल्पना आत्मसात करा आणि अनेक स्वतंत्र व्हेरिएबल्सच्या फंक्शनची एक्सट्रीम मूल्ये शोधण्याची क्षमता विकसित करा; वेक्टर डिफरंशिएशनची संकल्पना स्पष्ट करा आणि ग्रेडियंट, डायव्हर्जन्स आणि कर्लशी संबंधित समस्या सोडवण्यासाठी वेक्टर इडेंटिटिजचा वापर प्रदर्शित करा.

CO-5: रँक शोधण्यासाठी मॅट्रिक्सला एचेलॉन फॉर्ममध्ये कमी करण्यासाठी प्राथमिक परिवर्तन लागू करा; रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण करा; मॅट्रिक्सच्या आयजेन मूल्यांची आणि आयजेन व्हेक्टर्सची गणना करा; डायगोनलायझेशनची संकल्पना आणि कॅले हॅमिल्टन प्रमेय आणि त्याच्या वापराशी परिचित व्हा.

खाली दिलेल्या मॅट्रिक्सनुसार प्रोग्राम आउटकम्स आणि कोर्स आउटकम्सचे मॅपिंग करावे :

कोर्स आउटकम्स	प्रोग्राम आउटकम्स बरोबर अपेक्षित मॅपिंग (1- किमान परस्पर संबंध; 2- मध्यम परस्पर संबंध; 3- घनिष्ट परस्पर संबंध)											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1	3	3	2	2								
CO-2	2	3	2	2								1
CO-3	3	3	3	3	2	1	1			1	1	1
CO-4	2	2	3	2	1							
CO-5	3	3	2	1	2	1	1			1	1	

संक्षिप्तरूपे आणि चिन्हे

चिन्हे	वर्णन
1. संख्या प्रणाली	
N	नैसर्गिक संख्यांचा संच
Z	पूर्णांक संख्यांचा संच
Q	अपरिमेय संख्यांचा संच
I	परिमेय संख्यांचा संच
R	वास्तविक संख्यांचा संच
C	कॉम्प्लेक्स संख्यांचा संच
R^n	n-टपल्स वास्तविक संख्यांचा संच
2. ग्रीक अक्षर	
α	अल्फा
β	बीटा
γ	गामा
Γ	गामा फंक्शन
δ	डेल
Δ	डेल्टा
ε	इप्सिलॉन
ι	आइऑटा
θ	थीटा
λ	लैम्ब्डा
μ	म्यू
ϕ	फाय
ψ	साय
η	ईटा
π	पाय
ρ	रो
κ	कप्पा

चिन्हे	वर्णन
3. संचामधील संकेत	
$\notin$	चा घटक नसणे
$\cup$	संयोग
$\cap$	छेद
( )	विवृत अंतराल
[ ]	संवृत्त अंतराल
$\subseteq$	उपसंच
$\nsubseteq$	उपसंच नाही
$\subset$	उचित उपसंच
$\not\subset$	उचित उपसंच नाही
{ }	संच
ϕ	रिक्त संच
$>$	पेक्षा काटेकोरपणे अधिक
$\leq$	पेक्षा कमी किंवा समान
$\geq$	पेक्षा मोठे किंवा समान
4. काही इतर उपयुक्त चिन्हे	
$\sim$	च्या समतुल्य
$\leftrightarrow$	देवाणघेवाण
∞	अनन्त
$\int$	इंटिग्रेशन
!	फॅक्टोरियल
$\Rightarrow$	सुचवते
$\forall$	सर्वांसाठी
$\Leftrightarrow$	द्वारे सूचित आणि निहित
$\|\ \|$	नॉर्म
$\|\ \|$	मॉड्यूलस
:	कोलन
;	अर्धविराम
[A : B] or [A/B]	- संवर्धित मॅट्रिक्स

5. वर्गसमीकरणांच्या मुळांचे स्वरूप

जर $ax^2 + bx + c = 0$ वर्गसमीकरण असेल, तर

a. यांची मुळे $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ या द्वारे दिले जाते.

b. मुळांची बेरीज = $-b/a$

c. मुळांचा गुणाकार = c/a

d. मूळ समान असतील जर $b^2 - 4ac = 0$

e. मूळ वास्तविक आणि वेगळे असतील जर $b^2 - 4ac > 0$

f. मूळ कॉम्प्लेक्स असतील जर $b^2 - 4ac < 0$

g. जर $b^2 - 4ac$ एक पूर्ण वर्ग असेल, तर मूळ परिमेय संख्या असते.

6. लॉगॅरिथमचे गुणधर्म

a. $\log_a 1 = 0, \log_a 0 = \infty, a > 1$ च्या साठी

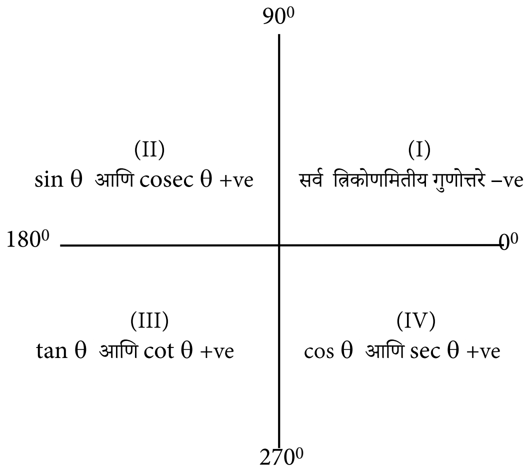
$\log_a a = 1,\ \log_e 2 = 0.6931, \log_{10} e = 0.4343$

b. $\log_a p + \log_a q = \log_a pq$

c. $\log_a p - \log_a q = \log_a \dfrac{p}{q}$

d. $\log_a p^q = q \log_a p$

7. चतुर्थांशामधील त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचे स्वरूप



8. त्रिकोणमितीय फंक्शनसाठी गुणाकार आणि बेरीज सूत्र

a. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

b. $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

c. $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

d. $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

e. $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

f. $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

g. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \dfrac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

h. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

i. $\tan 2A = \dfrac{\sin 2A}{\cos 2A} = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

j. $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

k. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

l. $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

m. $\sin A + \sin B = 2 \sin \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$

n. $\sin A - \sin B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \sin \dfrac{A-B}{2}$

o. $\cos A + \cos B = 2 \cos \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}$

p. $\cos A - \cos B = 2 \sin \dfrac{A+B}{2} \sin \dfrac{B-A}{2}$

q. $\sin A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$

r. $\cos A \sin B = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right]$

s. $\cos A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$

t. $\sin A \sin B = \dfrac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$

u. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in Z$

v. $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

w. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

x. $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi$ आणि $x = (2n+1)\pi, n \in Z$

y. $e^{ax} \neq 0, \forall x \in R; a \in R$

9. डिफरन्शिएशनची मूलभूत सूत्रे

a. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

b. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

c. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

d. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

e. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

f. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

g. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

h. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

i. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{xlaga}$

j. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

k. $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = n\,a(ax+b)^{n-1}$

l. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$

m. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$

n. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

o. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

p. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq 0, \pm 1$

q. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq 0, \pm 1$

r. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

s. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

10. इंटिग्रेशनची मूलभूत सूत्रे

a. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

b. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

c. $\int \tan x\, dx = -\log \cos x + c = \log \sec x + c$

d. $\int \cot x\, dx = \log \sin x + c$

e. $\int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x) + c$

f. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$

g. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

h. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

i. $\int e^x\, dx = e^x + c$

j. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c; a > 0, a \neq 1$

k. $\int \frac{1}{x}\, dx = \log_e x + c$

l. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

m. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

n. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$

o. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x-a}\right) + c$

p. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

q. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$

$= \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$

r. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$

$= \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c$

s. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$

t. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$

प्रतीकांची यादी

lim	-	लिमिट
$\therefore$	-	म्हणून
$\because$	-	कारण
i.e.,	-	म्हणजे,
$f^{n}(a)$	-	'a' वर f चा n वा डेरीवेटीव्ह
Sup.	-	सर्वोच्च
Inf.	-	अत्यल्प
$Lf'(a)$	-	'a' वर 'f' च्या डाव्या हाताचा डेरीवेटीव्ह
diag.	-	कर्ण
L.H.S	-	डाव्या हाताची बाजू
R.H.S	-	उजव्या हाताची बाजू
dim	-	डायमेन्शन
$Adj(A)$	-	मॅट्रिक्स A चा ॲडजॉइंट
min	-	मिनिमम
max.	-	मॅक्सिमम
L.C.	-	रेषीय संयोजन
L.D.	-	लिनिअरली डिपेन्डन्स
L.I.	-	लिनिअरली इनडिपेन्डन्स
$Rf'(a)$	-	'a' वर 'f' च्या उजव्या हाताचा डेरीवेटीव्ह

आकृत्यांची सूची

शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

आउटकम बेस्ड एज्युकेशन (OBE) लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांचे ज्ञान स्तर आणि कौशल्य संच वाढवले पाहिजे. OBE च्या योग्य अंमलबजावणीसाठी शिक्षकांनी मोठी जबाबदारी स्वीकारली पाहिजे. OBE प्रणालीतील शिक्षकांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे असू शकतात:

- वाजवी मर्यादेत, त्यांनी त्यांचा वेळ सर्व विद्यार्थ्यांच्या फायद्यासाठी वापरला पाहिजे
- त्यांनी विद्यार्थ्यांच्या क्षमतेचे मूल्यांकन केवळ परिभाषित निकषावर आणि कोणत्याही पक्षपात आणि भेदभावाशिवाय केले पाहिजे.
- त्यांनी हे सुनिश्चित करण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे की सर्व विद्यार्थ्यांना त्यांचे शिक्षण पूर्ण झाल्यानंतर पुरेसे दर्जेदार ज्ञान तसेच त्यांच्या मुख्य शिस्तीशी जुळणारी क्षमता प्राप्त होईल.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांना त्यांची अंतिम कामगिरी क्षमता विकसित करण्यासाठी नेहमी प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी नवीन दृष्टीकोन एकत्रित करण्यासाठी गट कार्य आणि सांघिक कार्य सुलभ केले पाहिजे आणि प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी मूल्यांकनाच्या प्रत्येक भागात ब्लूम वर्गीकरण पाळावे.

ब्लूम वर्गीकरण

स्तर	शिक्षकांनी तपासावे	विद्यार्थी सक्षम असावा	मूल्यांकनाची संभाव्य पद्धत
निर्माण करणे	विद्यार्थ्यांची नवनिर्माण करण्याची क्षमता	डिझाइन करा किंवा तयार करा	सूक्ष्म प्रकल्प
मूल्यमापन	विद्यार्थ्यांचे औचित्य सिद्ध करण्याची क्षमता	वाद घालणे किंवा बचाव करणे	असाइनमेंट
विश्लेषण करणे	विद्यार्थ्यांमध्ये फरक करण्याची क्षमता	फरक किंवा भेद करा	प्रकल्प/प्रयोगशाळा पद्धती
उपयोजन करणे	विद्यार्थ्यांची माहिती वापरण्याची क्षमता	चालवा किंवा प्रात्यक्षिक करा	तांत्रिक सादरीकरण/ प्रात्यक्षिक
समजून घेणे	विद्यार्थ्यांची कल्पना स्पष्ट करण्याची क्षमता	स्पष्ट करा किंवा वर्गीकृत करा	सादरीकरण / परिसंवाद
आठवणे	विद्यार्थ्यांची आठवण करण्याची क्षमता (किंवा लक्षात ठेवणे)	व्याख्या करा किंवा आठवा	प्रश्नमंजुषा

विद्यार्थ्यांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

OBE लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांनी समान जबाबदारी घ्यावी. OBE प्रणालीतील विद्यार्थ्यांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे आहेत:

- प्रत्येक कोर्समध्ये युनिट सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक UO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक CO ची चांगली माहिती असावी
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक PO ची चांगली माहिती असावी
- विद्यार्थ्यांनी योग्य चिंतन आणि कृतीसह गंभीर आणि वाजवी विचार केला पाहिजे.
- विद्यार्थ्यांनी शिक्षण व्यावहारिक आणि वास्तविक जीवनातील परिणामांशी जोडलेले आणि समाकलित केले पाहिजे.
- विद्यार्थी OBE च्या प्रत्येक स्तरावर त्यांची क्षमता जाणून घेतील.

अनुक्रमणिका

1 कॅल्क्युलस I

युनिट निर्दिष्टे

या युनिटमध्ये वक्रता, वक्रतेची त्रिज्या, वक्रतेचे केंद्र, वक्रतेचे वर्तुळ, इव्होलूट्स, इन्वोलुट, एनवेलोप, प्रॉपर आणि इंप्रॉपर इंटीग्रल, बीटा आणि गामा फंक्शन आणि त्यांचे गुणधर्म, पृष्ठफळ आणि परिभ्रमनाचे घनफळ यांचे मूल्यांकन करण्यासाठी प्रॉपर इंटीग्रल घटकांचे अनुप्रयोग या विषयांवर विस्तृत चर्चा केली आहे. वरील सर्व विषयांवर भरपूर उदाहरणांसह चर्चा केली गेली आहे जेणेकरून विद्यार्थ्यांना सिद्धांत अनुप्रयोग उत्कृष्ट रीत्या स्पष्ट होईल. विद्यार्थ्यांना विषयाची कल्पना करण्यासाठी आवश्यक तेथे आकृत्यांचा समावेश आहे.

तर्कशास्त्र

इनव्होल्यूट आणि इवोल्युट हे विभेदक भूमितीचा (डिफरन्शिअल जॉमेट्री) एक भाग आहे, जी स्वतः विज्ञान, कृत्रिम बुद्धिमत्ता (आर्टिफिशिअल इंटेलिजन्स) आणि रोबोटिक्स क्षेत्रात काम करणाऱ्या विद्यार्थ्यांसाठी एक अतिशय महत्वाची संकल्पना आहे. दैनंदिन वास्तविक जीवनात देखील त्याचे बरेच अनुप्रयोग आहेत.

वर्तुळाच्या इनव्होल्यूटचा एक प्रमुख अनुप्रयोग म्हणजे फिरत्या भागांसाठी गिअर्सची रचना करणे जेथे गिअर टूथ इनव्होल्यूटच्या आकाराचे अनुसरण करतात.

इनव्होल्यूट वापराचा मूलभूत वापर वायडींग घड्याळे आणि खेळण्यांमध्ये आहे जिथे स्पायरल स्प्रिंगला गोलाकार इनव्होल्यूटमध्ये हलविण्यासाठी वायडींग की (key) वापरली जाते.

जलाशय पूर्ण भरल्यावर धरणावर लावलेल्या बलाची गणना करण्यासाठी आपण डेफिनेट इंटिग्रलचा वापर करतो आणि बदलत्या पाण्याची पातळी त्या बलावर कसा परिणाम करते हे आपण तपासतो. इनडेफिनेट इंटीग्रल बाऊण्डेड बॉडीच्या वक्राचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ शोधण्यासाठी वापरले जातात.

गामा फंक्शनचा वापर गामा वितरणामध्ये केला जातो जो इलेक्ट्रॉनिक घटकाचे आयुष्यमान जसे वेळ आधारित घटना निश्चित करण्यासाठी वापरला जातो.

पूर्वतयारी

1. इंटिग्रेशन आणि डिफरन्शिएशनचे मूलभूत ज्ञान.
2. वर्तुळ, इलिप्स (ellipse), हायपरबोला (hyperbola) इत्यादी वेगवेगळ्या वक्रांची समज.
3. फॅक्टोरियल संकल्पनेशी परिचय.
4. दोन किंवा अधिक वक्रांनी बांधलेले क्षेत्र शोधण्यासाठी इंटिग्रेशनचा वापर.

युनिट आउटकम

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील:

U1-O1: वक्रता आणि वक्रता त्रिज्या ही संकल्पना स्पष्ट करू शकतील; वक्रता केंद्राच्या मदतीने वक्रांचे इवोल्युट देखील शोधू शकतील.

U1-O2: कॉनवरजन्स आणि डायवर्जन्स दृष्टीने त्यांचे स्वरूप शोधण्यासाठी विविध फंक्शनवर इंटीग्रल कसोटी (integral test) लागू करू शकतील.

U1-O3: बीटा-गामा फंक्शन संकल्पनेशी परिचित झाल्यानंतर त्याचा उपयोग वेगवेगळे इंटीग्रल सोडवण्यासाठी करू शकतात.

U1-O4: कार्टेशियन, पॅरामेट्रिक आणि पोलर वक्रांसाठी पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनाकृतीच्या परिभ्रमण परिभ्रमणाचे घनफळ मूल्यमापन करू शकतात .

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट 1 आऊटकम	कोर्स आऊटकमसह अपेक्षित मॅपिंग *(1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)*				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U1-O1	3	1	–	–	1
U1-O2	2	3	–	–	–
U1-O3	3	–	–	–	–
U1-O4	2	–	–	–	1

इतिहास

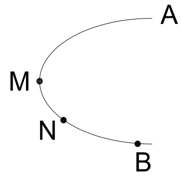
अपोलोनियस (इ.स. 190–262 पुर्व) कोनिकाच्या पुस्तक V मध्ये कोनिक सेक्शन ला नॉर्मल काढताना चे गणित सोडवताना वक्र ते ची स्पष्टपणे गणना केली, परंतु त्याने वक्राचा गुणधर्म म्हणून विचार केला नाही आणि त्याची “गणना” विभागांची रचना आहे. वक्रता "पाहणारी" पहिली व्यक्ती होती ओरेस्मे (c. 1382-1320), निर्देशांक प्रस्तुत करण्यात अग्रस्थानी होता. त्याने त्याला वक्राच्या झुकण्याचा स्थानिक मोजमाप म्हणून वर्णन केले, आणि त्याला लॅटिन “कर्व्हिटास” असे नाव दिले. नंतर त्याने प्रस्तावित केले की वर्तुळांसाठी ते, त्रिज्याच्या रेसिप्रोकल द्वारे परिमाणित केले जाऊ शकते आपली आधुनिक अधिवेशन. केपलरने अस्पष्टपणे 1680 च्या दशकात लिबनिझच्या ओस्क्युलेटिंग ("किसिंग") नावाच्या एका बिंदूवर "जवळच्या" वर्तुळाचा विचार करून सामान्य वक्रांसाठी वक्रता कशी परिभाषित करावी हे सुचवले. परंतु ह्यूजेन्स, ज्यांनी प्रथम सामान्य वक्रांसाठी वक्रता मोजण्याचा मार्ग शोधला आणि न्यूटनने या संकल्पनेला आधुनिक स्वरूप दिले.

"माझा असा विश्वास आहे की आम्हाला कदाचित प्रत्येक गोष्टीसाठी काही माहित नाही."

- क्रिश्चियन ह्यूजेन्स

1.1 वक्रता

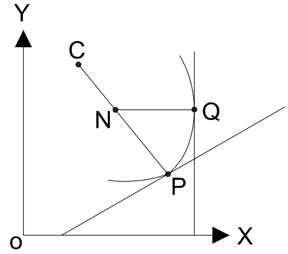
आकृती 1.1 मध्ये, हे पाहिले जाऊ शकते की दिलेला वक्र $AMNB$ बिंदू N च्या तुलनेत M बिंदूवर अधिक तीव्रतेने वाकतो. एखाद्या विशिष्ट बिंदूवर वक्र वाकणे याला त्या बिंदूवरील वक्रता म्हणतात. तर M मधील वक्रता N वरील वक्रतेपेक्षा जास्त आहे. हे बिंदूवर वक्र वाकण्याच्या तीक्ष्णतेचे निश्चित संख्यात्मक मोजमाप देईल.



आकृति 1.1

आकृती 1.2 मध्ये, दिलेल्या वक्रातील P हा कोणताही बिंदू असू द्या आणि Q हा P चा शेजारी बिंदू असा आहे की चाप PQ त्याच्या जीवेच्या दिशेने कॉनकेव्ह आहे. समजा P आणि Q वरील नॉर्मल्स N वर छेदतात.

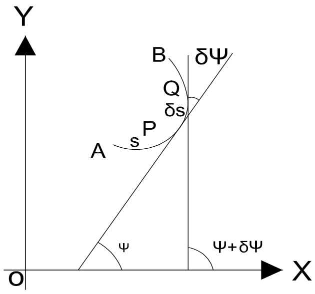
जेव्हा $Q \to P$, N एका निश्चित स्थिती C कडे वळते, ज्याला वक्राचा वक्रता केंद्र P म्हणतात. अंतर CP ला P बिंदूवर वक्राच्या वक्रतेची त्रिज्या म्हणतात आणि ते ρ (rho) असे दर्शविले जाते. C केंद्र असलेले वर्तुळ आणि त्रिज्या B मधील, म्हणजेच CP, P च्या बिंदूवर दिलेल्या वक्रांच्या वक्रतेचे वर्तुळ म्हणतात. बिंदू P द्वारे काढलेल्या वक्रता वर्तुळाच्या कोणत्याही जीवाला वक्रता जीवा म्हणतात. वक्रतेच्या त्रिज्येच्या रेसिप्रोकलला P बिंदू वरील वक्राची वक्रता म्हणतात आणि k या द्वारे दर्शविले जाते.



आकृति 1.2

1.1.1 वक्रतेची गणितीय व्याख्या

समजा AB हा वक्र आहे आणि P, Q या वक्रावर दोन शेजारी बिंदू आहेत.
एक चाप $AP = s$ आणि चाप $AQ = s + \delta s$. 'A' हा वक्रावर एक निश्चित बिंदू आहे ज्याच्यापासून कमानांची लांबी मोजली जाते. P आणि Q वरील स्पर्शिका अनुक्रमे ψ आणि $\psi + \delta\psi$ कोन एका निश्चित रेषे सोबत म्हणजे x- अक्षा सोबत बनवतात, तर



आकृति 1.3

i. कोन $\delta\psi$ ज्याद्वारे स्पर्शिका त्याच्या संपर्काचा बिंदू चाप PQ सोबत फिरते त्याला चाप PQ चे वाकणे किंवा एकूण वक्रता म्हणतात.

ii. गुणोत्तर $\delta\psi/\delta s$ ला चाप PQ ची सरासरी किंवा सरासरी वक्रता म्हणतात.

iii. सरासरी वक्रतेचे लिमिट मूल्य जे $Q \to P$ ला बिंदू P वर वक्रांची वक्रता म्हणतात.

अशा प्रकारे, बिंदू P वर वक्रता (κ) $\underset{Q\to P}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\delta\psi}{\delta s} = \underset{\delta s\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\delta\psi}{\delta s} = \dfrac{d\psi}{ds}$ आहे.

iv. P वर वक्राच्या वक्रतेचा व्यस्त जर वक्रता शून्य नसेल तर त्याला P येथे वक्राची वक्रता त्रिज्या म्हणतात आणि ρ द्वारे दर्शविले जाते अर्थात $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{ds}{d\psi}$

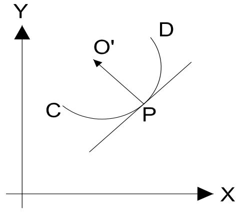
टिप्पणी: (1) एक सरळ रेषा अजिबात वाकत नाही (जसे कि y स्थिर आहे म्हणून $\dfrac{d\psi}{ds}$ शून्य आहे) म्हणून एका सरळ रेषेची वक्रता शून्य आहे.

(2) वर्तुळाची वक्रता स्थिर आणि त्याच्या त्रिज्याच्या व्यस्ताइतकी असते.

1.1.2 वक्रता त्रिज्या

कोणत्याही बिंदू वर वक्रतेच्या व्यस्तला त्या बिंदूची वक्रता त्रिज्या म्हणतात. साहजिकच वक्रता त्रिज्या बिंदूवर निश्चित करण्यासाठी कोणत्याही बिंदूवर वक्रता शून्य नसावी. हे सहसा ρ द्वारे दर्शविले जाते. त्यामुळे बिंदू P वर

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\psi}$$



आकृति 1.4

आलेखीय

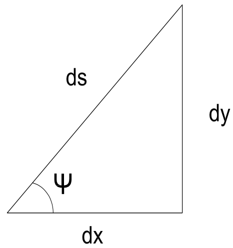
वक्र CD साठी जर बिंदू P वर वक्रतेची त्रिज्या ρ असेल तर आपण बिंदू P वर प्रलंब काढतो आणि नंतर $O'P$ हे अंतर O' सह P वर वक्रता त्रिज्या इतके आहे.

A. कार्टेशियन वक्रासाठी वक्रता त्रिज्या

जेंव्हा वक्राचे समीकरण कार्टेशियन निर्देशांकात दिलेले असते, तेंव्हा आपण ρ करिता सूत्र काढतो.

वक्र $Y = f(x)$ साठी ρ काढणे

वक्रावरील बिंदु P (x, y) वर स्पर्शिका x- अक्ष सोबत जर ψ हा कोन बनवते, तर आपल्या कडे



आकृति 1.5

$$\sin\psi = \frac{dy}{ds}, \cos\psi = \frac{dx}{ds} \text{ आणि } \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

तर शेवटच्या संबंधातून, आमच्याकडे असेल $\psi = \tan^{-1}(y_1)$, तिथे $y_1 = \frac{dy}{dx}$

x ने डिफरंशिएशन करून, आपल्याकडे असेल,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1+y_1^2}.y_2 \qquad \left\{\because y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\right\}$$

आता,
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dx}.\frac{dx}{ds} = \frac{y_2}{1+y_1^2}.\cos\psi$$

$$= \frac{y_2}{1+y_1^2}.\frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

$$\left[\because \cos\psi = \frac{1}{\sec\psi} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right]$$

त्यामुळे,
$$\frac{1}{\rho} = \frac{y_2}{(1+y_1^2)^{3/2}}$$

$$\rho = \frac{[1+y_1^2]^{3/2}}{y_2}, \text{ जिथे } y_2 \neq 0$$

B. ***पॅरामेट्रिक वक्रासाठी वक्रता त्रिज्या***

वक्र $x = f(t), y = \phi(t)$ साठी ρ काढणे जेंव्हा वक्राचे पॅरामेट्रिक समीकरण दिलेले असेल.

येथे, $x = f(t), y = \phi(t)$, t पॅरामिटर आहे

आपल्याला माहित आहे, $x' = \dfrac{dx}{dt}, y' = \dfrac{dy}{dt}$

तसेच $x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}, y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$

या रीतीने $$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} \qquad \ldots(1)$$

x ने डिफरंशिएशन करून, आपल्याकडे आहे,

$$y_2 = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \qquad \left[\because \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'}\right]$$

आपल्याला माहित आहे, $\rho = \dfrac{\left[1 + y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$ म्हणून, सर्व मूल्ये टाकल्यानंतर, आपल्याकडे,

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$ आहे

C. ***ध्रुवीय वक्र साठी वक्रता त्रिज्या***

वक्र $r = f(\theta)$ किंवा $f(r, \theta) = 0$ साठी ρ काढणे

समजा ϕ हा असा कोन जो $P(r, \theta)$ वर स्पर्शिका OP सोबत बनवतो, तेंव्हा आपल्या कडे

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}, \ \sin\phi = r\frac{d\theta}{ds} \text{ आणि } \cos\phi = \frac{dr}{ds} \qquad \ldots(1)$$

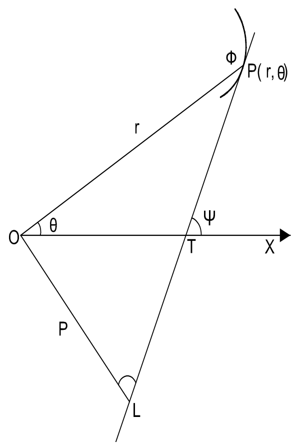
पुन्हा जर ψ हा कोन जो स्पर्शिका $P(r, \theta)$, OX सोबत बनवतो. तेंव्हा

$$\psi = \theta + \phi$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds}\left[1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right] \qquad \ldots(2)$$



आकृति 1.6

समीकरण (1) वरून,

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

अथवा $$\tan\phi = \frac{r}{r_1}\text{, जिथे } r_1 = \frac{dr}{d\theta}$$

दोन्ही बाजूला θ सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर आपल्याला मिळते

$$\sec^2\phi.\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r_1.r_1 - r r_2}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r_1^2 - r r_2}{r_1^2}.\frac{1}{\sec^2\phi}$$

$$= \frac{r_1^2 - r r_2}{r_1^2}.\frac{1}{1+\tan^2\phi} \quad = \frac{r_1^2 - r r_2}{r_1^2}.\frac{r_1^2}{r_1^2 + r^2} \qquad \left[\because \tan\phi = \frac{r}{r_1}\right]$$

$$= \frac{r_1^2 - r r_2}{r_1^2 + r^2} \qquad \ldots(3)$$

पुन्हा (1) पासून, $$r\frac{d\theta}{ds} = \sin\phi = \frac{1}{\operatorname{cosec}\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}} \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (2), (3), (4) वरून, आपल्याला मिळते

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}}.\left[1 + \frac{r_1^2 - r r_2}{r_1^2 + r^2}\right]$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2r_1^2 + r^2 - r r_2}{\left(r^2 + r_1^2\right)^{3/2}} \qquad \left[\because \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\left(r^2 + r_1^2\right)^{3/2}}{2r_1^2 + r^2 - r r_2}$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.1: खालील वक्रांच्या दिलेल्या बिंदूवर वक्रतेची त्रिज्या शोधा:

(a) $y = 4\sin x - \sin 2x$, बिंदू $x = \frac{\pi}{2}$ वर (b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ बिंदू $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ वर

उकल: (a) दिले आहे : $y = 4\sin x - \sin 2x$

x सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर,

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos x - 2\cos 2x$$

आणि
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin x + 4\sin 2x$$

आपल्याला माहिती आहे
$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+(4\cos x - 2\cos 2x)^2\right]^{3/2}}{-4\sin x + 4\sin 2x}$$

$$\therefore\ (\rho)_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left[1+\left(4\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\pi\right)^2\right]^{3/2}}{-4\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{(1+4)^{3/2}}{-4}$$ (उणे चिन्हाकडे दुर्लक्ष केल्यावर)

$$= \frac{5^{3/2}}{4}$$, (उकल)

(b) दिले आहे: $$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \qquad \ldots(1)$$

x सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -1$$, बिन्दु $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

अश्याप्रकारे,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \sqrt{y}.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$= \frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x} = \frac{\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x}$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}\right] = -\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\right)}$$, बिन्दु $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ वर

$$= -4$$

आपल्याला माहित आहे $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{(1+1)^{3/2}}{4} = \frac{2^{3/2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.2: $|\rho|$ चे लघुत्तम मूल्य शोधा $y = \log x$, $x > 0$ साठी.

उकल: समजा: $$y = \log x$$

x सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ तसेच } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

आपल्याला माहित आहे $$\rho = \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{-\frac{1}{x^2}} \quad = -\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x}$$

समजा , $$|\rho| = f(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x}$$

$f(x)$ चे लघुत्तम मूल्य शोधण्यासाठी आपल्याला $f'(x)$ काढावे लागेल

$$f'(x) = \frac{x.\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{1/2}.2x - \left(x^2+1\right)^{3/2}}{x^2}$$

$$= \frac{3x^2\sqrt{x^2+1} - \left(x^2+1\right)^{3/2}}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}\left(3x^2-x^2-1\right)}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}\left(2x^2-1\right)}{x^2}$$

समजा $f'(x) = 0$, तेंव्हा $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

आणि $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ हा $f''(x)$ धनात्मक आहे. (विद्यार्थी तपासू शकतात)

त्यामुळे $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ साठी $|\rho|$ चे मूल्य लघुत्तम आहे. $(\because x > 0)$

$$\therefore \quad |\rho|_{\min} = \left[\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{x}\right]_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ $|\rho|$ चे लघुत्तम मूल्य $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ असेल . **(उकल)**

उदाहरण 1.3: बिंदू (x, y) वर आयताकृती हायपरबोला $x\,y = c^2$ साठी वक्रता त्रिज्या शोधा.

उकल: सूचना: $y = \frac{c^2}{x}$ घ्या, उकल: $\frac{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}{2c^2}$

उदाहरण 1.4: $x = 1 - t^2,\ y = t - t^3$ दिलेल्या वक्रांच्या दोन शाखांच्या उत्पत्तीवर वक्रतेची त्रिज्या शोधा.

उकल: आरंभ बिंदू (0, 0) वर t चे दोन समान मूल्य 1 आणि −1 आहे. $\left[\because x = 1 - t^2,\ 0 = 1 - t^2 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1\right]$

म्हणून वक्रांच्या दोन शाखांसाठी, t चे मूल्य 1 आणि -1 आहे.

दिले आहे: $x = 1 - t^2,\ y = t - t^3$

't' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर ,

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2, \quad \frac{dx}{dt} = -2t$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - 3t^2}{2t} = -\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}t \qquad \ldots(1)$$

परत समीकरण (1) ला 't' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}\right) . \frac{dt}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}\right)}{-2t}$$

$$= -\frac{1}{4t^3} - \frac{3}{4t}$$

आपल्याला मिळेल, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

आणि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

त्याचप्रकारे, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

तसेच $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=-1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

अशा प्रकारे $$(\rho)_{t=1}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{(1+1)^{3/2}}{-1}=-2\sqrt{2}$$

तसेच $$(\rho)_{t=-1}=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{(1+1)^{3/2}}{1}=2\sqrt{2}$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.5: सिद्ध करा की कॅटेनरी $y=c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ साठी वक्रतेची त्रिज्या ही वक्र आणि x- अक्ष यांच्यामध्ये प्रलंब आंतरखंडित भागा इतकी असते आणि तो कोटि च्या वर्गा प्रमाणे बदलतो.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 1.6: जर ρ_1 आणि ρ_2 , पॅराबोला $y^2=4ax$ च्या नाभि जीवा च्या टोकाला वक्रतेची त्रिज्या असतील तर $\rho_1^{-2/3}+\rho_2^{-2/3}=(2a)^{-2/3}$ हे सिध्द करा.

उकल: पॅराबोलाचे समीकरण $y^2=4ax$ आहे आणि त्याचे पॅरामेट्रिक समीकरण $x=at^2,\ y=2at$ आहे.

$(at_1^2, 2at_1)$ आणि $(at_2^2, 2at_2)$ पॅराबोला च्या नाभि जीवा ची टोके आहेत, तर आपल्याला माहित आहे

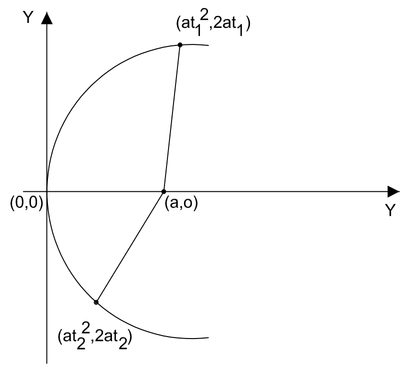
$$t_1\,t_2=-1$$

दिले आहे, $$x=at^2,\ y=2at$$

$$\frac{dx}{dt}=2at,\ \frac{dy}{dt}=2a$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}$$

आणि $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{t^2}.\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2at^3}$$



आकृति 1.7

आपल्याला माहित आहे, $$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left[1+\frac{1}{t^2}\right]^{3/2}}{-\frac{1}{2at^3}}$$

$$=-2a\left(t^2+1\right)^{3/2}$$

$\therefore$ $$\rho\left(at_1^2, 2at_1\right)=-2a\left(t_1^2+1\right)^{3/2}$$

आणि $$\rho\left(a t_2^2, 2a t_2\right) = -2a\left(t_2^2+1\right)^{3/2}$$

∴ $$\rho_1^{-2/3}+\rho_2^{-2/3} = \left[2a\left(t_1^2+1\right)^{3/2}\right]^{-2/3} + \left[2a\left(t_2^2+1\right)^{3/2}\right]^{-2/3}$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{1}{t_1^2+1}+\frac{1}{t_2^2+1}\right] = (2a)^{-2/3}\left[\frac{t_2^2+1+t_1^2+1}{\left(t_1^2+1\right)\left(t_2^2+1\right)}\right]$$

$$= (2a)^{-2/3}\left[\frac{t_1^2+t_2^2+2}{t_1^2+t_2^2+(-1)^2+1}\right] = (2a)^{-2/3} \text{ सिद्ध केले } [\because t_1\, t_2 = -1]$$

उदाहरण 1.7: सिध्द करा कि एलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ च्या दीर्घ अक्षा च्या टोकाला वक्रता त्रिजा हि सेमी लॅटस रेक्टम बरोबर असते.

उकल: एलिप्सचे पॅरामेट्रिक स्वरूपातील समीकरण, $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ आहे आणि दीर्घ अक्षाची टोके ($\pm a$, 0) आहे, 't' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

∴ $$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot t$$

आणि $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}^2 t\,\frac{dt}{dx} = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3 t$$

वक्रता त्रिजा $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1+\frac{b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}\right]^{3/2}}{-\frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3 t}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}$$ (उणे चिन्हाकडे दुर्लक्ष केल्यावर)

$$= \frac{1}{ab}\left(a^2\sin^2 0 + b^2\cos^2 0\right)^{3/2}$$ (ρ या $(a,0)$ बिंदूवर)

$$= \frac{b^2}{a}$$ (एलिप्सचे सेमी लॅटस रेक्टम) (सिद्ध केले)

उदाहरण 1.8: वक्र $x = c\log\left(s+\sqrt{s^2+c^2}\right),\ y = \sqrt{s^2+c^2}$ ची वक्रता त्रिजा काढा.

उकल: दिले आहे: $x = c\log\left(s+\sqrt{s^2+c^2}\right), y = \sqrt{s^2+c^2}$

's' सोबत डिफरंशिएशन केल्यावर

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{s+\sqrt{s^2+c^2}}\left(1+\frac{2s}{2\sqrt{s^2+c^2}}\right) = \frac{c}{\sqrt{s^2+c^2}}$$

आणि $$\frac{dy}{ds} = \frac{2s}{2\sqrt{s^2+c^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2+c^2}}$$

म्हणून, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{s}{c} \qquad \ldots(1)$$

आपल्याला माहित आहे , $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad s = c\tan\psi$ [समीकरण (1) वरून]

$\therefore$ वक्रता त्रिजा , $$\frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$

$$= c\left(1+\tan^2\psi\right)$$

$$= c\left(1+\frac{s^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{c^2+s^2}{c}$$ **(उकल)**

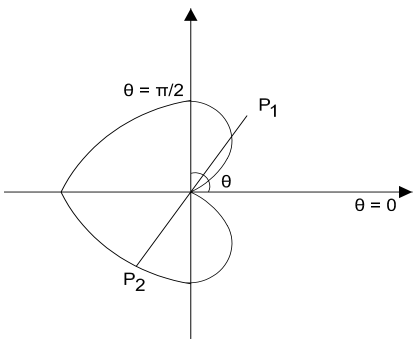
उदाहरण 1.9: सिध्द करा कि वक्र $r^2 = a^2\sin 2\theta$ मध्ये वक्रता ही त्रिज्या वेक्टर नुसार बदलते.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 1.10: जर ρ_1 आणि ρ_2 कार्डिऑईड वक्र $r = a(1-\cos\theta)$ च्या ध्रुवाद्वारे कोणत्याही जीवाच्या टोकावर वक्रतेची त्रिज्या असतील, तर सिध्द करा कि $\rho_1^2+\rho_2^2 = \dfrac{16a^2}{9}$.

उकल: कार्डिऑईड $r = a(1-\cos\theta)$ आकृती 1.8 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे .

जर बिंदु P_1 (r_1, θ) असेल , तर P_2 $(r_2, \pi+\theta)$ असेल कारण P_1 आणि P_2 ध्रुवांमधून जाणाऱ्या जीवाची टोके आहेत



आकृति 1.8

तेव्हा $$\frac{dr}{d\theta} = r_1 = a\sin\theta$$

आणि $$\frac{d^2r}{d\theta^2} = r_2 = a\cos\theta$$

आपल्याला माहित आहे , $$\rho = \frac{\left(r^2+r_1^2\right)^{3/2}}{r^2+2r_1^2-r\,r_2}$$

$$= \frac{\left[a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]^{3/2}}{a^2(1-\cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta - a^2(1-\cos\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{a^3(1-\cos\theta)^{3/2}\,2\sqrt{2}}{3a^2(1-\cos\theta)} = \frac{a}{3}2\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{1/2}$$

$\therefore$ $$\rho_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1-\cos\theta)^{1/2}$$

आणि $$\rho_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1-\cos(\theta+\pi))^{1/2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1+\cos\theta)^{1/2}$$

$\therefore$ $$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{8a^2}{9}(1-\cos\theta+1+\cos\theta) = \frac{16a^2}{9}$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{16a^2}{9}$$ म्हणून सिद्ध झाले

अभ्यास 1.1

खालील वक्रांच्या दिलेल्या बिंदूवर वक्रतेची त्रिज्या शोधा:

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, बिन्दु $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$
2. $x^3 + y^3 = 3axy$, बिन्दु $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$
3. $y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$, बिन्दु $(a, 0)$ [**सूचना:** वक्रतेचे समीकरण आहे $x = \frac{a^2}{y^2+a^2}$]
4. $x^2y = a(x^2+y^2)$ बिन्दु $(-2a, 2a)$
5. वक्र $y = e^x$ च्या वक्रतेची त्रिज्या शोधा ज्या ठिकाणी ती y- अक्षाला छेदते.
6. कैटेनरी $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ च्या कोणत्याही बिंदू $(0, c)$ वर वक्रतेची त्रिज्या शोधा.
7. सिध्द करा कि पॅराबोला $y^2 = 4ax$ साठी ρ^2, हा $(SP)^3$ नुसार बदलतो, जेथे ρ हा पॅराबोलाच्या कोणत्याही बिंदू P वरील वक्रतेची त्रिज्या आहे आणि S ही पॅराबोलाची नाभी आहे.
8. सायकलॉइड $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, बिंदूं P, Q वरील स्पर्शिका काटकोनात आहेत. दाखवा की जर ρ_1, ρ_2 या बिंदूंवर वक्रतेची त्रिज्या असेल तर $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$.

9. सिध्द करा कि ऐस्ट्रॉइड $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ च्या कोणत्याही बिंदूवरील वक्रता त्रिज्या ही त्या बिंदू वरील आरंभबिंदूच्या स्पर्शरेषेवर टाकलेल्या लंबाच्या लांबीच्या तीनपट असते.

10. सिध्द करा कि इलिप्स साठी $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \rho=\frac{a^2b^2}{P^3}$ जिथे P केंद्रातून स्पर्शरेषाला बिन्दु (x, y) वर काढलेला लम्ब आहे.

11. पॅराबोला $y^2 = 8x$ वरील बिंदू शोधा जिथे वक्रता त्रिज्या $7\frac{13}{16}$ आहे.

12. सिध्द करा कि वक्र ; $x=a\cos\theta(1+\sin\theta), y=a\sin\theta(1+\cos\theta)$, साठी $\theta=-\frac{\pi}{4}$ वर वक्रता त्रिज्या a आहे.

खालील वक्रांसाठी (रॅडियस ऑफ कर्वेचर) वक्रता त्रिज्या शोधा:

13. $r=a\cos n\theta$

14. $r^m=a^m\sin m\theta$

15. $r^2\cos 2\theta=a^2$

16. सिध्द करा कि वक्र $r=a\cos n\theta$ च्या कोणत्या हि बिंदूवर रेडीअस ऑफ कर्वेचर (वक्रता त्रिज्या) $\frac{a}{1+n^2}$, असते जेंव्हा $r = a$ आहे.

17. सिध्द करा कि वक्र $\theta=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}-\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$ साठी रेडीअस ऑफ कर्वेचर (वक्रता त्रिज्या)$r\sqrt{r^2-a^2}$ आहे.

18. सिध्द करा कि लेमनिसकेट $r^2=a^2\cos 2\theta$ ची वक्रता त्रिज्या, ज्या बिंदूवर स्पर्शिका x-अक्षला समांतर आहे ती $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ असते.

उत्तरे

1. $\frac{a}{\sqrt{2}}$	2. $\frac{3a}{8\sqrt{2}}$	3. $\frac{a}{2}$	4. 2
5. $2\sqrt{2}$	6. c	11. $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$ आणि $\left(\frac{9}{8}, -3\right)$	
13. $\frac{\left(r^2+a^2n^2-r^2n^2\right)^{3/2}}{r^2-r^2n^2+2a^2n^2}$	14. $\frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$	15. $\frac{r^3}{a^2}$	

1.1.3 सेंटर ऑफ कर्वेचर, सर्कल ऑफ कर्वेचर (वक्रता केंद्र, वक्रता वर्तुळ)

1.1.3.1 सेंटर ऑफ कर्वेचर

वक्र AB च्या कोणत्याही बिंदू P वर वक्रता केंद्र हा तो बिंदू आहे जो P वरील नॉर्मलच्या पॉज़िटिव दिशेवर आहे आणि त्यापासून वक्रतेच्या त्रिजेइतक्या अंतरावर आहे.

1.1.3.2 सर्कल ऑफ कर्वेचर

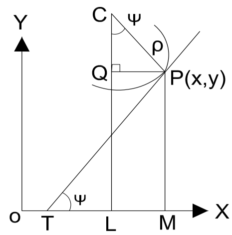
जर $'C'$ वक्रता केंद्र आहे, तर केंद्र $'C'$ असलेले आणि बिंदू P मधून जाणाऱ्या वक्रता त्रिज्या $'\rho'$ असलेल्या वर्तुळाला सर्कल ऑफ कर्वेचर (वक्रता वर्तुळ) म्हणतात.

समजा ρ ही वक्रता त्रिज्या आहे आणि $(\bar{x}, \bar{y})$ दिलेल्या बिन्दूवर वक्रता केंद्र चे निर्देशांक आहेत तर वक्रता वर्तुळाचे समीकरण $(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2=\rho^2$ द्वारे दिले जाते.

1.1.4 वक्रता केंद्राचे निर्देशांक (कॉर्डिनेट्स ऑफ सेंटर ऑफ कर्वेचर)

समजा $(\bar{x}, \bar{y})$ वक्रता केंद्र C चे निर्देशांक आहेत, जो वक्रावर $P(x, y)$ वर नॉर्मल (लंब) अश्याप्रकारे स्थित आहे कि

$$PC = \rho$$



आकृती 1.9

आकृती 1.9 पासून, आपल्याकडे आहे ,

$$\bar{x} = OL = OM - LM$$

$$= OM - PQ \qquad (\because LM = PQ)$$

आता $\quad OM = x$

आणि $\quad PQ = PC\sin\psi = \rho\sin\psi$

$$\therefore \quad \bar{x} = x - \rho\sin\psi \qquad \ldots(1)$$

अश्याप्रकारे , $\quad \bar{y} = CL = CQ + QL$

$$= CQ + PM \qquad (\because QL = PM)$$

आणि $\quad CQ = PC\cos\psi = \rho\cos\psi$ तसेच $PM = y$

$$\therefore \quad \bar{y} = y + \rho\cos\psi \qquad \ldots(2)$$

तर, आमच्याकडे आहे,

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y_1$$

$$\therefore \quad \sin\psi = \tan\psi\cos\psi$$

$$= \frac{\tan\psi}{\sec\psi} = \frac{\tan\psi}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} \text{ किंवा } \sin\psi = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

समीकरण (1) आणि (2) मध्ये $\sin\psi$ आणि $\cos\psi$ वापरल्यास आपल्याला मिळते

$$\bar{x} = x - \rho\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} \text{ आणि } \bar{y} = y + \frac{\rho}{\sqrt{1+y_1^2}}$$

पण, जसे आपल्याला माहित आहे ,

$$\rho = \frac{\left(1+y_1^2\right)^{3/2}}{y_2}$$

तर, आमच्याकडे आहे,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}\left(1 + y_1^2\right) \qquad \ldots(3)$$

$$\bar{y} = y + \frac{1}{y_2}\left(1 + y_1^2\right) \qquad \ldots(4)$$

वक्रता केंद्राचे आवश्यक निर्देशांक आहेत.

जर आपण समीकरण (3) आणि (4) आणि वक्राच्या समीकरण यांच्यामध्ये x, y काढून टाकले तर तो आपल्याला $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ मधील संबंध प्राप्त होईल जे इवोल्युट चे समीकरण आहे

इतिहास

ह्युजेन्सने वक्रता केंद्रांच्या लोकसचे नाव वक्रतेचा इवोल्युट (evolute)दिले आणि ते कसे करावे हे दर्शविले एक परिपूर्ण पेंडुलम तयार करा, ज्याचा कालावधी त्याच्या अँप्लिटयूड वर अवलंबून नाही. सायकलॉइडला उदवलीत करणे हे त्याच्याशी एकरूप आहे या वस्तुस्थितीवर आधारित आहे.

1.1.5 इवोल्युट (Evolute)

वक्रावरील प्रत्येक बिंदूशी संबंधित आपण त्या बिंदूवर वक्रांची वक्रता शोधू शकतो. या बिंदूवर नॉर्मल (लंब)काढून आपण या प्रत्येक बिंदूशी संबंधित वक्रता केंद्र शोधू शकतो. वक्रता बिंदूनुसार बदलत असल्याने, वक्रता केंद्र देखील बदलत असते. अश्या एकूण वक्रता केंद्रांमुळे अजून एक वक्र परिभाषित होतो त्या वक्राला वक्राचा इवोल्युट म्हणतात. दिलेल्या वक्रांच्या वक्रता केंद्रांच्या लोकसला त्या वक्राचा इवोल्युट म्हणतात.

वक्रावरील चल बिंदू p च्या वक्राच्या केंद्रांच्या लोकस (locus) ला वक्राचा इवोल्युट म्हणतात. एका वक्रा वरील चल बिंदू P च्या वक्रता केंद्राच्या बिंदूचे निधाना ला (लोकस ऑफ पॉईंट) वक्राचा इवोल्युट म्हणतात. वक्रालाच इवोल्युट चा इनवोल्युट म्हणतात.

येथे, वक्रावरील वेगवेगळ्या बिंदूंसाठी, आपल्याला वक्रतांचे वेगवेगळे केंद्र मिळतात. या सर्वांच्या वक्रता केंद्रांच्या लोकसला (locus) वक्रता केंद्रांचे इवोल्युट म्हणतात. बाह्य वक्र जे वक्रता ह्या सगळ्या केंद्रांना संतुष्ट करतो त्याला इवोल्युट म्हणतात. येथे इव्होल्यूट म्हणजेच वक्र समीकरण.

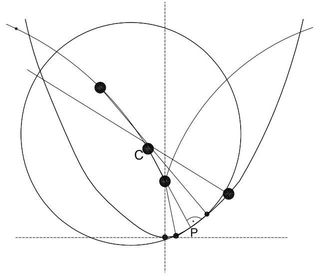
इव्होल्यूट शोधण्यासाठी, खालील मॉडेल अस्तित्वात आहेत.

जर वक्रांचे समीकरण दिले गेले असेल आणि जर आपल्याला सिद्ध करायचे असेल, डावी बाजू = उजवी बाजू, तर खालील पायऱ्याचे (steps) अनुसरण केले पाहिजे:

1. प्रथम वक्रता केंद्र, $C(\bar{x}, \bar{y})$ शोधा जेथे $\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}\left(1 + y_1^2\right)$,

   $\bar{y} = y + \frac{1}{y_2}\left(1 + y_1^2\right)$, आणि नंतर डाव्या बाजूचा

   विचार करा: त्यामध्ये थेट x च्या जागी $\bar{x}$ आणि y च्या जागी $\bar{y}$.
   त्याचप्रमाणे उजव्या बाजूसाठी आणि नंतर दाखवा की
   डावी बाजू = उजवी बाजू.



आकृति 1.10

2. जर वक्र दिलेला असेल आणि जर आपल्याला दिलेल्या वक्रातील इव्होल्यूट शोधण्यास सांगितले गेले तर खालीलप्रमाणे करा:
   प्रथम वक्रता केंद्र शोधा $C(\bar{x}, \bar{y})$ आणि मग x च्या रूपात $\bar{x}$ आणि
   y च्या दृष्टीने $\bar{y}$ पुन्हा लिहा आणि नंतर दिलेल्या वक्र मध्ये ठेवा, जे
   आपल्याला आवश्यक इव्होल्यूट देते.
3. जर दिलेला वक्र पॅरामेट्रिक स्वरूपात दिला असेल तर आधी वक्रता केंद्र शोधा जे पॅरामेट्रिक स्वरूपात असेल, मग $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ ही मूल्ये वापरून पॅरामीटर काढून टाका, जो आपल्याला इवोल्युट देतो.
   इव्होल्यूट आणि सेंटर ऑफ कर्वेचर बाजूला दिलेल्या आकृति 1.10 मध्ये चित्रात्मक दर्शविले आहे

1.1.6 इनवोल्युट (Involute)

एक वक्र जो काल्पनिक तार जोडून प्राप्त होतो आणि नंतर दिलेल्या वक्रावर घट्ट लपेटून आणि सोडून मिळते त्याला (differential) डीफरन्शियल जॉमेटरीत इनवोल्युट म्हणतात. इनवोल्युट किंवा इवोल्युट हा तारेच्या फ्री एन्ड चा लोकस आहे.

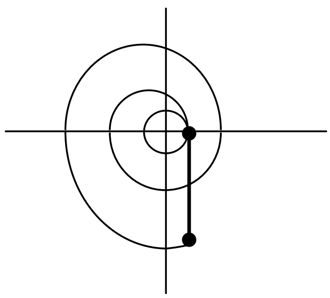
अधिक स्पष्टीकरणासाठी: इनवोल्युट च्या इवोल्युट चा वक्र मूळ वक्र म्हणून संदर्भित केला जातो. दुस-या शब्दात, वक्राच्या वक्रता केंद्रांच्या लोकसला इवोल्युट म्हणतात.

टिप्पणी: हा भूमितीच्या विशेष शाखेचा एक भाग आहे ज्याला वक्राची डीफरन्शियल भूमिती म्हणतात. ते युक्लिडियन स्पेसमध्ये असलेल्या सफाईदार वक्रांबद्दल बोलतो आणि इंटिग्रलच्या आणि डीफरन्शियल कॅलक्यूलसच्या विविध पद्धतींचे अनुप्रयोग आहेत. इतर काही वक्रांशी संबंधित आकारांना इनवोल्युट म्हणतात. 1673 मध्ये क्रिस्टीन हायजिन्सने याचा शोध लावला. ते डच गणितज्ञ आणि भौतिकशास्त्रज्ञ होते.

1.1.6.1 वक्राचे इनवोल्युट (Involutes of the Curves)

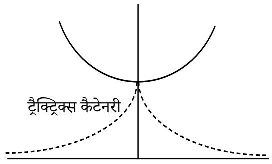
खाली दाखवल्याप्रमाणे येथे आपण वेगवेगळ्या वक्राचे इनवोल्युट पाहू:

- वर्तुळाचा इनवोल्युट
- कॅटेनरी चा इनवोल्युट
- डेल्टोईड चा इनवोल्युट
- पॅराबोला चा इनवोल्युट
- इलिप्स चा इनवोल्युट



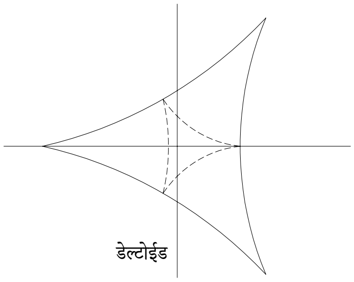
आकृति 1.11: वर्तुळाचा इन्व्हॉल्यूट

1. **वर्तुळाचा इनवोल्युट:** हा आर्किमिडीज स्पायरल सारखा आहे.
2. **कॅटेनरी चा इन्व्हॉल्यूट:** हे एक वक्र आहे जे त्याच्या टोकांना समर्थित हँगिंग केबलसारखे आहे. ही एक Uआकार ची लटकलेली तार आहे, हि पॅराबोला सारखी दिसते ट्रैक्ट्रिक्स, शिरोबिंदू मधून जाण्याऱ्या कॅटेनरी चा इन्व्हॉल्यूट.



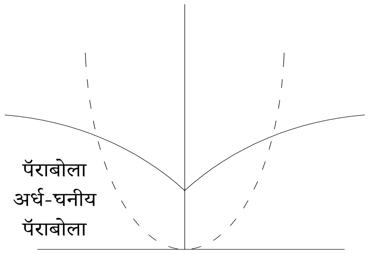
आकृति 1.12: कॅटेनरी चा इनवोल्युट

3. **डेल्टोईड चा इनवोल्युट:** हे तीन क्यस्पसह त्रिकोणी वक्र आहे. हे ग्रीक अक्षर डेल्टासारखे आहे



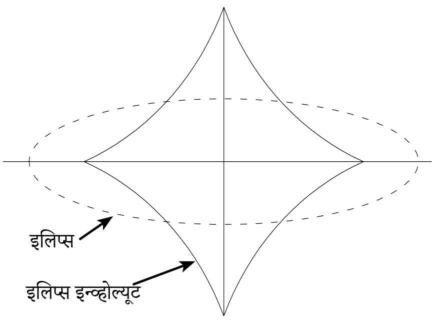
आकृति1.13: डेल्टोईडचा इनवोल्युट प्रतिकेन्द्रज

4. **पॅराबोला चा इनवोल्युट:**



आकृति 1.14: पॅराबोला चा इनवोल्युट

5. **इलिप्स चा इनवोल्युट:**



आकृति 1.15: इलिप्स चा इनवोल्युट

खालील समीकरणे दिलेल्या राशींना परिभाषित करण्यासाठी वापरली जातात:

- वर्तुळाचा इनवोल्युट
- कॅटेनरी चा इनवोल्युट
- डेल्टोईड चा इनवोल्युट
- पॅराबोला चा इनवोल्युट
- इलिप्स चा इनवोल्युट

वर्तुळाचा इनवोल्युट: $x = r(\cos t + t\sin t),\ y = r(\sin t - t\cos t)$, येथे , r = वर्तुळाची त्रिज्या, t = रेडियन मध्ये कोनाचा पॅरामीटर आहे.

कॅटेनरी चा इनवोल्युट: $x = t - \tanh t,\ y = \operatorname{sech} t$, येथे t पॅरामीटर आहे

डेल्टोईड चा इनवोल्युट ट: $x = 2r\cos t + r\cos 2t,\ y = 2r\sin t - r\sin 2t$, येथे, r = डेल्टॉइडच्या निर्मितीच्या संबंधित रोलिंग वर्तुळाची त्रिज्या.

पॅराबोलाचा इनवोल्युट: $x^3 = a\,y^2$

1.1.7 इनव्हेलोप (Envelope)

दिलेल्या वक्र समूहा तील प्रत्येक सदस्याला स्पर्श करणाऱ्या वक्राला त्या समूहा चा इनव्हेलोप म्हणतात.

दिलेल्या वक्र समूहा साठी इनव्हेलोप शोधण्याची प्रक्रिया.

स्थिति 1: वक्रांच्या एका पॅरामीटर समूहाचा इनव्हेलोप (Envelope).

समजा $y = f(x, \alpha)$ वक्रांचा समूह ज्याचा पॅरामीटर 'α' आहे.

स्टेप 1: पॅरामीटर α सोबत पार्शली डिफरंशिएट करा आणि पॅरामीटरचे मूल्य शोधा.

स्टेप 2: दिलेल्या वक्रांच्या समूहात पॅरामीटर α चे मूल्य ठेवून, आपल्याला आवश्यक इनव्हेलोप मिळते

विशेष स्थिति: जर वक्राचे दिलेले समीकरण पॅरामीटरच्या दृष्टीने वर्गसमीकरण आहे, अर्थात $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, तर इन्व्हेलोप चा **डिस्क्रिमिनन्ट = 0** अर्थात $B^2 - 4AC = 0$.

स्थिति 2: वक्रांच्या दोन पॅरामीटरसमूहा चा इन्व्हेलोप

समजा $y = f(x, \alpha, \beta)$ दिलेल्या वक्रांच्या समूहासाठी आणि दोघांना जोडणारा संबंध विचारात घेऊ आणि दोन पॅरामीटर αआणि β, जोडणारा $g(\alpha, \beta) = 0$ संबंध विचारात घेऊ,

स्टेप 1: स्वतंत्र व्हेरिएबल म्हणून, α चा विचार करा आणि β, α वर अवलंबून आहे . तेंव्हा $y = f(x, \alpha, \beta) = 0$ आणि $g(\alpha, \beta) = 0$ ला पॅरामीटर 'α' पार्शली डीफरन्शिएट करा.

स्टेप 2: स्टेप 1 आणि $g(\alpha, \beta) = 0$ समीकरणांमधून पॅरामीटर α आणि β, काढून टाकून आपल्याला आवश्यक इनव्हेलोप मिळतो.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.11: सिध्द करा कि वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ वर स्थित बिंदु $(a/4, a/4)$ वर वक्रता केंद्र (centre of curvature) $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right)$ आणि वक्रता वर्तुळाचे (circle of curvature) समीकरण $\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ आहे.

उकल: इथे, वक्र चे समीकरण

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a \qquad \ldots(i)$$

x सोबत डीफरन्शिएट करुन,

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\,y_1 = 0 \qquad \ldots(ii)$$

परत x सोबत डीफरन्शिएटिंग करा,

$$-\frac{1}{4}x^{-3/2}-\frac{1}{4}y^{-3/2}\,y_1.y_1+\frac{1}{2}y^{-1/2}\,y_2=0 \quad \ldots\text{(iii)}$$

समीकरण (ii) वरून, बिंदु $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ वर , आपल्याला मिळेल

$$\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}\,y_1=0$$

$\Rightarrow$ $$y_1=-1$$

समीकरण (iii) वरून,बिंदु $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ वर , आपल्याला मिळेल

$$-\frac{1}{4}.\frac{4}{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{1}{4}.\frac{4}{a}.\frac{2}{\sqrt{a}}(-1)^2+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{a}}\,y_2=0$$

$\Rightarrow$ $$-\frac{4}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\,y_2=0$$

$\Rightarrow$ $$y_2=\frac{4}{a}$$

ρ (दिलेल्या बिंदूवर) $$=\frac{\left[1+y_1^{\,2}\right]^{3/2}}{y_2}=\frac{(1+1)^{3/2}}{4/a}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

समजा $(\overline{x},\overline{y})$ वक्रता चा केंद्र $(a/4,\ a/4)$ आहे, तेंव्हा

$$\overline{x}=x-\frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$=\frac{a}{4}-\left[-\frac{(1+1)}{4/a}\right]$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{a}{2}=\frac{3}{4}a$$

आणि, $$\overline{y}=y+\frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{1+1}{4/a}$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{a}{2}=\frac{3}{4}a$$

∴ वक्रतेवर वर्तुळाचे समीकरण आहे,

$$(x-\overline{x})^2+(y-\overline{y})^2=\rho^2$$

$$\left(x-\frac{3}{4}a\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}a\right)^2=\frac{a^2}{2}$$ **(सिद्ध केले)**

उदाहरण 1.12: सिध्द करा कि ट्रैक्ट्रिक्स $x=c\cos t+c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right), y=c\sin t$ च्या इवोल्युट(evolute) चे समीकरण

कैटेनरी $y=c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ आहे.

उकल: दिलेले वक्र समीकरण आहे

$$x=c\cos t+c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right), y=c\sin t$$

't' सोबत डीफरन्शिएटिंग करा,

$$\frac{dx}{dt}=-c\sin t+\frac{c}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}.\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$=-c\sin t+\frac{c\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$=-c\sin t+\frac{c}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}=-c\sin t+\frac{c}{\sin t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c\left(1-\sin^2 t\right)}{\sin t}=\frac{c\cos^2 t}{\sin t}$$

आणि, $$\frac{dy}{dt}=c\cos t$$

अशा प्रकारे, $$y_1=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$=c\cos t.\frac{\sin t}{c\cos^2 t}=\tan t$$

आणि, $$y_2=\frac{d^2y}{dx^2}=\sec^2 t.\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 t}.\frac{\sin t}{c\cos^2 t}=\frac{\sin t}{c\cos^4 t}$$

समजा $(\bar{x}, \bar{y})$ वक्रतेच्या कोणत्याही बिंदूवर वक्रता केंद्र आहे,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) - c\frac{\cos^4 t}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= c\cos t + c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) - c\cos t$$

$$\bar{x} = c\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \ldots(\text{i})$$

अथवा,

$$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= c\sin t + \frac{1+\tan^2 t}{\frac{\sin t}{c\cos^4 t}}$$

$$= c\sin t + \frac{c\cos^4 t}{\sin t}.\sec^2 t$$

$$= c\sin t + \frac{c\cos^2 t}{\sin t}$$

$$= \frac{c\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{\sin t}$$

$$\bar{y} = \frac{c}{\sin t} \qquad \left[\because \sin^2 t + \cos^2 t = 1\right] \qquad \ldots(\text{ii})$$

इवोल्युट हा दिलेल्या $(\bar{x}, \bar{y})$ वक्राचा लोकस आहे . समीकरण (i) आणि (ii) मधून t ला काढून,

समीकरण (i) वरून ,

$$\log\tan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\bar{x}}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{t}{2}\right) = e^{\bar{x}/c} \qquad \ldots(\text{iii})$$

समीकरण (ii) वरून,

$$\frac{\bar{y}}{c} = \frac{1}{\sin t} = \frac{1+\tan^2(t/2)}{2\tan(t/2)}$$

$$\frac{\bar{y}}{c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tan(t/2)} + \tan(t/2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\bar{x}}{c}} + e^{\frac{\bar{x}}{c}}\right) \qquad \text{[समीकरण } (iii) \text{ वरून]}$$

$$\bar{y} = c\cosh\left(\frac{\bar{x}}{c}\right)$$

$\bar{x}$ ला x, $\bar{y}$ ला y बदलल्यावर (x, y) चा लोकस

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \textbf{(उकल)}$$

इवोल्युट चे समीकरण आहे

उदाहरण 1.13: दिलेल्या वक्रासाठी $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ कोणत्याही बिंदु वर वक्रता केंद्राचे निर्देशांक शोधा. तसेच वक्राची त्रिज्या (रेडिअस ऑफ कर्वेचर) (ρ)आणि इवोल्युट चे समीकरण शोधा.

उकल: दिलेल्या वक्रचे पॅरामीट्रिक समीकरण आहे

$$x = a\cos^3 t \qquad y = a\sin^3 t \qquad \ldots(1)$$

't' सोबत डीफरन्शिएटिंग करा

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$\therefore \qquad y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

आणि,
$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-\tan t)$$

$$= -\sec^2 t\frac{dt}{dx} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

$\therefore$ वक्रता त्रिज्या (ρ)
$$= \frac{\left[1 + y_1^2\right]^{3/2}}{y_2}$$

$$= \left(1 + \tan^2 t\right)^{3/2} \times 3a\sin t\cos^4 t$$

$$= \frac{3a\sin t\cos^4 t}{\left(\cos^2 t\right)^{3/2}} = 3a\sin t\cos t$$

आता बिंदु 't' वर वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y})$ दिलेले आहे

$$\bar{x} = x - \rho\sin\psi$$

$$= x - \frac{y_1\left(1 + y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x + \tan t\left(1+\tan^2 t\right)\times 3a\sin t\cos^4 t \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = x + 3a\sin^2 t\cos t$$

$$= a\cos^3 t + 3a\sin^2 t\cos t \qquad \left[\because x = a\cos^3 t\right] \qquad \ldots(2)$$

त्याचप्रकारे $$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1+\tan^2 t}{\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}}$$

$$= y + \left(1+\tan^2 t\right)\left(3a\sin t\cos^4 t\right)$$

$$= y + 3a\sin t\cos^2 t$$

$$\bar{y} = a\sin^3 t + 3a\sin t\cos^2 t \qquad \left[\because y = a\sin^3 t\right] \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1), (2) आणि (3) वरून x, y आणि t ला काढून टाकल्यावर

$$\bar{x}+\bar{y} = a\left(\cos^3 t + \sin^3 t + 3\sin^2 t\cos t + 3\cos^2 t\sin t\right)$$

$$= a\left(\cos t + \sin t\right)^3$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos t + \sin t\right)^2 \qquad \ldots(4)$$

अश्या प्रकारे $$\left(\bar{x}-\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos t - \sin t\right)^2 \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (4) आणि (5) यांची बेरीज करून,

$$\left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} + \left(\bar{x}-\bar{y}\right)^{2/3} = a^{2/3}\left(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t\sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t\sin t\right)$$

$$= a^{2/3}(1+1) = 2a^{2/3}$$

म्हणून, $(\bar{x}, \bar{y})$ चा लोकस, अर्थात् इवोल्युट चे समीकरण आहे

$$\left(\bar{x}+\bar{y}\right)^{2/3} + \left(\bar{x}-\bar{y}\right)^{2/3} = 2a^{2/3}$$

आणि वक्रता केंद्राचे निर्देशांक (coordinates) $\left(a\cos^3 t + 3\sin^2 t\cos t,\ a\sin^3 t + 3\sin t\cos^2 t\right)$ आहे.

उदाहरण 1.14: दिलेल्या आयताकृती हायपरबोलासाठी $xy = a^2$ (अर्थात $x = at$, $y = a/t$) ,

i. वक्रता त्रिज्या काढा (ρ)

ii. वक्रता केंद्राचे निर्देशांक काढा म्हणजे $(\bar{x}, \bar{y})$

iii. सिध्द करा कि दिलेल्या वक्राचा इवोल्युट $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$ आहे

उकल: i. वक्रता त्रिज्या शोधण्यासाठी, आपल्याकडे आहे

$$xy = a^2 \text{ किंवा } y = \frac{a^2}{x}$$

$\therefore \qquad y_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2}$ आणि $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2}{x^3}$

याप्रमाणे, $\rho = \frac{\left[1+y_1^2\right]^{3/2}}{y_2} = \frac{\left(1+\frac{a^4}{x^4}\right)^{3/2}}{2a^2/x^3}$

$$\rho = \frac{x^3}{2a^2}\left(\frac{x^4+a^4}{x^4}\right)^{3/2}$$ **(उकल)**

ii. वक्रता केंद्राचे निर्देशांक शोधणे.

$$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2} \text{ आणि } \bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$\Rightarrow \qquad \bar{x} = x - \frac{\frac{-a^2}{x^2}\left(1+\frac{a^4}{x^4}\right)}{2a^2/x^3}$

$\Rightarrow \qquad = x + \frac{x^4+a^4}{2x^3}$

$\Rightarrow \qquad = \frac{2x^4+x^4+a^4}{2x^3}$

$\Rightarrow \qquad = \frac{3x^4+a^4}{2x^3} = \frac{3x^4+x^2y^2}{2x^3} \qquad \left[\because x\,y = a^2\right]$

$\Rightarrow \qquad \bar{x} = \frac{3}{2}x + \frac{y^2}{2x}$

त्याचप्रमाणे $\qquad \bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$

$$= y + \frac{1+\frac{a^4}{x^4}}{2a^2/x^3} = y + \frac{x^4+a^4}{2a^2x}$$

$$= y + \frac{x^4+x^2y^2}{2x^2y} \qquad \left[\because x\,y = a^2\right]$$

$$\bar{y} = y + \frac{x^2+y^2}{2y} = \frac{x^2+3y^2}{2y} = \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}$$

अशा प्रकारे, वक्रता केंद्राचे निर्देशांक (coordinates) आहेत $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{y^2}{2x}, \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}\right)$ **(उकल)**

iii. तसेच, दिलेल्या वक्राच्या इवोल्युट चे समीकरण $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=(4a)^{2/3}$ शोधण्यासाठी,

$$\bar{x}+\bar{y}=\frac{1}{2xy}\left[x^3+y^3+3x^2y+3xy^2\right]$$

$$=\frac{1}{2xy}(x+y)^3=\frac{1}{2a^2}(x+y)^3$$

$$\Rightarrow \qquad (\bar{x}+\bar{y})^{2/3}=\frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(x+y)^2 \qquad \left[\because xy=a^2\right]$$

त्याचप्रमाणे, $$(\bar{x}-\bar{y})^{2/3}=\frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(x-y)^2$$

म्हणून, आपल्याकडे आहे

$$(\bar{x}+\bar{y})^{2/3}-(\bar{x}-\bar{y})^{2/3}=\frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}(4xy)=\frac{1}{\left(2a^2\right)^{2/3}}\left(4a^2\right)=(4a)^{2/3}$$

त्यामुळे $(\bar{x},\bar{y})$ चे लोकस आहे

$$(\bar{x}+\bar{y})^{2/3}-(\bar{x}-\bar{y})^{2/3}=(4a)^{2/3}.$$

उदाहरण 1.15: खालील वक्रांसाठी वक्रता केंद्र शोधा:

(*i*) $y=x^3-6x^2+3x+1$, बिन्दु $(1,-1)$ वर

(*ii*) पॅराबोला $y^2=4ax$, बिन्दु (x, y) आणि दिलेल्या वक्राच्या इवोल्युट चे समीकरण देखील शोधा.

(*iii*) लंबवर्तुळ(इलिप्स) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ बिन्दु (x, y) वर आणि त्याचे इवोल्युट देखील शोधा.

उकल: (i) दिलेला वक्र आहे $y=x^3-6x^2+3x+1$

'x' सोबत डिफरंशिएट करा

$$y_1=\frac{dy}{dx}=3x^2-12x+3$$

$$y_1(1,-1)=-6$$

त्याचप्रमाणे $$y_2=\frac{d^2y}{dx^2}=6x-12$$

$$y_2(1,-1)=-6$$

अशा प्रकारे $$\bar{x}=x-\frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= 1 - \frac{(-6)\left[1+(-6)^2\right]}{-6} = -36$$

आणि $$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = -1 + \frac{1+(-6)^2}{-6} = -\frac{43}{6}$$

म्हणून वक्रता केंद्राचे निर्देशांक $(\bar{x}, \bar{y}) = (-36, -43/6)$ आहेत

(ii) पॅराबोलाचे समीकरण $y^2 = 4ax$ आहे

$$y = 2\sqrt{a\,x}$$

'x' सोबत डिफरंशिएट करा

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a}\,.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$\Rightarrow$ $$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}$$

म्हणून $$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x - \frac{\sqrt{\frac{a}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)}{-\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}} = x + 2(x+a)$$

$$= 3x + 2a \qquad \ldots (1)$$

त्याचप्रमाणे, $$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2} = y + \frac{1+\frac{a}{x}}{-\frac{1}{2}\sqrt{a}\;x^{-3/2}}$$

$$= 2\sqrt{a}\,\sqrt{x} - \frac{2(x+a)}{\sqrt{a}\;x^{-1/2}} \qquad \left[\because y = 2\sqrt{a\,x}\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\,\sqrt{x}\left(1 - \frac{x-a}{a}\right) = -\frac{2}{\sqrt{a}}x^{3/2} \qquad \ldots (2)$$

म्हणून, दिलेल्या वक्र चा वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(3x+2a, -\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{a}}\right)$ आहे .

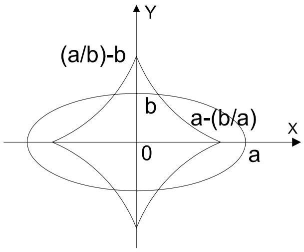
समीकरण (1) पासून, $$x = \frac{\bar{x}-2a}{3}$$

समीकरण (2) मध्ये ठेउन

$$\bar{y} = -\frac{2\left(\frac{\bar{x}-2a}{3}\right)^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

$$a\,\bar{y}^2 = 4\left(\frac{\bar{x}-2a}{3}\right)^3$$

$$27\,a\,\bar{y}^2 = 4\left(\bar{x}-2a\right)^3$$



आकृति 1.16

(उकल)

म्हणून, वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y})$ चे लोकस $27\,a\,y^2 = 4(x-2a)^3$ आहे जो इवोल्युट आहे .

(iii) लंबवर्तुळाचे(इलिप्स) दिलेले समीकरण आहे,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

'x' सोबत डिफरंशिएट करा

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y} \text{ आणि } y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2\,y^3}$$

म्हणून,
$$\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1+y_1^2\right)}{y_2}$$

$$= x - \frac{-\frac{b^2\,x}{a^2\,y}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2\,y^3}} = x - \frac{x}{a^4\,b^2}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)$$

$$= x - \frac{x}{a^4\,b^2}\left[a^2b^2\left(a^2-x^2\right)+b^4x^2\right]$$

$$\bar{x} = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3 \qquad \ldots (1)$$

त्याचप्रमाणे
$$\bar{y} = y + \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\frac{b^4}{a^2\,y^3}} = y - \frac{y}{a^2b^4}\left(a^4y^2+b^4x^2\right)$$

$$= y - \frac{y}{a^2b^4}\left[a^4y^2+a^2b^2\left(b^2-y^2\right)\right]$$

$$\bar{y} = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^3 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) वरून, $x = \left(\dfrac{\bar{x}\, a^4}{a^2 - b^2} \right)^{1/3}$

समीकरण (2) वरून, $y = \left(\dfrac{\bar{y}\, b^4}{b^2 - a^2} \right)^{1/3}$

(इलिप्स) लंबवर्तुळाच्या समीकरणात ठेऊन

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\bar{x}\, a^4}{a^2 - b^2} \right)^{2/3} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\bar{y}\, b^4}{b^2 - a^2} \right)^{2/3} = 1$$

किंवा $\quad (a\bar{x})^{2/3} + (b\bar{y})^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

म्हणून, वक्रता केंद्र $(\bar{x}, \bar{y})$ चा लोकस आहे

$$(a\bar{x})^{2/3} + (b\bar{y})^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \qquad \textbf{(उकल)}$$

दिलेल्या लंबवर्तुळाचे इवोल्युट आहे.

उदाहरण 1.16: सरळ रेषा $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ च्या समूहाचा इन्व्हेलोप काढा जिथे m पॅरामीटर आहे.

उकल: वक्रांच्या समूहाचे समीकरण दिले आहे

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad (y - mx)^2 = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + m^2 x^2 - 2mxy = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \quad m^2 (x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - b^2) = 0$$

'm' सोबत पार्शियली डिफरंशिएट करुन

$$2m(x^2 - a^2) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{xy}{x^2 - a^2}$$

दिलेल्या वक्राच्या समीकरणामध्ये m चे मूल्य ठेऊन

$$m^2 (x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{xy}{x^2 - a^2} \right)^2 (x^2 - a^2) - 2\left(\frac{xy}{x^2 - a^2} \right) xy + (y^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 y^2}{x^2-a^2}-\frac{2x^2 y^2}{x^2-a^2}+y^2-b^2=0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x^2 y^2}{x^2-a^2}+y^2-b^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 y^2}{x^2-a^2}=y^2-b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y^2=\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y^2=x^2 y^2-x^2 b^2-a^2 y^2+a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 b^2+a^2 y^2=a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ **(उकल)**

$\therefore$ दिलेल्या सरळ रेषांच्या समूहाचा इन्व्हअलोप एक लंबवर्तुळ (इलिप्स)आहे.

उदाहरण 1.17: $y=mx+am^p$ चा इन्व्हअलोप शोधा जिथे m पॅरामीटर आहे आणि a, p स्थिरांक आहेत **.**

उकल: वक्रांच्या समूहा चे समीकरण दिले आहे

$$y=mx+am^p \qquad \dots (1)$$

'm' सोबत डिफरंशिएट करून

$$0=x+pam^{p-1}$$

$$\Rightarrow \quad m=\left(-\frac{x}{pa}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

समीकरण (1) मध्ये m चे मूल्य ठेऊन

$$y=\left(-\frac{x}{pa}\right)^{\frac{1}{p-1}}x+a\left(-\frac{x}{pa}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$y^{p-1}=\left(-\frac{x}{pa}\right)x^{p-1}+a^{p-1}\left(-\frac{x}{pa}\right)^p$$

$$apy^{p-1}=(-x)^p+a^{p-2}(-x)^p$$ **(उकल)**

जे समीकरण (1) च्या इन्वेओलोप चे आवश्यक समीकरण आहे.

वक्रांच्या दोन पॅरामीटर कुटुंबाच्या इन्वेओलोप वर आधारित उदाहरणे:

उदाहरण 1.18. सरळ रेषा $ax + by = 1$ च्या समूहाचा इन्वओलोप शोधा, जिथे a आणि b हे $ab = 1$ द्वारे जोडलेले पॅरामीटर आहेत.

उकल: दिलेले आहे $$ax+by=1 \qquad \dots (1)$$

आणि $$ab = 1 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) ला a सोबत डिफरंशिएट करून (a इंडिपेन्डन्ट व्हेरीअबल b हा a वर अवलंबून आहे)

$$x + \frac{db}{da} y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da} = -\frac{x}{y} \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (2) ला a सोबत डिफरंशिएट करून

$$b + a\frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{db}{da} = -\frac{b}{a} \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (3) व (4) कडून

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ax}{1} = \frac{by}{1} = \frac{ax+by}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2x}, b = \frac{1}{2y} \qquad \ldots (5)$$

(5) वरून 'a' व 'b' समीकरण (2)मध्ये ठेवल्यावर,

$$\left(\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 4xy = 1$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.19: $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ या वक्राच्या परिवारचा इन्वओलोप शोधा जिथे a आणि b हे संबंध $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ द्वारे जोडलेले पॅरामीटर आहेत.

उकल: दिलेले

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \qquad \ldots (1)$$

आणि $$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) ला a सोबत डिफरंशिएट करून

$$\frac{\sqrt{x}}{-2a^{3/2}} - \frac{\sqrt{y}}{2b^{3/2}}\frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{x}\, b^{3/2}}{\sqrt{y}\, a^{3/2}} \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (2) ला a सोबत डिफरंशिएट करून

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (3) व (4) वरून

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \frac{b}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{1}$$ [समीकरण (1) व (2) वरून]

$$\Rightarrow \qquad a = \sqrt{x},\, b = \sqrt{y} \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (5) हे समीकरण (2) मध्ये ठेऊन, आपल्याला इनव्हेलोप मिळेल

$$x^{1/4} + y^{1/4} = 1$$ **(उकल)**

हे अपेक्षित इनव्हेलोप आहे.

उदाहरण 1.20: सरळ रेषा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ च्या समूहाचा इनव्हेलोप शोधा , जिथे a, b पॅरामीटर आहेत .

आणि ते $a + b = c$ ने जोडलेले आहेत.

उकल: दिलेले

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots (1)$$

आणि $$a + b = c$$

$$\Rightarrow \qquad b = c - a \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) हे समीकरण (1) मध्ये ठेऊन

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c-a} = 1$$

'a' सोबत डिफरंशिएट करून

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{(c-a)^2} = 0$$

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{(c-a)^2}$$

$$\frac{(c-a)^2}{a^2}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{c-a}{a}=\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{y}{x}}+1=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$a=\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

'a' समीकरण (2) मध्ये ठेऊन

$$b=c-\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{c\sqrt{x}+c\sqrt{y}-c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

a आणि b समीकरण (1) मध्ये ठेऊन

$$\frac{x}{\left(\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)}=1$$

$$\frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{c\sqrt{x}}+\frac{y\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{c\sqrt{y}}=1$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{y}{\sqrt{y}}\right)=c$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=c$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=c$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$$

हे आवश्यक इनव्हेलोप आहे.

इवोल्युट वर आधारित प्रश्न जेथे इवोल्युटला त्याच्या नॉर्मलचा इन्व्हलोप असे मानले जाते.

उदाहरण 1.21: वक्राच्या इवोल्युटला इन्व्हलोपची नॉर्मल मानून इवोल्युट काढा, $x=\cos\theta+\theta\sin\theta$, $y=\sin\theta-\theta\cos\theta$.

उकल: दिलेले

$$x=\cos\theta+\theta\sin\theta,\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta$$

'θ' सोबत डिफरंशिएट करून

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta = \theta\cos\theta$$

आणि $$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \theta(-\sin\theta) - \cos\theta = \theta\sin\theta$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\theta\sin\theta}{\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

हायपरबोलाच्या नॉर्मल चे समीकरण आहे

$$\left(y - (\sin\theta - \theta\cos\theta)\right) = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - (\cos\theta + \theta\sin\theta)\right)$$

$$\left(y - (\sin\theta - \theta\cos\theta)\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(x - (\cos\theta + \theta\sin\theta)\right)$$

$$y\sin\theta - \sin^2\theta + \theta\sin\theta\cos\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta + \theta\sin\theta\cos\theta$$

$$y\sin\theta + x\cos\theta = 1 \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला पॅरामीटर θ सोबत डिफरंशिएट करून

$$y\cos\theta - x\sin\theta = 0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) ला $\cos\theta$ आणि (2) ला $\sin\theta$ ने गुणाकार करून आणि वजाबाकी करून आपल्याला मिळते

$$x = \cos\theta \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) ला $\sin\theta$ आणि (2) ला $\cos\theta$ ने गुणाकार करून आणि बेरीज करून आपल्याला मिळते

$$y = \sin\theta \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) आणि (4) मधून θ काढून टाकल्याने, आम्हाला अपेक्षित $x^2 + y^2 = 1$ इवोल्युट मिळते

उदाहरण 1.22: हायपरबोलाला $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ त्याच्या इन्व्हलोपची नॉर्मल मानून इवोल्युट काढा .

उकल: स्वतः सोडवा.

अभ्यास 1.2

1. वक्र $y = \tan x$ च्या साठी वक्रतांची त्रिज्या आणि वक्रता केंद्र बिंदु $x = \pi/4$ वर शोधा.
2. हायपरबोला $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ साठी वक्रता केंद्र शोधा आणि त्याचे इवोल्युट देखील शोधा.
3. सिद्ध करा कि साइक्लोइड $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$ चा इवोल्युट दुसरा समान सायक्लोइड आहे.
4. सिद्ध करा कि वक्र $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$, चा इवोल्युट $x^2 + y^2 = a^2$ आहे.
5. वक्र $x\sin\theta - y\cos\theta = a\theta$ चा इन्व्हलोप (envelope) काढा, जिथे θ पॅरामीटर आहे.

6. वक्र $x\sec^2\theta + y\,\mathrm{cosec}^2\theta = a$ चा इन्व्हलोप (envelope) काढा, जिथे θ पॅरामीटर आहे

7. सरळ रेषा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ समूहाचा इन्व्हलोप (envelope) काढा, जिथे a, b पॅरामीटर आहे , जे $a^2b^3=c^5$ ने जोडलेले आहे.

8. ज्या वर्तुळांचे केंद्र लंबवर्तुळ (ellipse) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ वर आहे आणि जे त्याच्या केंद्रातून जाते अशा वर्तुळ समूहाचा इन्व्हलोप (envelope) शोधा.

9. इलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ च्या समूहाच्या इन्व्हलोपचे समीकरण काढा , जिथे पॅरामीटर 'a' आणि 'b' $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=1$ ने जोडलेले आहेत, जेथे l आणि m शून्येतर स्थिरांक आहेत.

उत्तरे

1. $\frac{5\sqrt{5}}{4}, \left(\frac{\pi-10}{4}, \frac{9}{4}\right)$

2. सूचना: $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ आणि वक्रता केंद्र $\left(\frac{a^2+b^2}{a\cos^3\theta}, \frac{-\sin^3\theta\left(a^2+b^2\right)}{\cos^3\theta}\right)$ आणि इवोल्युट

$$(a\,x)^{2/3}-(b\,y)^{2/3}=\left(a^2+b^2\right)^{2/3}$$

5. $x=a(\sin\theta+\cos\theta),\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ 6. $x^2+y^2-2xy-2ax-2ay+a^2=0$

7. $x^2y^3=\frac{72}{3125}c^5$ 8. $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(a^2x^2+b^2y^2\right)$ 9. $\frac{x}{l}+\frac{y}{m}=1$

मनोरंजक तथ्य

तुम्ही कधी मशीन किंवा खेळणी पाहिली आहेत ज्यात वायंडिंग की (key) असते, जसे की ती इन्स्ट्रुमेंट माकड खेळत आहे का? आतल्या स्पायरल स्प्रिंगमध्ये ''सर्क्युलर इन्व्हॉल्यूट'' मध्ये हालचाल होते.

दैनंदिन जीवनातील अनुप्रयोग

- ते यांत्रिक उद्योगांमध्ये, विशेषत: दात उद्योगात वापरले जातात, जेथे रोटेटिंग मशीन आणि गिअर्सचे दात बनवले जातात, ज्यामुळे कमीत कमी कंपने होऊ शकतील.
- स्क्रोल आणि गॅस कॉम्प्रेसर ही दोन अशा मशीन्स आहेत जी द्रव पंप करण्यासाठी, कॉम्प्रेस करण्यासाठी किंवा दाबण्यासाठी वापरली जातात. तेथे आकार या संकल्पनेचा एक अनुप्रयोग आहे, जे सुनिश्चित करते की ते कार्यक्षम आणि कमी आवाज करणारे आहेत.
- रस्त्याच्या वक्रतेची रचना करताना रस्ता सुरक्षा विचारात घेणे आवश्यक आहे आणि त्याचप्रमाणे घर्षण चाकाचा आकार देखील विचारात घेणे आवश्यक आहे. वक्रता ही संकल्पना त्या वेळी प्रत्यक्षात येते.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-स्वयम प्रभा-MHRD)

Curvature and Evolutes

1.2 डेफिनाइट आणि इमप्रॉपर इंटिग्रल चे मूल्यमापन

1.2.1 डेफिनाइट इंटिग्रल (निश्चित समाकलन)

एक डेफिनाइट इंटिग्रल ला $\int_a^b f(x)\,dx$ द्वारे दर्शविले जाते जिथे 'a' ला इंटिग्रलची खालची मर्यादा (Lower Limit) आणि 'b' ला इंटिग्रलची अप्पर (Upper Limit) लिमिट म्हणतात. डेफिनाइट इंटिग्रल एकतर बेरीजची मर्यादा म्हणून किंवा इंटरव्हल $[a,b]$ मध्ये अँटी-डेरिव्हेटिव्ह (antiderivative) F म्हणून प्रस्तुत केले जाते, तर त्याचे मूल्य F च्या अंतिम बिंदूच्या मूल्यांमधील फरक आहे म्हणजे F(b) – F(a). डेफिनाइट इंटिग्रल चे मूल्य एकमेव असते.

1.2.1.1 बेरजेची मर्यादा म्हणून निश्चित समाकलन (डेफिनाइट इंटिग्रल म्हणजेच लिमिट ऑफ सम)

समजा f हा क्लोज्ड इंटरव्हल $[a,b]$ वर कन्टीन्यूयस फंक्शन आहे. असे समजा की फंक्शनद्वारे घेतलेली सर्व मूल्ये धनात्मक आहेत (non negative), म्हणून फंक्शनचा आलेख x- अक्षावरील वक्र आहे.

डेफिनाइट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$ म्हणजे वक्र $y = f(x)$, ऑर्डिनेट $x = a$, $x = b$ आणि x- अक्षाने बांधलेले क्षेत्र आहे.

जेव्हा आपण या क्षेत्राचे मूल्यमापन करतो, तेव्हा ते याच्याबरोबर असते.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$$

जिथे $h=\dfrac{b-a}{n}\to 0$ जेव्हा $n\to\infty$

वरील सूत्र डेफिनाइट इंटिग्रल ची व्याख्या बेरजेची मर्यादा म्हणून ओळखली जाते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.23: $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ बेरजेची लिमिट म्हणून शोधा.(limit as sum)

उकल : व्याख्येनुसार

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right]$$

येथे $h=\dfrac{b-a}{n}$

म्हणून
$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{2^2}{n^2}+1\right)+\left(\frac{4^2}{n^2}+1\right)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\ times}+\frac{1}{n^2}\left(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2}{3}\frac{(n-1)(2n-1)}{n}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{2}{3}(1)(2)\right]=2\left[1+\frac{4}{3}\right]=\frac{14}{3}$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.24: $\int_0^2 e^x\,dx$ बेरीजेची लिमिट म्हणून शोधा.(limit as sum)

उकल: व्याख्येनुसार

$$\int_0^2 e^x\,dx=(2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0+e^{2/n}+e^{4/n}+\ldots+e^{(2n-2)/n}\right]$$

G.P (geometric progression) च्या n पदांची बेरीज वापरून, जेथे $a=1, r=e^{2/n}$

$$\int_0^2 e^x\,dx=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{2/n}-1}\right]$$

$$=\frac{2\left(e^2-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e^{2/n}-1}{2/n}\right).2}=e^2-1 \qquad \left[\because\ \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right]$$

कॅलक्यूलसचे मूलभूत प्रमेय (Fundamental Theorem Of Calculus)

1.2.2 इंटिग्रल कॅलक्यूलसचे पहिले मूलभूत प्रमेय

जर $f(x)$ हे $[a, b]$ ह्या इंटरव्हल मध्ये परिभाषित केले असेल, तर $f(x)$ चे डेफिनाइट इंटिग्रल खालीलप्रमाणे परिभाषित केले जाते,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

जेथे $$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

वरीलप्रमाणे परिभाषित केलेले डेफिनेट इंटिग्रल, वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष, ऑर्डिनेट $x = a$ किंवा $x = b$ यांनी बांधलेले क्षेत्र दर्शविते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.25: $\int_0^2 x^2\, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले

$$\int_0^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{(2)^3}{3} - 0\right] = \frac{8}{3}$$

उदाहरण 1.26: $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले

$$\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = [-\sin x]_0^{2\pi}$$

$$= [-\sin 2\pi + \sin 0] = [-0 + 0] = 0$$

उदाहरण 1.27: $\int_2^3 (x+1)\, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले

$$\int_2^3 (x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_2^3$$

$$= \left[\left(\frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2\right)\right] \quad = \left[\left(\frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{4}{2} + 2\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{9+6}{2}\right) - \left(\frac{4+4}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{15}{2} - \frac{8}{2}\right] = \frac{7}{2}$$

1.2.3 इंटिग्रल कॅलक्यूलसचे दुसरे मूलभूत प्रमेय

इंटिग्रल कॅलक्यूलसचे दुसरे मूलभूत प्रमेय सांगते कि जर $f(x)$ इंटरव्हल $[a, b]$ वर कन्टीनिवस फंक्शन असेल आणि F हे $[a,b]$ वर $f(x)$ चे इंडेफिनेट इंटिग्रल असेल तर

$$F'(x) = f(x)$$

जर $$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

मग $$F'(x) = f(x)$$

टिप्पणी: अँटी-डेरिव्हेटिव्ह आणि डेरिव्हेटिव्ह एकमेकांच्या विरुद्ध असल्याने, जर तुम्हाला फंक्शनचे अँटी-डेरिव्हेटिव्ह सापडले तर तुम्हाला मूळ फंक्शन मिळेल.

उदाहरण 1.28: इंटिग्रल कॅलक्यूलसच्या दुसऱ्या मूलभूत प्रमेयाच्या मदतीने दिलेले इंटिग्रल सोडवा.

$$F(x) = \int_0^{x^3} \left(t^2 + t\right) dt$$

उकल: दिले आहे

$$F(x) = \int_0^{x^3} \left(t^2 + t\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{x^3} = F\left(x^3\right) - F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{\left(x^3\right)^3}{3} - \frac{\left(x^3\right)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^9}{3} - \frac{x^6}{2}$$

$$F'(x) = 3x^8 - 3x^5$$

$$F'(x) = 3x^2\left(\left(x^3\right)^2 + \left(x^3\right)\right)$$

$3x^2$ ची वरची मर्यादा x^3 चा डेरिव्हेटीव्ह आहे आणि $\left(\left(x^3\right)^2 + \left(x^3\right)\right)$ त्याचे मूल्य $(t^2 + t)$ सारखे आहे.

या समीकरणाच्या शेवटी, आपण पाहू शकतो की $F(x)$ चा डेरिव्हेटीव्ह, जो $f(x)$ चा इंटिग्रल आहे. मूळ फंक्शन $f(x)$ च्या बरोबरीचे आहे. $F'(x)$ आणि $f(x)$ ची कार्ये अत्यंत समान आहेत.

उदाहरण 1.29: दिलेले $F(x) = \int_0^{x^2} (t+7)^{1/2}\, dt$ इंटिग्रल कॅलक्यूलसच्या दुसऱ्या मूलभूत प्रमेयाच्या मदतीने सोडवा.

उकल: दिले आहे $$F(x) = \int_0^{x^2} (t+7)^{1/2}\, dt$$

$$= \left[\frac{2(t+7)^{3/2}}{3} \right]_0^{x^2}$$

$$= F(x^2) - F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{2(x^2+7)^{3/2}}{3} \right) - \left(\frac{2(0+7)^{3/2}}{3} \right)$$

$$F(x) = \frac{2(x^2+7)^{3/2}}{3} - \frac{2(7)^{3/2}}{3}$$

$$F'(x) = 2x(x^2+7)^{1/2}$$

$2x$ ची वरची मर्यादा x^2 चा डेरिव्हेटीव्ह आहे आणि $(x^2+7)^{1/2}$ त्याचे मूल्य $(t+7)^{1/2}$ सारखे आहे.

उदाहरण 1.30: दिलेले $F(x) = \int_{-3}^{\sqrt{x}} (3t^2 - 30)\,dt$ इंटिग्रल कॅलक्यूलसच्या दुसऱ्या मूलभूत प्रमेयाच्या मदतीने सोडवा.

उकल: दिले आहे

$$F(x) = \int_{-3}^{\sqrt{x}} (3t^2 - 30)\,dt$$

$$= \left[t^3 - 30t \right]_{-3}^{\sqrt{x}} = F(\sqrt{x}) - F(-3)$$

$$F(x) = \left[(\sqrt{x})^3 - 30(\sqrt{x}) \right] - \left[(-3)^3 - 30(-3) \right]$$

$$F'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{15}{x^{1/2}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x - 30)$$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ची वरची मर्यादा $\sqrt{x}$ चा डेरिव्हेटीव्ह आहे आणि $(3x - 30)$ त्याचे मूल्य $(3t^2 - 30)$ सारखे आहे.

1.2.4 निश्चित समाकलनाचे(डेफिनाइट इंटिग्रल) गुणधर्म

येथे आपण (डेफिनाइट इंटिग्रल)निश्चित समाकलनाचे काही गुणधर्म परिभाषित करतो जे त्यांचे मूल्यमापन करण्यासाठी खूप उपयुक्त आहेत.

1. जर $f_1(x)$ आणि $f_2(x)$ इंटरव्हल $[a,b]$ कन्टीनिवस आणि बॉउंडेड फंक्शन आहे आणि k_1 आणि k_2 दोन स्थिरांक(constant) आहेत, तर

$$\int_a^b \left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \right] dx = k_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + k_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

याला रेखीय गुणधर्म म्हणतात.(linearity property)

2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

दोन्ही बाजू $F(b)-F(a)$ समान आहेत, हे दर्शविते की ईंटेग्रेशन मधील व्हेरिएबल डमी आहे.

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

येथे $F(b)-F(a) = -\left[F(a)-F(b)\right]$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

येथे, 'c' ला $a < c < b$ असे परिभाषित करतात.

उजवी बाजू $F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$ जी $F(b)-F(a)$ च्या बरोबर आहे.

5. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

याला इनव्हेरियन्स गुणधर्म म्हणतात (invariance property) म्हणतात आणि हे सिद्ध केले जाऊ शकते की $a - x = t$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल, $-dx = dt$

$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ [गुणधर्म (3) वरून]

$= \int_0^a f(x)\,dx$ [गुणधर्म (2) वरून]

6. $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ जर $f(x)$ सम आहे म्हणजे $f(-x) = f(x)$

$= 0$ जर $f(x)$ विषम आहे म्हणजे $f(-x) = -f(x)$

सिद्धता: $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$ ...(1)

$x = -t$ उजवीकडे (Right) पहिल्या ईंटेग्रेल मध्ये ठेवल्यावर, आपल्याला मिळते

$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ [गुणधर्म (3) वरून]

$= \int_0^a f(-x)\,dx$ [गुणधर्म (2) वरून]

समीकरण (1) मध्ये ठेवल्यावर, आपल्याला मिळते

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \left[f(x)+f(-x)\right]dx$$

$$= \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{जर } f(-x)=f(x) \\ 0, & \text{जर } f(-x)=-f(x) \end{cases}$$

x^4, $\cos x$ इत्यादी फंक्शन्स ज्यासाठी $f(-x) = f(x)$, सम फंक्शन्स म्हणतात.

x^3, $\sin x$ इत्यादी फंक्शन्स ज्यासाठी $f(-x) = -f(x)$, विषम फंक्शन्स म्हणतात

7. $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$, जर $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, जर $f(2a-x) = -f(x)$

ह्या प्रॉपर्टीला, प्रॉपर्टी (6) प्रमाणेच सिद्ध केली जाऊ शकते

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.31: $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल : दिले आहे

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx \qquad \ldots(1)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \log\cos x\,dx \qquad \text{[गुणधर्म (5) वरून]} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) आणि (2) यांची बेरीज करून,

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\log\sin x + \log\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \{\log(2\sin x\cos x) - \log 2\}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\sin 2x\,dx - \frac{1}{2}\pi\log 2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin u\,du - \frac{1}{2}\pi\log 2, \text{ जेथे } x = \frac{u}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\sin u\,du - \frac{1}{2}\pi\log 2 \qquad \text{[गुणधर्म (7) वरून]}$$

$$2I = I - \frac{1}{2}\pi\log 2 \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

म्हणून $$I = -\frac{1}{2}\pi\log 2$$

$\therefore$ $$\int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\pi\log 2$$

उदाहरण 1.32: $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$ चे मूल्य शोधा .

उकल: दिले आहे

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan(\pi - x)}{\sec(\pi - x) + \tan(\pi - x)}\, dx$$ [गुणधर्म (5) वरून]

$$= \int_0^{\pi} \frac{-(\pi - x)\tan x}{-\sec x - \tan x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x}\, dx - I$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x(\sec x - \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sec x \tan x - \tan^2 x}{1}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left(\sec x \tan x - \sec^2 x + 1\right) dx$$

$$= \pi[\sec x - \tan x + x]_0^{\pi} = \pi(\pi - 2)$$

किंवा $$I = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$$

उदाहरण 1.33: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिले आहे

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$\left[\because \sin(\pi - x) = \sin x,\ \cos(\pi - x) = -\cos x\right]$$ ...[गुणधर्म.(5) वरून]

I च्या दोन मूल्यांची बेरीज केल्यावर, आपल्याला मिळते

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x + x)\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= -\pi\left[\tan^{-1}(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi\left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2I = \frac{2\pi^2}{4}$$

$$I = \frac{\pi^2}{4}$$

म्हणून $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

उदाहरण 1.34: सिद्ध करा कि $\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \sin^4 4x\, dx = 0$

उकल: समजा

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \sin^4 4x\, dx$$

$2x = t$ ठेवल्यावर, $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^3 t.\sin^4 2t\, dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2^4.\cos^3 t.\sin^4 t.\cos^4 t\, dt$$

$$= 8\int_0^{\pi} \sin^4 t.\cos^7 t\, dt = 0$$ [गुणधर्म (7) वरून]

उदाहरण 1.35: $\int_0^1 \cot^{-1}\left(1 - x + x^2\right) dx$ चे मूल्य शोधा

उकल: दिलेले इंटिग्रल लिहिले जाऊ शकते

$$I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x(x-1)}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left\{\frac{x-(x-1)}{1+x(x-1)}\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tan^{-1} x - \tan^{-1}(x-1)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x\, dx - \int_0^1 \tan^{-1}(x-1)\, dx$$

परंतु $$\int_0^1 \tan^{-1}(x-1)\, dx = \int_0^1 \tan^{-1}(1-x-1)\, dx = -\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$ [गुणधर्म (5) वरून]

$\therefore$ $$I = 2\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$

इंटिग्रेशन बाय पार्ट्स वापरून आणि '1' ला दुसरे फंक्शन मानून,

$$I = 2\left[\tan^{-1} x . x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2.1.\frac{\pi}{4} - \left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log 2$$

म्हणून $$\int_0^1 \cot^{-1}\left(1-x+x^2\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

अभ्यास 1.3

1. दिलेल्या डेफिनेट इंटिग्रलचे बेरजेचे लिमिट (लिमिट ऑफ सम) मानून मूल्यमापन करा.

   i. $\int_a^b x\,dx$ ii. $\int_0^5 (x+1)\,dx$

   iii. $\int_2^3 x^2\,dx$ iv. $\int_1^4 (x^2 - x)\,dx$

   v. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$

2. दिलेल्या डेफिनाईट इंटिग्रलचे मूल्यमापन करा:

   i. $\int_{-1}^1 (x+1)\,dx$ ii. $\int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)\,dx$

   iii. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx$ iv. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

   v. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ vi. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$

   vii. $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ viii. $\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$

   ix. $\int_0^{\pi/4} (2\sec^2 x + x^3 + 2)\,dx$ x. $\int_0^1 \left(x\,e^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right)dx$

3. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$ चे मूल्यमापन करा.

4. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ चे मूल्यमापन करा.

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$ चे मूल्यमापन करा.

6. सिद्ध करा $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$

7. $\int_0^{\pi} \sin^6 x \cos^7 x\, dx$ चे मूल्यमापन करा.

उत्तरे

1. i. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ii. $\frac{35}{2}$ iii. $\frac{19}{3}$ iv. $\frac{27}{2}$ v. $e - \frac{1}{e}$

2. i. 2 ii. $\frac{64}{3}$ iii. 0 iv. $\frac{1}{2}\log 2$

   v. $\frac{\pi}{2}$ vi. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$ vii. $\frac{1}{2}\log 2$ viii. $\frac{1}{2}(e-1)$

   ix. $\frac{\pi^4}{1024} + \frac{\pi}{2} + 2$ x. $1 + \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

3. $-\pi \log 2$ 4. $\frac{\pi}{8}\log 2$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ 7. 0

1.2.5 इमप्रॉपर इंटिग्रल

इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\, dx$ ला एक इमप्रॉपर इंटिग्रल म्हणतात जेंव्हा

i. एकतर इंटिग्रेशन चा इंटरव्हल $[a, b]$ फायनाईट नाही म्हणजे एकतर 'a' किंवा 'b' किंवा दोन्ही 'a' आणि 'b' इनफायनाईट आहेत

ii. किंवा इंटीग्रॅन्ड $f(x)$ इंटरव्हल $[a, b]$ वर बाऊंडेड नाही.

iii. इंटरव्हल $[a, b]$ फायनाईट नाही आणि $f(x)$ त्याच्यावर बाऊंडेड नाही.

1.2.6 इमप्रॉपर इंटिग्रल चे प्रकार

इमप्रॉपर इंटिग्रल तीन प्रकारचे आहेत, ज्याची व्याख्या खालील प्रकारे केलेली आहे:

a. पहिल्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल

डेफिनेट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\, dx$ ला पहिल्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल म्हणतात जेंव्हा एकतर 'a' आणि 'b' इनफायनाईट आहे

किंवा दोन्ही इंफायनाईट आहेत परंतु $f(x)$ बॉऊण्डेड आहे.

उदाहरणासाठी : $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\ dx$, पहिल्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे.

या प्रकारे आपण व्याख्या करतो कि ,

i. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)\,dx, (t>a)$

इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ कॉनवर्जन्ट असेल जेव्हा राईट हॅन्ड लिमिट फायनाईट असेल आणि डायव्हर्जन्ट असेल जेव्हा लिमिट + ∞ किंवा -∞ असेल.

ii. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_t^{b} f(x)\,dx, (t<b)$

इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ कॉनवर्जन्ट असेल जेव्हा राईट हॅन्ड लिमिट फायनाईट अस्तित्वात असेल आणि डायव्हर्जन्ट असेल जेव्हा लिमिट + ∞ किंवा -∞ असेल.

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$

$$= \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t_2\to\infty}\int_c^{t_2} f(x)\,dx \qquad [t_1<c<t_2]$$

इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ कॉनवर्जन्ट असेल जेव्हा राईट हॅन्ड लिमिट फायनाईट अस्तित्वात असेल आणि डायव्हर्जन्ट असेल जेव्हा लिमिट + ∞ किंवा -∞ असेल.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.36: इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ कॉनवर्जन्ट आहे कि नाही ते तपासा.

उकल: येथे

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} x^{-1/2}\ dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{t}-2\right] = \infty$$

म्हणून दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 1.37: इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\, dx$ सोडवा.

उकल : येथे

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\, dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[-\left(1-e^{-t}\right)\right]$$

$$= -1+e^{\infty} = \infty$$

म्हणून दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 1.38: दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ कॉनवर्जन्ट आहे कि नाही ते तपासा.

उकल: येथे

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t_2\to\infty}\int_{0}^{t_2}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t_1\to-\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_{t_1}^{0} + \lim_{t_2\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_{0}^{t_2}$$

$$= \lim_{t_1\to-\infty}\left[0-\tan^{-1}t_1\right] + \lim_{t_2\to\infty}\left[\tan^{-1}t_2 - 0\right]_{0}^{t_2}$$

$$= -\left[\tan^{-1}(-\infty)\right] + \left[\tan^{-1}(\infty)\right] = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

म्हणून दिलेले इमप्रॉपर इंटिग्रल कॉनवर्जन्ट आहे.

b. दुसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल:

डेफिनाईट इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$ याला दुसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल म्हणतात जेंव्हा दोन्ही 'a' आणि 'b' फायनाईट असतील आणि $f(x)$ बॉऊण्डेड नसेल.

(म्हणजेच $f(x)$ मध्ये एक किंवा जास्त पॉईंट वर इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी आहे.)

उदाहरणासाठी : $\int_0^1 \frac{dx}{x}, \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)(x-4)}$, दुसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहेत.

या प्रकारे आपण व्याख्या करतो कि,

i. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, जेंव्हा $f(x)$ च्या इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चा एकमेव पॉईंट 'a' आहे. जेंव्हा डाव्या साईड ची लिमिट फायनाईट स्वरूपात असेल, तेव्हा ते कॉनवर्जन्ट असते नाहीतर ते डायवर्जन्ट असते.

ii. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, जेंव्हा $f(x)$ च्या इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चा एकमेव पॉईंट 'b' आहे. जेंव्हा डाव्या साईड ची लिमिट फायनाईट स्वरूपात असेल , तेव्हा ते कॉनवर्जन्ट असते नाहीतर ते डायवर्जन्ट असते.

iii. जेव्हा $f(x)$ एखाद्या पॉईंट 'c' वर $a < c < b$ मध्ये इनफायनाईट असेल, तेव्हा

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

सामान्यतः जर $c_1, c_2, c_3, .., c_n$, इंटरव्हल $[a, b]$ मध्ये $f(x)$ चे इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चे फायनाईट बिंदू आहेत, जेथे $a < c_1 < c_2 < c_3 ... < c_{n-1} < c_n < b,$, तेव्हा

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + ... + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

जेंव्हा डाव्या साईड ची लिमिट फायनाईट स्वरूपात अस्तित्वात असेल, तेव्हा ते इमप्रॉपर इंटिग्रल कॉनवर्जन्ट असते नाहीतर ते डायवर्जन्ट असते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.39: इंटिग्रल $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ चे कॉनव्हर्जन्स तपासा.

उकल: दिलेले इंटिग्रल दुसऱ्या प्रकारचे आहे आणि '0' **हा** इंटरव्हल $[0, 1]$ मध्ये इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी चा बिंदू आहे.

म्हणून
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2(1-0) = 2$$

म्हणून दिलेले इंटिग्रल कॉनवर्जन्ट आहे आणि त्याचा कॉनव्हर्जनस 2 आहे.

उदाहरण 1.40: इंटिग्रल $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ चे कॉनव्हर्जन्स तपासा.

उकल: दिलेले इंटिग्रल दुसऱ्या प्रकारचे आहे आणि $x = 1$ हा $f(x)$ च्या डिसकंटिन्यूटी चा बिंदू आहे.

म्हणून, व्याख्येनुसार,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)(2-x)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}\right] \qquad \text{पर्शियल फ्रॅकशन करून}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log(1-x) + \log(2-x)\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log \varepsilon + \log(1+\varepsilon) - \log 2 \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \log 2 \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \log 2 \right]$$

$$= \log(1+\infty) - \log 2 = \infty$$

म्हणून दिलेले इंटिग्रल डायवर्जन्ट आहे.

उदाहरण 1.41: इंटिग्रल $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ चे कॉनव्हर्जन्स तपासा.

उकल: दिलेले इंटिग्रल दुसऱ्या प्रकारचे आहे आणि $x = 0$ हा $f(x)$ चा $[-1, 1]$ मध्ये इंफाइनाइट डिसकंटिन्यूटी चा बिंदू आहे. म्हणून, व्याख्येनुसार,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-1} \right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-1} \right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[-x^{-1} \right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[-x^{-1} \right]_{\varepsilon_2}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right]$$

$$= \infty - 1 - 1 + \infty = \infty$$

म्हणून दिलेले इंटिग्रल डायवर्जन्ट आहे.

c. तिसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल (मिश्रित प्रकार):

डेफिनाईट इंटिग्रल $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ तिसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे जेंव्हा दोन्ही 'a' किंवा 'b' किंवा दोन्ही इनफायनाईट असतील आणि $f(x)$ बॉऊण्डेड नसेल.

उदाहरण: $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x}$, तिसऱ्या प्रकारचे इमप्रॉपर इंटिग्रल आहेत.

अभ्यास 1.4

1. खाली दिलेल्या इमप्रॉपर इंटिग्रल चे कोनव्ह्र्जन्स तपासा आणि जर कॉनवर्जन्ट असेल तर त्याची किंमत काढा:

i. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\log x}$ ii. $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ iii. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{p^2+q^2x^2}$ iv. $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

v. $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$ vi. $\int_0^\infty \cos x\,dx$

2. खाली दिलेल्या इमप्रॉपर इंटिग्रल चे कोनव्ह्र्जन्स तपासा आणि जर कॉनवर्जन्ट असेल तर त्याची किंमत काढा:

i. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ ii. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ iii. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$ iv. $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$

v. $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin x}$ vi. $\int_0^1 \log x\,dx$

उत्तरे

1. i. डायवर्जन्ट ii. डायवर्जन्ट iii. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{2pq}$ iv. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{4}$

v. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$ vi. डायवर्जन्ट

2. i. कॉनवर्जन्ट ; $\frac{8}{3}$ ii. कॉनवर्जन्ट; $\frac{\pi}{3}$ iii. कॉनवर्जन्ट; 2 vi. डायवर्जन्ट

v. डायवर्जन्ट vi. कॉनवर्जन्ट; -1

1.2.7 इंटिग्रल $\int_a^b f(x)\,dx$, $x=a$ या बिंदूवर कॉनव्ह्र्जन्स साठी तुलनात्मक परीक्षण (Comparison Tests)

1.2.7.1 तुलनात्मक परीक्षण I

विधान: जेव्हा f आणि g हे दोन पॉजिटीव्ह फंक्शन्स अशा प्रकारे आहेत कि $f(x) \le g(x)$, अशा सर्व $x \in (a, b]$ आणि 'a' ही एकमेव $[a, b]$ मधील इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी आहे, तेव्हा

i. $\int_a^b g\,dx$ कॉनवर्जन्ट $\Rightarrow$ $\int_a^b f\,dx$ कॉनवर्जन्ट

ii. $\int_a^b f\,dx$ डायवर्जन्ट $\Rightarrow$ $\int_a^b g\,dx$ डायवर्जन्ट

सिद्धता: $0 < f(x) \le g(x), \forall x \in (a, b]$ म्हणून

$$\int_{a+\varepsilon}^b f\,dx \le \int_{a+\varepsilon}^b g\,dx, \quad 0<\varepsilon<b-a \text{ च्या साठी} \qquad \ldots(1)$$

i. समजा $x = a$ वर, $\int_a^b g\,dx$ कॉनवर्जन्ट आहे, तेव्हा एखादी पॉजिटीव्ह संख्या M अशा प्रकारे अस्तित्वात आहे कि

$\int_{a+\varepsilon}^{b} g\,dx < M,\ 0 < \varepsilon < b - a$ च्या साठी ...(2)

समीकरण (1) व (2) वरून,

$\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx < M,\quad 0 < \varepsilon < b - a$ च्या साठी

शेवटी $x = a$ वर, $\int_a^b f\,dx$ कॉनवर्जन्ट आहे .

ii. समजा $x = a$ वर, $\int_a^b f\,dx$ डायवर्जन्ट आहे, तर $\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx$ अनबॉऊण्डेड अबोव्ह आहे आणि यासाठी (1) वरून,

$\int_{a+\varepsilon}^{b} g\,dx$ अनबॉऊण्डेड अबोव्ह आहे.

शेवटी, $x = a$ वर $\int_a^b g\,dx$ डायवर्जन्ट आहे.

1.2.7.2 तुलनात्मक परीक्षण II

विधान: जेव्हा f आणि g हे दोन पॉजिटीव्ह फंक्शन्स इंटरव्हल $(a, b]$ वर आहेत आणि 'a' ही एकमेव इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी

अशी आहे कि $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

तर दोन इंटिग्रल $\int_a^b f\,dx$ आणि $\int_a^b g\,dx$ सोबतच 'a' वर कॉनवर्जन्ट किंवा डायवर्जन्ट असतील.

सिद्धता: f आणि g हे दोन पॉजिटीव्ह फंक्शन्स इंटरव्हल (a, b] मध्ये आहेत , म्हणून $\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a, b]$

म्हणून $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \geq 0$$

परंतु $l \neq 0$ (दिलेले) तेव्हा $l > 0$

आता एक पॉजिटीव्ह संख्या e या प्रकारे निवडा कि $l - \varepsilon > 0$

म्हणून $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$\Rightarrow$ a $(a < c < d)$ या बिंदूचा नेबरहुड (a, c) असा अस्तित्वात येतो कि

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$$

$$\Rightarrow \quad (l - \varepsilon)\, g(x) < f(x) < (l + \varepsilon)\, g(x), \forall x \in (a, c]$$

स्थिति I: जसे कि $\int_a^b f\,dx$, a वर कॉनवर्जन्स आहे

$\Rightarrow \int_a^c f\,dx$, a वर कॉनवर्जन्ट आहे [$\because a < c < b$ आणि $\int_c^b f\,dx$ प्रॉपर इंटिग्रल आहे]

$\Rightarrow (l-\varepsilon)\int_a^c g\,dx$, a वर कॉनवर्जन्ट आहे [तुलनात्मक परीक्षण I द्वारे]

$\Rightarrow \int_a^b g\,dx$, a वर कॉनवर्जन्ट आहे

स्थिति II: समजा $\int_a^b f(x)\,dx$, a वर डायवर्जन्स आहे.

$\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx$, a वर डायवर्जन्ट आहे [$\because a < c < b$ आणि $\int_c^b f\,dx$ प्रॉपर इंटिग्रल आहे]

$\Rightarrow (l+\varepsilon)\int_a^c g\,dx$, वर डायवर्जन्ट आहे [तुलनात्मक परीक्षण I द्वारे]

$\Rightarrow \int_a^b g\,dx$, a वर डायवर्जन्ट आहे.

या प्रकारे हे सिद्ध केल्या जाऊ शकते कि जर $\int_a^b g\,dx$ 'a' वर कॉनवर्ज करत आहे , तेव्हा $\int_a^b f\,dx$ 'a' वर कॉनवर्ज करत आहे आणि जर $\int_a^b g\,dx$ 'a' वर डायवर्ज करत आहे, तेव्हा $\int_a^b f\,dx$ 'a' वर डायवर्ज होईल.शेवटी प्रमेयाची सिद्धता झाली.

1.2.8 महत्वपूर्ण प्रमेय

i. इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ कॉनवर्जन्ट होईल फक्त आणि फक्त $n < 1$

ii. इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ कॉनवर्जन्ट होईल फक्त आणि फक्त $n < 1$

सिद्धता:

i. दिलेले इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ एक प्रॉपर इंटिग्रल आहे $n \le 0$ च्या साठी, हे कॉनवर्जन्ट आहे. जर $n > 0$, तर हे एक इमप्रॉपर इंटिग्रल आहे आणि 'a' ही एकमेव इनफायनाईट डिसकंटिन्यूटी आहे.

स्थिति I: जर $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n},\ 0 < \varepsilon < b-a$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \right]_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}, & \text{फाइनाइट जर } n<1 \\ \infty & , \text{जर } n>1 \end{cases}$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $0 < n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n > 1$. च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

स्थिति II: जर $n = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log|x-a|\right]_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\log(b-a) - \log\varepsilon\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \infty$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n = 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

म्हणून $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$, $n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n \geq 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

ii. दिलेले इंटिग्रल $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ $n \leq 0$ च्या साठी एक प्रॉपर इंटिग्रल आहे आणि कॉनवर्जन्ट आहे. जर $n > 0$, तर हे एक इमप्रॉपर इंटिग्रल आ
हे आणि 'b' ही एकमेव इन्फानाईट डिसकंटिन्यूटी आहे.

स्थिति I: जर $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(b-x)^{-n+1}}{-(-n+1)}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n-1}\left[(b-x)^{-n+1}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n-1}\left[\varepsilon^{1-n} - (b-a)^{1-n}\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & ; \ n > 1 \\ \dfrac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}} & ; \ n < 1 \end{cases}$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $0 < n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n > 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

स्थिति II: जर $n = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \int_a^b \frac{dx}{b-x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log|b-x|\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\log \varepsilon + \log(b-a)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \infty \qquad [\because \log 0 = -\infty]$$

$\therefore$ $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n = 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

म्हणून $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे.

आणि $n \geq 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

टिप: $\int_0^1 \frac{1}{x^n} dx$, $n < 1$ च्या साठी कॉनवर्जन्ट आहे आणि $n \geq 1$ च्या साठी डायवर्जन्ट आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.42: इंटिग्रल $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$ कोनव्हर्जन्स तपासा.

उकल: समजा

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$$

येथे $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}(1+x^2)}$ आणि x = 0, f (x) चा एकमेव इन्फायनाईट डिसकंटिन्यूटी पॉईंट आहे आणि

$$f(x) > 0, x \in (0,1]$$

जसे कि $$g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$$

आता $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0$$ [जिथे l फायनाईट आणि नॉन झिरो आहे]

$\therefore$ कंप्यारीजन परीक्षण द्वारे

इंटिग्रल $\int_0^1 f(x)\,dx$ आणि $\int_0^1 g(x)\,dx$ एक सोबत कॉनवर्जन्ट किंवा डायवर्जन्ट होत आहे.

परंतु, इंटिग्रल $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$, $x = 0$ वर कॉनवर्जन्ट आहे $\left[\because n = \frac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore$ $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$ कॉनवर्जन्ट आहे

उदाहरण 1.43: इंटिग्रल $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ चे कॉनवर्जन्स तपासा.

उकल: जसे कि

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$$

येथे $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ आणि $\boldsymbol{x = 0,}$

$f(x)$ चा एकमेव इन्फानाईट डिसकंटिन्यूटी पॉईंट आहे आणि $f(x) > 0, x \in (0, \pi/2]$

जसे कि $$g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$$

आता $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0, \infty$$

$\therefore$ कंप्यारीजन परीक्षण द्वारे

इंटिग्रल $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ आणि $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ एक सोबत कॉनवर्जन्ट किंवा डायवर्जन्ट होत आहे.

परंतु, इंटिग्रल $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{1/2}}$, $x = 0$ वर कॉनवर्जन्ट आहे $\left[\because n = \frac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore$ $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ कॉनवर्जन्ट आहे

1.2.9 ∞ वर कॉन्वर्जन्स साठी तुलनात्मक परीक्षण

1.2.9.1 तुलनात्मक परीक्षण I

जर f आणि g ही दोन धनात्मक फंक्शन्स असतील जसे की $f(x) \le g(x)$, सर्व $x \ge a$ साठी तर

i. $\int_a^\infty f\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल जर $\int_a^\infty g\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल.

ii. $\int_a^\infty g\,dx$ डायवर्जन्ट असेल जर $\int_a^\infty f\,dx$ डायवर्जन्ट असेल.

सिद्धता: जर f आणि g हे दोन पॉजेटिव्ह फंक्शन्स असतील जसे की $f(x) \le g(x)$, सर्व $x \in [a, t]$ साठी

$$\therefore \quad \int_a^t f(x)\,dx \le \int_a^t g(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

i. समजा $\int_a^b g\,dx$ कॉन्वर्जंट आहे, जेणेकरून M ही एक पॉजेटिव्ह संख्या अस्तित्वात असेल.

जसे की $$\int_a^t g(x)\,dx < M, \forall\, t \ge a \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) व (2) वरून ,

$$\int_a^t f(x)\,dx < M, \forall\, t \ge a$$

म्हणून $\int_a^\infty f(x)\,dx$ कॉन्वर्जंट आहे.

ii. समजा $\int_a^\infty f(x)\,dx$ डायवर्जन्ट आहे.

$\Rightarrow \int_a^t f(x)\,dx$ वरच्या बाजूला बाउन्डेड नाही आणि म्हणून (1) वरून, $\int_a^t g(x)\,dx$ हे देखील वरच्या बाजूला बाउन्डेड नाही, परिणामी $\int_a^\infty g(x)\,dx$ डायवर्जन्ट आहे.

1.2.9.2 तुलनात्मक परीक्षण II

जर f आणि g हे इंटर्वल $[a, \infty)$ वरील पॉजेटिव्ह फंक्शन्स असतील जसे की

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \qquad [\text{जेथे } l \text{ शून्य नसेल आणि फाइनाइट असेल}]$$

मग दोन्ही इंटिग्रल $\int_a^\infty f(x)\,dx$ आणि $\int_a^\infty g(x)\,dx$ एकसोबत कॉन्वर्जंट किंवा डायवर्जन्ट होतील.

सिद्धता: जसे की $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \ge a$ आणि $l \ne 0$ [$\because f(x)$ आणि $g(x)$ पॉजेटिव्ह फंक्शन्स आहेत]

$$\therefore \quad l > 0$$

$\varepsilon > 0$ घेऊन अशे की $l - \varepsilon > 0$

तेथे संख्या k अस्तित्वात आहे कारण $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ जसे की

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon, \forall x\ge k$$

$$\Rightarrow \qquad l-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<l+\varepsilon, \forall x\ge k>a$$

$$\Rightarrow \qquad (l-\varepsilon)g(x)<f(x)<(l+\varepsilon)\,g(x), \forall x\ge k>a$$

कंप्यारीजन चाचणी I वरून, जर $\int_a^\infty f(x)\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल तर $\int_a^\infty g(x)\,dx$ देखील कॉन्वर्जंट होईल आणि जर

$\int_a^\infty g(x)\,dx$

कॉन्वर्जंट असेल तर $\int_a^\infty f(x)\,dx$ सुद्धा कॉन्वर्जंट होईल.

त्याचप्रमाणे, एकाचे डायवर्जन्स म्हणजे दुसर्‍याचे डायवर्जन्स.

म्हणून दोन इंटिग्रल $\int_a^\infty f(x)\,dx$ आणि $\int_a^\infty g(x)\,dx$ एकसोबत कॉन्वर्जंट किंवा डायवर्जन्ट होतील.

1.2.10 महत्वपूर्ण प्रमेय

विधान: इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ $(a>0)$ कॉन्वर्जंट असेल फक्त आणि फक्त जर $n>1$ आणि डायवर्जन्ट असेल $n\le 1$ साठी.

सिद्धता:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}=\lim_{t\to\infty}\int_a^t\frac{dx}{x^n}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_a^t, \text{ जर } n\ne 1$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^{1-n}}{1-n}-\frac{a^{1-n}}{1-n}\right], \text{ जर } n\ne 1$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{a^{1-n}}{1-n}, & \text{जर } n>1\\ \infty\ , & \text{जर } n<1\end{cases}$$

तसेच जेव्हा $n=1$, आपल्याकडे असेल

$$\int_a^\infty\frac{dx}{x^n}=\int_a^\infty\frac{dx}{x}=\lim_{t\to\infty}\int_a^t\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{t\to\infty}[\log x]_a^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} [\log t - \log a]$$

$$= \log \infty - \log a = \infty$$

म्हणून $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ कॉन्वर्जंट असेल फक्त आणि फक्त जर $n > 1$ आणि $n \le 1$ साठी डायवर्जन्ट असेल.

> **टिप्पणी:** $\int_a^\infty \frac{1}{x^n} dx$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $(a > 0)$ कॉन्व्हर्जंट असेल $n > 1$ साठी आणि $n \le 1$ साठी डायवर्जन्ट आहे

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.44: दिलेल्या इंटीग्रल चे कॉन्वर्जन्स तपासा $\int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$.

उकल: समजा

$$I = \int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$$

येथे $$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^5} = \frac{x^3}{x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$$

$\Rightarrow$ $$f(x) = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$$

समजा $$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

तेव्हा $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5} = 1 \ne 0, \infty$$

$\therefore$ कंप्यारीजन चाचणीद्वारे, इंटिग्रल $\int_1^\infty f(x)\, dx$ आणि $\int_1^\infty g(x)\, dx$ एकसोबत कॉन्व्हर्ज किंवा डायवर्ज होतात.

परंतु, इंटिग्रल

$$\int_1^\infty g(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad [\because n = 2 > 1]$$

कॉन्वर्जंट आहे.

$\therefore$ इंटिग्रल $\int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ कॉन्वर्जंट आहे.

उदाहरण 1.45: इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_1^\infty x^n\ e^{-x}\ dx$ च्या कॉन्वर्जन्स ची चर्चा करा

उकल: समजा

$$I = \int_1^\infty x^n\ e^{-x}\ dx$$

येथे $\quad f(x) = x^n\ e^{-x}$

असे समजा $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

आता $\quad \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{n+2}}{e^x} = 0, \forall\ n$

आता $\quad \int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ कॉन्वर्जन्ट आहे $\quad [\because n = 2 > 1]$

$\therefore$ कंप्यारीजन चाचणी द्वारा, $\int_1^\infty x^n\ e^{-x}\ dx$ सुद्धा कॉन्वर्जंट आहे.

1.2.11 अब्सोलूट कॉन्वर्जन्स

जर $\int_a^b |f|\,dx$ कॉन्वर्जंट असेल तर इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_a^b f\ dx$ ला अब्सोलूट कॉन्वर्जन्स म्हणता येईल.

उदाहरण 1.46: $\int_0^1 \dfrac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ चे कॉन्वर्जन्स तपासा.

उकल: समजा

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

येथे, $\quad f(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$

शून्याच्या शेजारच्या भागात हेच चिन्ह ठेवत नाही आणि 0 हा $[0, 1]$ मधील 'f' च्या इनफाइनाइट डिसकंटीन्यूटीचा बिंदू आहे.

आता $\quad |f(x)| = \left|\dfrac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| = \dfrac{|\sin(1/x)|}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}} = g(x) \quad \left[\because \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1\right]$

परंतु $\quad \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, $x = 0$ वर कॉन्वर्जंट आहे. $\quad \left[\because n = \dfrac{1}{2} < 1\right]$

$\therefore \quad \int_0^1 |f|$, $x = 0$ वर कॉन्वर्जंट आहे.

म्हणून दिलेले इंटीग्रल $\quad \int_0^1 \dfrac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$, $x = 0$ वर अब्सोल्यूटली कॉन्वर्जंट आहे.

अभ्यास 1.5

1. खालील इंटीग्रलच्या कॉन्वर्जन्सची चर्चा करा:

   i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}\left(1+x^2\right)}$ ii. $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ iii. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3\left(1+x^2\right)^5}$

2. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ चे कॉन्वर्जन्स तपासा:

3. खालील इंटीग्रल्सचे कॉन्वर्जन्स तपासा.

   i. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}\left(1-x\right)^{1/3}}$ ii. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ iii. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x} dx$ iv. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

4. खालील इंटीग्रल्सचे कॉन्वर्जन्स तपासा:

   i. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ ii. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx$ iii. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^n\right)}$ iv. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2+x)}$

   v. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ [संकेत: $e^{x^2} > x^2, \forall\, x \in R$]

उत्तरे

1. i. कॉन्वर्जंट ii. कॉन्वर्जंट जर $n > -1$ iii. डायवर्जंट
2. कॉन्वर्जंट
3. i. कॉन्वर्जंट ii. कॉन्वर्जंट iii. कॉन्वर्जंट iv. कॉन्वर्जंट
4. i. कॉन्वर्जंट ii. कॉन्वर्जंट iii. कॉन्वर्जंट जर $n > ½$
   iv. कॉन्वर्जंट v. कॉन्वर्जंट

मनोरंजक तथ्ये

- प्लाझ्मा औषधांचे प्रमाण शोधण्यासाठी औषधविज्ञान संशोधनात या संकल्पनेचा वापर केला जातो, म्हणजेच जास्तीत जास्त औषधांचे प्रमाण काय आहे आणि ते केव्हा असते.
- दोन वेगवेगळ्या प्रमाणांचे प्रमाण मोजणाऱ्या कोणत्याही औषधाचे 'R'-मूल्य या संकल्पनेचा वापर करून मोजले जाते.
- कोणत्याही वस्तूचे केंद्र शोधण्यासाठी अभियंते इंटीग्रलचा वापर करतात.
- कॅलक्यूलसमधील एक मनोरंजक संबंध म्हणजे डेरिवेटिव आणि इंटीग्रल प्रक्रिया उलट आहेत. ते एकमेकांच्या विरुद्ध आहेत आणि ते "कॅलक्यूलसचे मूलभूत प्रमेय" वापरून जोडले गेले आहेत.

वास्तविक जीवनाचे अनुप्रयोग

- आकडेवारी आणि संभाव्यतेत उपयोग.
- याचे महत्त्व क्वांटम भौतिकशास्त्र आणि अर्थशास्त्रात आहे, जे संभाव्यता वितरणाच्या आधारे तयार केले जाते.
- याचा उपयोग सरासरी बदल, खंड, लुटी अंदाज आणि पृष्ठभाग शोधण्यासाठी देखील केला जातो.
- हीच संकल्पना कायनेटिक ऊर्जा शोधण्यासाठीदेखील वापरली जाते.

इतिहास

गणिती विश्लेषणात विशेष फंक्शन्स वारंवार येतात. विशेष फंक्शन्स पैकी गॅमा फंक्शनचा मोठ्या प्रमाणात वापर होताना दिसत होता. गॅमा फंक्शन $\Gamma(x)$ चा उपयोग अचूक विज्ञानात केला जातो. जवळजवळ सुप्रसिद्ध फॅक्टोरियल सिम्बॉल $x!$ म्हणून. प्रसिद्ध गणितज्ञ एल. युलर (1729) यांनी याची ओळख करून दिली. बीटा फंक्शनचा प्रथम युलर आणि लिजेंडर यांनी अभ्यास केला आणि जॅक्स बिनेट यांनी त्याचे नाव दिले.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत -NPTEL)

Improper Integrals

Improper Integrals (Cont.) 1

Improper Integrals (Cont.) 2

1.3 बीटा, गामा फंक्शन्स आणि त्यांचे गुणधर्म

1.3.1 गामा फंक्शन

$n > 0$ साठी, इमप्रॉपर इंटिग्रल $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ हे गामा फंक्शन म्हणून परिभाषित केले आहे आणि Γ (n) द्वारे दर्शविले आहे (गामा एन म्हणून वाचा). याला युलेरियन इंटिग्रलचा दुसरा प्रकार देखील म्हणतात. म्हणून,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx,\, n > 0 \qquad \ldots (1)$$

लक्षात घ्या की गामा फंक्शन डेफिनेट इंटिग्रलचे मूल्य काढण्यासाठी महत्वाची भूमिका बजावते.

1.3.1.1 गामा फंक्शनचे गुणधर्म

a. सिद्ध करा कि $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n$

आपल्याकडे आहे $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^{(n+1)-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{n}\,dx$ [समीकरण (1) वरून]

$$= \left[-e^{-x}x^n\right]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

$$= 0 + n\,\Gamma n$$

म्हणून $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n$ … (2)

b. सिद्ध करा कि $\Gamma(n) = (n-1)!$, जेथे n हा धन पूर्णांक आहे

आपल्याकडे आहे $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ [समीकरण (2) वरून]

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \qquad \text{[समीकरण (2) वरून]}$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2\,\Gamma(2) \qquad \text{[समीकरण (2) वारंवार वापरून]}$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1\,\Gamma(1)$$

$$= (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$ [समीकरण (1) वरून]

$$= (n-1)!\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = (n-1)![0+1] = (n-1)!$$, जेथे n हा धन पूर्णांक आहे.

टिप्पणी 1: $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ या सूत्राला ला गामा फंक्शनचे रिकरन्स रिलेशन असे म्हणतात.
टिप्पणी 2: लक्षात घ्या की $\Gamma(1) = 1$, गुणधर्म (b) द्वारे शोधले जाऊ शकते.

c. सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

समीकरण (1) मध्ये $n = \frac{1}{2}$ ठेवल्यास, आपल्याला मिळते

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{-1/2}\,dx \qquad \ldots (3)$$

$x = v^2$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow dx = 2\,dv$, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (4) मध्ये v चे u मध्ये रूपांतर करून

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du \qquad \ldots (5)$$

समीकरण (4) आणि (5) यांचा गुणाकार करून

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,du\,dv$$

समजा $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ तर $u^2 + v^2 = r^2$ आणि $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ तसेच $du\,dv = r\,dr\,d\theta$ आणि

$0 \le r \le \infty\,;\, 0 \le \theta \le \pi/2$

$$\therefore \quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta = 2\int_0^{\pi/2} 1.d\theta = \pi$$

म्हणून $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \ldots (6)$$

d. सिद्ध करा कि $\Gamma(0) = \infty$

समीकरण (2) वरून, आपल्याकडे आहे

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$n \to 0$ असल्यामुळे $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\Gamma(1)}{n} = \lim\limits_{n \to 0} \frac{1}{n} = \infty$

म्हणून $\qquad \Gamma(0) = \infty \qquad$ ...(7)

पुढे लक्षात घ्या की $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \Gamma(-3)$ इत्यादी देखील अपरिभाषित आहेत.

म्हणून कोणत्याही $n > 0$ साठी गामा फंक्शन कंटिन्युयस आहे आणि n = 0, −1, −2, ... येथे डिसकंटिन्युयस आहे.

अशा प्रकारे, $\Gamma(n)$ शून्य आणि ऋण पूर्णांक वगळता सर्व n साठी परिभाषित केले आहे.

e. सिद्ध करा कि $\Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1} (-1)^n \int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx$

जेथे n एक धन पूर्णांक आहे आणि $m > -1$.

आपल्याकडे आहे $\int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx$

$x = e^{-y}$ ठेवले तर $dx = -e^{-y} \, dy = -x \, dy$

$$\therefore \qquad \int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx = \int_0^\infty e^{-my} (-y)^n \, e^{-y} \, dy = (-1)^n \int_0^\infty y^n \, e^{-(m+1)y} \, dy$$

$(m+1)y = u$ ठेवा म्हणजे $dy = \frac{du}{m+1}$

$$\therefore \qquad \int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{u^n}{(m+1)^n} e^{-u} . \frac{du}{(m+1)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} \, u^{(n+1)-1} \, du$$

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

म्हणून $\qquad \Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1} (-1)^n \int_0^1 x^m (\log x)^n \, dx$

जेथे n एक धन पूर्णांक आहे आणि $m > -1$.

महत्त्वाचे सूत्र:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}; m, n > -1$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.47: $\int_0^\infty x^{1/4}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$I = \int_0^\infty x^{1/4}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$$

आता ठेऊन $\sqrt{x} = u\,, \Rightarrow\; x = u^2 \;\Rightarrow\; dx = 2u\,du$

$\therefore$
$$I = \int_0^\infty e^{-u}\left(u^2\right)^{1/4} 2u\,du = 2\int_0^\infty e^{-u}\, u^{3/2}\, du$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{5}{2}-1}\, du = 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2.\frac{3}{2}.\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \left[\because \Gamma(n+1) = n\Gamma n\right]$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{(उकल)} \qquad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

उदाहरण 1.48: $\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-h^2x^2} dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$I = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-h^2x^2} dx$$

$h^2x^2 = y$ ठेवल्यावर $\qquad h^2 2x\, dx = dy$ जेणेकरून

$$dx = \frac{1}{2}\frac{dy}{h^2\, x} = \frac{1}{2}\frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$\therefore$
$$I = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{\sqrt{y}}{h}\right)^{n-1} \frac{1}{2}\frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2h^n}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{n-2}{2}}\, dy \;= \frac{1}{2h^n}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\frac{n}{2}-1} dy$$

$$= \frac{1}{2h^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \qquad \text{(उकल)} \qquad \text{[गामा फंक्शनच्या व्याख्येनुसार]}$$

उदाहरण 1.49: $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$I = \int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$$

ठेवा $2x = y \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{dy}{2}$ तर

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{2}\right)^6 \frac{dy}{2} = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{7-1}\, dy \;= \frac{1}{2^7}\Gamma(7)$$

$$I = \frac{1}{2^7}\Gamma(7) \qquad \text{[गामा फंक्शनच्या व्याख्येनुसार]}$$

$$= \frac{1}{2^7}(6!) = \frac{45}{8} \quad \textbf{(उकल)} \qquad [\because \Gamma(n+1) = n!, n > 0]$$

उदाहरण 1.50: सिद्ध करा कि $\int_a^\infty e^{\left(2ax - x^2\right)}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{a^2}$

उकल: आपल्याकडे आहे

$$I = \int_a^\infty e^{\left(2ax - x^2\right)}\, dx = \int_a^\infty e^{a^2 - \left(x^2 - 2ax + a^2\right)} dx$$

$$= \int_a^\infty e^{a^2 - (x-a)^2} dx = e^{a^2}\int_a^\infty e^{-(x-a)^2}\, dx$$

$x - a = y$ ठेऊन, $\Rightarrow\; dx = dy$

$$\therefore \quad I = e^{a^2}\int_0^\infty e^{-y^2} dy \qquad \ldots (1)$$

आता गामा फंक्शनच्या व्याख्येनुसार

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{n-1}\, du, n > 0$$

$n = \frac{1}{2}$ ठेवल्यावर आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{-1/2}\, du$$

आता ठेवा $u = y^2 \;\Rightarrow\; du = 2y\, dy$ आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2}\left(y^2\right)^{-1/2} .\, 2y\, dy$$

$$\sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \qquad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right] \qquad \ldots (2)$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

समीकरण (2) वापरून, (1) आशाप्रकारे मिळेल.

$$I = e^{a^2} . \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{a^2} \qquad \text{(सिध्द केले)}$$

उदाहरण 1.51: $\int_0^{\infty} x^{-3/2}\left(1-e^{-x}\right) dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$I = \int_0^{\infty} x^{-3/2}\left(1-e^{-x}\right) dx$$

$$= \left[\left(1-e^{-x}\right)\frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x}\,\frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)}\,dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{\pi} \quad (\text{उकल})$$ **[व्याख्येनुसार]**

1.3.2 बीटा फंक्शन

बीटा फंक्शन खलील प्रमाणे दर्शविले आणि परिभाषित केले जाते

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \ldots (1)$$

जेथे m, n धन संख्या, पूर्णांक किंवा अपूर्णांक आहेत. याला युलेरियन इंटिग्रल ऑफ फर्स्ट काईन्ड असेही म्हणतात.

1.3.2.1 बीटा फंक्शनचे साधे गुणधर्म

i. सिध्द करा कि $B(m, n) = B(n, m)$ [सममिती]

आपल्याला माहित आहे कि

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}\left[1-(1-x)\right]^{n-1} dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}\,x^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$$

$$= B(n, m)$$

म्हणून $B(m, n) = B(n, m)$

सिध्द करा कि $\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = a^{m+n-1}B(m, n)$

समीकरण (1) वरून, आपल्याकडे आहे

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = B(m, n)$$

$x = \frac{y}{a}$ ठेवून,

$\Rightarrow \qquad dx = \frac{dy}{a}$ आणि $0 \le y \le a$

$$\int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{n-1} \frac{dy}{a} = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{a^{m+n-1}} \int_0^a y^{m-1} (a-y)^{n-1}\, dy = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1}\, dx = a^{m+n-1} B(m, n)$$

iii. हे सिद्ध करण्यासाठी $B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$

आपल्याला माहित आहे कि $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx$

$x = \frac{1}{y+1}$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल,

$dx = -\frac{dy}{(1+y)^2}$, आणि y हा $\infty \le y \le 0$ पर्यंत बदलते.

$$\therefore \qquad B(m, n) = \int_\infty^0 \left(\frac{1}{y+1}\right)^{m-1} \left[1 - \frac{1}{1+y}\right]^{n-1} \left[-\frac{dy}{(1+y)^2}\right]$$

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^{m-1}} \cdot \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{n-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy \qquad \ldots(1)$$

(या इंटिग्रल मध्ये m आणि n फंक्शनच्या सममितीच्या गुणाने बदलले जाऊ शकतात)

पुन्हा, समीकरण (1) असे लिहिले जाऊ शकते

$$B(m, n) = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy + \int_1^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy \qquad \ldots(2)$$

R.H.S. मधील दुसरे इंटिग्रल सोडवण्यासाठी, $y = \frac{1}{x}$ ठेवा , जेणेकरून $dy = -\frac{1}{x^2}\, dx$ आणि x हा 1 ते 0 पर्यंत बदलेल.

म्हणून
$$\int_1^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy = \int_1^0 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \frac{x^{m+n}}{(1+x)^{m+n}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (3) वापरून , (2) असे बनते

$$B(m,n)=\int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy+\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dy+\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(y)\,dy\right]$$

म्हणून $$B(m,n)=\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

iv. हे सिद्ध करण्यासाठी $B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$

आपल्याला माहित आहे कि $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$x=\sin^2\theta$ ठेवल्यावर $\Rightarrow$ $dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ आणि $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$B(m,n)=\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\theta\right)^{m-1}\left(1-\sin^2\theta\right)^{n-1}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

म्हणून $$B(m,n)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

विशिष्ट प्रकार :

जेव्हा $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}$, वरील समीकरण असे होईल,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\pi/2}1.d\theta=2.\frac{\pi}{2}=\pi$$

v. सिद्ध करा कि

$$(a-b)^{m+n-1}B(m,n)=\int_a^b (x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx$$

आपल्याला माहित आहे कि

$$B(m,n)=\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1}\,dy$$

समजा $$y=\frac{x-b}{a-b},$$

$\Rightarrow$ $dy=\frac{dx}{a-b}$ आणि y हा b ते a पर्यंत बदलेलं.

$\therefore$ $$B(m,n)=\int_b^a\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{m-1}\left(1-\frac{x-b}{a-b}\right)^{n-1}\frac{dx}{a-b}$$

$$= \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} \, dx$$

$\therefore$ $$\int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} \, dx = (a-b)^{m+n-1} B(m, n)$$

म्हणून $$\int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} \, dx = (a-b)^{m+n-1} B(m, n)$$

1.3.3 बीटा आणि गामा फंक्शनमधील संबंध

हे सिद्ध करण्यासाठी

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m > 0, n > 0$$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे कि

$$\frac{\Gamma(n)}{z^n} = \int_0^\infty e^{-zy} \; y^{n-1} \, dy \qquad \ldots(1)$$

किंवा $$\Gamma(n) = \int_0^\infty z^n \, e^{-zy} \; y^{n-1} \, dy \qquad \ldots(2)$$

तसेच $$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^m \; e^{-zy} \; y^{m-1} \, dy \qquad \ldots(3)$$

आता समीकरण (2) ला दोन्ही बाजूंनी $e^{-z}.z^{m-1}$ ने गुणाकार करून , आपल्याला मिळेल

$$\Gamma(n)\, e^{-z}.z^{m-1} = \int_0^\infty z^{m+n-1} \, e^{-zy} \; y^{n-1} e^{-z} \, dy$$

$$= \int_0^\infty z^{m+n-1} \, e^{-(y+1)z} \; y^{n-1} \, dy$$

दोन्ही बाजूंना z च्या संदर्भात 0 ते ∞ मध्ये इंटिग्रेशन करून, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma(n) \int_0^\infty e^{-z}.z^{m-1} \, dz = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty z^{m+n-1} \; e^{-(y+1)z} \, dz \right] y^{n-1} \, dy$$

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(1+y)^{m+n}} y^{n-1} \, dy$$ [गुणधर्म (1) व (3) वापरून]

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} \, dy$$

$$= \Gamma(m+n).\, B(m, n)$$ [1.3.2 चे गुणधर्म (1) चे (iii) वापरून]

म्हणून $$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad m > 0, n > 0$$

डिडक्शन (i), सिद्ध करा कि $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे कि

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\, dy$$

$m + n = 1$ असे निवडा कि, म्हणजे $m = (1 - n)$

$$\therefore \qquad \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y}\, dy$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma(1-n)\Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad \left[\because\ \Gamma(1) = 1, \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y}\, dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1\right]$$

जेथे $0 < n < 1$

डिडक्शन (ii), सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे कि

$\Gamma(1-n)\Gamma(n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ म्हणून

$n = \dfrac{1}{2}$ ठेऊन आपल्याला मिळेल

$$\therefore \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

डिडक्शन (iii), सिद्ध करा कि

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m > -1, n > -1$$

सिद्धता: समजा

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta\, d\theta$$

$\sin^2 \theta = x$ ठेवल्यावर

$$\Rightarrow \qquad 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dx$$

$\Rightarrow$ $$d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

तसेच, जेव्हा $\theta = 0, x = 0$ आणि जेव्हा $\theta = \frac{\pi}{2}, x = 1$

$\therefore$ $$I = \int_0^1 (1-x)^{\frac{m}{2}} . x^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n-1}{2}} . (1-x)^{\frac{m-1}{2}} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}-1} (1-x)^{\frac{m+1}{2}-1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \qquad [\because B(n,m) = B(m,n)]$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \qquad \left[\because B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\right]$$

म्हणून $$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m > -1, n > -1$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.52: इंटीग्रल $\int_0^1 x^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^5 \, dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा $\sqrt{x} = y$

$\Rightarrow$ $$x = y^2$$

$\Rightarrow$ $$dx = 2y\,dy$$

$\therefore$ दिलेल्या इंटीग्रल वरून

$$\int_0^1 y^8 (1-y)^5 . 2y\,dy = 2\int_0^1 y^{10-1} (1-y)^{6-1} \, dy$$

$$= 2\,B(10, 6) = 2\frac{\Gamma(10)\Gamma(6)}{\Gamma(16)} = \frac{2.9!5!}{15!} = \frac{1}{15015}$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.53: $\int_0^1 (1-x^3)^{-1/2} dx$ मूल्य शोधा.

उकल: समजा $x^3 = y$

$\Rightarrow \quad x = y^{1/3}$

$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} y^{-2/3} dy$

$\therefore$ दिलेल्या इंटीग्रल वरून

$$\int_0^1 (1-x^3)^{-1/2} dx = \int_0^1 (1-y)^{-1/2} . \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y^{\frac{1}{3}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1} dy$$

$$= \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \qquad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.54: इंटिग्रल $\int_0^1 y^m (1-y^p)^n dy$ बीटा फंक्शन मध्ये व्यक्त करा आणि $\int_0^1 y^5 (1-y^3)^{10} dy$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा $y^p = z$

$\Rightarrow \quad y = z^{1/p}$

$\Rightarrow \quad dy = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz$

$$\therefore \quad \int_0^1 y^m (1-y^p)^n dy = \int_0^1 z^{\frac{m}{p}} (1-z)^n . \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz$$

$$= \frac{1}{p} \int_0^1 z^{\frac{m+1}{p}-1} (1-z)^{\overline{n+1}-1} dz = \frac{1}{p} B\left(\frac{m+1}{p}, n+1\right) \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) मध्ये $m=5,\ p=3,\ n=10$, ठेऊन आपल्याला मिळेल

$$\int_0^1 y^5 (1-y^3)^{10} dy = \frac{1}{3} B(2, 11)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2)\Gamma(11)}{\Gamma(13)} = \frac{1}{3} . \frac{1.\Gamma(1)\Gamma(11)}{12.11.\Gamma(11)}$$

$$= \frac{1}{3 \times 12 \times 11} \qquad [\because \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)]$$

$$= \frac{1}{396} \qquad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.55: $\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{(1+x)^{24}}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$I=\int_0^\infty \frac{x^8\left(1-x^6\right)}{(1+x)^{24}}\,dx=\int_0^\infty \frac{x^8}{(1+x)^{24}}\,dx-\int_0^\infty \frac{x^{14}}{(1+x)^{24}}\,dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{(1+x)^{9+15}}\,dx-\int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{(1+x)^{15+9}}\,dx$$

$$=B(9,15)-B(15,9)$$

$$=0 \qquad [\because B(m,n)=B(n,m)]$$

उदाहरण 1.56: $\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$ हे सिद्ध करा.

उकल: समजा

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$

$\cos\theta=t$ ठेवल्यावर $\quad \Rightarrow\ -\sin\theta\,d\theta=dt \ \Rightarrow\ d\theta=-\frac{d\theta}{\sqrt{1-t^2}}$

$\therefore \quad I=-\sqrt{2}\int_1^0\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\,.\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

पुन्हा $t^2=\sin\theta$ ठेऊन $\quad \Rightarrow 2t\,dt=\cos\theta\,d\theta$

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2\sqrt{\sin\theta}\,.\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta\cos^0\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \qquad \ldots (1)$$

म्हणून $\quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\pi\sqrt{2}$

$\therefore$ समीकरण (1) पासून प्राप्त होईल

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 . \sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}} \text{ (अशा प्रकारे सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.57: $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$$

$x^6 = y$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow x = y^{1/6} \Rightarrow dx = \frac{1}{6} y^{-5/6}\,dy$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty \frac{y^{1/6}}{(1+y)} . \frac{1}{6} y^{-5/6}\,dy = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{-2/3}}{1+y}\,dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}\,dy = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} \qquad \left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \Gamma(1) = 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

उदाहरण 1.58: सिद्ध करा $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$

उकल: आपल्याला माहित आहे कि

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \cos^0\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \qquad \ldots (1)$$

आता, समजा $\quad I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta \cos^0\theta \, d\theta \times \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\theta \cos^0\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

$$= \frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4.\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \pi \qquad \text{(सिद्ध केले)} \qquad \left[\because \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)\right]$$

उदाहरण 1.59: दाखवा कि $\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^3} dx = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128}$.

उकल: $x = \sqrt{\tan\theta}$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow \; dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan\theta}}.\sec^2\theta \, d\theta$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan\theta.\frac{1}{2}(\tan\theta)^{-1/2}\sec^2\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^3} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\tan\theta)^{1/2}(\sec\theta)^{-4} \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta \cos^{7/2}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\frac{5}{4}.\frac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{128}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{128}.\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128} \quad \text{(सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.60: इंटीग्रल $\int_0^\infty e^{-x^{1/3}} dx$ चे मूल्य शोधा.

उकल: $x^{1/3} = y$ ठेवल्यावर, $\Rightarrow x = y^3 \quad \Rightarrow dx = 3y^2 \, dy$

$$\therefore \qquad \int_0^\infty e^{-x^{1/3}} dx = \int_0^\infty e^{-y}.3y^2 dy$$

$$= 3\int_0^\infty e^{-y} y^{3-1} dy = 3\Gamma(3) = 3.2! = 6 \qquad \textbf{(उकल)}$$

1.3.4 डुप्लीकेशन फॉर्म्युला

$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p),\ p>0$ हे दाखवण्यासाठी.

उकल: आपल्याला माहित आहे कि

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) मध्ये $n = m$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m+1)}=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta\cos\theta)^m\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2}(2\sin\theta\cos\theta)^m\,d\theta=\frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2}(\sin 2\theta)^m\,d\theta$$

पुन्हा $2\theta=\phi \Rightarrow d\theta=\frac{d\phi}{2}$, ठेवल्यावर आपल्याला मिळते

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(m+1)}=\frac{1}{2^m}\int_0^{\pi}\sin^m\phi\,\frac{d\phi}{2}$$

$$=\frac{1}{2^m}\int_0^{\pi/2}\sin^m\phi\cos^0\phi\,\frac{d\phi}{2} \qquad \left[\because \int_0^{2a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx,\ f(2a-x)=f(x)\right]$$

$$=\frac{1}{2^m}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

असे समजा $\quad \frac{m+1}{2}=p \Rightarrow m=2p-1,$ जेथे $p>0$

$$\therefore \qquad \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p),\ \text{जेथे } p>0$$

जो डुप्लीकेशन फॉर्म्युला म्हणून ओळखला जातो.

डिडक्शन (i), दिलेले सिद्ध करण्यासाठी

$$2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1),$$

m च्या सर्व वास्तविक मूल्यांसाठी.

सिद्धता: डुप्लीकेशन सूत्रामध्ये $2p-1=m$ ठेवा, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\,\Gamma(m+1)$$

$$\Rightarrow \qquad 2^m\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)$$ (सिद्ध केले)

डिडक्शन (ii) दिलेले सिद्ध करण्यासाठी

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{2^m.m!}\sqrt{\pi},\ \text{जेथे } m>0$$

सिद्धता: आपल्याकडे आहे

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}=\frac{(2m-1)!}{(m-1)!}=\frac{2m.(2m-1)!}{2m.(m-1)!}=\frac{(2m)!}{2.m!} \qquad \ldots(1)$$

आता डुप्लिकेशन सूत्र वापरून, आपल्याकडे असेल

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\frac{(2m)!}{2.m!}$$ [समीकरण (1) वरून]

$$=\frac{(2m)!}{2^m.m!}\sqrt{\pi}$$ (सिद्ध केले)

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.61: सिद्ध करा $B(n,n)=2^{1-2n}B\left(n,\frac{1}{2}\right)$

उकल: दिलेले आहे
$$B\left(n,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(n)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2n)2^{1-2n}}$$ [डुप्लीकेशन सूत्रावरून]

$$= \frac{B(n, n)}{2^{1-2n}}$$

$$\Rightarrow \quad B(n, n) = 2^{1-2n} B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

उदाहरण 1.62: सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2$

उकल: डुप्लीकेशन सूत्रानुसार, आपल्याकडे आहे

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$$

$m = \frac{1}{6}$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad \ldots (1)$$

पुन्हा, आपल्याला माहित आहे कि

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$n = \frac{1}{3}$ ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (2) वापरून, (1) आशाप्रकारे मिळेल

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}}\cdot\frac{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2$$ (सिद्ध केले)

उदाहरण 1.63. बीटा-गामा फंक्शन्स वापरून हे $\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = 1$ दाखवा.

उकल: समजा

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = 2\int_{0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \qquad ...(1)$$

$\frac{\pi x^2}{2} = y$ ठेऊन, $\Rightarrow \; x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, y^{1/2}$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)y^{-1/2}\, dy$$

$$\therefore \qquad I = 2.\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} y^{-1/2}\cos y\, dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} y^{-1/2}\cos y\, dy$$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} y^{-1/2}\, e^{-iy}\, dy$ चा वास्तविक भाग $\qquad \left[\because e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-iy}\, dy$ चा वास्तविक भाग

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{e^{i\pi/2}}}$ चा वास्तविक भाग $\qquad \left[\because \int_0^{\infty} e^{-kx}x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\right]$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}}$ चा वास्तविक भाग $\qquad \left[\because\; i = e^{i\pi/2}\right]$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$ चा वास्तविक भाग

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ [डी-मोईवर्स प्रमेय वापरून]

$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ (सिद्ध केले)

उदाहरण 1.64: बीटा-गामा फंक्शन्स वापरून $\int_0^{\infty}\cos\left(\lambda^2 x^2\right)dx$ चे मूल्य काढा .

उकल: समजा

$$I = \int_0^{\infty}\cos\left(\lambda^2 x^2\right)dx$$

$x^2 = z$ ठेऊन,

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

$$\therefore \qquad I = \int_0^\infty \cos\left(\lambda^2 z\right) \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} \cos\lambda^2 z\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} e^{i\lambda^2 z}\, dz \text{ चा वास्तविक भाग}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(i\lambda^2\right)^{1/2}} \text{ चा वास्तविक भाग}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda\left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2}} \text{ चा वास्तविक भाग} \qquad \left[\because\ i = e^{i\pi/2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} \text{ चा वास्तविक भाग} \qquad \left[\because \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1}\, dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{[डी-मोइवर्स प्रमेय वापरून]}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(सिद्ध केले)}$$

उदाहरण 1.65: बीटा-गामा फंक्शन्स वापरून $\int_0^1 \log\Gamma(y)\, dy$ चे मूल्य काढा.

उकल: समजा

$$I = \int_0^1 \log\Gamma(y)\, dy \qquad \ldots (1)$$

किंवा

$$= \int_0^1 \log\Gamma(1-y)\, dy \qquad \ldots (2)$$

समीकरण (1) आणि (2) यांची बेरीज करून , आपल्याला मिळेल

$$2I = \int_0^1 \left[\log\Gamma(y) + \log\Gamma(1-y)\right] dy$$

$$= \int_0^1 \log\left[\Gamma(y)\Gamma(1-y)\right] dy$$

$$= \int_0^1 \log\left(\frac{\pi}{\sin\pi y}\right) dy \qquad \left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \int_0^1 \left[\log\pi - \log\sin\pi y\right] dy$$

$$= \log\pi\left[y\right]_0^1 - \int_0^\pi \log\sin z . \frac{1}{\pi}\, dz \qquad \text{[द्वितीय इंटिग्रलसाठी } \pi y = z \text{ ठेऊन]}$$

$$= \log\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\sin z\,dz \quad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\ f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$= \log\pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right) \qquad \left[\because \int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2\right]$$

$$= \log\pi + \log 2 = \log 2\pi$$ [उदाहरण 1.31 वरून]

$$I = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

उदाहरण 1.66: सिद्ध करा कि $\Gamma\left(\frac{3}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right) = \left(\frac{1}{4}-m^3\right)\pi\sec\pi m$, दिलेल्या अटीनुसार $-1 < 2m < 1$

उकल:

$$L.H.S = \Gamma\left(\frac{3}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-m\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\right].\left(\frac{1}{2}+m\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right) = \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\Gamma\left(\frac{1-2m}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-2m}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1-2m}{2}\right)\pi}\right] = \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi m\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\frac{\pi}{\cos\pi m} = \left(\frac{1}{4}-m^2\right)\pi\sec\pi m$$ (सिद्ध केले)

उदाहरण 1.67: दाखवा कि $\int_0^{\pi/2}\tan^n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}, -1 < n < 1$

उकल: समजा

$$I = \int_0^{\pi/2}\tan^n\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\cos^{-n}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$$ (सिद्ध केले)

अभ्यास 1.6

1. खालील इंटिग्रलचे मूल्य काढा.

a. $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$ b. $\int_0^\infty \left(8-x^3\right)^{-1/3} dx$

c. $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{-1/2} dx \int_0^\infty x^2 e^{-x^4}\, dx$ d. $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}\, dx$

e. $\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} dt$ f. $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx$

g. $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t-t^2}}$ h. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\log t}}$

2. सिद्ध करा कि $\int_0^1 t^m (\log t)^n dt = \frac{(-1)^n .n!}{(m+1)^{n+1}}$, जेथे n एक धन पूर्णांक आहे आणि $m > -1$.

3. दाखवा कि $\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(a+bt)^{m+n}} dt = \frac{B(m,n)}{a^n b^m}$, जेथे m, n, a आणि b धन पूर्णांक आहेत.

4. सिद्ध करा कि $\int_0^\pi \sqrt{\frac{\sin\theta}{(5+3\cos\theta)^n}}\, d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2}{2\sqrt{2\pi}}$.

5. खालील इंटिग्रलचे मूल्य काढा.

i $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$ ii. $\int_0^1 x^m \left(1-x^m\right)^p dx$ iii. $\int_0^1 \frac{dt}{\left(1-t^n\right)^{1/2}}$ iv. $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}\, dx$

6. दिलेले मूल्य काढा.

i. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ ii. $\Gamma\left(-\frac{15}{2}\right)$

7. खालील इंटिग्रलचे मूल्य काढा.

i. $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx$ ii. $\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+ax)(1-x)^m}$ iii. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx \times \int_0^{\pi/2} \sin^{q+1} dx$

8. दाखवा कि $1.3.5...(2m-1) = \frac{2^m\, \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$.

9. सिद्ध करा कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

10. सिद्ध करा कि $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\sec\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$.

उत्तरे

1. a. $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ c. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ d. $\frac{45}{8}$

   e. $\sqrt{\frac{\pi}{p}}, p > 0$ f. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ g. π h. $\sqrt{\pi}$

2. i. $\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ ii. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(p+1+\frac{m+1}{n}\right)}$

   iii. $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}$ iv. $\frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

6. i. $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ ii. $\frac{2^8\sqrt{\pi}}{1.3.5.7...15}$

7. i. $\frac{\left[\Gamma(1/4)\right]^2}{6\sqrt{2\pi}}$ ii. $\frac{1}{(1+a)^m}\cdot\frac{\pi}{\sin m\pi}$ iii. $\frac{\pi}{2(q+1)}$

मनोरंजक तथ्य

फेनमन आकृतींवरून (ज्यात उपअणुकणांचे चित्रमय प्रतिनिधित्व समाविष्ट आहे), मॅक्सवेल-बोल्ट्झमन सांख्यिकी आणि वितरण (जे रेणूंचा वेग निश्चित करण्यासाठी भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र आणि सांख्यिकीय यांत्रिकीमध्ये वापरले जाते), या फंक्शन्समध्ये काही वास्तविक मूलभूत अनुप्रयोग समाविष्ट आहेत.

दैनंदिन जीवनामध्ये उपयोग

- सशक्त आण्विक बलामध्ये त्याचे बरेच अनुप्रयोग आहेत.
- जेव्हा आपण काळ व्यवस्थापन समस्या सोडवतो, तेव्हा बीटा वितरण वापरले जाते.
- गामा फंक्शनचा वापर वेळेवर आधारित घटना शोधण्यासाठी केला जातो, जसे की कोणत्याही गोष्टीचे आयुष्य.
- पॅकिंग समस्यांमध्ये, घन गोलामध्ये किंवा घनामध्ये गोल अधिक चांगले बसेल.

व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

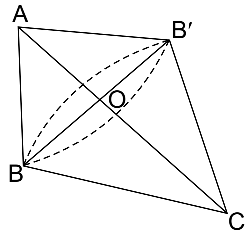
Beta & Gamma Function

1.4 पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि परिक्रमणाचे घनफळ निश्चित करण्यासाठी डेफिनाईट इंटिग्रेशनचे उपयोग

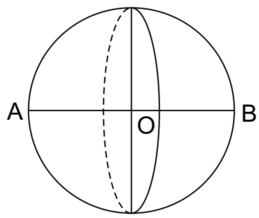
जर प्रतल क्षेत्र त्याच्या स्वतःच्या प्रतलात एका निश्चित रेषेभोवती फिरत असेल, तर प्रतल क्षेत्राने तयार केलेल्या आकृतीला घनपदार्थाच्या परिक्रमणाचे घनफळ म्हणतात आणि त्यामुळे निर्माण होणाऱ्या पृष्ठभागाला परिक्रमाचा पृष्ठभाग म्हणतात आणि ज्या ठराविक रेषेबद्दल घन फिरतो त्याला परिक्रमाचा अक्ष म्हणतात.

उदाहरण:

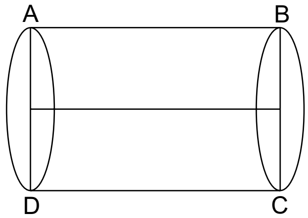
1. जेव्हा काटकोन त्रिकोण त्याच्या कर्ण या अक्षावर फिरवला तेव्हा दुहेरी शंकू तयार होतो.
2. जेव्हा वर्तुळ त्याच्या व्यासाभोवती फिरवले जाते तेव्हा एक गोल तयार होतो.



आकृति 1.17



आकृति 1.18



आकृति 1.19

3. जेव्हा चौरस त्याच्या कोणत्याही बाजूने फिरवला जातो, तेव्हा एक राईट सर्क्युलर सिलेंडर तयार होतो.

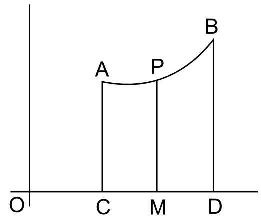
1.4.1 घन पदार्थांच्या (Solid) परिक्रमाचे (Revolution) घनफळ

1.4.1.1 कार्टेशियन वक्रांसाठी

1. ***x*-अक्षांशी संबंधित रोटेशन:** वक्र $y = f(x)$, x- अक्ष आणि ऑर्डिनेट, $x = a$, $x = b$, ने तयार केलेल्या क्षेत्रांच्या x अक्षांभोवती रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ $= \int_a^b \pi y^2 \, dx$

2. ***y*-अक्षांशी संबंधित रोटेशन:** वक्र x = f(y), y- अक्ष आणि अबसिसा, y = a, y = b, ने तयार केलेल्या क्षेत्रांच्या y अक्षांभोवती रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ $= \int_a^b \pi x^2 \, dy$

3. **कोणत्याही अक्षाभोवती परिक्रमण:** वक्र AB, अक्ष CD आणि X अक्षावरील परपेंडीकुलर्स AC, BD यांनी निश्चित केलेल्या सीमा क्षेत्राचा कोणताही अक्ष CD रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ, $\int_{OC}^{OD} \pi (PM)^2 \, d(OM)$ हे आहे. जेथे O हा CD अक्षा वरील एक निश्चित बिंदू आहे आणि PM हा वक्र AB च्या कोणत्याही बिंदू P पासून CD वर लंब आहे.



आकृति 1.20

1.4.1.2 पॅरामेट्रिक वक्रांसाठी:

1. वक्र $x = f(t)$, $y = \phi(t)$, x- अक्ष आणि ऑर्डिनेट या बिंदूंच्या $t = a$, $t = b$ तयार केलेल्या क्षेत्राच्या x- अक्षांच्या रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ $\int_a^b \pi x^2 \frac{dy}{dt} dt$ इतके आहे.

2. वक्र $x = f(t), y = \phi(t)$, y- अक्ष आणि अबसिसा $t = a, t = b$ या बिंदूंनी तयार केलेल्या क्षेत्राच्या y-अक्षांच्या रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ $\int_a^b \pi y^2 \frac{dx}{dt}\, dt$ इतके आहे.

3. दोन घन पदार्थाच्या परिक्रमामुळे तयार होणारे घनफळ: $y = f_1(x)$ आणि $y = f_2(x)$ आणि $x = a, x = b$ या वक्रांनी तयार केलेल्या क्षेत्राच्या x- अक्षांभोवती रोटेशनद्वारे तयार केलेल्या घन पदार्थाचे चे घनफळ $\int_a^b \pi\left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] dx$ जेथे $f_1(x)$ वरच्या वक्रांचे ऑर्डिनेट आहे आणि $f_2(x)$ खालच्या वक्राचे आहे.

1.4.1.3 पोलार वक्रांसाठी:

वक्र $r = f(\theta)$ आणि त्रिज्या वेक्टर $\theta = \alpha, \theta = \beta$ ने तयार केलेल्या क्षेत्राच्या रोटेशनमुळे निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे चे घनफळ

1. इनिशियल लाईन OX ($\theta = 0$) च्या संबंधीत, $\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\, d\theta$

2. लाईन OY ($\theta = \frac{\pi}{2}$) च्या संबंधीत, $\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \cos\theta\, d\theta$

1.4.2 फिरणाऱ्या घन पदार्थाचे पृष्ठफळ

1.4.2.1 कार्टेशियन वक्रांसाठी

$y = f(x)$, x- अक्ष आणि ऑर्डिनेट $x = a, x = b$ या वक्रानी तयार केलेल्या क्षेत्राच्या x- अक्षाभोवती फिरून निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे वक्र पृष्ठफळ $\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx$ आहे.

जेथे $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

1.4.2.2 पॅरामेट्रिक वक्रांसाठी:

वक्र $x = f(t), y = (\phi)$, x- अक्ष आणि $t = a, t = b$ या बिंदूंनी तयार केलेले क्षेत्र x- अक्षाभोवती फिरवल्याने निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे वक्र पृष्ठफळ

$$\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dt}\, dt, \text{ आहे, जेथे } \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

1.4.2.3 पोलार वक्रांसाठी:

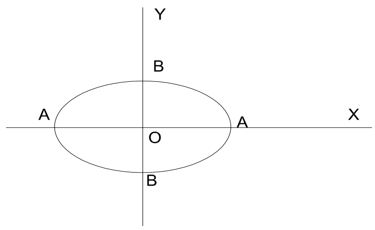
वक्र $r = f(\theta)$ आणि त्रिज्या वेक्टर $\theta = \alpha, \theta = \beta$ ने तयार केलेल्या क्षेत्राच्या इनिशियल लाइनभोवती फिरून तयार झालेल्या घन पदार्थाचे वक्र पृष्ठफळ

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi y \frac{ds}{d\theta}\, d\theta \text{ आहे, जेथे } \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \text{ आणि } y = r\sin\theta$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 1.68: एलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ने त्याच्या मेजर अक्षाभोवती फिरून तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ काढा.

उकल: एलिप्स चे समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ आहे.



आकृति 1.21

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$$

एलिप्स हे y- अक्षाला सममितीय आहे.

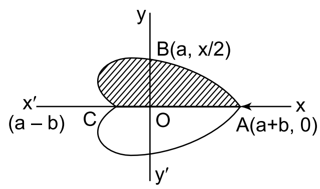
एलिप्स ने x-अक्षाभोवती तयार केलेल्या घन पदार्थाचे आवश्यक असलेले घनफळ

$$= 2\int_0^a \pi y^2\, dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) dx$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right) dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

उदाहरण 1.69: लिमाकोन $r = a + b\cos\theta,\ a > b$ ने इनिशियल लाईन भोवती फिरून तयार केलेल्या घन पदार्थाचे घनफळ काढा.

उकल: आपण फक्त इनिशियल लाईनच्या वरचा छायांकित भाग इनिशियल लाईन भोवती फिरूवू



आकृति 1.22

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}\left(a+b\cos\theta\right)^2 \sin\theta\, d\theta$$

$a+b\cos\theta=t$ ठेऊन, $\Rightarrow\ b\sin\theta\, d\theta=-dt$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_{a+b}^{a-b} t^2\left(-\frac{dt}{b}\right)$$

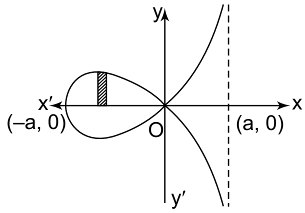
$$= -\frac{2}{3}\frac{\pi}{b}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{a+b}^{a-b} = -\frac{2\pi}{3b}\left[\frac{-6a^2b-2b^3}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{9}\pi\left(b^2+3a^2\right)$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.70 वक्र लूप $(a - x)\, y^2 = (a + x)\, x^2$ च्या x-अक्षाभोवती फिरण्यामुळे निर्माण झालेल्या घन पदार्थाचे घनफळ शोधा.

उकल: वक्राचा आकार आकृतीमध्ये दर्शविला आहे.

वक्र x-अक्ष ला सममितीय आहे.



आकृति 1.23

$\therefore$ आवश्यक घनफळ $V = \int_{-a}^{0} \pi y^2 \, dx = \int_{-a}^{0} \pi \frac{(a+x)}{(a-x)} x^2 \, dx$

समजा $\quad a - x = z, dx = -dz$

जेव्हा $\quad x = -a,$ तेव्हा $z = 2a$

आणि $\quad x = 0$ तेव्हा $z = a$

$$\therefore \quad V = \pi \int_{2a}^{a} \frac{(a+a-z)}{z} (a-z)^2 (-dz) = \pi \int_{a}^{2a} \frac{2a-z}{z} (a-z)^2 dz$$

$$= \pi \int_{a}^{2a} \frac{2a-z}{z} \left(a^2 + z^2 - 2az\right) dz$$

$$= \pi \int_{a}^{2a} \left[\frac{2a^3}{z} + 2az - 4a^2 - a^2 - z^2 + 2az \right] dz$$

$$= \pi \int_{a}^{2a} \left[\frac{2a^3}{z} + 4az - z^2 - 5a^2 \right] dz = \pi \left[2a^3 \log z + 2az^2 - \frac{z^3}{3} - 5a^2 z \right]_a^{2a}$$

$$= \pi \left[\left\{ 2a^3 \log 2a + 2a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{3} - 5a^2(2a) \right\} - \left\{ 2a^3 \log a + 2a^3 - \frac{a^3}{3} - 5a^3 \right\} \right]$$

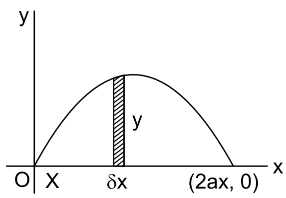
$$= 2\pi a^3 \left[\log 2 - \frac{2}{3} \right]$$

(उकल)

उदाहरण 1.71: सायकलॉइड (Cycloid) $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$

च्या संपूर्ण कमानी खालच्या क्षेत्राच्या x- अक्षाभोवती फिरण्यामुळे निर्माण होणाऱ्या घन पदार्थाचे घनफळ शोधा.

उकल: समजा कमानीखालील क्षेत्र y-अक्षाला समांतर रेषांद्वारे रुंदी dx च्या n पट्ट्यांमध्ये आणि y- अक्षा पासून x अंतरावर विशिष्ट पट्टीची उंची y मध्ये विभाजित केली आहे.



आकृति 1.24

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 \, dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos\theta)^2 \, a(1 - \cos\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^3 (1 - \cos\theta)^3 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi a^3 \times \left(2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^3 d\theta$$

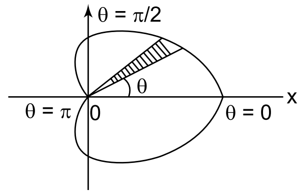
$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \phi \, d\phi \qquad [\theta = 2\phi]$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \phi \, d\phi \qquad [\because \sin(\pi - \phi) = \sin\phi]$$

$$= 32\pi a^3 \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} . \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$

[रिडक्शन सूत्र वापरून]

उदाहरण 1.72: कार्डिओइड $r = a(1 + \cos\theta)$ इनिशियल लाईन भोवती फिरवून निर्माण केलेल्या पृष्ठभागाचे घनफळ शोधा.



आकृति 1.25

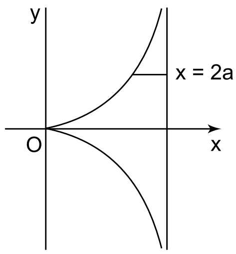
उकल: निर्माण झालेले घनफळ (V) $= \dfrac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 (-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left[\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi a^3 \left[\frac{(1+1)^4}{4}\right] = \frac{8}{3}\pi a^3$$

उदाहरण 1.73: सिसॉईड $y^2(2a - x) = x^3$ ला त्याच्या असिम्टोडभोवती फिरवल्यामुळे निर्माण झालेल्या घन पदार्थाचे घनफळ $2\pi^2 a^3$ आहे हे दाखवा.



आकृति 1.26

उकल: या वक्राचा असिम्टोट $x = 2a$ हा आहे.

आवश्यक घनफळ $\quad V = 2\pi\int_0^{2a} (2a-x)^2\, dy \qquad \ldots (1)$

वक्राच्या समीकनावरून

$$y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}$$

$$dy = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}\, dx$$

जेव्हा y चे मूल्य 0 पासून ∞ पर्यंत बदलते आणि x चे मूल्य 0 ते $2a$ पर्यंत असते.

$$V = 2\pi\int_0^{2a} (2a-x)^2\, dy = 2\pi\int_0^{2\pi} (2a-x)^2 \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}}\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^{2a} (a-x)\sqrt{2ax-x^2}\, dx + 4\pi a\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\, dx$$

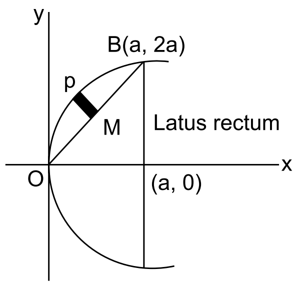
$x = 2a\sin^2\theta$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल,

$$\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} 2a \times 4a\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \pi\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore \qquad V = \pi\left[\frac{(2ax-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{2a} + 4\pi a\frac{\pi a^2}{2} = 0 + 2\pi^2 a^3 = 2\pi^2 a^3$$

उदाहरण 1.74: जीवेच्या संदर्भात चार काटकोनाच्या माध्यमातून जानारया आणि व्हर्टेक्स आणि लॅटस रेकतम चे टोक यांना जोडणारया जीवेने राईट पॅराबोला $y^2 = 4ax$ ला कापल्यामुळे तयार झालेले क्षेत्र. तयार झालेल्या घन पदार्थाचे घनफळ काढा.

उकल: पॅराबोलाचे समीकरण $y^2 = 4ax$ आहे



आकृति 1.27

B चे निर्देशांक $(a, 2a)$ हे आहेत

म्हणून OB चे समीकरण

$$y - 0 = \frac{2a-0}{a-0}(x-0)$$

$$\Rightarrow \qquad 2x - y = 0$$

समजा $P(at^2, 2at)$ हा चाप OB वर एक बिंदू आहे आणि लंब PM हा P पासून OB पर्यंत आहे.

$$PM = \frac{2at^2 - 2at}{\sqrt{4+1}} = \frac{2at(t-1)}{\sqrt{5}}$$

$$OP = \sqrt{(at^2-0)^2 + (2at-0)^2} = at\sqrt{t^2+4}$$

$$OM^2 = OP^2 - PM^2 = a^2t^2(t^2+4) - \frac{4a^2t^2(t-1)^2}{5}$$

$$OM^2 = \frac{a^2t^2(t+4)^2}{5}$$

$$OM = \frac{at(t+4)}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ आवश्यक घनफळ

$$V = \int_{t=0}^{1} \pi (PM)^2 \, d(OM) = \pi \int_0^1 \frac{4a^2t^2(t-1)^2}{5} d\left(\frac{at(t+4)}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}} \int_0^1 t^2(t^2-2t+1)(2t+4)\, dt = \frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}} \int_0^1 (2t^5 - 6t^3 + 4t^2)\, dt = \frac{2\pi a^3}{15\sqrt{5}} \quad \textbf{(उकल)}$$

उदाहरण 1.75: इलिप्स $x^2 + 4y^2 = 16$ च्या मुख्य अक्षा भोवती फिरण्यामुळे निर्माण झालेल्या घन पदार्थाचे पृष्ठफळ शोधा.

उकल: इलिप्स चे समीकरण असे आहे

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

$$4y^2 = 16 - x^2 \quad \therefore \; y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{-2x}{\sqrt{16-x^2}} = -\frac{x}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$dy = -\frac{x}{2\sqrt{16-x^2}}\, dx$$

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4\left(16-x^2\right)}}=\sqrt{\frac{64-3x^2}{4\left(16-x^2\right)}}$$

जेथे $y = 0$ आहे तेथे ईलिप्स छेदतो,

$$x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

पहिल्या क्वाड्रंटमधील इलिप्सच्या वरच्या अर्ध्या भागासाठी x हा 0 ते 4 पर्यंत बदलतो.

इलिप्स हा y- अक्षाला सममितीय आहे

$\therefore$ आवश्यक पृष्ठफळ $$= 2\times\int_0^4 2\pi y\frac{ds}{dx}\,dx=4\pi\int_0^4\frac{\sqrt{16-x^2}}{2}\times\sqrt{\frac{64-3x^2}{4\left(16-x^2\right)}}\,dx$$

$$=\pi\int_0^4\sqrt{64-3x^2}\,dx=\sqrt{3}\,\pi\int_0^4\sqrt{\frac{64}{3}-x^2}\,dx$$

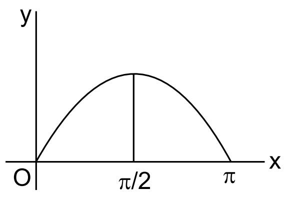
$$=\sqrt{3}\,\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{64}{3}-x^2}+\frac{64}{3\times 2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}\,x}{8}\right]_0^4$$

$$=\sqrt{3}\,\pi\left[2\sqrt{\frac{64}{3}-16}+\frac{32}{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=\sqrt{3}\,\pi\left[2\times\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{32}{3}\times\frac{\pi}{3}\right]=8\pi\left[1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$$ **(उकल)**

उदाहरण 1.76 वक्र $y = \sin x$ चा एक चाप x-अक्षाभोवती फिरवून निर्माण झालेल्या परिभ्रमन पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ काढ़ा.

उकल: वक्र $y = \sin x$ चा एक चाप $(0,\pi)$ मध्ये आहे. आणखी



आकृति 1.28

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\cos^2 x}$$

आवश्यक पृष्ठफळ $$=2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$ [$t = \cos x$ ठेवा $\Rightarrow$ $dx = -\sin x\,dx$]

$$=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\left[\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}+\frac{1}{2}\sinh^{-1}(t)\right]_{-1}^{1}$$

$$=\pi\left[\left\{\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)\right\}-\left\{-\sqrt{2}-\sinh^{-1}(1)\right\}\right]=2\pi\left[\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1)\right]$$

उदाहरण 1.77: एस्ट्रोईड $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ हे x अक्षाभोवती फिरवून तयार झालेल्या घनाचा पृष्ठभाग शोधा.

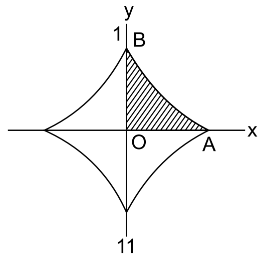
उकल: छायांकित भाग OAB, x-अक्षाच्या भोवती फीरू द्या.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t \times \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}$$

$$= 3a\cos t\sin t$$



आकृति 1.29

$\therefore$ पृष्ठभाग क्षेत्र $= 2\int_0^{\pi/2} 2\pi y \frac{ds}{dt}\, dt = 4\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t \times 3a\cos t\sin t\, dt$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos t\, dt = 12\pi a^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2$$

उदाहरण 1.78: त्रिज्या 'a' असलेल्या वर्तुळाची एक चौकट त्याच्या टोकावरील स्पर्शकांनी बांधलेला आहे. दाखवा कि तयार झालेल्या पृष्ठभागांचे क्षेत्रफळ $\pi(\pi\text{-}2)a^2$ आहे.

उकल: समजा वर्तुळाचे समीकरण खालील प्रमाणे आहे,

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ किंवा } x = a\cos t,\ y = a\sin t$$

आणि $P(x, y)$ त्यावर कोणताही बिंदू असू शकतो.

$$PM = NA = a - x = a - a\cos t = a(1-\cos t)$$

$\therefore$ $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a$

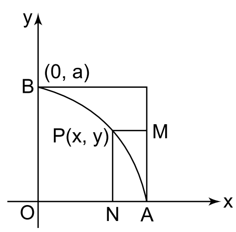
$\therefore$ पृष्ठभागाचे क्षेत्र $= \int_0^{\pi/2} 2\pi(PM)\times\dfrac{ds}{dt}\times dt$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)\, dt$$

$$= 2\pi a^2\left[t - \sin t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi a^2\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \pi a^2(\pi - 2).$$



आकृति 1.30

उदाहरण 1.79: कार्डिओईड $r = a\,(1 + \cos\theta)$ ला आद्य रेषेभोवती फिरवल्यामुळे तयार झालेल्या घनाचा पृष्ठभाग शोधा.

उकल: कार्डिओईड आद्य रेषेला सममित आहे आणि त्याच्या वरच्या अर्ध्या भागासाठी , θ हा 0 पासुन π पर्यंत बदलतों.

तसेच $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$

$$= a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = a\sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$\therefore$ आवश्यक पृष्ठभागचे क्षेत्र $= \int_0^{\pi} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\theta \times 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$ $\quad [\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$

$$= 4\pi a \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\theta}{2} \times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \times \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 16\pi a^2 (-2) \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= -32\pi a^2 \left[\frac{\cos^5\frac{\theta}{2}}{5}\right]_0^{\pi} = -\frac{32\pi a^2}{5}(0-1) = \frac{32\pi a^2}{5}$$

उदाहरण 1.80 परिघात 'a' या परिघाचा पृष्ठभाग शोधा, वर्तुळ $r = a$ असे समीकरण करा.

उकल: वर्तुळाचे समीकरण $r = a$ छायांकित भाग x- अक्षा भोवती फिरू द्या.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2+0} = a$$

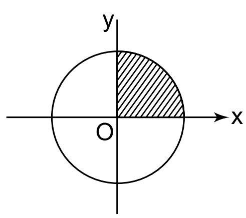
$$\therefore \quad S = 2\int_0^{\pi/2} 2\pi r\sin\theta \frac{ds}{d\theta} d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a\sin\theta \times a\, d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi a^2 [-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= 4\pi a^2$$



आकृति 1.31

अभ्यास 1.7

1. ॲस्ट्रोईड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
2. सायक्लोईड $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
3. वक्र $r^2 = a^2\cos 2\theta$ च्या लूप ला आद्य रेषेभोवती फिरवल्यामूळे तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.

4. वक्र $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
5. वक्र $x = a \cos^3\theta$, $y = a \sin^3\theta$ च्या $\theta = -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ च्या मधे स्थित चाप x अक्षाभोवती फिरते. अशा प्रकारे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
6. वक्र $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ आणि $x = 0$, $y = 0$ यांनी बाउन्डेड क्षेत्र x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
7. वक्र $27ay^2 = 4(x - 3a)^2$ ला x-अक्षाभोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.
8. x- अक्ष, वक्र $y^2 = 4ax$ आणि ऑर्डिनेट $x = 3a$ यांनी मिळून एक क्षेत्र तयार झाले जे x-अक्षा भोवती फिरते. त्यातून निर्माण होणारया क्षेत्राचे घनफळ शोधा.
9. सिद्ध करा कि दोन वक्र $y^2 = x^3$, $x^2 = y^3$ यांच्या मधील क्षेत्र x-अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार होणारया घनाचे घनफळ $\frac{5\pi}{28}$ आहे.
10. ईलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ हे त्याच्या मेजर अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार होणारया इलिप्सोइड चे पृष्ठफळ आणि घनफळ शोधा.
11. पॅराबोला $y^2 = 4ax$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या व्हर्टेक्स मधून जनारया स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे निर्माण झालेल्या रीलचे घनफळ शोधा.
12. पॅराबोला $y^2 = 4ax$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या व्हर्टेक्स मधून जनारया स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे निर्माण झालेल्या रीलचे पृष्ठफळ शोधा.
13. वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ साठी सिद्ध करा कि वक्राला आद्य रेषे भोवती फिरवल्यामूळे तयार होणारया क्षेत्राचे घनफळ $\frac{\pi a^2}{6\sqrt{2}}\left[3\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\right]$ हे आहे.
14. वक्र $\frac{y+8}{x}=x-2$ आणि x- अक्ष यांचा मधील क्षेत्र हे रेषा $x + 5 = 0$ भोवती फिरवून तयार होणाऱ्या घनाचे घनफळ शोधा.
15. वक्र $3ay^2 = x(x - a)^2$ च्या लूपला x-अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.
16. वक्र $x = t^2$, $y=\frac{t^3}{3}$ च्या लूपला x-अक्षा भोवती फिरवल्यामूळे तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ आणि घनफळ शोधा.
17. त्रिज्या 'a' असलेल्या वर्तुळाची एक चौकट त्याच्या कॉर्ड भोवती फिरते. त्याने तयार झालेल्या स्पिण्डल चे घनफळ $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}(10-3\pi)$ आहे हे सिद्ध करा.

उत्तरे

1. $\frac{12}{5}\pi a^2$ 2. $\frac{64}{3}\pi a^2$ 3. $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$ 4. $2\pi a^3\left[\log 2-\frac{2}{3}\right]$

5. $\dfrac{16\pi a^2}{105}$ 6. $\dfrac{\pi a^3}{12}$ 7. $48\pi a^3$ 8. $18\pi a^3$

10. $2\pi ab = \sqrt{1-e^2} + e^{-1}\sin^{-1} e$ आणि $\dfrac{4\pi}{3}ab^2$ 11. $\dfrac{4\pi}{5}a^3$

12. $\pi a^2\left[3\sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$ 14. 432π 15. $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$

16. $\dfrac{3\pi}{4}, 3\pi$

मनोरंजक तथ्ये

- तुम्हाला माहीत आहे का, इलेक्ट्रिकल सर्किटमध्ये, विद्युत धारा आणि चार्ज यांच्यात एक संबंध आहे जो या संकल्पनेद्वारे मोजला जाऊ शकतो? (*https://www.math24.net/integrals-electric-circuits*)
- विविध उद्योगांमधील अभियांत्रिकी कार्य कोणत्याही वस्तूमानाचे केंद्र(सेंटर ऑफ मास) आणि जड़त्व आघूर्ण (मोमेंट ऑफ इनेर्शिया)शोधण्यासाठी या संकल्पनेच्या ज्ञानाचा वापर करतात.
- कोणतीही इमारत बांधताना आर्किटेक्ट या संकल्पनेचा वापर करतात.

दैनंदिन जीवनासाठी अनुप्रयोग

- या संकल्पनेचा उपयोग व्यवसाय आणि अर्थशास्त्र क्षेत्रात "लॉरेन्झ वक्र आणि गिनी गुणांक" मोजण्यासाठी आणि एकूण नफा वाढविण्यासाठी केला जातो.
- कोणत्याही वस्तूचे वस्तुमान आणि घनता शोधण्यासाठी भौतिकशास्त्रात उपयोग होतो.
- सरासरी बदल, घनफळ, त्रुटी अंदाज आणि पृष्ठफळ निश्चित करण्यासाठीही याचा वापर केला जातो.

व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

Application of Definite Integral - I

विषयात्मक सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

उदाहरण 1: इंटीग्रल $\int_{-3/2}^{10}\{2x\}\,dx$ चे मूल्य शोधा, जेथे $\{.\}$ हे x चा अंशभाग दर्शवितो .

उकल: आपल्याला माहीत आहे $f(x) = \{2x\}$ एक आवर्तकार्य ज्याचा कालावधी 1/2 आहे.

समजा

$$I = \int_{-3/2}^{10}\{2x\}\,dx = \int_{-3(1/2)}^{20(1/2)}\{2x\}\,dx$$

$$= 23\int_0^{1/2} 2x\, dx$$ (म्हणून $\{2x\} = 2x- [2x]$ आणि जेव्हा x $[0, 1/2]$, $[2x] = 0$)

$$= \left|23x^2\right|_0^{1/2}$$

$$= \frac{23}{4}.$$

टिप्पणी: जर $f(x)$ एक आवर्तनी फंक्शन असेल आणि त्याचे आवर्तन(पिरिएड) p असेल तर $\int_{a/np}^{b/np} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx, n \in I$

उदाहरण 2: दिलेल्या इंटीग्रल चे मूल्य शोधा $\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^4}\, dx$.

उकल: समजा $f(x) = x^3 e^{x^4}$ तेव्हा

$\therefore$ $$f(-x) = (-x)^3 e^{(-x)^4} = -x^3 e^{x^4} = -f(x)$$

म्हणून $f(x)$ एक विषम फंक्शन आहे.

$\therefore$ $$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^3 e^{x^4}\, dx = 0.$$

उदाहरण 3: $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$ चे मूल्य शोधा .

उकल: समजा

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^n\right)^{1/n}}$$

$x^n = \sin^2\theta$ ठेवून, $\Rightarrow$ $x = \sin^{2/n}\theta$

$$dx = \frac{2}{n}\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$\therefore$ $$I = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)}.$$

उदाहरण 4: $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \qquad dx = -2a\cos\theta\sin\theta d\theta + 2b\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 2(b-a)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$x - a = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - a$$

$$= (b-a)\sin^2\theta$$

$$b - x = b - a\cos^2\theta - b\sin^2\theta$$

$$= (b-a)\cos^2\theta$$

$$\therefore \qquad I = \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{(b-a)\sin\theta\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} 1.\, d\theta = \pi$$

उदाहरण 5: योग्य प्रतिस्थापनाद्वारे दाखवा, कि $\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt,\ x, y > 0$

उकल: समजा

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \text{ म्हणून } \cos\theta = \frac{z^{1/2}}{\sqrt{1+z}}$$

$$\cos\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}(1+z)^{-3/2}\, dz$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} \frac{1}{(1+z)^{x-1/2}} . \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{y-1}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}\, dz = \frac{1}{2}B(y, x)$$

कारण,आपल्या कड़े आहे

$$B(x, y) = B(y, x)$$

म्हणून

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$$

उदाहरण 6: जर $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ तर सिद्ध करा कि $I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$

उकल: दिलेले आहे

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

$$= \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \left(1-\sin^2 x\right) dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$I_n + (n-1) I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$$

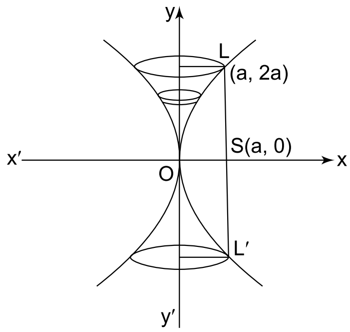
उदाहरण 7: पॅराबोला $y^2 = 4ax$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या व्हर्टेक्स मधून जाणा-या स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे तयार झालेल्या रीलचा वक्र पृष्ठफळ शोधा.

उकल: दीलेला पॅराबोला $y^2 = 4ax$ आहे. x ने डिफ्रनशीएट करुन,आपल्याला मिळेल

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}} = \sqrt{\frac{x+a}{x}}$$



आकृति 1.32

आवश्यक वक्र पृष्ठभाग हा चाप LOL' (LSL' लॅटस रेक्टम आहे) च्या व्हर्टेक्स मधून जाणाऱ्या स्पर्शिके भोवती फिरल्याने तयार झाला आहे.

वक्र x-अक्षाला सममित आहे आणि आर्क OL साठी, x हा 0 ते 1 पर्यंत बदलतो.

$\therefore$ आवश्यक पृष्ठफळ $\quad S = 2\int_0^a 2\pi x \frac{ds}{dx} \, dx$

$$= 4\pi \int_0^a x\sqrt{\left(\frac{x+a}{x}\right)} dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{x^2+ax} \, dx$$

$$= 4\pi \int_0^a \sqrt{\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}} \, dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)\sqrt{x^2+ax} - \frac{1}{2}.\frac{a^2}{4}\log\left\{\left(x+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{x^2+ax}\right\}\right]_0^a$$

$$\left[\because \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\{x+\sqrt{x^2-a^2}\right\}\right]$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.a\sqrt{2} - \frac{a^2}{8}\log\left\{\frac{3a}{2}+a\sqrt{2}\right\} + \frac{a^2}{8}\log\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= 4\pi\left[\frac{3a^2}{4}\sqrt{2} - \frac{a^2}{8}\log\left\{\frac{\left(\frac{3a}{2} + a\sqrt{2}\right)}{a/2}\right\}\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2} + 1\right)^2\right]$$

$$= \pi a^2\left[3\sqrt{2} - \log\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

उदाहरण 8: शंकू $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ आणि पॅराबोलाइड $z = 1 + x^2 + y^2$ यांनी तयार झालेल्या घनाचे पृष्ठफळ शोधा.

उकल: संकेत, ध्रुवीय निर्देशकात रूपांतरित करा मग सोडवा.

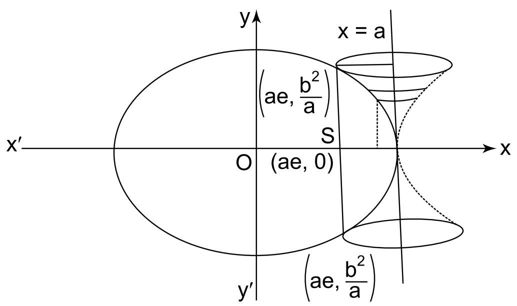
उदाहरण 9: ईलिप्स $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ चा एक भाग जो त्याच्या लॅटस रेक्टम ने कापल्यामूळे तयार झाला, तो भाग त्याच्या जवळच्या व्हर्टेक्स मधून जनारया स्पर्शिकेभोवती फिरतो. अशा प्रकारे तयार झालेल्या रीलचे वक्र पृष्ठफळ शोधा.

उकल: दिलेले ईलिप्स $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ आहे.

ईलिप्सचे फोकस $(ae, 0)$ आहे, तिथे $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ही इसेंट्रीसिटी दिली आहे.

फोकसमधून जाणाऱ्या आणि इलिप्सने आंतरखंडित केलेल्या लाईन सेगमेंटला लॅटस रेक्टम म्हणतात.

समजा त्रिज्या $(a - x)$ आणि जाडी dy च्या स्वरूपात एक घन घटक विचारात घ्या. या घटकाचे घनफळ $\pi(a - x)^2\, dy$ आहे.



आकृति 1.33

परिभ्रमन घनतेचे घनफळ आहे

$$V = \int_{-b^2/a}^{b^2/a} \pi\left(a - x\right)^2\, dy$$

$$= 2\int_0^{b^2/a} \pi(a-x)^2 \, dy$$

$$= 2\pi\int_0^{b^2/a} \left(a^2 - 2ax + x^2\right) dy \quad [\text{ येथे } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ म्हणजेच } x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)]$$

$$= 2\pi\int_0^{b^2/a} \left\{a^2 - 2a.\frac{a}{b}\sqrt{\left(b^2 - y^2\right)} + \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)\right\} dx$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\int_0^{b^2/a} \left\{2b^2 - 2b\sqrt{b^2 - y^2} - y^2\right\} dy$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[2b^2 y - 2b\left\{\frac{1}{2}y\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right\} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{b^2/a}$$

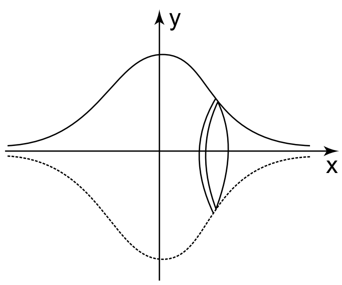
$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[2b^2.\frac{b^2}{a} - 2b\left\{\frac{1}{2}.\frac{b^2}{a}.\sqrt{b^2 - \frac{b^4}{a^2}} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} - \frac{b^6}{3a^3}\right]$$

$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[\frac{2b^4}{a} - \frac{b^4}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2} - b^3\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^6}{3a^3}\right]$$

$$= \frac{2\pi b}{3a}\left[6a^2 b - 3ab\sqrt{a^2 - b^2} - 3a^3\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - b^3\right]$$

उदाहरण 10: वक्र $y = \dfrac{a^3}{\left(a^2 + x^2\right)}$ ला त्याच्या असीम्प्टोट भोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ शोधा.

उकल: $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$



आकृति 1.34

उदाहरण 11: सिद्ध करा कि वक्र $(a - x)y^2 = a^2 x$ ला त्याच्या असीम्प्टोट भोवती फिरवल्यामुलळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$ आहे.

उकल: दिलेले वक्र $(a - x)y^2 = a^2 x$ आहे. त्याचा आकार आकृतीत दाखवला आहे. सर्वोच्च घात असलेल्या y चा गुणांक शून्य ठेवून, y अक्षाला समांतर असलेला असीम्प्टोट $a - x = 0$ आहे म्हणजेच, $x = a$ असेल.

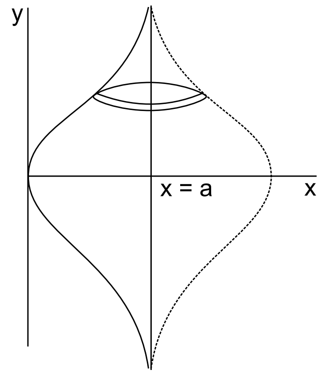
समजा त्रिज्या $(a - x)$ आणि जाडी dy च्या स्वरूपात एक घन घटक विचारात घ्या. या घटकाचे घनफळ $\pi(a-x)^2\,dy$ आहे.

म्हणून, अपेक्षित घनफळ

$$V = 2\int_{y=0}^{\infty}\pi(a-x)^2\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty}\left(a - \frac{a\,y^2}{y^2+a^2}\right)dy \qquad \left[\because\ x = \frac{a\,y^2}{y^2+a^2}\right]$$

$$= 2\pi a^6\int_0^{\infty}\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^2}$$



आकृति 1.35

$$y = a\tan\theta$$

$\Rightarrow$ $\qquad dy = a\sec^2\theta\,d\theta$

$\Rightarrow$ $\qquad y \to 0,\ \theta \to 0$

$\Rightarrow$ $\qquad y \to \infty,\ \theta \to \pi/2$.

म्हणून, आवश्यक घनफळ

$$V = 2\pi a^6\int_0^{\pi/2}\frac{a\sec^2\theta}{a^4\sec^4\theta}\,d\theta = 2\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi a^3.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi^2 a^3$$

उदाहरण 12: बीटा फंक्शनचे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

किंवा

दाखवा कि $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ अस्तित्वात आहे, जर आणि फक्त जर m, n दोघेही धनात्मक असतील.

उकल: समजा

$$I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

इंटीग्रल I प्रॉपर इंटीग्रल असेल जर $m \geq 1$ आणि $n \geq 1$ आणि म्हणून ते $m \geq 1$ आणि $n \geq 1$ चे कॉनव्हर्जेंस आहे स्पष्टपने 0 आणि 1 हे इनफाइनाइट डिसकंटिन्यूइटी चे पॉइंट आहेत जर अनुक्रमे $m < 1$ आणि $n < 1$ आहे. $m < 1$ आणि $n < 1$साठी, 0 आणि 1 च्या दरम्यान 1/2 (समजा) घेऊन, जेणेकरून आपण अशा प्रकारे लिहू शकू,

$$I = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx + \int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

समजा $\qquad I = I_1 + I_2 \qquad \ldots (1)$

इंटीग्रल $\qquad I_1 = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ चे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी, जेव्हा $m < 1$

येथे $$f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}} \qquad [\because m<1]$$

$g(x) = \dfrac{1}{x^{1-m}}$ ठेवून , जसे कि $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)^{n-1} = 1,$ जे फाइनाइट असेल आणि शून्य नाही

$\therefore$ इनटीग्रल I_1 आणि $\int_0^{1/2} g(x)\,dx = \int_0^{1/2} \dfrac{1}{x^{1-m}}\,dx$ एकत्र कॉनव्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

परंतु इंटीग्रल $\int_0^{1/2} \dfrac{1}{x^{1-m}}\,dx$, हे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस जर फक्त आणि फक्त जर $1 - m < 1$ म्हणजेच $m > 0$

$\therefore$ $x = 0$ वर I_1 कॉनव्हर्जेंस फक्त आणि फक्त जर $0 < m < 1$

इंटीग्रल $I_2 = \int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ चे $x = 1$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी, जेव्हा $n < 1$:

येथे $$f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}} \qquad [\because n<1]$$

$g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}$ ठेवून, म्हणून $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{m-1} = 1$ जे फाइनाइट असेल आणि शून्य नाही.

$\therefore$ इनटीग्रल I_2 आणि $\int_{1/2}^{1} g(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx$ एकत्र कॉनव्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

परंतु इंटीग्रल $\int_{1/2}^{1} g(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \dfrac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx$, हे $x = 1$ वर कॉनव्हर्जेंस जर फक्त आणि फक्त

जर $1 - n < 1$ म्हणजेच $n > 0$

$\therefore$ $x = 1$ वर I_2 कॉनव्हर्जेंस फक्त आणि फक्त जर $0 < n < 1$.

म्हणून समीकारण (1) वरुन, इंटीग्रल I कॉनव्हर्जेन्ट आहे जर आणि फक्त जर $0 < m < 1$ किंवा $0 < n < 1$. तसेच $m \geq 1$ आणि $n \geq 1$ साठी ते प्रॉपर इंटीग्रल आहे.

उदाहरण 13: गॅमा फंक्शनचे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

किंवा

सिद्ध करा कि इंटीग्रल $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$ कॉनव्हर्जेन्ट असेल, जर $n > 0$

उकल: समजा

$$I = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad = \int_0^{1} x^{n-1} e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

समजा $$I = I_1 + I_2 \qquad \ldots(1)$$

येथे $$f(x) = x^{n-1} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^{1-n}}$$

इंटीग्रेंड f ला $[0, 1]$ मधे $x = 0$ वर फाइनाइट डिसकंटिन्युटी आहे जर $n < 1$ आणि I_1 हे एक प्रॉपर इंटीग्रल आहे आणि म्हणून

$n \geq 1$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

इंटीग्रल I_1 चे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी, जेव्हा $n < 1$

$g(x) = \frac{1}{x^{1-n}}$ घेऊन, म्हणून $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$, जे फाइनाइट असेल आणि शून्य नाही.

परंतु इंटीग्रल $\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-n}} dx$ कॉनव्हर्जेंस जर आणि फक्त जर $1 - n < 1$ म्हणजेच $n > 0$.

म्हणून कंप्यारीजन चाचणी वरून (Comperision test), इंटीग्रल $\int_0^1 f\, dx$, $0 < n < 1$ हे $n \geq 1$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट असेल.

तसेच ते एक प्रॉपर इंटीग्रल आहे $n \geq 1$ साठी. म्हणून I_1 हे सर्व $n > 0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

इंटीग्रल I_1 चे $x = 0$ वर कॉनव्हर्जेंस तपासण्यासाठी

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ घेवून, म्हणून $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{n+1}}{e^x} = 0, \forall\, x$$

आता $$\int_1^\infty g(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$ कॉनव्हर्जेन्ट आहे. $[\because n = 2 > 1]$

$\therefore$ कंप्यारीजन चाचणी वरून (Comperision test) इनटीग्रल I_2, सर्व $n > 0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

त्यामुळे समीकरण (1) वरुन, असे निष्कर्षात येते कि इनटीग्रल I कॉनव्हर्जेन्ट आहे जर आणि फक्त जर $n > 0$.

सारांश

1. वक्रतेची त्रिज्या $\rho = \frac{\left(1 + y_1^2\right)^{3/2}}{y_2}$

2. वक्रतेच्या केंद्राचे निर्देशांक $\bar{x} = x - \rho \sin \psi$, $\bar{y} = y + \rho \cos \psi$ आणि $\bar{x} = x - \frac{y_1\left(1 + y_1^2\right)}{y_2}$, $\bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$

3. इव्होल्यूट आणि इन्वोल्यूट : वक्रतेच्या मध्यभागी असलेल्या वक्राच्या लोकस ला इव्होल्यूट म्हणतात आणि वक्रालाच इन्व्होलुट म्हणतात.

4. जर $f(x)$ इंटरवल $[a, b]$ मध्ये परिभाषित केला असेल, तर $f(x)$ चे डेफ़िनाइट इंटीग्रल खालीलप्रमाणे लिहिता येते. $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

5. इंटीग्रल $\int_a^b f(x)\, dx$, $f(x)$ हे एक प्रॉपर इंटीग्रल आहे, जर 'a' किंवा 'b' किंवा दोन्ही 'a' आणि'b' इनफाइनाइट असेल किंवा फंक्शन $f(x)$ हे [a, b] वर अनबाउन्डेड आहे.

6. बीटा आणि गॅमा फंक्शन:

a. $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ हे m, $n>0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

b. $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ हे $n>0$ साठी कॉनव्हर्जेन्ट आहे.

c. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, $\Gamma(n-1)=n!$, जर n हा धनात्मक पूर्णांक आहे.

d. $\Gamma(1)=1=\Gamma(2), \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

e. $B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

f. $\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^q x\,dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

g. $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,d\theta=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}$

7. परीभ्रमन घनपदार्थांचे पृष्ठफळ.

$$S=\int_a^b 2\pi y\,ds=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (x\text{- अक्षा भोवती परीभ्रमन})$$

$$S=\int_a^b 2\pi x\,ds=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dy \qquad (y\text{- अक्षा भोवती परीभ्रमन})$$

परीभ्रमन घनपदार्थांचे घनफळ

x- अक्षा भोवती परीभ्रमन $V=\int_a^b \pi y^2\,dx$

y- अक्षा भोवती परीभ्रमन $V=\int_c^d \pi x^2\,dy$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\cos^{5/2}x\,dx$ चे मूल्य शोधा.

a. $\frac{1}{77}$ b. $\frac{2}{77}$ c. $\frac{4}{77}$ d. $\frac{8}{77}$

2. इलिप्सच्या इव्होल्यूटचे नाव आहे

a. सेंट्रोइड b. ॲस्ट्रोइड c. सायक्लोईड d. हायपरबोलॉइड

3. इन्व्होल्यूट ला असे देखील ओळखले जाते.

a. इव्होल्यूट b. इव्होल्व्हेंट c. एन्व्हेलोप d. स्पर्शिका

4. वक्र $x^2 + y^2 = 25$ ची वक्रता काय आहे?

a. 5 b. 25 c. 0.5 d. 0.2

5. सरळ रेषेची वक्रता काय असेल?

a. अनंत b. 1 c. 0 d. सरळ रेषेची लांबी

6. $\int_0^{\pi/2}\left[\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)\right]dx$ चे मूल्य काय असेल.

a. $\frac{\pi}{4}$ b. π c. $\frac{\pi^2}{4}$ d. $\frac{\pi^2}{2}$

7. जर $I=\int_{-1}^{1}\left(x^7+\cos^{-1}x\right)dx$ असल्यास $\cos I$ चे मूल्य असेल.

a. 1 b. 0 c. −1 d. ½

8. $\int_0^{\pi/2}\sin\theta\sqrt{\sin 2\theta}\,d\theta$ चे मूल्य असेल.

a. 1 b. 0 c. $\pi/2$ d. $\pi/4$

9. खालीलपैकी कोणती गॅमा फंक्शनची व्याख्या नाही?

a. $\Gamma(n)=n!$ b. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

c. $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx$ d. $\Gamma(n)=\int_0^{1}\log\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}dy$

10. $\int_0^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ चे मूल्य असेल.

a. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}$ b. $\frac{2\pi\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ c. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ d. $\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}$

11. $\Gamma(9/4)$ चे मूल्य असेल.

a. $\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ b. $\frac{9}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ c. $\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ d. $\frac{1}{4}\times\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

12. $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)$ चे मूल्य असेल.

a. $\frac{\pi}{\sin n\pi}$ b. $-\frac{\pi}{\sin n\pi}$ c. 0 d. $n!$

13. इलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ जेव्हा त्याच्या छोट्या अक्षा भोवती फिरेल तेव्हा घनफळ किती असेल?

a. $4ab$ क्यूब युनिट b. $\frac{4}{3}a^2b$ क्यूब युनिट c. $\frac{4}{3}ab$ क्यूब युनिट d. 4 क्यूब युनिट

14. जेव्हा $y=\sqrt{x}$, $y=2$ आणि $y=0$ या वक्रांनि तयार झालेले क्षेत्र हे y- अक्षा भोवती फिरेल तेव्हा घनफळ किती असेल?

a. 32π क्यूब युनिट b. $\frac{32\pi}{5}$ क्यूब युनिट c. $\frac{32}{5}$ क्यूब युनिट d. $\frac{5\pi}{32}$ क्यूब युनिट

15. दिलेल्या कार्डिओइड $y = a (1 + \cos\theta)$ चे क्षेत्रफळ काय आहे.

a. $\frac{3}{2}\pi a^2$ b. $3\pi a^2$ c. $\frac{3}{4}\pi a^2$ d. $\frac{3}{8}\pi a^2$

उत्तरे

1. d	2. b	3. b	4. d
5. c	6. c	7. c	8. d
9. a	10. c	11. a	12. a
13. b	14. b	15. a	

सब्जेक्टिव्ह न सोडवलेले प्रश्न
(हॉट्स)

1. एका बिंदूवर वक्राचे ओस्क्युलेटिंग प्रतल परिभाषित करा आणि या व्याख्येतून त्याचे समीकरण शोधा.
2. जेव्हा फक्त वक्र हे प्रतल असते तेव्हा वक्रता केंद्राचा लोकस हा इवोल्युट असतो हे सिद्ध करा.
3. दोन इन्व्होल्यूट च्या संबंधित बिंदूमधील अंतर स्थिर असते हे सिद्ध करा.
4. $\int_{-2}^{3}|x^2-1|\,dx$ मूल्य शोधा .
5. इंटिग्रल $\int_0^1 x^{n-1}\log x\,dx$ च्या कॉन्व्हर्जन्स ची निरनिराळया दृष्टीकोनांतून विचार करा.
6. $x = 0, x = a, y = 0, y = a$ या प्रतला दरम्यान असणाऱ्या $z^2 = 2xy$ च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $4\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{3\sqrt{2}}\right)$ आहे हे सिद्ध करा.
7. $az = xy$ च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ जे $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ या सिलेंडरच्या आत आहे ते शोधा.
8. सायक्लॉइड ला त्याच्या बेस भोवती फिरवल्यानंतर तयार होणाऱ्या घनपदार्थाचे घनफळ शोधा.
9. त्रिज्या a असलेल्या वर्तुळाचा भाग त्याच्या जीवेभोवती फिरवल्यानंतर तयार झालेल्या स्पिंडल चे घनफळ शोधा.

उत्तरे

4. $28/3$ 6. जर $n > 0$ तर कॉन्व्हर्जन्ट आणि जर $n \leq 0$ तर डायव्हर्जन्ट 8. $\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2$

9. $5\pi^2 a^3$ 10. $\frac{\pi a^3(10-3\pi)}{6\sqrt{2}}$

तुम्हाला माहीत आहे का?

न्यूटनने त्याच्या डिफरेंशियल कॅलक्यूलसच्या आवृत्तीचे वर्णन ‘फ्लक्षनची पद्धत’ असे केले. त्याने 1666 मध्ये फ्लक्षियंवर एक पेपर लिहिला, परंतु त्याच्या बऱ्याच कार्याप्रमाणे, काही दशकांपर्यंत तो प्रकाशित झाला नाही. त्याचे महान कार्य फिलॉसॉफीय नॅचुरलीस प्रिन्सिपिया मॅथेमॅटिका (मॅथेमॅटिकल प्रिन्सिपल्स ऑफ नॅच्युरल फिलॉसॉफी) 1687 मध्ये प्रकाशित झाले या कार्यामध्ये त्याच्या वेग आणि गुरुत्वाकर्षणाच्या तत्त्वांचा समावेश आहे, परंतु त्यात स्पष्टपणे जास्त कॅलक्यूलस चा समावेश नाही. तथापि, सुरुवातीला कॅलक्यूलसचे काही स्पष्टीकरण आहे, आणि न्यूटनने आपली तत्त्वे तयार करण्यासाठी कॅलक्यूलसचा नक्कीच वापर केला. मात्र न्यूटनची ‘मेथड ऑफ फ्लक्षन’ 1693 पर्यंत स्पष्टपणे छापली गेली नाही.

दुसरीकडे, लिब्नीजने 1684 मध्ये कॅलक्यूलसवर आपला पहिला पेपर प्रकाशित केला आणि 1670 च्या दशकात कॅलक्यूलस चा शोध लावला असा दावा केला. प्रकाशित रेकॉर्डवरून तरी निदान लिब्नीजने आधी कॅलक्यूलसचा शोध लावला होता, असं दिसतं.

न्यूटन आणि लिबनीज यांचे सुरुवातीला सौहार्दपूर्ण संबंध असले, तरी लिबनीज आणि त्याच्या अनुयायांनी इंग्रजी गणितज्ञ जॉन वॉलिस यांनी केलेल्या विधानाकडे दुर्लक्ष केले. परकीयांच्या विद्वेषी आणि भांडखोर चारित्र्यासह, वॉलिस यांनी आयुष्यभर इंग्रजी शास्त्रज्ञांच्या वतीने प्राधान्याच्या वादाशी लढा दिला.1695 मध्ये, कदाचित नकळत, वॉलिसने अहवाल दिला की लिबनीजला न्यूटनकडून कॅलक्यूलसबद्दल माहिती मिळाली - हा दावा आता खोटा मानला जातो.

गणिती समस्या केवळ लेबिनेसच्या कॅलक्यूलसच्या आवृत्तीद्वारेच सोडवल्या जाऊ शकतात या लिबनीजच्या एका विधानामुळे फातिओ डी डुलर नावाचा गणितज्ञ संतापला मग, त्याने 1699 मध्ये लिबनिझवर वाङ्मयचोरी केल्याचा आरोप केला. तिथून फक्त गोष्टी खाली गेल्या. न्यूटन आणि लिबनिझ यांनीही तत्त्वज्ञानाच्या प्रश्नांवर असहमती दर्शविली या बाबींना यामुळे मदत झाली नाही.

1712 मध्ये इंग्लंडमधील रॉयल सोसायटीने या प्रकरणाचा निपटारा करण्यासाठी एक अहवाल लिहिला - फक्त संपूर्ण तपासच न्यूटनने प्रभावीपणे निर्देशित केला होता. अहवालात असे आढळले आहे की लिबनीजने न्यूटनच्या कार्याबद्दलचे त्याचे ज्ञान लपवले आहे - जे आता खोट्या समजल्या जाणाऱ्या वस्तुस्थितीवर आधारित आहे. त्याला प्रत्युत्तर म्हणून, लिबनीजने न्यूटन आणि त्याच्या अनुयायांवर त्याचे स्वतःचे कॅलक्यूलस चोरल्याचा आणि त्याच्या अनुप्रयोगांमध्ये त्रुटी केल्याचा आरोप केला. 1716 मध्ये लिबनीजच्या मृत्यूनंतरही, आरोप- प्रत्यारोपांनी भरलेला वाद चांगलाच चालला.

या वादातून कोणीही सावरले नाही.न्यूटन आणि लिबनिझ दोघेही अविश्वसनीय गणिती शोध घेण्यास सक्षम होते, परंतु त्यांच्या वादाने हे सिद्ध केले की ते काही कमी प्रभावी वर्तन करण्यास देखील सक्षम आहेत.

प्रकल्प/प्रात्यक्षिक/क्रियाकलाप

प्रकल्प

1. परिमेय रेषीय समूहाचा एनव्हेलोप निश्चित करण्यासाठी साठी आपली स्क्रिप्ट तयार करा आणि दिलेल्या वक्रांचे इव्होलुट कढा.
   i. पॅराबोला $y = x^2$ ऐवजी जसे $x(t) = t, y(t) = t^2$ पॅरामीटराइज्ड केले जाते.

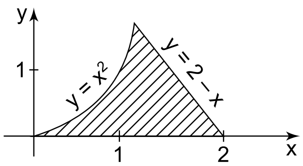
ii. इलिप्स $x^2 + 4y^2 = 4$ ऐवजी जसे $x(t) = \frac{8t}{1+4t^2}$ आणि $y(t) = \frac{4t^2 - 1}{1+4t^2}$ पॅरामीटराइज्ड केले जाते.

आणि या इव्होल्यूट्सला त्यांच्या संबंधित वक्रांसह प्लॉट करा.

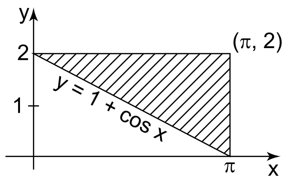
2. बीटा फंक्शन आणि स्ट्रिंग थिअरी यांच्यातील संबंध सांगा.

प्रात्यक्षिक

1. बीटा फंक्शनची थ्री-डी प्रतिमा तयार करा.
2. $\int_1^4 (x+6)\, dx$ साठी एक आलेख रेखाटा आणि विशिष्ट श्रेणीच्या क्षेत्रफळाला शेड करा.
3. निश्चित अविभाज्य वापरा, दिलेल्या वळणांसाठी छायांकित क्षेत्र शोधा:



आकृती 1.36



आकृती 1.37

4. पॅराबोलाच्या इवोल्युटचा आलेख काढण्यासाठी MATLAB कोड लिहा.

क्रियाकलाप

i. गॅमा फंक्शन, फैक्टोरियल फंक्शन ला कसे इंटरपोलेट करू शकते (विचार करा आणि समजावून सांगा).

ii. गॅमा फंक्शनचा आलेख कसा दिसतो?

[संकेत: पायथन कोड वापरू शकतो]

अधिक जाणून घ्या

1. जर f हे एक सम फंक्शन असेल आणि $\int_0^2 f(x)\, dx = k$, तर $\int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) f\left(x+\frac{1}{x}\right) dx$ चे मूल्य असेल....

a. 0 b. $2k$ c. k d. $4k$

2. दिलेल्या इंटीग्रल $\int_{-5}^{5} (x-[x])\, dx$ चे मूल्य शोधा.

a. 0 b. 5 c. 10 d. 15

3. दिलेल्या इंटीग्रल $\int_0^2 x^{[x]}\, dx$ चे मूल्य शोधा.

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{5}{2}$ d. $\frac{7}{2}$

4. $\Gamma(0.1), \Gamma(0.2)\ \Gamma(0.3)\ \ldots\Gamma(0.9)$ चे मूल्य शोधा?

a. $\frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$ b. $\frac{\pi^2}{\sqrt{10}}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. दिलेल्या इंटीग्रल $A=\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx, B=\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos x}$ चे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

6. दिलेल्या इंटीग्रल $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$ चे कॉनव्हर्जेंस तपासा.

7. समजा $\alpha=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$, तर खालीलपैकी कोणते सत्य आहे?

a. $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$ b. α परिमेय संख्या आहे

c. $\log(\alpha)=1$ d. $\sin(\alpha)=1$

उत्तरे

1. b 2. b 3. c 4. a

5. A कॉनव्हर्जेंस 8/3 ला आणि B डायव्हार्जेस $+\infty$ ला. 6. डायव्हर्जेन्ट. 7. d

संदर्भ/सुचविलेले वाचन

1. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus , Wiley, NewYork.
2. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
3. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
4. Garg Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P)Ltd.
5. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
6. https://en.m.wikipedia.org/wiki/Evolute
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947). Theory of Functions, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.

12. Ram, Babu Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (2002). Calculus and Analytic Geometry, 9th edition, Pearson.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

2 कॅल्क्युलस II

युनिट निर्दिष्टे

या युनिटमध्ये रोल्सचे प्रमेय, त्याचा भौमितिक अर्थ, सरासरी मूल्य प्रमेय त्यांच्या भौमितिक अर्थासह, टेलर आणि मॅकलॉरिनचे प्रमेय रिमेंडर सह, इंडिटर्मिनेट फॉर्म आणि L हॉस्पिटलचा नियम (सर्व प्रकार.), लांबीमध्ये मॅक्झिमा आणि मिनीमा या विषयांवर चर्चा केली आहे. विविध विषयांच्या अनुप्रयोगांची सखोल चर्चा केली आहे आणि विषयाच्या योग्य आकलनासाठी अनेक सोडवलेली उदाहरणे समाविष्ट केली आहेत. विद्यार्थ्यांना विषयांची कल्पना करण्यासाठी अनेक आकृतींचा समावेश करण्यात आला आहे.

तर्कशास्त्र

प्रमेय गणिताच्या मुळाशी आहेत. प्रमेयांचे वर्णन अनेकदा "ट्रिवियल", किंवा "कठीण", किंवा "खोल" किंवा अगदी "सुंदर" असे केले जाते. हे व्यक्तिनिष्ठ निर्णय केवळ व्यक्तीपरत्वे बदलत नाहीत, तर वेळ आणि संस्कृतीनुसार देखील बदलतात: उदाहरणार्थ, रोल्स चे प्रमेय कंपनीच्या वार्षिक कामगिरीच्या आलेखांचे विश्लेषण करण्यासाठी वापरले जाते. सरासरी मूल्य प्रमेय सहसा गती समस्यांसह लागू केले जाते जसे की चेंडू हवेत फेकणे किंवा इतर. गणनाशी संबंधित इतर समस्या सोडवण्यासाठी हे गणिताचे साधन म्हणून वापरले जाऊ शकतात.

टेलर सिरीज अभिव्यक्तींची गणना करण्यासाठी अनेक कठीण अंदाजाचे मूल्यांकन करण्यासाठी खूप उपयुक्त आहेत. आपण लिमिट सोडवण्यासाठी L'Hospital नियम वापरतो, वास्तविक जगात, विशेषत: सांख्यिकी, भौतिकशास्त्र आणि अभियांत्रिकीमध्येही त्याचे बरेच अनुप्रयोग आहेत.

या जगातील प्रत्येक गोष्ट मॅक्सिमा आणि मिनिमा या संकल्पनेवर आधारित आहे, प्रत्येक वेळी प्रत्येकजण प्रत्येक डेटाचे मॅक्सिमा आणि मिनीमा मूल्य मोजतो.

पूर्वतयारी

1. कंटिन्यूइटी आणि डिफरन्शियाबिलिटी ची संकल्पना.
2. मॉड, इंक्रीजिंग फंक्शन, डिक्रिजिंग फंक्शन, ओपन इंटरवल, क्लोज इंटरवल यासारख्या विशेष प्रकारच्या फंक्शन्स चे ज्ञान.
3. लिमिटचे मूल्यमापन, तसेच त्याचा उपयोग.
4. काही फंक्शन्स $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 \pm x)$, e^x इत्यादी च्या विस्तारा ची माहिती असणे.

यूनिट आउटकम

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील:

U2-O1: त्याच्या डेरिव्हेटिवसह समाविष्ट असलेल्या फंक्शन चे गुणधर्म सिद्ध करण्यासाठी विविध मीन मूल्य प्रमेये वापरुन.

U2-O2: फंक्शन $f(x)$ चे $x \to \infty$ म्हणून असिम्टोटिक वर्तन निश्चित करणे आणि L हॉस्पिटल नियम वापरून लिमिट चे मूल्य शोधने.

U2-O3: मॅक्सिमा-मिनिमा वापरुन फंक्शनच्या वर्तनाचे विश्लेषण करने.

U2-O4: टेलर आणि मॅक्लॉरिनच्या प्रमेयासह बीजगणित आणि ट्रांसिडेंटल फंक्शनसाठी सीरीज च्या विस्ताराबद्दल जाणून घेणे.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट 2 आउटकम	कोर्स आऊटकमसह अपेक्षित मॅपिंग *(1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)*				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U2-O1	1	2	–	–	–
U2-O2	1	3	–	–	–
U2-O3	–	3	–	–	1
U2-O4	–	3	–	–	–

इतिहास

17 व्या शतकाच्या सुरुवातीला, एक वक्र साधारणपणे काही भौमितिक स्थितीचे समाधान करणाऱ्या बिंदूंचे स्थान म्हणून वर्णन केले गेले आणि भौमितिक रचनेद्वारे स्पर्शरेषा प्राप्त केल्या गेल्या. वक्रांशी स्पर्शरेषा आणि गतिमान कणांचा वेग यांच्यातील संबंध 1660 च्या उत्तरार्धात आयझॅक न्यूटनने शोधला. रोल्सचे प्रमेय म्हणजे मीन व्हॅल्यू प्रमेयाचा एक भाग आहे. भास्करा द्वितीय (1114-1185), एक भारतीय गणितज्ञ, रोलेच्या प्रमेयावर काम करणारा पहिला व्यक्ती असल्याचे श्रेय दिले जाते आणि त्याचे नाव फ्रेंच गणितज्ञ मिशेल रोले (1652-1719) यांच्या नावावर ठेवले गेले. प्रमेय अपरिमित कॅल्क्युलसचा भाग मानला जात होता आणि 18 व्या शतकापर्यंत विभेदक कॅल्क्युलस अंतर्गत वर्गीकृत नव्हता. लाग्रेंजने केवळ रोल्सच्या प्रमेयाच्या पहिल्या दोन अटी वापरून निकाल दिला. म्हणून त्याला लाग्रेंजचे मीन-व्हॅल्यू प्रमेय म्हणतात.

भास्करा II (1114-1185)

कॉचीने दुसरे सरासरी मूल्य प्रमेय दिले ज्यामध्ये त्याने रोलच्या प्रमेय आणि लाग्रेंजच्या मीन-व्हॅल्यू प्रमेयच्या बाबतीत एका फंक्शनऐवजी दोन फंक्शन्स वापरल्या, लैग्रेंजचे प्रमेय कॉची मीन व्हॅल्यू प्रमेयचे एक विशिष्ट आहे. टेलरचे प्रमेय मीन व्हॅल्यू प्रमेयाचा विस्तार 'उच्च क्रम' डेरिव्हेटिव्ह्ज म्हणून केला जाऊ शकतो. एल हॉस्पिटल्सचा नियम खरेतर जोहान बर्नौलीने शोधला होता. 1955 मध्ये, L'Hospital -Bernoulli पत्रव्यवहार जर्मनीमध्ये प्रकाशित झाला.

2.1 रोल्सचे सिद्धांत

विधान: समजा f हे $[a,b]$ वर परिभाषित केलेले एक फंक्शन आहे जसे की

(i) f, हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहे

(ii) f, हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

(iii) $f(a) = f(b)$

तर a आणि b दरम्यान मिनीमा एक वास्तविक संख्या c अस्तित्वात आहे जसे कि $f'(c) = 0$

सिद्धता: f, हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस असल्याने f, $[a, b]$ वर बाउन्डेड आहे आणि ते त्याचा बाउन्ड गाठते.

समजा $\underset{x\in[a,b]}{Sup.} f(x) = M$ आणि $\underset{x\in[a,b]}{Inf.} f(x) = m$

कंटिन्यूइटीच्या गुणधर्माद्वारे, येथे $c, d \in [a,b]$ अस्तित्वात आहे जसे की

$f(c) = M$ आणि $f(d) = m$ [$\because$ जर एखादे फंक्शन $f(x)$ हे क्लोज इंटरवल [a, b] वर कंटिन्युयस असेल, तर तो कमीतकमी एकदा तरी [a, b] मध्ये त्याचे सुप्रीमम आणि इन्फिमम प्राप्त करते]

दोन भिन्न स्थिति उद्भवतात:

स्थिति I:

जेव्हा $M = m$ म्हणजे $Sup.f = Inf.f$

या स्थितीत, $f(x) = M(= m)$ सर्व $x \in [a,b]$ साठी

$\Rightarrow$ f हे $[a,b]$ वर कॉस्टंट फंक्शन आहे.

$\therefore$ $f'(x) = 0$ सर्व $x \in [a,b]$ साठी

म्हणून $f'(c) = 0$ जेथे $c \in (a,b)$

स्थिति II:

जेव्हा $M \neq m$

दिलेले आहे $f(a) = f(b)$

$\therefore$ एकतर M किंवा m,हे $f(a) = f(b)$ पेक्षा वेगळे आहे

असे समजा $M \neq f(a)$ आणि $M \neq f(b)$

जसे, $f(c) = M$, जर $c \neq a$, $c \neq b$ आणि म्हणून $a < c < b$

कारण $f(c) = M = \underset{x\in[a,b]}{Sup.} f(x)$

म्हणून, $f(x) \leq f(c)$ सगळ्या $x \in [a,b]$ साठी ...(1)

समीकरण (1), वरून $f(c-h) \leq f(c)$

$\therefore$ $f(c-h) - f(c) \leq 0$

$-h<0$ ने भागल्यास, आपल्याला मिळते

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{h} \geq 0$$

म्हणून $h \to 0$ लिमिट घेतल्यास,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$

$\Rightarrow$ $L.f'(c) \geq 0$ ...(2)

समीकरण *(1)*, वरून $f(c+h) \leq f(c)$

$\therefore$ $f(c-h)-f(c) \leq 0$

$h>0$ ने भागल्यास, आपल्याला मिळते

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

म्हणून $h \to 0$ लिमिट घेतल्यास,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

$\Rightarrow$ $R.f'(c) \leq 0$ ... (3)

$f'(c)$ अस्तित्वात असल्यामुळे.

$\therefore$ $L.f'(c) = R.f'(c) = f'(c)$

हे तेव्हाच शक्य आहे जेव्हा $f^{/}(c)=0$.

त्याच पद्धतीने पुढे जाताना, आपण हे सिद्ध करू शकतो की $f'(d)=0$, जेथे $d \in (a,b)$

म्हणून कमीत कमी एक $c \in (a,b)$ अस्तित्वात आहे जसे कि $f'(c)=0$.

हे प्रमेयाचा सिद्धता पूर्ण करते.

टिपण्णी: रोल्सच्या सिद्धांताच्या सिद्धतेमध्ये, आपण काही संज्ञा वापरल्या (जसे Sup. Inf.)
येथे आम्ही त्याबद्दल थोडक्यात स्पष्टीकरण देत आहोत.

1. **लिस्ट अप्पर बाउन्ड (सुप्रीमम)**: व्याख्या: समजा कि S, हा $\Re$ चा रिक्त नसलेला उपसंच आहे. वास्तविक संख्या u ला लिस्ट अप्पर बाउन्ड किंवा (l.u.b.) किंवा S चा सुप्रीमम असे म्हटले जाते जर
   i. $x \leq u \, \forall x \in S$ म्हणजे , u हा S चा अप्पर बाउन्ड आहे
   ii. जर v हा S चा अप्पर बाउन्ड असेल, तर $u \leq v$.
2. **ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड (इनफिमम)**: व्याख्या: समजा कि S हा $\Re$ चा रिक्त नसलेला उपसंच आहे. वास्तविक संख्या l ला ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड किंवा (g.l.b.) किंवा S चा इनफ़िमम असे म्हटले जाते जर
   i. $l \leq x \, \forall x \in S$ म्हणजे, l, हा S चा लोवर बाउन्ड आहे.

ii. जर l' हा S चा लोवर बाउन्ड असेल, तर $l' \le l$. दुसऱ्या शब्दांत l पेक्षा मोठी कोणतीही संख्या ही S ची लोवर बाउन्ड नसेल.

उदाहरणार्थ:

1. जर S = (0,1), तर स्पष्टपणे $0 < x < 1 \ \forall \ x \in S$

   तसेच, $x < 2 \ \forall \ x \in S$.

   $\therefore$ 2, 3, 4 ... आणि पुढे अशाचप्रकारे सर्व S चे अप्पर बाउन्ड आहेत परंतु 1 त्यांच्यामध्ये लिस्ट अप्पर बाउन्ड आहे.

   $\therefore$ 1 हा S चा लिस्ट अप्पर बाउन्ड आहे आणि $1 \notin S$.

   त्याचप्रमाणे, $-1 < x \ \forall \ x \in S$

   $\therefore$ −1, −2, −3, ... आणि याप्रमाणे सर्व S चे लोवर बाउन्ड आहे परंतु या सर्व लोवर बाउन्ड पैकी 0 हे सर्वात मोठे आहे.

   $\therefore$ 0 हे S चे ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड आहे आणि $0 \notin S$.

2. जर $S = [0,1]$, तर $0 \le x \le 1 \ \forall \ x \in S$.

   येथे, 1 हे S चे लिस्ट अप्पर बाउन्ड आहे आणि $1 \in S$,

   तसेच, 0 हे S चे ग्रेटेस्ट लोवर बाउन्ड आहे आणि $0 \in S$.

महत्वाचे मुद्दे:

i. संचाचा l.u.b किंवा g.l.b अस्तित्वात असल्यास तो एकच असतो.

ii. संचाचा l.u.b किंवा g.l.b त्या संचाचा असू शकतो किंवा नसेलही.

iii. संचाचा l.u.b (सुप्रीमम) अस्तित्वात असू शकतो किंवा असू शकत नाही जसे sup (N) अस्तित्वात नाही त्याप्रमाणे. (येथे, N - नैसर्गिक संख्यांचा संच.)

iv. संचाचा g.l.b. (इनफिमम) अस्तित्वात असू शकते किंवा असू शकत नाही जसे inf (Z) अस्तित्वात नाही त्याप्रमाणे (येथे, Z – पूर्णांकाचा संच)

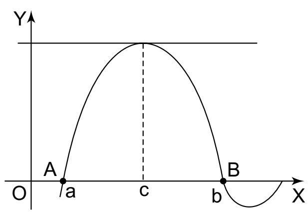
2.1.1 रोल्सच्या प्रमेयाची भौमितिक व्याख्या

समजा $y = f(x)$ एक वर वक्र असे आहे जे

i. $[a,b]$ कंटिन्युयस आहे

ii. f, हे (a,b) वर डेरिवेबल आहे

iii. $f(a) = f(b)$

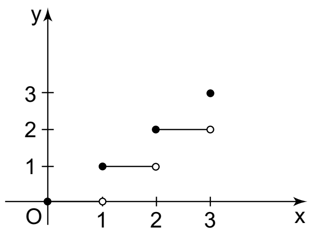


आकृती 2.1

याचा अर्थ असा होतो की कमीतकमी एक बिंदू $c \in (a, b)$ अस्तित्वात आहे ज्यावर स्पर्शिका x- अक्षाला समांतर आहे.

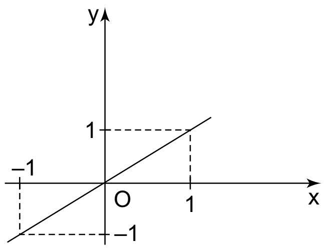
उदाहरणार्थ:

1. $f(x) = [x]$, हे $[0,3]$ वरील सर्वात मोठे पूर्णांक असलेले फंक्शन आहे.
   f हे $x = 1, 2, 3$ (खंडित आलेख) वर कंटिन्युयस नाही.
   $\therefore$ रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान येथे होत नाही.



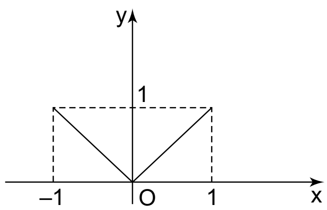
आकृती 2.2

2. $f(x) = x$ **हे** $[-1,1]$ मध्ये आहे.
   f हे $[-1,1]$ वर कंटिन्युयस आहे, f हे $(-1,1)$ वर डेरिवेबल आहे.
   परंतु $f(-1) \neq f(1)$
   $\therefore$ रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान येथे होत नाही.



आकृती 2.3

3. $[-1,1]$ मध्ये $f(x) = |x|$
   f हे $[-1,1]$ वर कंटिन्युयस आहे,
   परंतु f हे $x = 0$ वर डेरिवेबल नाही
   $\therefore$ रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान येथे होत नाही.



आकृती 2.4

काही सोड्वलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.1: $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$ साठी $[2, 4]$ मध्ये रोल्सचे प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे,

$$f(x)=x^3-9x^2+26x-24$$

दिलेले, $f(x)$ हे x ची बहुपदी आहे आणि म्हणून सर्व x साठी कंटिन्युयस आणि डेरिवेबल आहे.

$\Rightarrow$ a. $f(x)$ हे $[2,4]$ वर कंटिन्युयस आहे

b. $f(x)$ हे $(2,4)$ वर डेरिवेबल आहे

c. $f(2)=(2)^3-9(2)^2+26(2)-24=0$

$f(4)=(4)^3-9(4)^2+26(4)-24=0$

रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून तेथे कमीत कमी एक $c\in(2,4)$ असा अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

आपल्याकडे आहे, $f'(x)=3x^2-18x+26$

$\Rightarrow$ $f'(c)=3c^2-18c+26$

अशा प्रकारे, $f'(c)=0$

$\Rightarrow$ $c=\dfrac{18\pm\sqrt{324-312}}{6}=3\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$c=3\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\in(2,4)$

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित केले आहे.

उदाहरण 2.2: $f(x)=\cos 2x$ साठी $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ मध्ये रोल्सचे प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे,

$$f(x)=\cos 2x$$

a. जसे आपल्याला माहित आहे की कोसाइन फंक्शन x च्या सर्व मूल्यांसाठी कंटीन्यूयस आहे आणि म्हणून $f(x)$ हा $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ मध्ये कंटिन्युयस आहे

b. $f'(x)=-2\sin 2x$ = फाइनाइट आणि परिभाषित आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ वर डेरिवेबल आहे

c. आता, $$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

आणि $$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$\therefore$ $$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून, तेथे $c\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ चे कमित कमी एक मूल्य असे अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे की $f'(c)=0$

आता, $$f'(c)=-2\sin 2c=0 \quad\Rightarrow\quad \sin 2c=0$$

$$\sin 2c=\sin 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2c=0 \quad\Rightarrow\quad c=0$$

$$c=0\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित झाले आहे.

उदाहरण 2.3: $f(x)=x(x+3)e^{-x/2}$ साठी $[-3,0]$ मध्ये रोल्सचे प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे,

$$f(x)=x(x+3)e^{-x/2}$$

a. रोल्स चे प्रमेय सत्यापित करण्यासाठी आपल्याला माहित आहे की $x(x+3)$ हे एक बहुपदी फंक्शन आहे आणि $e^{-x/2}$ हे एक्सपोनेन्शियल फंक्शन, दोन्ही सर्वत्र कंटिन्युयस आहेत.

अशाप्रकारे त्यांचा गुणाकार देखील *[−3, 0]* मध्ये कंटिन्युयस आहे.

b. $$f'(x)=xe^{-x/2}+(x+3)e^{-x/2}-\frac{x(x+3)}{2}e^{-x/2}$$

$$=\left(2x+3-\frac{x(x+3)}{2}\right)e^{-x/2}$$

$$=\left(\frac{x+6-x^2}{2}\right)e^{-x/2}$$

$f'(x)$ हे $(-3,0)$ वर एकमेव अस्तित्वात आहे आणि $f(x)$ हे $(-3,0)$ वर डेरिवेबल आहे.

c. $f(-3)=-3(-3+3)e^{3/2}=0$

आणि $f(-0)=0(0+3)e^{\frac{0}{2}}=0$

म्हणून, $f(-3) = f(0) = 0$

$\therefore$ अशा प्रकारे, रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून, $(-3, 0)$ मध्ये कमित कमी एक बिंदू c असा अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c) = 0$

आता $$f'(c) = \left(\frac{c+6-c^2}{2}\right)e^{-c/2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c+6-c^2}{2} = 0, \qquad \left[\because e^{-c/2} \neq 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad c^2 - c - 6 - = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 3, -2$$

आता $c = -2 \in (-3, 0)$

म्हणून रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित झाले आहे.

उदाहरण 2.4: फंक्शन $f(x) = \begin{cases} -4x+5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ या साठी रोल्स च्या प्रमेयाच्या उपयोगाची तपासणी करा.

उकल: येथे,

$$f(x) = \begin{cases} -4x+5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

आपल्याकडे आहे, $f(1) = 1$

$x = 1$, येथे कंटिन्युयस आहे

$$Rf(1) = \lim_{x \to 1^+}(2x-3) = \lim_{h \to 0} 2(1+h) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$Lf(1) = \lim_{x \to 1^-}(-4x+5) = \lim_{h \to 0} -4(1-h) + 5 = -4 + 5 = 1$$

म्हणून $Rf(1) \neq Lf(1)$ $\therefore$ $f(x)$, हे $x = 1 \in [0, 2]$ येथे कंटिन्युयस नाही.

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे उपयोगी नाही.

उदाहरण 2.5: इंटर्वल $[-2, 2]$ मध्ये फंक्शन $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ साठी रोल्सचे प्रमेय तपासा.

उकल: येथे, $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, इंटर्वल $[-2, 2]$ आहे. *f(x)* हे *x* च्या बहुपदीचे वर्गमूळ आहे आणि म्हणून सर्व *x* साठी कंटिन्युयस आहे.

i. $f(x)$, हा $[-2, 2]$ मध्ये कंटिन्युयस आहे

ii. $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ हा $4 - x^2 = 0$ म्हणजे $x = \pm 2$ वगळता सर्वत्र परिभाषित आहे.

अशा प्रकारे, $f'(x)$ हा $\Re - \{-2, 2\}$ मध्ये डेरिवेबल आहे.

$\therefore$ $f'(x)$ हा $(-2, 2)$ वर डेरिवेबल आहे.

iii. आता $$f(-2)=\sqrt{4-(-2)^2}=\sqrt{4-4}=0$$

$$f(2)=\sqrt{4-(2)^2}=\sqrt{4-4}=0 \Rightarrow f(-2)=f(2)$$

∴ रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून, $c\in(-2,2)$ चे कमित कमी एक मूल्य असे असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

$$\Rightarrow \qquad f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{4-c^2}}=0, \qquad c=0\in(-2,2)$$

म्हणून, रोल्स चे प्रमेय येथे सत्यापित केले आहे.

उदाहरण 2.6: रोल्स चे प्रमेय वापरून, इंटर्वल $[-1,1]$ वर *फंक्शन* $f(x)=\log(x^2+2)-\log 3$ *साठी* बिंदु $c\in(-1,1)$ शोधा.

उकल: येथे,

$$f(x)=\log(x^2+2)-\log 3$$

(a) जसे आपल्याला माहित आहे की लॉगरिदमिक फंक्शन्स सर्व x साठी कंटिन्युयस आहेत आणि $\log 3$ हे कॉस्टंट आहे, म्हणून *f (x)* सर्व *x* साठी कंटिन्युयस आहे, म्हणून ते *[−1, 1]* मध्ये देखील कंटिन्युयस आहे.

(b) $$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$$ (सर्व $x\in\Re$ साठी अस्तित्वात आहे)

∴ $f'(x)$ हे $(-1,1)$ वर डेरिवेबल आहे

(c) आता $$f(-1)=\log((-1)^2+2)-\log 3=\log 3-\log 3=0$$

आणि $$f(1)=\log((1)^2+2)-\log 3=\log 3-\log 3=0$$

$$\Rightarrow \qquad f(-1)=f(1)$$

अशा प्रकारे, रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून कमित कमी एक $c\in(-1,1)$ अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे जसे की $f'(c)=0$

$$f'(c)=\frac{2c}{c^2+2}=0$$

$$\Rightarrow \qquad c=0\in(-1,1)$$

अभ्यास 2.1

1. दिलेल्या इंटरवल मध्ये खालील फंक्शन्ससाठी रोल्स चे प्रमेय तपासा:
   a. $[1,3]$ मध्ये, $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$
   b. $[-4,5]$ मध्ये, $f(x)=x^3+3x^2-24x-80$

c. $[-1,4]$ मध्ये, $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-5}$

d. $\left[0,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ मध्ये, $f(x)=\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

e. $[0,\pi]$ मध्ये, $f(x)=\sin x-\sin 2x$

f. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=e^{1-x^2}$

g. $[0,\pi]$ मध्ये, $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

h. $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ मध्ये, $f(x)=e^x\cos x$

i. $[0,\pi]$ मध्ये, $f(x)=\tan x$

j. $[1,3]$ मध्ये, $f(x)=\left(x^2-4x+3\right)e^{2x}$

2. खालील फंक्शन्ससाठी रोल्स च्या प्रमेयाच्या उपयोगतेचे परीक्षण करा:

a. $[0,3]$ मध्ये, $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{5}}$

b. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\le x\le 1 \\ 3-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$

c. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=|x|$

उत्तरे

1. a. $c=2\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b. $c=2$ c. $c=5-\sqrt{6}$ d. $c=\dfrac{\pi}{4}$

e. $c=\cos^{-1}\left(\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}\right)$ f. $c=0$ g. $c=\dfrac{\pi}{4}$ h. $c=\dfrac{\pi}{4}$

i. लागू नाही j. $c=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2. a. लागू नाही b. लागू नाही c. लागू नाही

2.1.2 लॅग्रांजेसचे मीन व्हॅल्यू प्रमेय

विधान: जर एखादे फंक्शन $f:[a,b]\to\Re$ असे आहे की

i. *f(x)* हे क्लोज्ड इंटर्वल *[a,b]* वर कंटिन्युयस आहे

ii. *f(x)* हे ओपन इंटर्वल *(a,b)* वर डेरिवेबल आहे

मग कमित कमी एक बिंदू $c \in (a,b)$ असा अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

सिद्धता: समजा एक फंक्शन $\phi : [a,b] \to R,$ अशा प्रकारे परिभाषित करू की $\phi(x) = f(x) + Ax,\ x \in (a,b)$

जेथे A हे कॉस्टंट आहे अशाप्रकारे शोधण्यासाठी की

$$\phi(a) = \phi(b) \qquad \ldots(1)$$

आता
$$\phi(a) = f(a) + Aa$$
$$\phi(b) = f(b) + Ab$$

(1) वापरून, आपल्याकडे असेल,

$$f(a) + Aa = f(b) + Ab$$
$$A(a-b) = f(b) - f(a)$$
$$A = \frac{f(b)-f(a)}{a-b} \qquad \ldots(2)$$

आता,

i. ϕ हे *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे, कारण *f* हे *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे आणि Ax हे x मधील बहुपदि असून *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे.

ii. ϕ हे (a, b) वर डेरिवेबल आहे, कारण f हे (a, b) च्या प्रत्येक बिंदूवर डेरिवेबल आहे आणि तसेच Ax देखील.

iii. $\phi(a) = \phi(b)$

$\phi(x)$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण करते.

म्हणून कमित कमी एक $c \in (a,b)$ अस्तित्वात आहे जसे की $\phi'(c) = 0$

$$\phi(x) = f(x) + Ax$$

$\Rightarrow$ $\phi'(x) = f'(x) + A$ $\Rightarrow$ $\phi'(c) = f'(c) + A$

आता, $\phi'(c) = 0$

$\Rightarrow$ $f'(c) + A = 0 \Rightarrow f'(c) = -A$

(2) वापरून, आपल्याकडे आहे

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ c \in (a,b)$$

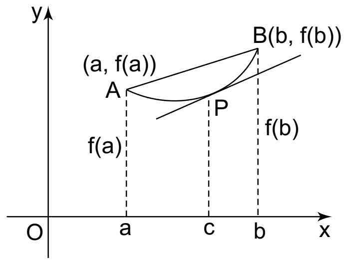
हे प्रमेयाचा सिद्धता पूर्ण करते.

2.1.3 लॅग्रांजेसच्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची भौमितिक व्याख्या

समजा फंक्शन f ला एक ग्राफ आहे आणि

i. f हे $[a, b]$ वर कंटिन्युयस आहे

ii. f हे (a, b) वर डिफरेंशिएबल आहे



आकृती 2.5

वक्र AB ला प्रत्येक बिंदूवर स्पर्शिका असल्याने, A आणि B व्यतिरिक्त वक्रा वर एक बिंदू अस्तित्वात आहे जेथे स्पर्शिका बिंदू $(a, f(a))$ आणि $(b, f(b))$जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या समांतर असते.

टिपण्णी: रोल्स चे प्रमेय लॅग्रांजेसच्या मीन मूल्याच्या प्रमेयाचा एक विशेष भाग आहे.

मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन अटींसह,

जर $\quad f(a) = f(b)$

तर $\quad f(b) - f(a) = 0$

आणि म्हणून $\quad f'(c) = 0$

भौमितिक व्याख्ये मध्ये, वक्रावर एक बिंदू आहे ज्यावर स्पर्शिका x-अक्षाला समांतर आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.7: इंटर्वल $[1,3]$ मध्ये $f(x) = x + \frac{1}{x}$ साठी लॅग्रांजच्या मीन मूल्य प्रमेयाची पडताळणी करा.

उकल: येथे,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

(i) $f(x)$ हे x मध्ये बहुपदी आहे आणि $x \in \Re - \{0\}$ च्या सर्व मूल्यांसाठी कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे $[1,3]$ वर कंटिन्युयस आहे

(ii) $\quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ सर्व $x \in (1,3)$ साठी अस्तित्वात आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे $(1, 3)$ मध्ये डेरिवेबल आहे

लॅग्रांज मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन्ही अटी पूर्ण झाल्या आहेत,

म्हणून, कमीत कमी एक $c \in (1,3)$ अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad \ldots(1) \qquad [\text{येथे, } b = 3, a = 1]$$

$f(b), f(a), f'(c)$ हे समी(1) मध्ये ठेऊन, आपल्याकडे असेल,

$$\frac{\frac{10}{3} - 2}{3 - 1} = 1 - \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{3} \in (1,3)$$

म्हणूनच, लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेय सत्यापित केले आहे.

उदाहरण 2.8: दाखवा कि $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, \ x > 0$

उकल: समजा

$$f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर ,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$$

$$= \frac{x^2}{1+x} > 0 \qquad \{\because x > 0\}$$

म्हणून $f(x)$ सर्व $x > 0$ साठी इंक्रीसिंग फंक्शन आहे.

तसेच $\quad f(0) = 0$

म्हणून $\quad x > 0$ साठी $f(x) > 0$

अशा प्रकारे, $\quad \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \qquad \ldots(1)$

समजा $\quad g(x) = x - \frac{x^2}{2(1+x)} - \log(1+x)$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$g'(x) = 1 - \frac{2x + x^2}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 > 0$$

$\therefore$ म्हणून $g(x)$ सर्व $x > 0$ साठी इंक्रीजिंग फंक्शन आहे.

तसेच g(0)=0, $\quad x > 0$ साठी $g(x) > 0$

म्हणून $\quad x - \frac{x^2}{2(1+x)} > \log(1+x) \qquad \ldots(2)$

(1) आणि (2) वरून, आपल्याकडे असेल

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}, x>0 \cdot$$

उदाहरण 2.9: इंटरवल $[0,3]$ मध्ये, फंक्शन $f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\le 1\\ 2x^2+2, & x>1\end{cases}$ साठी लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेयाच्या उपयोगाची तपासणी करा.

उकल: येथे,

$$[0,3] \text{ मध्ये, } f(x)=\begin{cases}1+3x, & x\le 1\\ 2x^2+2, & x>1\end{cases}$$

(i) $f(x)$ हे इंटर्वल $[0,3]$ - $\{1\}$ वर एक बहुपदी फंक्शन आहे.

x = 1 वर कंटिन्युयीटी,

$$Rf(1)=\lim_{x\to 1^+} 2x^2+2=\lim_{h\to 0} 2(1+h)^2+2=4$$

$$Lf(1)=\lim_{x\to 1^-} 1+3x=\lim_{h\to 0} 1+3(1-h)=4$$

तसेच $f(1)=4$

अशा प्रकारे, $Rf(1)=Lf(1)=f(1)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ हे $x=1$ वर कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे इंटर्वल $[0,3]$ वर कंटिन्युयस आहे

(ii) इंटर्वल $[0,3]$ मध्ये, $f'(x)=\begin{cases}3, & x\le 1\\ 4x, & x>1\end{cases}$

x = 1 वर डिफरेंशिएबिलिटी,

$$Rf'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(1+h)-4}{h}=4$$

$$Lf'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$$

$$Lf'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3-4}{h} = \text{अस्तित्वात नाही}$$

$\Rightarrow$ $x=1\in(0,3)$, साठी $f'(x)$ अस्तित्वात नाही

$f(x)$, हे $(0,3)$ वर डेरिवेबल नाही

म्हणून लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेय लागू नाही.

उदाहरण 2.10: इंटर्वल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ मध्ये , फंक्शन $f(x)=\cos x$ साठी लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेयाच्या उपयोगाची तपासणी करा.

उकल: येथे,

$$f(x)=\cos x$$

(i) आपल्याला माहीत आहे की, कोसाइन फंक्शन x च्या सर्व मूल्यांसाठी कंटिन्युयस आहे

$\therefore$ $f(x)$ हे इंटर्वल $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ वर कंटिन्युयस आहे

(ii) $f'(x)=-\sin x$ (फाइनाइट आणि डेफिनाइट)

$\therefore$ $f(x)$ हे इंटर्वल $(0,\pi/2)$ मध्ये डेरिवेबल आहे.

लॅग्रांज मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन्ही अटी पूर्ण झाल्या आहेत,

म्हणून कमित कमी एक $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ असा अस्तित्वात असणे आवश्यक आहे, जसे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad \left[\text{ येथे, } b=\frac{\pi}{2}, a=0\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0, f(0)=\cos 0=1$$

हे मूल्ये मांडल्या नंतर

$$\Rightarrow \quad \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}-0}=-\sin c$$

$$\Rightarrow \quad c=\sin^{-1}\left(2/\pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad c=\sin^{-1}(0.636)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

त्यामुळे लॅग्रांजच्या मीन मूल्य प्रमेयाचे समाधान होते.

उदाहरण 2.11: दाखवा कि $\frac{x}{1+x^2}<\tan^{-1}x<x,\ x>0$

उकल: समजा

$$f(x)=\tan^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}$$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0\ \forall x>0$$

म्हणून $\quad f(x)$ सर्व $x>0$ साठी इंक्रीजिंग फंक्शन आहे.

तसेच $\quad f(0)=0 \quad$ ($\tan^{-1}0-0=0$ आहे म्हणून)

म्हणून $\quad f(x)>0\ \forall\ x>0$

अशा प्रकारे, $\quad \tan^{-1}x>\frac{x}{1+x^2} \quad$ ...(1)

समजा $\quad g(x)=x-\tan^{-1}x$

x ने डिफरन्शिएट केल्यावर ,

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}>0\forall x>0$$

$\therefore \quad g(x)$ सर्व $x>0$ साठी इंक्रीजिंग फंक्शन आहे

अशा प्रकारे $\quad g(0)=0-\tan^{-1}0=0$

म्हणून $\quad g(x)>0\ \forall\ x>0$

अशा प्रकारे $\quad x>\tan^{-1}x\forall x>0 \quad$ ...(2)

(1) आणि (2) वरून, आपल्याकडे असेल

$$\frac{x}{1+x^2}<\tan^{-1}x<x,\ \ x>0$$

अभ्यास 2.2

1. दिलेल्या इंटरवल मध्ये खालील फंक्शन्स साठी लॅग्रांजेसच्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची पडताळणी करा.

   a. $[1,3]$ मध्ये, $f(x)=2x^2-3x+1$

   b. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ मध्ये, $f(x)=x(x-1)(x-2)$

   c. $[1,4]$ मध्ये, $f(x)=\frac{1}{4x-1}$

   d. $[-3,4]$ मध्ये, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$

   e. $[1,e]$ मध्ये, $f(x)=\log x$

   f. $[-\pi,\pi]$ मध्ये, $f(x)=x-2\sin x$

2. खालील फंक्शन्ससाठी लॅग्रांजेसच्या मीन मूल्य प्रमेयाच्या उपयोगतेचे परीक्षण करा:

   a. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=|x|$

   b. $[a,b]$ मध्ये, स्थिर फंक्शन $f(x)=\beta$

   c. $[-1,1]$ मध्ये, $f(x)=x^{1/3}$

   d. $[-3,4]$ मध्ये, $f(x)=|x+2|$

3. लॅग्रांजेस चे मीन व्हॅल्यू प्रमेय वापरून, हे सिद्ध करा

   a. $[-1,0]$ मध्ये, $\frac{x^2}{2}<x-\log(1+x)<\frac{x^2}{2(1+x)}$

   b. $\frac{x}{1+x}<\log(1+x)<x,\ x>0$

   c. $1+x<e^x<1+xe^x$ सर्व $x>0$ साठी

4. दाखवा कि $\frac{y-x}{1+y^2}<\tan^{-1}y-\tan^{-1}x<\frac{y-x}{1+x^2}$ जर $0<x<y$ आणि काढा $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\tan^{-1}\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$

उत्तरे

1. a. $c=2$ b. $c=\frac{6-\sqrt{21}}{6}$ c. $c=\frac{1+3\sqrt{5}}{4}$

   d. $c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e. $c=e-1$ f. $c=\pm\frac{\pi}{3}$

2. a. लागू नाही b. लागू आहे c. लागू नाही d. लागू नाही

2.1.4 कॉची मीन मूल्य प्रमेय

विधान: जर एखादे फंक्शन $f:[a,b]\to\Re$ आणि $g:[a,b]\to\Re$ असे आहे की

i. f आणि g दोन्ही $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. f आणि g दोन्ही (a,b) वर डिफरंशीएबल आहेत

iii. $g'(x)\neq 0$ सर्व $x\in(a,b)$ साठी मग कमीत कमी एक बिंदू $c\in(a,b)$ असा अस्तित्वात आहे कि

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

सिद्धता: समजा $g(a)=g(b)$, तर g हे रोल्स च्या प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण करेल.

तर, कमीत कमी एक बिंदू $c\in(a,b)$ असा अस्तित्वात आहे की $g'(c)=0$

परंतु हे दिलेल्या वस्तुस्थितीचा विरोधाभास करते की $g'(c)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$, म्हणून आपले अनुमान चुकीचे आहे आणि $g(a)\neq g(b)$

आता एक फंक्शन परिभाषित करा: $\phi:[a,b]\to\Re$ असे आहे की $\phi(x)=f(x)+Ag(x), x\in(a,b)$ जेथे A स्थिर आहे आणि अशा प्रकारे निश्चित केले जाईल की,

$$\phi(a)=\phi(b) \qquad \ldots (1)$$

आता,
$$\phi(a)=f(a)+Ag(a)$$
$$\phi(b)=f(b)+Ag(b)$$

समी(1) वापरून, आपल्याकडे असेल

$$f(a)+Ag(a)=f(b)+Ag(b)$$

$$\Rightarrow \quad A\left[g(a)-g(b)\right]=f(b)-f(a)$$

$$A=\frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)} \qquad \ldots (2)$$

आता,

i. ϕ हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहे, कारण *f* आणि *g* दोन्ही *[a, b]* वर कंटिन्युयस असतात आणि *A* देखील कॉस्टंट असून *[a, b]* वर कंटिन्युयस आहे

ii. ϕ हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे, कारण *f* आणि *g* दोन्ही *(a, b)* वर डिफरंशीएबल आहेत आणि *A* देखील कॉस्टंट असून *(a, b)* वर डिफरंशीएबल आहे.

iii. तसेच, $\phi(a)=\phi(b)$

अशा प्रकारे, $\phi(x)$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण करते

म्हणून कमीत कमी एक $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे जसे की $\phi'(c)=0$

$$\phi(x)=f(x)+Ag(x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(x)=f'(x)+Ag'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(c)=f'(c)+Ag'(c)$$

आता,
$$\phi'(c)=0$$

$$\Rightarrow \quad f'(c)+Ag'(c)=0$$

$$\Rightarrow \quad f'(c)=-Ag'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)}=-A$$

समी (2) वापरून, आपल्याकडे असेल,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, c\in(a,b)$$

म्हणून, प्रमेय सिद्ध झाले आहे.

टिप्पणी: लॅग्रांजेसचे मीन मूल्य प्रमेय हे $g(x)=x,\ x\in(a,b)$ घेऊन कॉचीच्या मीन मूल्य प्रमेयाचे एक विशिष्ट प्रकरण आहे.

2.1.5 कॉचीच्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची भौमितिक व्याख्या

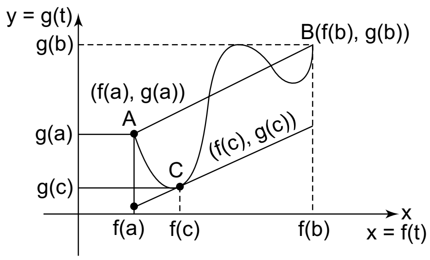
समजा $x=f(t)$ आणि $y=g(t)$ पॅरामेट्रिक वक्र आहे जेथे $t\in(a,b)$

i. f आणि g दोन्ही $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. f आणि g दोन्ही (a,b) वर डेरिवेबल आहे

iii. इंटरवल $[a,b]$ वर $g'(x)\neq 0$ आहे

तर कमीत कमी एक $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे ज्यावर स्पर्शिका AB ला समांतर आहे



आकृती 2.6

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.12: इंटरवल $[0,1]$ वर, $f(x)=e^x$ आणि $g(x)=e^{-x}$ साठी कॉची मीन मूल्य प्रमेय सत्यापित करा.

उकल: येथे, $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$

i. f आणि g दोन्ही $[0,1]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. $f'(x)=e^x, g'(x)=-e^{-x}$, हे $(0,1)$ वर डिफरंशीएबल आहे

iii. $g'(x)=-e^{-x}\neq 0\ \forall x\in(0,1)$,

मग कमीत कमी एक $c\in(0,1)$ असा अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad [\text{जेथे } b=1, a=0] \qquad \dots(1)$$

म्हणून, $f(1)=e^1=e,\ f(0)=e^0=1$ आणि

$$g(1)=e^{-1}=\frac{1}{e},\ g(0)=e^{-0}=1$$

सर्व मूल्ये (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याकडे आहे

$$\frac{e-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{e^c}{-e^{-c}}$$

$\Rightarrow$ $1=e^{2c-1}$

$\Rightarrow$ $e^0=e^{2c-1}$

$\Rightarrow$ $0=2c-1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in(0,1)$

त्यामुळे कॉची मीन मूल्य प्रमेय पडताळले आहे.

उदाहरण 2.13: समजा, फंक्शन f हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहे आणि (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे . सिद्ध करा की तेथे एक संख्या c ही (a,b) मध्ये अशी आहे की $2c\left[f(a)-f(b)\right]=f'(c)\left[a^2-b^2\right]$

उकल: येथे,

i. f हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. f' हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

लॅग्रांजेसच्या मीन मूल्य प्रमेयाच्या दोन्ही अटी पूर्ण झाल्या आहेत.

म्हणून कमीत कमी एक असा $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(c)$$

$\Rightarrow$ $f(a)-f(b)=f'(c)(a-b)$ ...(1)

$\Rightarrow$ आता, दिलेले आहे

$$2c\left[f(a)-f(b)\right]=f'(c)\left[a^2-b^2\right]$$

समी (1) वापरून, आपल्याकडे आहे

$$2c\left[(a-b)f'(c)\right]=f'(c)\left[(a-b)(a+b)\right]$$

$\Rightarrow$ $2c=a+b$

$\Rightarrow$ $c=\frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow$ $$c=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$$

म्हणून, एक संख्या $c\in(a,b)$ अस्तित्वात आहे.

उदाहरण 2.14: इंटरवल $[1,2]$ वर, फंक्शन $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^2-4$ साठी, $\sqrt[3]{3}=1.44$ घेऊन कॉची मीन मूल्य प्रमेय वापरून 'c' शोधा.

उकल: येथे, $[1,2]$ वर, फंक्शन $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^2-4$

i. f , सर्व $x\in\Re-\{0\}$ वर कंटिन्युयस आहेत [f हे $x = 0$ वर परिभाषित केलेले नाही]
आणि g हे बहुपदीय फंक्शन असल्याने सर्वत्र कंटिन्युयस आहे.
$\therefore$ $f(x)$ आणि $g(x)$ हे $[1,2]$ वर कंटिन्युयस आहेत

ii. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}, g'(x)=2x$ हे $[1,2]$ वर डिफरंशीएबल आहे.

iii. $g'(x)=2x\neq 0\,\forall x\in(1,2)$

म्हणून कमीत कमी एक असा $c\in(1,2)$ अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \ldots (1)\ [\text{ जेथे } a = 1,\ b=2]$$

म्हणून, $$f(2)=\tfrac{1}{2},\ f(1)=1,\ g(2)=0, g(1)=-3$$

सर्व मूल्ये (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याकडे आहे,

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{0-(-3)}=\frac{-\frac{1}{c^2}}{2c}$$

$\Rightarrow$ $$c^3=3$$

$\Rightarrow$ $$c^3=\sqrt[3]{3}==1.44\in(1,2)$$

उदाहरण 2.15: इंटरवल $[a,b]$ वर, फंक्शन $f(x)=x^2,\ g(x)=x^4$ साठी, कॉची मीन मूल्य प्रमेय सत्यापित करा, जेथे $a>0,\ b>0$.

उकल: येथे, $f(x)=x^2,\ g(x)=x^4$

i. f आणि g ही x ची बहुपदी फंक्शन असल्यामुळे सर्वत्र कंटिन्युयस आहे
$\therefore$ $f(x)$ आणि $g(x)$ हे (a,b) वर कंटिन्युयस आहे

ii. $f'(x)=2x,\ g'(x)=4x^3$

$f'(x)$ आणि $g'(x)$ पुन्हा बहुपदी फंक्शन आहेत आणि म्हणून सर्वत्र डिफरंशीएबल आहेत

$\therefore$ $f'(x)$ आणि $g'(x)$ हे $[a,b]$ वर डिफरंशीएबल आहेत,

iii. $g'(x) = 4x^3 \neq 0 \ \forall \ x \in (a,b), \{a > 0, b > 0\}$

अशाप्रकारे f आणि g कॉची मीन मूल्य प्रमेयाच्या सर्व अटी पूर्ण करतात.

म्हणून कमीत कमी एक असा $c \in (a,b)$ अस्तित्वात आहे की

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \{\text{ जेथे } a = a,\ b = b\}$$

म्हणून, $f(b) = b^2,\ f(a) = a^2,\ g(a) = a^4, g(b) = b^4$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^2 - a^2}{b^4 - a^4} = \frac{2c}{4c^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b^2 + a^2} = \frac{1}{2c^2}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}} \in (a,b)$$

म्हणून, कॉची मीन मूल्य प्रमेय पडताळले आहे.

अभ्यास 2.3

1. खालील फंक्शन्ससाठी कॉची च्या मीन व्हॅल्यू प्रमेयाची पडताळणी करा:

   a. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ मध्ये, $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$

   b. $[1,2]$ मध्ये, $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$

   c. $[1,3]$ मध्ये, $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

   d. $[1,e]$ मध्ये , $f(x) = \log x,\ g(x) = \frac{1}{x}$

   e. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ मध्ये, $f(x) = (1+x)^{3/2},\ g(x) = \sqrt{1+x}$

2. जर f' आणि g' हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस आणि डिफरंशीएबल आहेत, तर दाखवा की $a < c < b$

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{g(b)-g(a)-(b-a)g'(a)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}$$

3. सिद्ध करा कि $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\theta, 0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2}$

उत्तरे

1. a. $c=-\dfrac{\pi}{4}$ b. $c=\dfrac{14}{9}$ c. $c=\sqrt{3}$ d. $c=\dfrac{e}{e-1}$ e. $c=\dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}$

मनोरंजक माहिती

- रोल्सचे प्रमेय कंटिन्यूइटी आणि डिफरनशिएबिलटी यांच्यातील संबंध स्थापित करते
- मीन मूल्य प्रमेय अगदी स्पीडोमीटरची अचूकता तपासण्यासाठी वापरला जातो.
- हे बिंदूचे अस्तित्व निर्दिष्ट करते जेथे डेरिवेटिव नाहीसे होते.

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- जर A ते B पर्यंतच्या प्रवासादरम्यान सरासरी वेग 50 किमी/तास असेल, तर एक वेळ अशी असेल जेव्हा तात्कालिक वेग 50 किमी/तासाचा असेल (ते कमाल आहे)
- ऋतूंमध्ये सूर्यास्ताच्या वेळेतील बदलाचा दर.
- जेव्हा एखादा चेंडू हवेत वरच्या दिशेने फेकला जातो, तेव्हा त्याचा वेग काही वेळा शून्य होतो. रोल्सचे प्रमेय स्पष्ट करते की चेंडूचा वेग कधीतरी शून्य होतो.
- L.M.V.T चा वापर गतीला 'चालान' देण्यासाठी केला जातो.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Rolle's Theorem

Rolle's Theorem and Lagrange Mean Value Theorem (MVT)

Mean Value Theorems

2.2 टेलरचा सिद्धांत

टेलरचे प्रमेय म्हणजे मीन मूल्य प्रमेयाचा विस्तार आहे कारण मीन मूल्य प्रमेय फंक्शनचे मूल्य आणि त्याच्या पहिल्या ऑर्डर डेरिव्हेटिव्हशी संबंधित आहे परंतु टेलरचे प्रमेय फंक्शनचे मूल्य आणि त्याचे 'उच्च ऑर्डर डेरिव्हेटिव्ह' संबंधित आहे.

2.2.1 टेलरचा सिद्धांत लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह

विधान: समजा, फंक्शन $f:[a,a+h]\rightarrow\Re$ असे आहे की

i. $[a,a+h]$ वर $f,f',f''.........f^{n-1}$ हे x चे कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^{n}(x)$, हे $(a,a+h)$ मध्ये अस्तित्वात आहे

तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(\theta h+a)$$

सिद्धता: एक फंक्शन $\phi:[a,a+h]\to\Re$ चा अशा प्रकारे विचार करा

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x).f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+...+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{(a+h-x)^n}{(n)!}A \quad ...(1)$$

जिथे A हे असे निवडले जाणारे स्थिरांक आहे कि

$$\phi(a)=\phi(a+h) \quad ...(2)$$

आता $x=a$ आणि $x=a+h$ (1) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे आहे

$$\phi(a)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A$$

आणि $\phi(a)=\phi(a+h)$

ही मूल्ये (2) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याकडे आहे

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A \quad ...(3)$$

आता,

i. $\phi(x)$, हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, म्हणून $f(x),f'(x),f''(x).........f^{n-1}(x)$ हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ... $(a+h-x)^n$ बहुपदी आसल्यामुळे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहेत. तसेच कंटिन्युयस फंक्शन्सची बीजगणितीय बेरीज कंटिन्युयस आहे.

ii. $\phi(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहे, म्हणून $f(x),f'(x),f''(x).........f^{n-1}(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहेत, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ... $(a+h-x)^n$ बहुपदी आसल्यामुळे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहे

iii. तसेच, $\phi(a)=\phi(a+h)$

$\therefore$ $\phi(x)$, $[a,a+h]$ मध्ये रोल्सच्या प्रमेयाच्या सर्व तीन अटी पूर्ण करते. मग कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$\phi'(a+\theta h)=0 \quad ...(4)$$

समी (1) ला x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$\phi'(x)=f'(x)+(a+h-x).f''(x)-f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f'''(x)+\frac{2(a+h-x)}{2!}(-1)f''(x)+...$$

$$+....+.\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x)-\frac{(n-1)(a+h-x)^{n-2}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{n(a+h-x)^{n-1}(-1)}{(n)!}A$$

किंवा $$\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x)-\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}A$$

$$=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^n(x)-A\right]$$

$x=a+\theta h$ ठेऊन,

$$\phi'(a+\theta h)=\frac{\left[h(1-\theta)\right]^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^n(a+\theta h)-A\right]$$

परंतु $\phi'(a+\theta h)=0$ (4) वरून,

$\Rightarrow$ $f^n(a+\theta h)-A=0$

$\Rightarrow$ $A=f^n(a+\theta h)$ $[\therefore 1-\theta\neq 0$ आणि $h\neq 0]$

(3) वरून, $$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(a+\theta h)$$

जो प्रमेयाचा आवश्यक परिणाम आहे.

येथे $(n+1)^{th}$ वे पद आहे . $\frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)$ ला n^{th} टर्म नंतर लॅग्रांजेसचा रिमेन्डर फॉर्म असे म्हणतात.

2.2.2 मैकलॉरिनचे प्रमेय लॅग्रांजेसच्या फॉर्म ऑफ रिमेन्डरसह

विधान: जर $f(x)$ हे $[0,x]$ मध्ये परिभाषित केलेले फंक्शन असे आहे की

i. $f,f',f''.......f^{n-1}$ हे $[0,x]$ मध्ये कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^n(x)$, हे $(0,x)$ मध्ये अस्तित्वात आहे. तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}f^n(\theta x)$$

सिद्धता: टेलरच्या प्रमेयावरून, आपल्याकडे आहे

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(a+\theta h)$$

या समीकरनामध्ये मध्ये $a=0,h=x$ ठेउन आपल्याकडे असेल

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{(n)!}f^n(\theta x),\ 0<\theta<1$$

वरील समीकरण म्हणजे लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर स्वरूपासह आवश्यक मॅक्लॉरिनचे प्रमेय आहे.

2.2.3 टेलरचा सिद्धांत कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह

विधान: समजा, फंक्शन $f:[a,a+h]\to\Re$ असे आहे की

i. इंटरवल $[a,a+h]$ वर $f,f',f'.........f^{n-1}$ हे x मधील कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^{n}(x)$, हे $(a,a+h)$ मध्ये अस्तित्वात आहे

तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या θ, $0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(a+\theta h)$$

सिद्धता: फंक्शन $\phi:[a,a+h]\to\mathbb{R}$ अशा प्रकारे घेऊ की

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x).f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+...$$

$$+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+(a+h-x).A \qquad .... (1)\ x\in(a,\ a+h)$$

जिथे A हे असे निवडले जाणारे स्थिरांक आहे कि $\phi(a)=\phi(a+h)$

आता $x=a$ समी(1) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$\phi(a)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n)!}A \qquad ...(2)$$

आणि $\qquad \phi(a)=\phi(a+h)$

आता $x=a+h$, (1) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$\phi(a+h)=f(a+h)+0+0+....+=f(a+h) \qquad ...(3)$$

आता, $\qquad \phi(a+h)=\phi(a)$

मग, (2) आणि (3) वरून, आपल्याकडे असेल

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+.\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+hA \qquad ...(4)$$

आता,

i. $\phi(x)$, हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, म्हणून $f(x),f'(x),f''(x).........f^{n-1}(x)$ हे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ...$(a+h-x)^{n-1}$ बहुपदी आसल्यामुळे $[a,a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहेत.

ii. $\phi(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहे, म्हणून $f(x),f'(x),f''(x).........f^{n-1}(x)$ हे $(a,a+h)$ वर डिफरंशीएबल

आहेत, आणि $(a+h-x)$, $(a+h-x)^2$, ...$(a+h-x)^{n-1}$ बहुपदी आसल्यामुळे $(a, a+h)$ वर डिफरंशीएबल आहेत.

iii. तसेच, $\phi(a)=\phi(a+h)$

$\therefore$ $\phi(x)$, $[a, a+h]$ मध्ये रोल्सच्या प्रमेयाच्या सर्व तीन अटी पूर्ण करते. मग कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की $\phi'(a+\theta h)=0$

समी (1) ला दोन्ही बाजूने x ने डिफरन्शिएट केल्यावर,

$$\phi'(x)=f'(x)+\left[(a+h-x).f''(x)-f'(x)\right]+\frac{1}{2!}\left[2(a+h-x)f''(x)(-1)+(a+h-x)^2 f'''(x)\right]+...$$

$$+...+\frac{1}{(n-1)!}\left[-(a+h-x)^{n-1} f^n(x)-(n-1)(a+h-x)^{n-2} f^{n-1}(x)\right]+\frac{n(a+h-x)^{n-1}(-1)}{n!}A$$

किंवा $$\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1} f^n(x)}{(n-1)!}-A$$

$x=a+\theta h$ ठेउन, आपल्याकडे असेल

$$\phi'(a+\theta h)=\frac{(a+h-a-\theta h)^{n-1} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!}-A$$

$$=\frac{\left[h(1-\theta)\right]^{n-1} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!}-A$$

$$=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)-A$$

परंतु $$\phi'(a+\theta h)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)-A=0$$

किंवा $$A=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)$$

' A ' चे हे मूल्य (4) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+h\left[\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)\right]$$

म्हणजे, $$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)$$

हे टेलरच्या प्रमेयाचा आवश्यक फॉर्म कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह आहे.

येथे. $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)$ ला टेलरचा सिद्धांत कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह आफ्टर n^{th} टर्म असे म्हणतात.

2.2.4 मॅकलॉरिन चा प्रमेय कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्म ऑफ सह

सिद्धता: जर $f(x)$ हे $[0,x]$ मध्ये परिभाषित केलेले फंक्शन असे असेल की

i. $f, f', f''.......f^{n-1}$ हे $[0,x]$ मध्ये कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f^{n}(x)$, हे $(0,x)$ मध्ये अस्तित्वात आहे. तर कमीत कमी एक वास्तविक संख्या $\theta, 0<\theta<1$, अशी आहे की

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.......+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^{n}(1-\theta)^{n-1}}{(n)!}f^{n}(\theta x), 0<\theta<1$$

सिद्धता: कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह टेलरच्या सिद्धांता वरून, आपल्याकडे असेल

$$f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^{n}}{(n)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(a+\theta h)$$

वरील प्रमेया मध्ये $a=0$ आणि $h=x$ ठेवा

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.......+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^{n}}{(n)!}(1-\theta)^{n-1} f^{n}(\theta x), 0<\theta<1$$

हे पाहिजे असलेले कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनचे प्रमेय आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 2.16: $f(x)=(1-x)^{7/2}$ या फंक्शनचा विस्तार दिलेला आहे

$f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$. तर θ चे मूल्य शोधा जेव्हा $x\to 1$

उकल: येथे,

$$f(x)=(1-x)^{7/2}$$

$$f'(x)=-\frac{7}{2}(1-x)^{5/2}$$

$$f''(x)=\frac{35}{4}(1-x)^{3/2}$$

$$f'''(x)=-\frac{105}{8}(1-x)^{1/2}$$

$x=0$ वर वरील सर्व डेरिव्हेटिव्ह्ज काढल्यानंतर, आपल्याकडे आहे

$$f(0)=1\ f'(0)=-\frac{7}{2},\ f''(0)=\frac{35}{4},\ f'''(\theta x)=-\frac{105}{8}(1-\theta x)^{1/2}$$

आता $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(\theta x)$$

$$\Rightarrow \quad (1-x)^{7/2} = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{35}{8}x^2 - \frac{105}{48}(1-\theta x)^{1/2} x^3$$

जेव्हा $x \to 1$, आपल्याकडे असेल

$$0 = 1 - \frac{7}{2} + \frac{35}{8} - \frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2} = \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow \quad (1-\theta)^{1/2} = \frac{15}{8} \times \frac{48}{105}$$

$$\Rightarrow \quad (1-\theta)^{1/2} = \frac{6}{7}$$

दोन्ही बाजूंनी वर्ग केल्यावर

$$1 - \theta = \frac{36}{49}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 1 - \frac{36}{49}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{13}{49}$$

(उकल)

उदाहरण 2.17: दाखवा की x च्या प्रत्येक मूल्यासाठी,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x)$$

उकल: येथे,

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{iv}(x) = \cos x = \cos(2\pi + x)$$

....

....

$$f^{n}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n-1}(x)=\cos\left(x+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x)=\cos\left(x+2n.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x)=\cos(x+n\pi)$$

$$f^{2n+1}(x)=\cos\left(x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n+1}(\theta x)=\cos\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

म्हणून $f(0)=\cos 0=1\,,\ f^{/}(0)=-\sin 0=0$

$$f^{//}(0)=-\cos 0=-1\,,\ f^{///}(0)=\sin 0=0$$

$$f^{iv}(0)=\cos 0=1$$

....

....

$$f^{2n-1}(0)=\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f^{2n}(0)=\cos n\pi=\begin{cases}1, & n=\text{सम}\\ -1, & n=\text{विषम}\end{cases}=(-1)^{n+1}$$

$$f^{2n+1}(\theta x)=\cos\left[\theta x+n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\begin{cases}-\sin\theta x, & n=\text{सम}\\ \sin\theta x. & n=\text{विषम}\end{cases}=(-1)^{n+1}\sin\theta x$$

मॅकलॉरिनच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+.\frac{x^3}{3!}f'''(0)+......+.\frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{2n}(0)+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{2n+1}(\theta x)$$

मिळवलेली मुल्ये ठेउन, आपल्याकडे असेल

$$\cos x = 1 + x.0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^{n+1}\sin(\theta x)$$

म्हणजे, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x)$ सिद्ध केले.

उदाहरण 2.18: जर एखादे फंक्शन f असे असेल की f' हे $[a,b]$ वर कंटीन्यूअस फंक्शन आहे आणि (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे. तर दाखवा की एक वास्तविक संख्या $\theta, 0 < \theta < 1$, अशी आहे की

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''[a + \theta(b-a)].$$

उकल: समजा

$$\phi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + (b-x)^2 A \quad ...(1)$$

जिथे A हे असे निवडले जाणारे स्थिरांक आहे कि $\phi(a) = \phi(b)$

आता, $\phi(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 A \quad ...(2)$

आणि $\phi(a) = \phi(b)$ [मिळवा $x = a$ आणि $x = b$ समी(1) मध्ये टाकून] ...(3)

समी (2) मध्ये समी (3) वापरून, आपल्याला मिळेल

$$f(x) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 A \quad ...(4)$$

i. $f(x)$, $f'(x)$ हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे, आणि $(b-x)$, $(b-x)^2$ हे $[a,b]$ वर बहुपदी असून एक कंटिन्युयस फंक्शन आहे,
   $\therefore$ $\phi(x)$ हे $[a,b]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन आहे

ii. $f(x)$, $f'(x)$, हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे, आणि $(b-x)$, $(b-x)^2$ हे बहुपदी असून (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे
   $\therefore$ $\phi(x)$ हे (a,b) वर डिफरंशीएबल आहे

iii. तसेच, $\phi(a) = \phi(b)$

अशा प्रकारे, $\phi(x)$ रोल्स च्या प्रमेयाच्या तीनही अटी पूर्ण करते.

म्हणून तेथे वास्तविक संख्या $\theta, 0 < \theta < 1$, अशी आहे की $\phi'[a + \theta(b-a)] = 0$ ...(5)

समी (1) ला x ने डिफरन्शिएट केल्यावर

$$\phi'(x) = f'(x) + (b-x)f''(x) + (-1)f'(x) + 2(b-x)(-1)A$$

किंवा $\phi'(x) = (b-x)f''(x) - 2(b-x)A$

किंवा $\phi'(x) = (b-x)[f''(x) - 2A]$

$x = a+\theta(b-a)$ टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$\Rightarrow$ $$\phi'[a+\theta(b-a)] = (b-a-\theta(b-a))[f''(a+\theta(b-a))-2A]$$

$$0 = (b-a)(1-\theta)[f''(a+\theta)(b-a)-2A]$$

[समी (5) वरून आणि $b-a \neq 0, 1-\theta \neq 0$ असल्यामुळे]

$\Rightarrow$ $$A = \frac{1}{2}f''(a+\theta(b-a))$$

'A' चे मूल्य समी (4) मध्ये टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''[a+\theta(b-a)]$$

उदाहरण 2.19: दाखवा की $\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}$

उकल: समजा

$$f(x+h) = \log(x+h)$$

$$f(x) = \log x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4} = (-1)^3\frac{3!}{x^4}$$

....

....

असेच चालू ठेऊन

$$f^{n-1}(x) = (-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n}}$$

$$f^{n}(x+\theta h) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह टेलरच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$f(x+h)=f(x)+h.f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+.......+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{h^n}{(n)!}f^n(x+\theta h)$$

सर्व मूल्ये टाकल्यानंतर, आपल्याकडे असेल

$$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3!}\times\frac{2!}{x^3}+.....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}+\frac{h^n}{n!}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

किंवा

$$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+.....+\frac{h^{n-1}}{(n-1)}\frac{(-1)^{n-2}}{x^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}h^n}{n(x+\theta h)^n}$$

उदाहरण 2.20: मॅक्लॉरिनच्या प्रमेया वरून $e^{ax}.\sin bx$ ला n टर्म नंतर लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह विस्तृत करा.

उकल: समजा

$$f(x)=e^{ax}.\sin bx$$

$$f'(x)=e^{ax}\cos bx.b+ae^{ax}\sin bx$$

$$=e^{ax}(b.\cos bx+a.\sin bx)$$

$$f''(x)=e^{ax}(-b^2.\sin bx+ab\cos bx)+ae^{ax}(b\cos bx+a\sin bx)$$

$$=e^{ax}\left[(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\right]$$

$$f'''(x)=e^{ax}\left[(a^2-b^2)\cos bx.b-2ab\sin bx.b\right]+ae^{ax}\left[(a^2-b^2)\sin bx+2ab\cos bx\right]$$

$$=e^{ax}\left[b(3a^2-b^2)\cos bx+(a^3-3ab^2)\sin bx\right]$$

असेच चालू ठेऊन

$$f^n(x)=(a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin\left(bx+n.\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$x=0$ टाकल्यास, आपल्याकडे असेल

$$f(0)=0,\ f'(0)=b,\ f''(0)=2ab,$$

$$f'''(0)=b(3a^2-b^2),$$

$$f^n(\theta x)=(a^2+b^2)^{n/2}e^{\theta x}\sin\left(b\theta x+n.\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

लॅग्रांजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनच्या प्रमेयानुसार, आपल्याकडे आहे

$$f(x)=f(0)+x.f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+......+\frac{x^{n-1}}{(n-1)}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{n!}f^n(\theta x)$$

सर्व मूल्ये टाकल्यानंतर, आपल्याकडे असेल

$$e^{ax}.\sin bx = 0 + x.b + \frac{x^2}{2!}(2ab) + ... + \frac{x^n}{n!}(a^2+b^2)^{n/2} e^{a\theta x} \sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

किंवा
$$e^{ax}.\sin bx = bx + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \frac{x^3}{3!}b(3a^2-b^2) + ... + \frac{x^n}{n!}(a^2+b^2)^{n/2} e^{a\theta x} \sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

अभ्यास 2.4

1. दाखवा की x च्या प्रत्येक मूल्यासाठी खालील विस्तार शक्य होतो

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x, 0<\theta<1.$$

2. मॅक्लॉरिनच्या विस्ताराच्या मदतीने, दाखवा की

   a. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .... + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}.$

   b. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - .... - \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^n}{n(1-\theta x)^n}.$

3. जर एखादे फंक्शन f', जे $[a, a+h]$ वर कंटिन्युयस फंक्शन असेल आणि $(a, a+h)$ वर डिफरंशीएबल असेल. तर सिद्ध करा की a आणि $(a + h)$ दरम्यान वास्तविक संख्या c अस्तित्वात अशाप्रकारे आहे की

   $$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(c)$$

4. $f(x) = (1-x)^{5/2}$ या फंक्शनचा विस्तार $f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(\theta x)$ अशाप्रकारे दिलेला आहे. तर θ चे मूल्य शोधा जेव्हा $x \to 1$
5. शक्य असल्यास, मॅक्लॉरिनच्या प्रमेयाचा वापर करून x च्या चढत्या घातांकामध्ये $\sqrt{x}$ ला विस्तृत करा.
6. n टर्म नंतर लॅग्रेंजेसच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनचे प्रमेय वापरून $f(x) = a^x$ फंक्शन विस्तृत करा.
7. n टर्म नंतर कॉचीच्या रिमेन्डर फॉर्मसह मॅक्लॉरिनचे प्रमेय वापरून $e^{ax}.\sin bx$ विस्तृत करा.

उत्तरे

4. $\theta = \frac{9}{25}$

6. $1 + x\log a + \frac{x^2}{2!}(\log a)^2 + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}a^{\theta x}(\log a)^n$

7. $bx + \frac{x^2}{2!}(2ab) + \frac{x^3}{3!}b(3a^2-b^2) + ... + \frac{x^n}{(n-1)!}(a^2+b^2)^{n/2}(1-\theta)^{n-1}e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

मनोरंजक माहिती

- हे सिग्नल प्रक्रिया उद्योगात देखील वापरले जाते जेथे आपल्याला साइनूसॉइडल फंक्शन्स चा अंदाज घेणे आवश्यक आहे
- सिग्नलचा परिणाम तपासण्यासाठी हे ट्रान्सीस्ट्रर्स आणि एम्प्लिफायर उद्योगात वापरले जाते

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- हे संगणक आणि कॅल्क्युलेटरवरील अनेक फंक्शन्सच्या अंदाजे मूल्यांची गणना करण्यात मदत करतात.
- लिमिट सोडवण्यासाठी आणि अनेक अनंत बेरीज निश्चित करण्यासाठी ते खूप उपयुक्त आहेत.
- फंक्शन्सचे असीम्प्टोमेटिक वर्तन समजून घेण्यासाठी हे खूप उपयुक्त आहेत.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Taylor's Theorem 1

Taylor's theorem 2

2.3 इंडिटर्मिनेट फॉर्म आणि 'L' हॉस्पिटल्सचा नियम

समजा $f(x)$ आणि $g(x)$ ही दोन दिलेली फंक्शन्स आहेत.तर $\dfrac{f(x)}{g(x)}$जसे $x \to c$ ची लिमिट सर्वसाधारणपणे छेदाच्या लिमिट नुसार विभागलेल्या अंकांच्या लिमिट इतकी असते. पण जेव्हा त्या दोन लिमिट शून्य असतात, तेव्हा कोशंट फॉर्म 0/0 पर्यंत कमी होतो.

$\dfrac{0}{0}$ फॉर्मला इंडिटर्मिनेट फॉर्म म्हणतात

गणितानुसार, ते खालील प्रमाणे व्यक्त केले जाऊ शकते,

लिमिटचे मूल्यांकन करण्यासाठी $\quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$

जर $l = 0, \;\; m \neq 0$, तर $\quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

जर $l \neq 0, \;\; m = 0$, तर $\quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

जर $l = 0, \;\; m = 0$ तर $\quad \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$

चे मूल्यमापन केले जाऊ शकत नाही आणि याला इंडिटर्मिनेट फॉर्म म्हणतात.

खालीलप्रमाणे निरनिराळे फॉर्म प्रतीकांद्वारे दर्शविले जातात

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

येथे, आपण हे सर्व इंडिटर्मिनेट फॉर्म उदाहरणांसह स्पष्ट करू.

2.3.1 इंडिटर्मिनेट फॉर्म $\frac{0}{0}$ (टाईप - I) च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम

प्रमेय: समजा f आणि g हे $x=a$ वर डिफरंशीएबल आहेत आणि $f(a)=0=g(a)$,तर

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

सिद्धता: $f(a)=0=g(a)$

आपण असे लिहू शकतो,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$x-a$ ने भागून, आपल्याकडे असेल

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

दोन्ही बाजूंनी लिमिट घेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \qquad \left[\because \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\lim\limits_{x\to b}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}\right]$$

$$=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$ [डिफरन्शिएबिलिटी च्या व्याख्येनुसार]

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

साधारणपणे, जर

$$f(a) = f'(a) = f''(a).... = f^{n-1}(a) = 0$$

$$g(a) = g'(a) = g''(a).... = g^{n-1}(a) = 0$$

आणि $g^n(a) \neq 0$

जर $\lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$ अस्तित्वात असेल,

तर $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$

याला "L" हॉस्पिटल नियम म्हणून ओळखले जाते.

नियम कसा उपयोगात आणावा,

जर $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ अपरिभाषित असेल आणि $\frac{0}{0}$ स्वरूपाचा आहे, तर खालील प्रक्रियेद्वारे लिमिटचे मूल्यांकन करा:

1. अंश आणि छेदाला वेग वेगळे डिफरन्शिएट केल्यावर, म्हणजेच, "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

दोन स्थिती उद्भवतात:

स्थिती I: जर $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ हे $\frac{0}{0}$ या स्वरूपाचे नसेल तर,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

स्थिती II: जर $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ हे $\frac{0}{0}$ या स्वरूपाचे असेल, तर अंश आणि छेदाला पुन्हा वेग वेगळे डिफरन्शिएटकरा, म्हणजेच, "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

2. वरील प्रक्रिया (केस -2) पुन्हा पुन्हा करा म्हणजे जोपर्यंत $\lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$ चा फॉर्म हा डिटर्मिनेट फॉर्म होईल म्हणजे ,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार-I)

उदाहरण 2.21: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}$$

$$=\frac{1}{6}$$

उदाहरण 2.22: $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{x-1-\log x}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{x-1-\log x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)-1}{1-\frac{1}{x}} \qquad \text{“}L\text{” हॉस्पिटल चा नियम लागू करून}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x+x^x\log x-1}{1-\frac{1}{x}} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)+x^x.\frac{1}{x}+x^x(1+\log x)\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x+x^x\log x+x^{x-1}+\left(x^x+x^x\log x\right)\log x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1+0+1+0}{1}=2$$

उदाहरण 2.23: $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$. च्या वरून '$a$' आणि '$b$' चे मूल्य शोधा,

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1 \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x(-a\sin x)+(1+a\cos x)-b\cos x}{3x^2}=1 \qquad \ldots(1)$$

समी (1) ची उजवी बाजू फाइनाइट असल्याने, त्याची डवी बाजू देखील फाइनाइट असणे आवश्यक आहे जेव्हा $x\to 0$

पण विभाजक $\longrightarrow 0$ म्हणून $x\to 0$

आणि अंश $\longrightarrow 0$ म्हणून $x\to 0$

$$\Rightarrow \qquad 1+a-b=0$$

$$\Rightarrow \qquad a-b=-1 \qquad \ldots(2)$$

(1) च्या डाव्या बाजूला, "L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x-ax\cos x-a\sin x+b\sin x}{6x}=1 \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\cos x-a\cos x+ax\sin x-a\cos x+b\cos x}{6}=1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{-3a+b}{6}=1$$

$$\Rightarrow \qquad -3a+b=6 \qquad \ldots(3)$$

(2) आणि (3) वापरून, आपल्याला मिळेल, $a=-\frac{5}{2},\ b=-\frac{3}{2}$ उकल

उदाहरण 2.24: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x-x^2}{x^3}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x-x^2}{x^3} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x+e^x\sin x-1-2x}{3x^2}$$

किंवा

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x+\sin x)-1-2x}{3x^2} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)-2}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{6x} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2e^x\sin x}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$ **(उकल)**

उदाहरण 2.25: $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ फाइनाइट आहे अशाप्रकारे ‘ a ‘ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x} \qquad [\frac{0}{0}\text{ स्वरूप }]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-2\cos 2x}{3\tan^2 x.\sec^2 x}=\frac{a-2}{0}$$

पण दिलेले आहे की, $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ फाइनाइट आहे.

$\therefore$ $a-2=0$

$\Rightarrow$ $a=2$ **(उकल)**

2.3.1.1 मालिकेच्या विस्ताराच्या पद्धतीद्वारे लिमिटचे मूल्यमापन

i. $a^x=1+x\log a+\frac{x^2}{2!}(\log a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log a)^3+..........$

ii. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..........$

iii. $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........|x|<1$

iv. $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........|x|<1$

v. $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+..........|x|<1$

vi. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+..........|x|<1$

vii. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}..........\forall x$

viii. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}..........\forall x$

ix. $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} .... \forall x$

x. $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} .... \forall x$

xi. $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + ... \forall x$

xii. $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2!} + \dfrac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + ...$

उदाहरण 2.26: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\log(1+x)} \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ स्वरूप }]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}..........\right)}{x\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+.........\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+.........}{\left(x^2-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{3}-\dfrac{x^5}{4}+.........\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{x^2}{4!}+........\right)}{x^2\left(1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-.........\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{x^2}{4!}+........}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-.........}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

(उकल)

पर्यायी पद्धत:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\log(1+x)} \qquad [\tfrac{0}{0} \text{ स्वरूप }]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{x}{1+x}+\log(1+x)} \qquad \left[\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

उदाहरण 2.27: $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2} \qquad \left[\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}..........\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}..........\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{6}+..........\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}-\frac{5x}{6}+..........\right]=\frac{1}{2}$$

(उकल)

अभ्यास 2.5

1. खालील गोष्टींचे मूल्यांकन करा:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\log(1+x)}{x\sin x}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x+\log(1-x)}{x\tan^2 x}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{(\tan^{-1}x)^2}{\log(1+x^2)}$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2\sin x}$

f. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

g. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}$

h. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{\sqrt{x}}$

i. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - x}{\sin x - x\cos x}$

j. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^{\sin x} - e^{x}}$

2. खालील लिमिट चे मूल्यांकन करा:

a. $\lim_{a\to b} \dfrac{a^b - b^a}{a^a - b^b}$

b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x\sin x}$

c. $\lim_{x\to b} \dfrac{x^b - b^x}{x^x - b^b}$

d. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$

f. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \sin x}{\cos^2 x}$

g. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x - x^2}{x^2 + x\log(1-x)}$

h. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x\sin x}$

3. जर $\lim_{x\to 0} \dfrac{re^x - q\cos x + pe^{-x}}{x\tan x} = 3$ तर p, q आणि r ची मूल्ये शोधा.

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2$ च्या वरून a, b आणि c चे मूल्य शोधा,

5. मूल्यमापन करा:

i. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

ii. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

उत्तरे

1. a. 1 b. $\frac{1}{2}$ c. $-\frac{1}{2}$ d. 1

e. $\frac{1}{3}$ f. 1 g. $\frac{\log a}{\log b}$ h. 0

i. $\frac{1}{2}$ j. -1

2. a. $\frac{1-\log b}{1+\log b}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1-\log b}{1+\log b}$ d. $\frac{1}{3}$

e. $\frac{3}{2}$ f. 1 g. $-\frac{2}{3}$ h. 2

3. $p = \frac{3}{2},\ q = 3,\ r = \frac{3}{2}$

4. $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$ 5. i. 1 ii. 1

2.3.2 इंडिटर्मिनेट फॉर्म $\frac{\infty}{\infty}$ (टाईप-II) च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम

प्रमेय: जर $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ आणि $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, तर $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ जर उजवी बाजू अस्तित्वात असेल

(फाइनाइट असो किंवा इंफाइनाइट)

नियम कसा उपयोगात आणावा:

1. इंडिटर्मिनेट फॉर्म $\frac{\infty}{\infty}$ चे मूल्यांकन करण्यासाठी, त्यांना फॉर्म $\frac{0}{0}$ मध्ये बदला आणि नंतर सोडवा.

2. जर $x \to \infty$, तर $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, जेव्हा $x \to \infty$, तेव्हा $x \to \frac{1}{y}$ च्या रूपात बदलून, असे की $y \to 0$

   समजा $x = \frac{1}{y}$, तर $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}$, आणि पुढे जा.

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार-II)

उदाहरण 2.28: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log \tan 2x}{\log \tan x}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \tan 2x}{\log \tan x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\tan 2x}.\sec^2 2x.\ 2}{\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2.\tan x.\sec^2 2x}{\tan 2x.\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 2x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}.\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2.\sin x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\cos 2x} \quad = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x} \quad = 1$$

उदाहरण 2.29: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3-100}{4x^4+x^2+2x+100}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3-100}{4x^4+x^2+2x+100}$$

$x=\frac{1}{y}$ ठेऊन,

जसे $x\to\infty$

$\Rightarrow$ $y\to 0$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2.\frac{1}{y^4}+3.\frac{1}{y^3}-100}{4.\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^2}+2.\frac{1}{y}+100}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2.+3y-100y^4}{4.+y^2+2y^3+100y^4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

उदाहरण 2.30: $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\tan 3x}$ चे मूल्यमापन करा.

उकल: येथे

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\tan 3x} \qquad [\tfrac{\infty}{\infty}\text{ स्वरूप}]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{3}\left[\frac{-2\cos 3x.\sin 3x.3}{-2\cos x.\sin x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\right] \qquad \because \{\sin 2x=2\sin x.\cos x\} \qquad [\tfrac{0}{0}\text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}\right]=\frac{3\cos 3\pi}{\cos\pi}=\frac{3(-1)}{(-1)}=3$$

2.3.3 इंडिटर्मिनेट फॉर्म $0\times\infty$ (टाइप- III) च्या मूल्यांकनासाठी L हॉस्पिटल नियम

जर $\lim_{x\to a}f(x)=0$ आणि $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, तर $\lim_{x\to a}f(x).g(x)$ हे $0\times\infty$ च्या स्वरूपात आहे

रूपांतरित केल्या नंतर

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ किंवा } = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

जे अनुक्रमे $\frac{0}{0}$ किंवा $\frac{\infty}{\infty}$ स्वरूपाचे आहे आणि नंतर मागील चर्चा केलेल्या पद्धतींनी सोडवा.

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार- III)

उदाहरण 2.31: $\lim_{x\to 0} x\log x$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0} x\log x \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \qquad [\frac{\infty}{\infty} \text{ स्वरूप}]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

उदाहरण 2.32: $\lim_{x\to 0} x\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0} x\cot x \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x} = 1$$

उदाहरण 2.33: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cot x} \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 x} = -1$$

उदाहरण 2.34: $\lim_{x \to \infty} 2^x . \sin \frac{a}{2^x}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: येथे

$$\lim_{x \to \infty} 2^x . \sin \frac{a}{2^x} \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

$$\Rightarrow \quad = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}} \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप }]$$

"L" हॉस्पिटल चा नियम लागू करून,

$$\Rightarrow \quad = \lim_{x \to \infty} \frac{\cos \frac{a}{2x} \left(\frac{-a.2^x . \log 2}{\left(2^x\right)^2} \right)}{\frac{-2^x . \log 2}{\left(2^x\right)^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} a . \cos \frac{a}{2^x} = a$$

2.3.4 इंडिटर्मिनेट फॉर्म ∞-∞ च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम (टाईप - IV)

जर $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ किंवा $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, तर $\lim_{x \to a} f(x) - g(x)$ हे $\infty - \infty$ चे रूप आहे

या स्वरूपात, रूपांतरित करा

$$\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x.) g(x)}}$$

ज्याचे मूल्य 'L' हॉस्पिटल नियमाने करता येते जसे आधी केल्याप्रमाणे.

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार- IV)

उदाहरण 2.35. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{cosec\, x}{x}\right)$ चे मूल्य शोधा

उकल: दिलेले आहे की

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right) \qquad [\infty-\infty \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}\right) \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम लागू केल्यावर ,

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2\cos x+2x\sin x}\right) \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x^2\sin x+2x\cos x+2x\cos x+2\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{-x^2\sin x+4x\cos x+2\sin x}\right) \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos x}{-x^2\cos x-6x\sin x+6\cos x}\right)=-\frac{1}{6}$$

उदाहरण 2.36: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x) \qquad [\infty-\infty \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

उदाहरण 2.37: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad [\infty-\infty \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right) \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right) \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1\right] \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-......\right)^2}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}-...}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{60}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}-\frac{x^2}{60}+ \quad x \text{ च्या उच्च घातांकाचे पद}$$

$$=\frac{1}{3}$$

अभ्यास 2.6

1. खालील लिमीट चे मूल्यांकन करा:

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log\sin x}{\cot x}$

b. $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\log(x-a)}{\log\left(e^x-e^a\right)}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-8x^2+2x+1}{x^4-x^2+2x-3}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ecx}{\log x}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\cot x}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}, n\in N$

h. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\log(1-x)}{\cot \pi x}$

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_x .\sin x$

2. खालील इंडिटर्मिनेट फॉर्मचे मूल्य शोधा:

a. $\lim\limits_{x\to 0} x.\log x.\tan x$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} x.\tan\dfrac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to a} (a-x).\tan\dfrac{\pi x}{2a}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \sec\dfrac{\pi}{2x}\log x$

e. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x).\tan x$

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(a^{1/x}-1\right)x$

3. खालील लिमिटचे मूल्यमापन करा :

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\cos ecx\right)$

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)\right)$

g. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (2x\tan x-\pi.\sec x)$

h. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos ecx-\cot x)$

उत्तरे

1. a. 0 b. 1 c. 0 d. 0

e. $-\infty$ f. 0 g. 0 h. 0

i. 1

2. a. 0 b. 1 c. $\dfrac{2a}{\pi}$ d. $\dfrac{2}{\pi}$

e. 0 f. $\log a$

3. a. 0 b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{1}{2}$

e. $\frac{1}{3}$ f. $\frac{1}{2}$ g. -2 h. 0

2.3.5 इंडिटर्मिनेट फॉर्म च्या मूल्यांकनासाठी ‘L’ हॉस्पिटल नियम 0° (टाईप - V)

जर, $\lim_{x\to a} f(x)=0$ आणि $\lim_{x\to a} g(x)=0$, तर $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ हे 0^0 स्वरूपाचे आहे

ह्या स्वरूपाचे लिमिट सोडवण्यासाठी, समजा, $y=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

$$\log y=\lim_{x\to a} g(x).\log f(x)$$

जे $0\times\infty$ स्वरूपाचे आहे आणि मागील पद्धतीद्वारे सोडवले जाऊ शकते.

आपण गृहीत धरू शकतो,

$$\lim_{x\to a} g(x).\log f(x)=l$$

तर समी (1) वरून, $\log y=l \Rightarrow y=e^l$

काही सोडवलेली उदाहरणे
(प्रकार- V)

उदाहरण 2.38: $\lim_{x\to 0^+} x^x$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिलेले आहे

$$y=\lim_{x\to 0^+} x^x \qquad [0^0 \text{ स्वरूप}]$$

दोन्ही बाजूंनी log घेउन

$$\log y=\lim_{x\to 0^+} x\log x \qquad [0\times\infty \text{ स्वरूप}]$$

$$\log y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ स्वरूप}\right]$$

‘L’ हॉस्पिटल नियम वापरून

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} -x=0$$

अशा प्रकारे $\log y=0$

$\Rightarrow$ $y = e^0 = 1$

म्हणून $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$

उदाहरण 2.39: $\lim_{x \to 1}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$ चे मूल्य शोधा

उकल: दिलेले आहे

$$y = \lim_{x \to 1}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}} \qquad [\,0^0 \text{ स्वरूप}\,]$$

तर $$\log y = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\log(1-x)} \log\left(1 - x^2\right) \qquad [\,\frac{\infty}{\infty} \text{ स्वरूप}\,]$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\log(1-x) + \log(1+x)}{\log(1-x)}$$

$$= \lim_{x \to 1}\left(1 + \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x \to 1} \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)}$$

$$= 1 + \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}} = 1 + \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1+x}$$

$$= 1 + \frac{0}{2} = 1$$

अशा प्रकारे $\log y = 1$

$\Rightarrow$ $y = e^1 = e$

म्हणून $\lim_{x \to 1}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}} = e$

2.3.6 इंडिटर्मिनेट फॉर्मच्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम 1^∞ (टाईप - VI)

जर $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ आणि $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, तर $\lim_{x \to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ हे 1^∞ स्वरूपाचे आहे.

ते सोडवता येते $y = \lim_{x \to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ घेऊन

$\therefore$ $$\log y = \lim_{x \to a} g(x).\log f(x) \qquad (1)[0\times\infty \text{ फॉर्म}]$$

हे मागील पद्धतीद्वारे सोडवले जाऊ शकते.

त्यानंतर, समजा

$$\lim_{x \to a} y = l$$

तेव्हा $y = e^l$

म्हणजे $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{g(x)} = e^l$

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार- VI)

उदाहरण 2.40: $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ चे मूल्य शोधा

उकल: दिलेले आहे

$$y = \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad [1^{\infty} \text{ स्वरूप}]$$

$$\therefore \qquad \log y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \log \cos x \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून,

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\tan x}{2x} \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे $\log y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \qquad y = e^{-\frac{1}{2}}$

म्हणून $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

उदाहरण 2.41: दिलेल्या लिमिट $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$ चे मूल्य शोधा:

उकल: दिलेले आहे

$$y = \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\cot^2 x} \qquad [1^{\infty} \text{ स्वरूप}]$$

$$\therefore \qquad \log y = \lim_{x \to 0} \cot^2 x \log \cos x \qquad [0 \times \infty \text{ स्वरूप}]$$

$$\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{\tan^2 x} \qquad \left[\frac{0}{0}\text{ स्वरूप}\right]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून,

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)}{2\tan x.\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2\tan x.\sec^2 x} = -\frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे $\log y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $y = e^{-\frac{1}{2}}$

म्हणून $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$

2.3.7 इंडिटर्मिनेट फॉर्म ∞^0 च्या मूल्यांकनासाठी 'L' हॉस्पिटल नियम (टाईप - VII)

जर $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ आणि $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, तर $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ हे ∞^0 स्वरूपाचे आहे.

या प्रकारच्या इंडिटर्मिनेट स्वरूपाचे निराकरण करण्यासाठी,

समजा $y = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}$

$\therefore$ $\log y = \lim_{x\to a} g(x).\log f(x)$ … (1) [$0\times\infty$ स्वरूप]

हे मागील पद्धतीद्वारे सोडवले जाऊ शकते.

त्यानंतर, समजा $\log y = l$

तेव्हा $y = e^l$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^l$

काही सोडवलेली उदाहरणे (प्रकार-VII)

उदाहरण 2.42: $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$y = \lim_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad [\infty^0\text{ स्वरूप}]$$

$\therefore \qquad \log y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log x} \log \cot x \qquad [\frac{\infty}{\infty}$ स्वरूप]

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cot x}.\left(-\cos ec^2 x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x \cos ec^2 x}{\cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\cos x.\sin x} \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -1$$

अशा प्रकारे $\qquad \log y = -1$

$\Rightarrow \qquad y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

म्हणून $\qquad \lim_{x\to 0} \left(\cot x\right)^{\frac{1}{\log x}} = \frac{1}{e}$

उदाहरण 2.43: $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x+1}$ चे मूल्य शोधा

उकल: समजा

$$f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x+1}, \quad x > 1$$

$\therefore \qquad \log f(x) = \lim_{x\to\infty} (x+1) \log\left(1 - \frac{1}{2x}\right), \ x > 1$

$$\log f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x+1}} \qquad [\frac{0}{0} \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून ,

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2x}\right)}.\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{(2x-1)} \cdot \frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2}{-x(2x-1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1+2x}{-2x^2+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{-2+\frac{1}{x}}$$ [अंश आणि छेदाला x^2 ने भाग देऊन]

$$= -\frac{1}{2}$$

अशा प्रकारे $\qquad \log f(x) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \qquad f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x+1} = e^{-\frac{1}{2}}$

उदाहरण 2.44: $\lim_{x \to \pi/2} (\sec x)^{\cot x}$ चे मूल्यमापन करा

उकल: समजा

$$y = \lim_{x \to \pi/2} (\sec x)^{\cot x}$$ [∞^0 स्वरूप]

$\therefore \qquad \log y = \lim_{x \to \pi/2} \cot x . \log \sec x$ [$0 \times \infty$ स्वरूप]

$$\log y = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\log \sec x}{\tan x}$$ [$\frac{\infty}{\infty}$ स्वरूप]

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून ,

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{1}{\sec x} . \sec x . \tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \sin x . \cos x$$

$$= 0$$

अशा प्रकारे $\log y = 0$

$\Rightarrow$ $y = e^0 = 1$

म्हणून $\lim_{x \to \pi/2} (\sec x)^{\cot x} = 1$

उदाहरण 2.45: सिद्ध करा $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2} = e^3$

उकल: समजा

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2} \qquad [1^\infty \text{ स्वरूप}]$$

$$\therefore \quad \log y = \lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right) \qquad [0\times\infty \text{ स्वरूप}]$$

'L' हॉस्पिटल नियम वापरून

$$= \lim_{x\to\infty}(3x+2)\left[\frac{2}{2x+1}-\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{2}.\frac{1}{2}+......\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(3x+2)}{2x+1}-\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{2}.\frac{(3x+2)}{2}+......\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{2x}.\frac{\left(1+\frac{2}{3x}\right).3x}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}-\frac{2.3x\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{(2x)^2\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2}+.......\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3.\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}-\frac{3}{2x}\frac{\left(1+\frac{2}{3x}\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^2}+.......\right]$$

$$= 3$$

अशा प्रकारे $\log y = 3$

$\Rightarrow$ $y = e^3$

म्हणून $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+2} = e^3$

उदाहरण 2.46: सिद्ध करा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=-\frac{e}{2}$

उकल: समजा

$$y=(1+x)^{1/x}$$

$$\therefore \qquad \log y=\frac{1}{x}\log(1+x)$$

$$=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+....\right)$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...$$

$$\Rightarrow \qquad y=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+...}$$

$$=e.e^t \text{ जेथे } t=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+.......$$

$$=e\left[1+t+\frac{t^2}{2}+.......\right]$$

$$=e.\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+.......\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+.......\right)^2+......\right]$$

$$=e.\left[1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+......\right]$$

$$=e-\frac{ex}{2}+\frac{11}{24}ex^2+......$$

आता

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e-\frac{ex}{2}+\frac{11}{24}ex^2+......\right)-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e}{2}+\frac{11}{24}ex+....$$

$$=\frac{-e}{2}$$

उदाहरण 2.47: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n+n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]$ मूल्यमापन करा.

उकल: दिलेले आहे $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n+n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n+n^2.\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n+n^2.\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}-\frac{1}{3(n+1)^3}-.......\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n-\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2}{2(n+1)^2}-\frac{n^2}{3(n+1)^3}-......\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2-\frac{1}{3}\frac{n^2}{(n+1)^3}-......\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2-\frac{1}{3}.\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}-......\right]$$

$$= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

म्हणून $$\lim_{n\to\infty}\left[n+n^2.\log\frac{n}{n+1}\right]=\frac{1}{2}$$

अभ्यास 2.7

1. खालील लिमिट चे मूल्य शोधा:

   a. $\lim_{x\to\pi/2}(\cos x)^{\cos x}$ b. $\lim_{x\to 1}(x-1)^{x-1}$ c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{1/x}$

2. खालील लिमिट निश्चित करा.

   a. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$ b. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ c. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$

   d. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{1/x}$ e. $\lim_{x\to 0}(\cos ecx)^{1/\log x}$ f. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$

   g. $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$ h. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ i. $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

   j. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ k. $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan^2 x}$

3. a. दाखवा कि $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e+\frac{ex}{2}}{x^2}=\frac{11e}{24}$

b. दाखवा कि $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e+\frac{ex}{2}-\frac{11}{24}ex^2}{x^3}=-\frac{7}{16}e$

4. a. सिद्ध करा कि $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=1$ b. सिद्ध करा कि $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$

c. सिद्ध करा कि $\lim_{x\to\infty}\left(x+e^x\right)^{2/x}=e^2$ d. सिद्ध करा कि $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{3x+2}=e^{-3}$

5. मूल्यमापन करा:

a. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ आणि तर काढा $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{1/x}=\sqrt{6}$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/x}$ c. $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+n^2\right)}{n}$

उत्तरे

1.	a. 1	b. 1	c. 1	
2.	a. e^a	b. 1	c. 1	d. 1
	e. $1/e$	f. $e^{1/3}$	g. $e^{2/\pi}$	h. $e^{-1/6}$
	i. e	j. e^2	k. $e^{-1/2}$	
5.	b. 1	c. 0		

मनोरंजक तथ्य

- भौतिकशास्त्रातही अनिश्चित फॉर्म आढळतात. क्वांटम फिजिक्स, कण क्षय, क्वांटम मेकॅनिक्स, थर्मोडायनामिक्स इत्यादींमध्ये त्याचा वापर आपण पाहू शकतो.
- जोहान बर्नोली देखील या अद्वितीय नियमाच्या निर्मितीमध्ये गुंतले होते.
- L हॉस्पिटल चा नियम कधी कधी न संपणाऱ्या चक्रात पडून अपयशी ठरतो.
- जरी हॉस्पिटल म्हणून लिहिलेले असले तरी हा शब्द “हॉपीटल” म्हणून उच्चारला जातो.

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- वाणिज्य क्षेत्रामध्ये त्याचा एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग आहे, जिथे सतत चक्रवाढ व्याज असते.विशेषत: गुंतवणूकीमध्ये, विविध प्रकारची बँक खाती,क्रेडिट कार्ड बिल, तारण इ. भरताना दर दररोज येतात.
- हे गामा फंक्शन्समध्ये वापरले जाते जे पुढे अभियांत्रिकी, क्वांटम फिजिक्स,आकडेवारी, खगोल भौतिकी, द्रव गतिशीलता, एकत्रित, संभाव्यता सिद्धांत इ. मध्ये वापरले जाते.

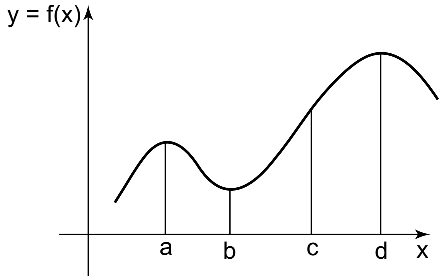
व्हिडिओ संदर्भ(स्त्रोत-NPTEL)

Indeterminate Forms Part I

2.4 मॅक्सिमा आणि मिनीमा

फंक्शन f चे $x = a$ *साठी* मॅक्सिमम मूल्य आहे असे म्हटले जाते जर $f(a) > f(x)$ म्हणजे ,$f(x) - f(a) < 0$, a जवळच्या सर्व x साठी.

फंक्शन f चे $x = a$ साठी मिनीमम मूल्य आहे असे म्हटले जाते जर $f(a) < f(x)$. म्हणजे , $f(x) - f(a) > 0$, a च्या जवळच्या सर्व x साठी. संलग्न चित्रात, $f(x)$ चे $x = a$ *साठी* मॅक्सिमम मूल्य *आहे* कारण $f(a)$



आकृती 2.7

चे मूल्य $f(x)$ च्या शेजारच्या मूल्यापेक्षा जास्त आहे. त्याचप्रमाणे $f(x)$ मध्ये मिनीमा $x = b$ आणि मॅक्सिमा d वर आहे.

लक्षात घ्या की $f(x)$ चे $x = a$ *साठी* मॅक्सिमम मूल्य आहे, जरी $f(a) < f(c)$. याचे कारण $f(a) > f(x)$, a च्या शेजारी. अशा प्रकारे $f(x)$ चे जास्तीत जास्त मूल्य $f(x)$ चे सर्वात मोठे मूल्य असणे आवश्यक नाही.

2.4.1 मॅक्सिमा आणि मिनिमा साठी अट

टेलरच्या प्रमेयाने 'a' बिंदू वर विस्तार करुन, आपल्याकडे असेल

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

म्हणजे,
$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \ldots$$

किंवा
$$= (x-a)\left\{f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)f''(a) + \ldots\right\} \qquad \ldots(1)$$

जेव्हा $x - a$ लहान असेल, $f'(a)$ संख्यात्मकदृष्ट्या पुढील अटींपेक्षा जास्त असते. तर $f(x) - f(a)$ चे चिन्ह $(x-a)$ $f'(a)$ वर अवलंबून असते. परंतु जेव्हा $x > a$ दुसरे जेव्हा $x < a$ असेल तेव्हा फक्त एकच चिन्ह असेल . म्हणून $x = a$ वर मॅक्सिमा किंवा मिनीमा शक्य नाही जोपर्यंत $f'(a) = 0$ नाही.

जर $f'(a) = 0$ असेल तर समी (1) होईल

$$= (x-a)^2\left\{\frac{1}{2}f''(a) + \frac{1}{6}(x-a)f'''(a)\ldots\right\} \qquad \ldots(2)$$

x-a च्या लहान मूल्यांसाठी, $\frac{1}{2}f''(a)$ ला सक्सिडिंग टर्म्स पेक्षा अधिक संख्यात्मक मूल्य असेल. ज्यामुळे $f(x) - f(a)$ चे

चिन्ह हे $\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$ किंवा $f''(a)$ यावर अवलंबून आहे. जसे $\frac{1}{2}(x-a)^2$ नेहमी धनात्मक असते.

म्हणून फंक्शन $f(x)$ ला $x = a$ *साठी* मॅक्सिमा, मिनिमा असेल जर

i. $f'(a)=0$ आणि $f''(a)=$ ऋणात्मक असेल तर $f(x)$ ला 'a' वर मॅक्सिमा आहे.

ii. $f'(a)=0$ आणि $f''(a)=$ धनात्मक असेल तर $f(x)$ ला 'a' वर मिनीमा आहे.

iii. $f'(a)=0$ आणि $f''(a)=0$ असेल तर $f(x)$ ला $x = a$ वर मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही, जोपर्यंत $f'''(a)=0$ नाही. $f^{iv}(a)=0$ चे चिन्ह नंतर $f(x)$ चे स्वरूप निश्चित करेल.

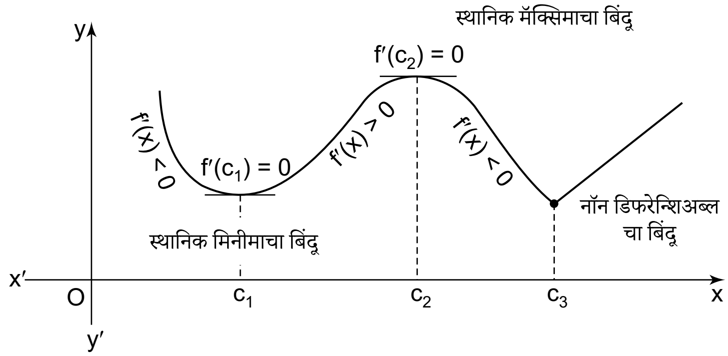
2.4.2 एक्सट्रिमासाठी पहिली डेरिवेटिव्ह चाचणी (मॅक्सिमा किंवा मिनिमा)

समजा f हे इंटर्वल $I = (a, b)$ वर कंटीनिवस फ़ंक्शण आहे आणि असे समजा c हा I मधील क्रिटिकल बिंदू आहे, अर्थात् $c \in I$ मग

i. $f'(x)$, c च्या माध्यमातून x वाढल्याने चिन्ह धनात्मक पासून ऋणात्मक बदलते, म्हणजेच, $x \in (c - \delta, c)$ साठी $f'(x) \geq 0$, आणि $x \in (c, c + \delta)$ साठी $f'(x) \leq 0$ तेंव्हा c, स्थानिक मॅक्सिमाचा बिंदू आहे आणि f ची स्थानिक मॅक्सिमा c वर आहे.

ii. $f'(x)$, c च्या माध्यमातून x वाढल्याने चिन्ह ऋणात्मक पासून धनात्मक बदलते, म्हणजेच , $x \in (c - \delta, c)$ साठी $f'(x) \leq 0$, आणि $x \in (c, c + \delta)$ साठी $f'(x) \geq 0$ तेंव्हा c, स्थानिक मिनीमाचा बिंदू आहे आणि f स्थानिक मिनीमा c वर आहे.

iii. $f'(x)$, c *च्या* माध्यमातून x वाढल्याने चिन्ह बदलत नाही, म्हणून f ला c वर शिरोबिंदू (मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही) असतो आणि अशा बिंदूला म्हणतात इन्फ्लेक्शन पॉईंट म्हणतात.



आकृती 2.8

व्याख्या. f चा क्रिटिकल बिंदू: समजा f, इंटर्वल I आणि $c \in$ I, वर परिभाषित केलेले कंटीनिवस फ़ंक्शण आहे, तेंव्हा c ला क्रिटिकल बिंदू म्हणतात जर तो $f'(c) = 0$ किंवा I मधील बिंदूंवर डिफरन्शिएबल नसेल .

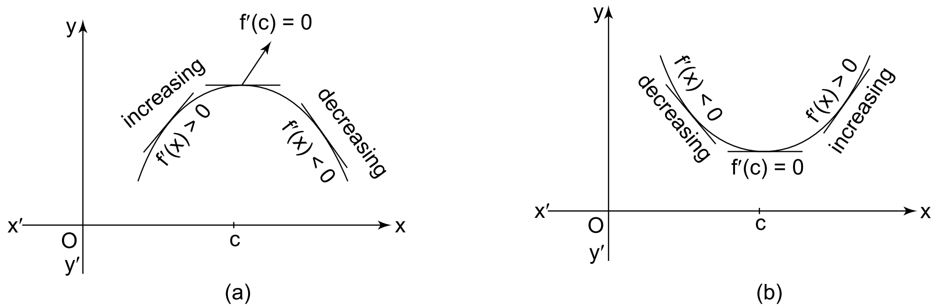
व्याख्या. समजा f ला वास्तविक मूल्य फंक्शन आणि समजा c, f डोमेनचा अंतर्गत बिंदू आहे, मग

a. c ला स्थानिक मॅक्सिमा बिंदू असल्याचे म्हटले जाते, जर $h > 0$ असेल, जसे की $(c - h, c + h)$ मध्ये $f(c) > f(x)$, $\forall\ x$. $f(c)$ च्या मूल्याला f चे मॅक्सिमम मूल्य (local maximum value) म्हणतात.

b. c हा स्थानिक मिनिमा बिंदू असल्याचे म्हटले जाते, जर $h > 0$ असे असेल तर $(c - h, c + h)$ मध्ये $f(c) < f(x), \forall$ x. $f(c)$ च्या मूल्याला f चे मिनिमम मूल्य (local minimum value) म्हणतात.

भौमितिकदृष्ट्या, वरील व्याख्या सांगते की जर $x = c$ हा f च्या स्थानिक मॅक्सिमा लिमिटचा बिंदू असेल तर आलेख

दिलेल्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे c च्या आसपास 'f' असेल. लक्षात ठेवा f हे फंक्शन मध्यांतरात वाढत आहे $(c - h, c)$ (म्हणजेच $f(x) > 0$) आणि मध्यांतर $(c, c + h)$ मध्ये कमी होत आहे (म्हणजे $f(x) < 0$), सुचवित आहे की $f(c)$ शून्य असणे आवश्यक आहे.



आकृती 2.9

उदाहरण 2.48: जेव्हा f दिले जाते तेव्हा स्थानिक मॅक्सिमा आणि फंक्शनच्या मिनिमाचे सर्व बिंदू शोधा

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

उकल: दिलेले आहे

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

x सोबत डिफरन्शिएट करून $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$= 3(x^2 - 1)$$

$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

आता $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1, -1$

अशा प्रकारे, $x = \pm 1$, c ला क्रिटिकल बिंदू आणि फंक्शनचे मॅक्सिमा किंवा मिनीमा मूल्य $x = 1, -1$ वर असू शकते. पहिली डेरिवेटिव्ह चाचणी लागू केल्यावर

x चे मूल्य		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ चे चिन्ह
$x = 1$	डाव्या बाजुला (समजा 0.98)	$f'(x) < 0$
	उजव्या बाजुला (समजा 1.01)	$f'(x) > 0$
$x = -1$	डाव्या बाजुला (समजा -1.01)	$f'(x) > 0$
	उजव्या बाजुला (समजा -0.9)	$f'(x) < 0$

$x = 1$ वर, $f'(x)$ चे चिन्ह ऋणात्मक कडून धनात्मक मध्ये बदलते.

$\therefore$ स्थानिक मिनिमाचा बिंदू $x = 1$ आहे आणि $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$ हे स्थानिक मिनीमा मूल्य आहे.

$x = -1$ वर , $f'(x)$ चे चिन्ह धनात्मक पासून ऋणात्मक मध्ये बदलते.

$\therefore$ $x = -1$ हा स्थानिक मॅक्सिमाचा बिंदू आहे आणि $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$ मॅक्सिमा मूल्य आहे .

उदाहरण 2.49: फंक्शन f च्या स्थानिक मॅक्सिमाचे आणि स्थानिक मिनिमाचे सर्व बिंदू शोधा, $f(x) = x^3 + 1$ जे द्वारे दिले आहे.

उकल: दिलेले आहे

$$f(x) = x^3 + 1$$

x सोबत डिफरन्शिएट करून $f'(x) = 3x^2$

आता $$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

अशा प्रकारे, $x = 0$, 'f' चा क्रिटिकल बिंदू आणि फंक्शनचे मॅक्सिमा किंवा मिनीमा मूल्य $x = 0$ वर असू शकते .

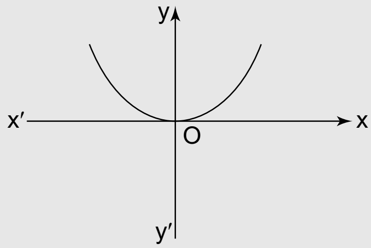
पहिली डेरिवेटिव्ह चाचणी लागू केल्यावर

x चे मूल्य		$f'(x) = 3x^2$ चे चिन्ह
$x = 0$	डाव्या बाजुला(समजा -0.1)	> 0
	उजव्या बाजुला(समजा 0.1)	> 0

अशा प्रकारे, $x = 0$, परंतु $f'(x)$ त्याचे चिन्ह बदलत नाही. म्हणून, $x = 0$, हा स्थानिक मॅक्सिमा किंवा स्थानिक मिनिमा बिंदू नाही. अशा प्रकारे, $x = 0$ हा विचलनाचा बिंदू आहे

टिपण्णी:

i. समजा $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ एक फंकशन आहे. स्पष्टपणे, f चे R मध्ये किमान मूल्य $x = 0$ आणि $f(0) = 0$ आहे परंतु f चे जास्तीत जास्त मूल्य नाही.

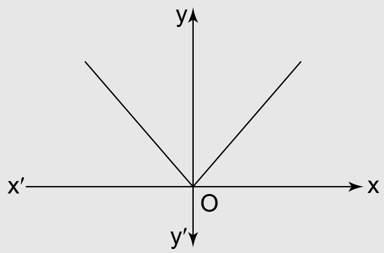


आकृती 2.10

ii. समजा एक फंकशन $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ आहे

f चे किमान मूल्य $x = 0$ वर आहे. तसेच $f(0) = |\ 0\ | = 0$,

परंतु R मध्ये f चे जास्तीत जास्त मूल्य नाही.



आकृती 2.11

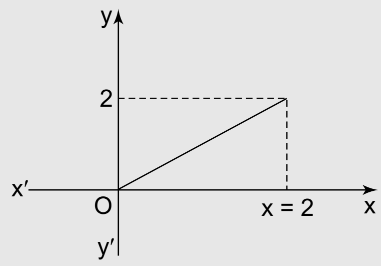
iii. समजा की एक फंकशन $f(x)=x,\ x\in(0,2)$ आहे

f चे मॅक्सीमम मूल्य किंवा मिनिमम मूल्य (0, 2) यात नाही

$f(x)=x,\ x\in(0,2)\ f'(x)=1$

(0,2) मध्ये सर्व बिंदूवर, $f'(x) > 0$, चिन्हात कोणतेही बदल नाहीत.

(0,2) मध्ये f ला मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही



आकृती 2.12

2.4.3 एक्सट्रीमासाठी दुसरी डेरिवेटिव्ह चाचणी (मॅक्सिमा किंवा मिनिमा)

समजा f अंतराल I वर परिभाषित आणि $c \in I$ एक द्वितीय डिफरेंशियबल फंक्शन आहे . तर

i. जर $f'(c)=0$ आणि $f''(c) < 0$, तर $x = c$ हा स्थानिक मॅक्सिमा चा एक बिंदु आहे आणि $f(c)$ हे f चे स्थानिक मॅक्सिमम मूल्य आहे

ii. जर $f'(c) = 0$ आणि $f''(c) > 0$, तर $x = c$ स्थानिक मिनीमा चा एक बिंदु आहे आणि $f(c)$हे f चे स्थानीय मिनीमम मूल्य आहे.

iii. जर $f'(c) = 0$ आणि $f''(c) = 0$, तर चाचणी अपयशी ठरते. एक्सट्रीमम मूल्ये तपासण्यासाठी पुढील प्रक्रिया करणे आवश्यक आहे

उदाहरण 2.50: फंक्शन f च्या स्थानिक मॅक्सिमाचे आणि स्थानिक मिनिमा चे सर्व बिंदू शोधा, जे खालील प्रमाणे दिले आहे. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10,\ x\in\Re$

उकल: दिलेले आहे

$$f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10$$

आता, $$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2$$

$$=5x^2(x-3)(x-1)$$

∴ $$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ 5x^2(x-3)\ (x-1)=0 \Rightarrow x=0,1,3$$

आता, $$f''(x)=20x^3-60x^2+30x$$

$$=\begin{cases} f''(0)=0 \\ f''(1)=-10<0 \\ f''(3)=90>0 \end{cases}$$

दुसऱ्या डेरिवेटिव्ह चाचणी नुसार, $x = 1$, स्थानिक मॅक्सिमाचा एक बिंदू आहे आणि मॅक्सिमम मूल्य आहे

$$f(1) = 11$$

आणि $x = 3$ हा स्थानिक मिनिमाचा बिंदू आहे आणि मिनीमम मूल्य आहे

$$f(3) = -17$$

आणि $x = 0$ वर दुसरी डेरिवेटिव्ह चाचणी अयशस्वी होते

आता, पहिल्या डेरिव्हेटिव्ह चाचणीद्वारे,

x चे मूल्य	$f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1)$ **चे चिन्ह**
$x = 0$ → डाव्या बाजुला(समजा -0.1)	> 0
$x = 0$ → उजव्या बाजुला(समजा 0.1)	> 0

अशा प्रकारे $x = 0$ वर, f ला मॅक्सिमा किंवा मिनिमा नाही.

उदाहरण 2.51: फंक्शन f जे दिलेले आहे, $f(x) = |x+2|-1$ च्या लोकल मिनिमम किंवा मॅक्सिमम ची किंमत काढा.

उकल: येथे

$$f(x) = |x+2|-1$$

किंवा
$$f(x) = \begin{cases} x+2-1, & x \geq -2 \\ -(x+2)-1, & x < -2 \end{cases}$$

किंवा
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -2 \\ -x-3, & x < -2 \end{cases}$$

आता,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > -2 \\ -1, & x < -2 \end{cases}$$

प्रथम डेरिवेटिव परीक्षण द्वारे,

x चे मूल्य	$f'(x)$ **चे चिन्ह**
x=-2 → डाव्या बाजुला (समजा -2.1)	< 0
x=-2 → उजव्या बाजुला (समजा -1.9)	> 0

$f'(x)$ हे चिन्हाला ऋणात्मक मधून धनात्मक मधे बदलते

$\therefore$ $f(x)$ चा लोकल मिनिमा $x = -2$ आहे आणि लोकल मिनिमम किंमत आहे

$$f(-2) = |-2+2|-1 = -1$$

$f(x)$ चा कोणताही लोकल मॅक्सिमम नाही आणि यामुळे कोणताही मॅक्सिमम ची किंमत नाही.

आपण खाली दिलेल्या कोणत्याही पद्धतीने परीक्षण करू शकतो:

येथे $\quad f(x) = |x+2|-1$

आपण जाणतो की $\quad |x+2| \geq 0$

मिनीमम साठी, $\quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

या प्रकारे, f ची मिनिमम किंमत -2 वर आहे, आणि $f(-2) = -1$ आहे.

उदाहरण 2.52: फंक्शन $f(x)=\sin 2x+5$ ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

उकल: येथे

$$f(x)=\sin 2x+5$$

आपण जाणतो की $\quad -1 \le \sin x \le 1$

$\therefore \quad -1 \le \sin 2x \le 1$

दोन्ही बाजूला 5 जोडल्यास

$$-1+5 < \sin 2x+5 \le 1+5$$

$$4 \le \sin 2x+5 \le 6$$

या प्रकारे, $f(x)$ ची मॅक्सिमम किंमत 6 आणि मिनिमम किंमत 4 आहे.

उदाहरण 2.53: फंक्शन $f(x)=x\sqrt{1-x}$, $x>0$ ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

उकल: येथे

$$f(x)=x\sqrt{1-x}, \;\; x>0$$

$$f'(x)=\sqrt{1-x}+\frac{x(-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}=0$$

$\Rightarrow \quad 2-3x=0 \quad \Rightarrow \quad x=2/3$

आता, $\quad f''(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x}(-3)-(2-3x).\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(1-x)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-6(1-x)+(2-3x)}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-4+3x}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$x=2/3$ वर, $\quad f''(2/3)=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}}\right]>0$

द्वितीय डेरिवेटिव परीक्षण द्वारे, $x = 2/3$ एक मॅक्सिमम बिंदु आहे आणि f ची मॅक्सिमम किंमत $x = 2/3$ वर आहे.

$$f(2/3) = \frac{2}{3}\sqrt{1-2/3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \qquad \text{[परिमेयकरण]}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

अभ्यास 2.8

1. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ची मॅक्सिमम किंमत काढा
2. दाखवा कि $x = 1$ वर, $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ चा मॅक्सिमम नाही आणि मिनिमम पण नाही .
3. दाखवा कि $\sin x(1+\cos x)$ ची मॅक्सिमम किंमत $x = \frac{1}{3}\pi$ यावर आहे.
4. खाली दिलेल्या फंक्शन ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

   i. $f(x) = (2x-1)^2 + 3$ ii. $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$ iii. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$
5. खालील मॅक्सीमा आणि मिनिमा चे सर्व बिंदू शोधा आणि खाली दिलेल्या फंक्शन ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

   i. $f(x) = x^3 - 3x$ ii. $f(x) = \sin x - \cos x, x \in (0, 2\pi)$

   iii. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x},\ \ x > 0$ iv. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ v. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

   vi. $f(x) = (x-1)^4 (x-2)^2$ vii. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$
6. परीक्षण करा की 'f' चा लोकल मिनिमम किंवा मॅक्सिमम 0 वर आहे ?

   i. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 0 \\ -3x+1, & x \le 0 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 0 \\ -3x+1, & x > 0 \end{cases}$

   iii. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \ge 0 \\ -3x+1, & x < 0 \end{cases}$ iv. $f(x) = |x| + |x-1|$
7. खाली दिलेल्या फंक्शन ची मॅक्सिमम आणि मिनिमम किंमत काढा.

   i. $f(x) = -|x+1| + 3$ ii. $f(x) = |\sin 4x + 3|$

   iii. $f(x) = x + 1,\ \ x \in (-1, 1)$

उत्तरे

1. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

4. i. मिनिमम किंमत = -2 ii. मिनिमम किंमत = -2

   iii. मिनिमम किंमत = $1/3$, मॅक्सिमम किंमत = 3

5. i. मिनिमम 1 वर, $f(1) = -2$, मॅक्सिमम -1 वर, $f(-1) = 2$

   ii. मिनिमम $\frac{7}{4}\pi$ वर, $f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$, मॅक्सिमम $\frac{3}{4}\pi$, वर, $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}$,

   iii. मिनिमम $x = 2$ वर, $f(2) = 1$

   iv. मॅक्सिमम 0 वर, $f(0) = \frac{1}{2}$

   v. मॅक्सिमम 1 वर, $f(1) = \frac{1}{4}$, मिनिमम -1 वर, $f(-1) = -\frac{1}{4}$

   vi. मॅक्सिमम 1, $\frac{5}{3}$ वर, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{729}$, मिनिमम $x = 2$, वर, $f(2) = 0$

   vii. मॅक्सीमा ही नाही आणि मिनिमा ही नाही

6. i. मिनिमम ii. मॅक्सिमम

   iii. मॅक्सीमा ही नाही आणि मिनिमा ही नाही iv. मिनिमम

7. i. मॅक्सिमम किंमत = 3, मिनिमम किंमत नाही ii. मिनिमम किंमत = 2, मॅक्सिमम किंमत = 4

   iii. मॅक्सिमम किंमत ही नाही आणि मिनिमम किंमत ही नाही

काही विविध उदाहरणे

मॅक्सीमा आणि मिनिमा वर आधारित

उदाहरण 2.54: सिद्ध करा कि दिलेल्या परिघासह सर्व आयतांमधे, चौरसाचे क्षेत्रफळ सर्वात मोठे असते.

उकल: स्वतः सोडवा

उदाहरण 2.55: सिद्ध करा कि दिलेल्या क्षेत्रफळा सह सर्व आयतांमधे, चौरसाचे परिघ सर्वात कमी असते.

उकल: स्वतः सोडवा

उदाहरण 2.56: जर एका काटकोन त्रिकोणाच्या एका बाजूची आणि कर्णाच्या लांबीची बेरीज दिलेली असेल, तर दाखवा की त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ मॅक्सिमम असते जेव्हा दोन्ही मधला कोण $\frac{\pi}{3}$ असतो.

उकल: स्वतः सोडवा

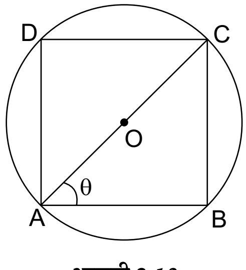
उदाहरण 2.57: सिद्ध करा की दिलेल्या निश्चित वर्तुळामध्ये असलेल्या सर्व आयता पैकी, चौरसाचे क्षेत्रफळ सर्वात मोठे असते.

उकल: समजा की ABCD केंद्र O आणि त्रिज्या r च्या सोबत दिलेल्या वर्तुळामध्ये एक आयत आहे.

समजा की $\angle CAB = \theta$

जेव्हा, $AC = 2r,\ AB = 2r\cos\theta$ आणि $BC = 2r\sin\theta$.

समजा कि A, आयत ABCD चे क्षेत्रफळ आहे.



आकृती 2.13

जेव्हा, $A = AB\times BC = 4r^2\sin\theta\cos\theta = 2r^2\sin 2\theta$

म्हणून $A = 2r^2\sin 2\theta$ जेव्हा r कॉन्स्टंट आहे

$\therefore$ $\dfrac{dA}{d\theta} = 4r^2\cos 2\theta$ आणि $\dfrac{d^2A}{d\theta^2} = -8r^2\sin 2\theta$

जेव्हा, $\dfrac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow 4r^2\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow$ $\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ म्हणजेच $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

आणि $\left[\dfrac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\pi/4} = -8r^2\sin\dfrac{\pi}{2} = -8r^2 < 0$

$\therefore$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ मॅक्सिमम चा एक बिंदु आहे

या प्रकारे, जेव्हा $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ वर क्षेत्रफळ मॅक्सिमम होत आहे

या स्थितित, $AB = 2r\cos\dfrac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

आणि $BC = 2r\sin\dfrac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

या प्रकारे, $AB = BC$ आणि यामुळे ABCD चौरस आहे.

उदाहरण 2.58: सिद्ध करा की, दिलेल्या वर्तुळामध्ये मॅक्सिमम क्षेत्रफळ असलेला त्रिकोण हा समभुज त्रिकोण असतो.

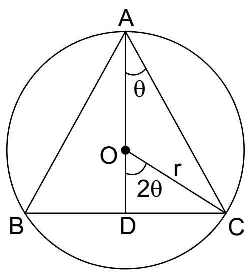
उकल: समजा कि ABC एक त्रिकोण आहे, केंद्र O आणि त्रिज्या r च्या सोबत दिलेल्या वर्तुळामध्ये आहे.

मॅक्सिमम क्षेत्रफळासाठी साठी, बिंदु A, पाया BC पासून मॅक्सिमम अंतरावर असायला पाहिजे.

यामुळे, A ला व्यास वर, BC साठी लंब असायला पाहिजे.

या प्रकारे, $AD \perp BC$.

अशाप्रकारे त्रिकोण ABC समद्विभुज असायला पाहिजे.



आकृती 2.14

समजा कि $\angle CAB = \theta$. आता, BC = 2CD = $2OC\sin 2\theta = 2r\sin 2\theta$

आणि, $AD = (OA + OD) = (r + r\cos 2\theta)$.

समजा कि A त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ आहे.

$$A = \frac{1}{2}BC\times AD = r^2\sin 2\theta(1+\cos 2\theta).$$

$$\frac{dA}{d\theta}=r^2\{\sin 2\theta(-2\sin 2\theta)+(1+\cos 2\theta).2\cos 2\theta\}$$

$$=r^2\{2(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)+2\cos 2\theta\}=2r^2[\cos 4\theta+\cos 2\theta]$$

आणि $$\frac{d^2A}{d\theta^2}=2r^2\{-4\sin 4\theta-2\sin 2\theta\}=-4r^2[2\sin 4\theta+\sin 2\theta]$$

आता, $$\frac{dA}{d\theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \cos 4\theta+\cos 2\theta=0$$

$\Rightarrow$ $$\cos 4\theta=-\cos 2\theta=\cos(\pi-2\theta)$$

$\Rightarrow$ $$4\theta=\pi-2\theta \quad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

आणि $$\left[\frac{d^2A}{d\theta^2}\right]_{\theta=\pi/6}=-4r^2\left(2\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=-6r^2\sqrt{3}<0$$

$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{6}$ मॅक्सिमम चा एक बिंदु आहे

या स्थितित, त्रिकोणाचे प्रत्येक कोण $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ आहे.

आणि यामुळे ABC एक समभुज त्रिकोण आहे.

घनपदार्थांचे घनफळ आणि पृष्ठफळ यावर आधारित

उदाहरण 2.59: हे सिद्ध करा की वरच्या बाजूला उघडे असुन दिलेल्या व्हॉल्यूमच्या सिलिंडर चे पृष्ठफळ मिनीमम आहे जर त्याची उंची त्याच्या तळाच्या त्रिज्याइतकी असेल तर.

उकल: स्वत: सोडवा.

उदाहरण 2.60: सिद्ध करा कि, वरच्या बाजूला उघडलेल्या सिलिंडरची उंची, दिलेला पृष्ठभाग आणि सर्वात मोठा खंड त्याच्या तळाच्या त्रिज्याच्या बरोबरीने आहे.

उकल: स्वत: सोडवा.

उदाहरण 2.61: सिद्ध करा , वरच्या बाजूला उघडलेल्या सिलिंडरची उंची, पृष्ठभाग क्षेत्र आणि जास्तीत जास्त

घनफळ $\sin^{-1}(1/3)$, हे आहे.

उकल: स्वत: सोडवा.

उदाहरण 2.62: सिद्ध करा , चौरस पाया आणि दिलेले प्रमाण असलेल्या बंद क्युबॉइडचे पृष्ठभाग क्षेत्र घन झाल्यावर सर्वात कमी असते.

उकल: a, लांबी, a, रुंदी आणि उंची h असलेल्या बंद क्युबॉइडचे निश्चित घनफळ V असू द्या.

समजा S त्याचे पृष्ठभागाचे क्षेत्र आहे.

नंतर $$V=(a\times a\times h) \text{ किंवा } h=\frac{V}{a^2} \qquad \ldots(1)$$

आता, $S = 2\left(a^2 + ah + ah\right) = 2\left(a^2 + 2ah\right) = 2\left(a^2 + \frac{2V}{a}\right)$ [(1) वापरून]

म्हणजे, $S = 2\left(a^2 + \frac{2V}{a}\right), \therefore \frac{dS}{da} = 2\left(2a - \frac{2V}{a^2}\right)$ आणि $\frac{d^2S}{da^2} = \left(4 + \frac{8V}{a^3}\right)$

आता, $\frac{dS}{da} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = a^3 \ \Rightarrow \ a \times a \times h = a^3 \Rightarrow h = a$

आता, कधी $h = a$, मग आपल्याला मिळेल,

$$V = a^3$$

$$\therefore \quad \left[\frac{d^2S}{da^2}\right]_{h=a} = \left(4 + \frac{8a^3}{a^3}\right) = 12 > 0$$

म्हणून, S कमीत कमी असते जर लांबी = a, रुंदी = a आणि उंची = a, म्हणजे जेव्हा तो घन असतो.

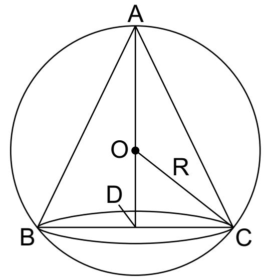
उदाहरण 2.63: सिद्ध करा, की दिलेल्या पृष्ठभागाच्या बंद सिलिंडरची उंची आणि जास्तीत जास्त घनफळ त्याच्या तळाच्या व्यासाइतकेच आहे.

उकल: स्वत: सोडवा.

उदाहरण 2.64: सिद्ध करा , दिलेल्या क्षेत्रात चिन्हांकित केले जाऊ शकणारे सर्वात मोठे खंड कोन इतके आहे की ते तिप्पट उंची, गोलाचा व्यास दुप्पट करण्यासाठी समान आहे (त्रिज्या R सर्वात मोठ्या कोनाचे प्रमाण एका क्षेत्रात शोधा)

उकल: समजा R ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची त्रीज्या आहे,

आणि आपण असे गृहीत धरूया V हे त्या वर्तुळाच्या आत तयार झालेल्या त्रिकोणाचे घनफळ आहे, उंची h आणि r त्याच्या पाया त्रिज्या आहे.



आकृती 2.15

दिलेल्या आकृतीत, आपल्याला मिळेल

$$OD = AD - AO = (h - R)$$

$$R^2 = (h-R)^2 + r^2 \quad \text{किंवा} \quad r^2 = h(2R-h) \qquad \ldots(1)$$

आता, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2 (2R-h)$ [(1) वापरून]

$$\therefore \quad \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi h(4R-3h)$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \left(\frac{4}{3}\pi R - 2\pi h\right)$$

मॅक्सीमा आणि मिनीमा साठी, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{dV}{dh} = 0$$

आता, $\frac{dV}{dh} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}\pi h(4R-3h) = 0$

$\Rightarrow \quad h = 0$ किंवा $(4R - 3h) = 0 \quad \Rightarrow h = \frac{4}{3}R \quad [\because h \neq 0]$

आणि $\left[\frac{d^2V}{dh^2}\right]_{h=(4/3)R} = -\frac{4\pi R}{3} < 0$

म्हणून: V जास्तीत जास्त होते जेव्हा $h = \frac{4}{3}R$, म्हणजे.(जर 3h=2(2R)

म्हणजे उंचीच्या 3 पट = व्यासाच्या 2 पट

सर्वात मोठ्या कोनचे घनफळ = $\frac{1}{3}\pi \times \frac{16R^2}{9} \times \left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$

अभ्यास 2.9

1. 8 ला दोन धन भागांमध्ये विभागा जेणेकरून एका चा स्क्वेयर आणि दुसऱ्या च्या घनाची बेरीज कमीत कमी असेल.
2. a ला अशा दोन भागांमध्ये विभागा कि एका भागाच्या p^{th} घातांकाचा आणि दुसऱ्या भागाच्या q^{th} घातांकाचा गुणाकार जास्तीत जास्त असू शकते.
3. दिलेल्या परिघासह सर्वात मोठे आयत एक चौरस आहे हे सिद्ध करा.
4. आयताकृतीचा परिघ पाहता, चौरस असताना त्याचा डाइगोनल कमीत कमी असल्याचे दाखवा.
5. त्रिकोण समद्विभुज असताना दिलेल्या हायपोटेनसच्या उजव्या कोनाच्या त्रिकोणाचा परिघ जास्तीत जास्त आहे हे सिद्ध करा.
6. सिद्ध करा कि कमीतकमी वक्र पृष्ठफळ असलेला दंडगोल आणि दिलेले घनफळ यांचे अल्टिटूड हे दंडगोलच्या पायाच्या त्रिज्येच्या $\sqrt{2}$ पट असते.
7. वक्र $y^2 = 4ax$ वर (2, -8) बिंदूच्या सर्वात जवळ असलेला बिंदू शोधा.
8. सिद्ध करा कि चौरस पाया असलेल्या बंद क्युबॉइडचे पृष्ठफळ आणि दिलेले घनफळ कमीत कमी असते जेव्हा ते घन असते.

उत्तरे

1. 6, 2   2. $\frac{ap}{p+q}, \frac{aq}{p+q}$ 7. (4,-4)

दैनंदिन जीवनाचे अनुप्रयोग

- औषधांच्या परिणामकारकतेचा / रोगांच्या प्रसाराचा अभ्यास करताना औषधांमध्ये अनुप्रयोग (म्हणजे जास्तीत जास्त कार्यक्षमता किती वेळाने दिसून येते.)
- अणुऊर्जा क्षेत्रात क्षयरोगाचा अभ्यास.
- व्यवसायात, उद्योग या संकल्पनेचा वापर त्यांचा नफा जास्तीत जास्त करण्यासाठी किंवा त्यांचे नुकसान कमी करण्यासाठी, वस्तूंच्या किंमतींचा अंदाज घेऊन आणि किती स्टॉकमध्ये ठेवण्यासाठी करतात.
- लोकसंख्या वाढ वक्र.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Extreme values-I

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेली उदाहरणे (हॉट्स)

उदाहरण 1: समजा $f : [2, 5] \longrightarrow R$ हे $(2, 5)$ वर कंटिन्यूयस आणि डिफरेंशिएबल आहे. असे समजा $f'(x) = (f(x))^2 + \pi$ सर्व $x \in (2, 5)$ साठी. $f(5) - f(2)$ चे *मूल्य* शोधा.

उकल: दिलेले आहे कि f हे $[2, 5]$वर कंटिन्यूयस आणि $(2, 5)$ वर डिफरेंशिएबल आहे.

म्हणून, लॅग्रांजेसच्या मिन मूल्य प्रमेयाद्वारे, कमीत कमी एक $c \in (2,5)$ अस्तित्वात असेल जसे की,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \text{येथे } b=5, a=2$$

तर $$\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = (f(c))^2 + \pi$$

$$\frac{f(5)-f(2)}{3} \geq \pi \qquad \because \left[(f(c))^2 \geq 0 \ \forall c \in (2,5) \right]$$

$\therefore$ $$f(5)-f(2) \geq 3\pi$$

उदाहरण 2: सिद्ध करा कि $e^x \cos x = 1$ च्या कोणत्याही दोन मुळांच्या मध्ये, $e^x \sin x - 1 = 0$ चे कमीत कमी एक मूळ अस्तित्वात आहे.

उकल: दिलेले आहे कि

$$e^x \cos x = 1$$

पुनर्रचना करुण, आपल्याकडे असेल

$$\cos x = e^{-x}$$

समजा $$f(x) = \cos x - e^{-x}$$

i. कोसाइन फंक्शन आणि एक्स्पोनेनशियल फंक्शन दोघेही R वर कंटिन्यूयस आणि डिफरेंशिएबल आहेत, त्याचप्रमाणे, प्रत्येक इंटरवल $[a, b]$ वर म्हणू.

ii. असे गृहीत धरू कि a, b हे f चे मूळ आहेत.

तेव्हा $$f(a) = f(b) = 0$$

म्हणून, रोल्सच्या प्रमेयावरुन, $\exists\, c \in (a, b)$, हे अशा प्रकारे अस्तित्वात असेल की $f'(c) = 0$

आता , $$f'(x) = -\sin x + e^{-x}$$

$\Rightarrow$ $\quad -\sin c + e^{-c} = 0$

$\Rightarrow$ $\quad e^{-c} = \sin c$

किंवा $\quad 1 = e^{c} \sin c$

म्हणजे. $\quad e^{c} \sin c - 1 = 0$

याचा अर्थ असा आहे की $e^x \sin x - 1 = 0$ ला एक मूळ $c \in (a, b)$ मध्ये आहे, म्हणजेच, $e^x \cos x = 1$ च्या दोन मुळांच्या मध्ये.

उदाहरण 3: सिद्ध करा कि, क्वाड्राटिक समीकरण $f(x) = 3px^2 + 2qx + r = 0$ चे $(0, 1)$मध्ये मुळ आहे जर $p + q + r = 0$ असेल.

उकल: समजा

$$f(x) = px^3 + qx^2 + rx$$

i. स्पष्टपणे $f(x)$ हे x *मधील बहुपदी असून* इंटरवल $[0, 1]$ मध्ये कंटिन्यूयस आहे.

$$f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$$

ii. पुन्हा $f(x)$ हे x *मधील बहुपदी असून* इंटरवल $[0, 1]$ मध्ये डिफरेंशिएबल आहे .

iii. $\quad f(0) = p(0)^3 + q(0)^2 + r(0) = 0$

$$f(1) = p(1)^3 + q(1)^3 + r(1) = p + q + r = 0$$

म्हणून, रोल्सच्या प्रमेयाचे समाधान करते, येथे मिनीमा एक $c \in (0, 1)$ हे अशा प्रकारे अस्तित्वात असेल की $f'(c) = 0$

$$f'(c) = 3pc^2 + 2qc + r$$

जसे $\quad f'(c) = 0 \Rightarrow 3pc^2 + 2qc + r = 0$

जे c मध्ये क्वाडरेटिक आहे आणि $c \in (0, 1)$.

म्हणून $3px^2 + 2qx + r = 0$ ला $(0, 1)$ मध्ये मूळ आहे.

उदाहरण 4: समजा फंक्शन f क्लोज इंटरवल $[a, b]$ मध्ये कंटिन्यूयस आहे, ओपन इंटरवल (a, b) मध्ये डिफरेंशिएबल आहे आणि $f'(x) = 0$ सर्व $x \in (a, b)$ *साठी* तर दाखवा की f हे $[a, b]$ वर कॉन्स्टंट आहे.

उकल: f हे $[a, b]$ वर कॉन्स्टंट आहे हे दाखवण्यासाठी , $f(x) = f(a)\ \forall\ x \in [a, b]$ दाखवने पुरेसे आहे.

समजा $x \in [a, b]$ जसे की $x > a$.

आता, इंटरवल $[a, x]$ वर मिन मूल्य प्रमेय वापरुन,

i. f, इंटरवल $[a, b]$ वर कंटिन्यूयस आहे.

$\therefore$ f, इंटरवल $[a, x]$ वर कंटिन्यूयस आहे.

ii. दिलेले आहे कि f, इंटरवल (a, b) वर डिफरेंशिएबल आहे.

$\therefore$ f, इंटरवल (a, x) वर डिफरेंशिएबल आहे.

लॅग्रांजेसच्या मिन मूल्य प्रमेयद्वारे, तेथे कमित कमी एक $c \in (a, x)$ हे अशा प्रकारे अस्तित्वात असेल की

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \qquad \dots (1)$$

$f'(c) = 0$ असल्यामुळे

(1) वरुण $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$$

$$f(x)-f(a)=0$$

$\Rightarrow$ $f(x)=f(a)$ कोणत्याही $x\in[a,b]$.

$\therefore$ f हे $[a, b]$ वर कॉन्स्टंट आहे.

उदाहरण 5: समजा $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ आणि आपण असे गृहीत धरूया $x\in[0,1]$ साठी $g(x)=x^2$.

मग दोन्ही f आणि g दोन्ही इंटरवल (0, 1) वर डिफरेंशिएबल आहे आणि $x\ne 0$ ऐवजी $g(x)>0$. दाखवा कि $\lim_{x\to 0} f(x)=0=\lim_{x\to 0} g(x)$ आणि $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ अस्तित्वात नसेल.

उकल: येथे

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,\ x\ne 0$$

तसेच, $$g(x)=x^2\ \forall x\in(0,1)$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0\ \forall x$$

आता, $x\ne 0$ साठी $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin 1/x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

$$=\sin(\infty)$$

= -1 आणि 1 दरम्यान ओसिलेट होतय.

= अस्तित्वात नसेल.

उदाहरण 6: $f(x)$ साठी n ऑर्डर असलेल्या मॅक्लॉरिन बहुपदी चा खाली दिल्याप्रमाणे परिभाषित केलेला रिमेंडर वापरून $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c), n\ge 0,\quad 0\le c\le x$

sin(0.1) हे कॅलक्युलेट करण्यासाठी मॅकलॉरिन बहुपदीची ऑर्डर काय आहे यासाठी कमीतकमी एक अबसोल्यूट एरर जास्तीत जास्त 10^{-6} पर्यंत अचूक मिळवणे आवश्यक आहे.

उकल: दिलेले आहे $$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c), n\ge 0,\quad 0\le c\le x$$

$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c), n \geq 0, \quad 0 \leq c \leq 0.1$$

f (x) चा डेरिव्हेटीव्ह फक्त *sin x* आणि *cos x* असल्याने आणि $|\sin x| \leq 1$ आणि $|\cos x| \leq 1$

$$\left|f^{n+1}(c)\right| \leq 1$$

आता $$R_n(0.1) \leq \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}(1)$$

$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

म्हणून, जेव्हा $$R_n(0.1) < 10^{-6}$$

म्हणजे, $$\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

हे तेव्हाच शक्य असेल जेव्हा $n \geq 4$.

परंतु *sinx* साठी मॅक्लॉरिन बहुपदी फक्त विषम पदांचा समावेश करीत असल्याने, $n \geq 5$.

उदाहरण 7: समजा $f:(0,\infty) \to R$ डिफरंशीएबल आहे. गृहीत धरा कि $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = L$. मग $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ आणि $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ हे दाखवा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 8: समजा $f:[a,b] \to R$ हे तीन वेळा डिफरंशीएबल असलेले फंक्शन आहे जसे की $f(a) = f(b) = 0$ आणि $f'(a) = f'(b) = 0$ मग सिद्ध करा कि $c \in (a, b)$ अस्तित्वात आहे आणि ज्यासाठी $f'''(c) = 0$.

उकल: येथे $f:[a,b] \to R$ तीन वेळा डिफरंशीएबल असलेले फंक्शन आहे.

$\Rightarrow$ *f* हे $[a, b]$ वर कंटिन्यूयस आहे आणि *f* हे (a, b) वर डिफरंशीएबल आहे आणि तसेच $f(a) = f(b) = 0$

मग रोल्सच्या प्रमेयानुसार, मिनीमा एक $c_1 \in (a, b)$ असा अस्तित्वात आहे कि

$$f'(c_1) = 0$$

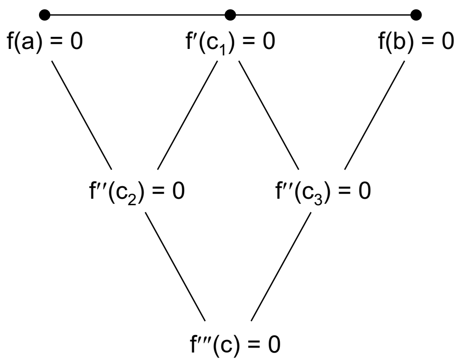
पुन्हा f' साठी रोल्सचे प्रमेय लागू करून,

i. f' हा $[a,b]$ वर कंटिन्यूयस आहे आणि म्हणून, $[a, c_1]$ आणि $[c_1, b]$ वर कंटिन्यूयस आहे.

ii. f' हा $[a,b]$ वर डिफरंशीएबल आहे आणि म्हणून, (a, c_1) आणि (c_1, b) वर डिफरंशीएबल आहे.

iii. $f'(a) = f'(c_1) = f(b) = 0$

रोल्सच्या प्रमेयानुसार,कमित कमी एक $c_2 \in (a, c_1)$ आणि एक $c_3 \in (c_1, b)$ असा अस्तित्वात आहे कि



आकृती 2.16

$f''(c_2) = 0$, $c_2 \in (a, c_1)$ करीता

आणि $f''(c_3) = 0$, $c_2 \in (c_1, b)$ करीता

त्याचप्रमाणे, रोल्सचे प्रमेय f'', (c_2, c_3) वर, लागू करून

f'' हे $[c_2, c_3]$ वर कंटिन्यूयस आणि (c_2, c_3) वर डिफरंशीएबल

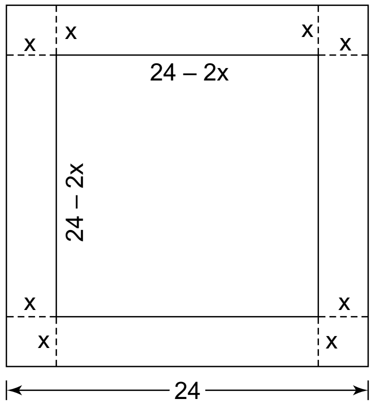
आहे आणि $f''(c_2) = f''(c_3) = 0$ मग कमीत कमी एक $c \in (c_2, c_3)$

असा अस्तित्वात आहे कि $f'''(c) = 0$, $c \in (c_2, c_3)$ साठी

अशा प्रकारे $f'''(c) = 0, c \in (a, b)$ करीता

उदाहरण 9: 24 सेमीच्या बाजू असलेल्या टिनचा चौरस तुकडा प्रत्येक कोपऱ्यातून एक चौरस कापून वरच्या बाजूला उघडा असलेला बॉक्स बनवायचा आहे आणि फ्लॅप्स फोल्ड करून बॉक्स तयार करा. कापल्या जाणाऱ्या चौरसाची बाजू काय असावी जेणेकरून बॉक्सचे घनफळ जास्तीत जास्त असेल? तसेच हे मॅक्सिमम घनफळ शोधा.

उकल. समजा कापलेल्या चौरसाची प्रत्येक बाजू = x आहे.



आकृती 2.17

$\therefore$ बॉक्ससाठी, लांबी = $24 - 2x$

रुंदी = $24 - 2x$, उंची = x

V हे बॉक्सचे घनफळ असू द्या

$$V = x(24-2x)^2$$

$$\frac{dV}{dx} = x.2(24-2x)(-2) + (24-2x)^2.1$$

$$= (24-2x)(24-6x)$$

मॅक्सिमा किंवा मिनिमासाठी, $\frac{dV}{dx} = 0$

$\Rightarrow$ $(24-2x)(24-6x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4, 12$

$x = 4 \quad [\because \ x = 12$ हे अशक्य आहे $]$

आता, $$\frac{d^2V}{dx^2} = (24-2x)(-6) + (24-6x)(-2)$$

$x = 4$ साठी, $\frac{d^2V}{dx^2} = (24-8)(-6) =$ ऋण संख्या

$\Rightarrow$ V मॅक्सिमम आहे जेव्हा $x = 4$

$\therefore$ प्रत्येक कोपऱ्यातून 4 सेमीचा चौरस कापला जातो तेव्हा घनफळ जास्तीत जास्त असतो.

$\therefore$ मॅक्सिमा घनफळ = $4\,(24 - 8)^2 = 1024$ क्यू. सेमी.

उदाहरण 10. आयताकृती पाया आणि आयताकृती बाजू असलेली एक टाकी जी वरच्या बाजूला उघडी अशी बनवायची आहे की त्याची खोली 2 मीटर आणि घनफळ 8 m^3 आहे. जर टाकीच्या बांधकामाची किंमत रू. 70 प्रति चौरस मीटर, पायासाठी आणि बाजूंसाठी रू. 45 प्रति चौरस मीटर असेल, तर कमीतकमी महागड्या टाकीची किंमत किती आहे?

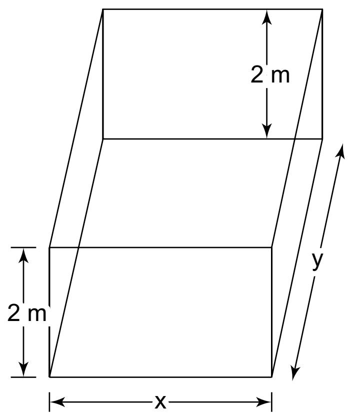
उकल. समजा $x\ mt$ आणि $y\ mt$ टाकीच्या पायाच्या बाजू आहेत.

टाकीची खोली 2 मीटर दिली आहे,

टाकीचे घनफळ = $2xy\ m^3$

$\Rightarrow \qquad 2xy = 8$

$\Rightarrow \qquad xy = 4$ [$\because$ टाकीचे घनफळ = 8 m^3 (दिले)]



आकृती 2.18

टाकीच्या पायाचे क्षेत्रफळ = $(x \times y)\ m^2$

आता, हे दिले आहे की टाकीचा पाया बांधण्याची किंमत रू 70 प्रति चौ. मी आहे.

$\therefore$ टाकीचा पाया बांधण्याची किंमत = रू $70\ xy$

टाकीच्या बाजूंचे एकूण क्षेत्रफळ

$$= (2x + 2x + 2y + 2y)\ m^2 = 4(x+y)\ m^2$$

हे दिले आहे की टाकीच्या बाजू बांधण्याची किंमत रू. 45 प्रति चौ. मी. आहे.

$\therefore$ टाकीच्या बाजू बांधण्याची किंमत = रू. $180(x+y)$

समजा C टाकी बांधण्याची एकूण किंमत आहे.

$$C = \text{रू. } [70xy + 180\ (x+y)]$$

$$= \text{रू. } \left[70(4) + 180\left(x + \frac{4}{x}\right)\right] \qquad [\because\ xy = 4]$$

$$= \text{रू. } \left[280 + 180x + \frac{720}{x}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{dC}{dx} = 180 - \frac{720}{x^2}$$

मॅक्सिमा किंवा मिनिमासाठी, $\frac{dC}{dx} = 0$

म्हणजेच $\qquad 180 - \frac{720}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ [$\because$ x ऋण असणे शक्य नाही]

आता $\qquad \frac{d^2C}{dx^2} = \frac{1440}{x^3}$

$x = 2$ साठी $\qquad \frac{d^2C}{dx^2} = \frac{1440}{(2)^3}$ = धन संख्या

$\therefore$ C (म्हणजे एकूण किंमत) मिनीमम असते जेव्हा $x = 2$

म्हणून, कमीत कमी महागड्या टाकीची किंमत = रू. $\left[280 + 180(2) + \frac{720}{2}\right]$ = रू. 1000

सारांश

1. रोल्सचे प्रमेय, सरासरी मूल्य प्रमेय लागू करण्यासाठी एक आवश्यक अट म्हणजे फंक्शन कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.
2. $f(x)$ चा विस्तार, x च्या घातांमध्ये (मैकलॉरिन सिरीज)

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$$

3. फ़ंक्शन $f(x)$ चा $x=a$ च्या संदर्भात $(x - a)$ च्या घातांमध्ये विस्तार (टेलर सिरीज).

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

4. इंडिटर्मिनेट फॉर्म

i. $\frac{0}{0}$ ii. $\frac{\infty}{\infty}$ iii. $0\times\infty$

iv. $\infty-\infty$ v. 1^∞ vi. 0^0 vii. ∞^0

5. L' हॉस्पिटल नियम

जर $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=0$ आणि $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)=0$ तर $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

6. लिमिटचे स्टँडर्ड रिझल्ट्स

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ b. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ c. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$ d. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

7. मॅक्सिमा आणि मिनिमा: $f(x)$ फंक्शनसाठी, आपण $f'(x)$ शोधतो आणि त्याची तुलना शुन्याबरोबर करतो म्हणजेच $f'(x)=0$ जे $f(x)$ चे क्रिटिकल पॉईंट्स देते.आता या क्रिटिकल पॉईंट्स वर आपण $f(x)$ चा मॅक्सिमा आणि मिनिमा तपासतो.

केस I: सुरुवातीला क्रिटिकल पॉईंट्स वर $f''(x)$ शोधा.

जर $f''(x) > 0$, तर क्रिटिकल पॉईंट हा मिनिमाचा बिंदू आहे.

केस II: जर $f''(x) <0$, तर क्रिटिकल पॉईंट हा मॅक्सिमाचा बिंदू आहे.

8. फंक्शन्सचे काही स्टँडर्ड विस्तार:

a. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$ b. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}.+\ldots$

c. $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$ d. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

e. $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots$ जर $|x|<1$

f. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$

g. $(1+x)^n$, $|x| < 1$ साठी

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \ldots \; |x| < 1$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $\lim_{p\to\infty} \frac{p^5 . p!}{5.6\ldots(5+p)}$ चे मूल्य शोधा.

   a. 4! b. 5! c. 0 d. ∞

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ चे मूल्य शोधा.

   a. ∞ b. -1 c. 0 d. 2^2

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}$ चे मूल्य शोधा.

   a. 1 b. -1 c. 0 d. अस्तित्वात नाही

4. रोल्सच्या प्रमेयाची पडताळणी करण्यासाठी काय आवश्यक आहे?

   a. ओपन इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

   b. ओपन इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

   c. क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि ओपन इंटरव्हल मध्ये डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

   d. क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असणे आवश्यक आहे.

5. जेव्हा रोल्सचे प्रमेय $f(x)$ साठी $[a, b]$ वर सत्यापित केले जाते, तेव्हा तेथे c असे अस्तित्वात असते. अशाप्रकारे कि

   a. $c \in [a, b]$ असे की $f'(c) = 0$

   b. $c \in (a, b)$ असे की $f'(c) = 0$

   c. $c \in [a, b)$ असे की $f'(c) = 0$

   d. $c \in (a, b]$ असे की $f'(c) = 0$

6. जर फंक्शन $f(x) = x^2 - 8x + 12$ हे $(2, 6)$ या पॉईंट ला रोल्सच्या प्रमेयाची अट पूर्ण करत असेल तर c चे मूल्य असे शोधा की $f'(c) = 0$

   a. 6 b. 4 c. 8 d. 2

7. जर $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, तर $[0, 18\pi]$ या इंटरव्हल मध्ये किती पॉईंट्स असे अस्तित्वात आहेत की $f'(c) = 0$

   a. 8 b. 9 c. 17 d. 18

8. जर $f(x) = \ln(10 - x^2), x \in (-3, 3)$ तर इंटरव्हल [−3, 3] मधील असा बिंदू शोधा कि जेथे स्पर्शिकाचा स्लोप शून्य आहे
   a. 0
   b. 2
   c. रोल्सचे प्रमेय लागू होत नाही, कारण फंक्शन [−3, 3] मध्ये कंटिन्यूयस नाही.
   d. रोल्सचे प्रमेय लागू होत नाही, कारण फंक्शन [−3, 3] मध्ये डिफरंशीएबल नाही.
9. वक्र $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ वर आणि या इंटरव्हल [0, 1] मध्ये 'c' बिंदू शोधा , जेथे वक्राच्या स्पर्शिकेचा स्लोप हा बिंदू (0, 1) आणि (1, 4) यांना जोडणाऱ्या रेषेच्या बरोबर असतो.
   a. 0.64 b. 0.44 c. 0.54 d. 0.34
10. $f(x) = x^3 + x + 1$, या फंक्शनसाठी, आपल्याकडे कोणताही रोल्सचा बिंदू नाही.जर निर्देशांक अक्ष हे घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने 60 अंशाच्या कोनातून फिरवून रूपांतरित केले तर रोल्सचा नवीन बिंदू हा असेल
   a. $\sqrt{3/2}$ b. फंक्शनमध्ये कधीही रोल्सचा पॉइंट असू शकत नाही
   c. $\sqrt{3}$ d. $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$
11. वक्र $y = \log x$ वरील असा बिंदू शोधा कि त्या बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका हि, (1, 0) आणि (e, 1) या बिंदूंना जोडणाऱ्या जीवेला समांतर असेल
   a. e b. $e - 1$ c. $1 - e$ d. $-e$
12. जर सरासरी मूल्य प्रमेयामध्ये $f(a) = f(b)$ असेल तर ते
   a. लिबनिझचे प्रमेय b. रोल्सचे प्रमेय c. टेलर फंक्शनची मालिका d. कॉचीचे प्रमेय
13. जर $f(x) = \sin x \cos x$, (0, x) या इंटरव्हल मध्ये कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असेल तर
   a. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < \sin 2x$ b. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < \cos 2x$
   c. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < x \cos 2x$ d. $1 < \frac{\cos x . \sin x}{x} < 1 + \cos 2x$
14. इंटरव्हल [0, 1] वर, फंक्शन $x^{25} (1 - x)^{75}$ चे जास्तीत जास्त मूल्य कोणत्या पॉइंट ला असेल.
   a. 0 b. 1/2 c. 1 d. 1/4
15. $f(x) = e^{-x^2}$ च्या $x = 0$ संदर्भात टेलरच्या सिरीज मधील x^2 चे सह-गुणक शोधा
   a. 1/4 b. −1 c. 1/2 d. −2
16. जर $f(x) = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \ldots + 100x^{100}$ हि वास्तविक चल x मधील बहुपदी आहे, तर $f(x)$ ला
   a. मॅक्सिमा पण नाही आणि मिनिमा पण नाही.
   b. फक्त एक मॅक्सिमा आहे.
   c. फक्त एक मिनिमा आहे.
   d. एक मॅक्सिमा आणि एक मिनिमा आहे.

17. मॅक्लॉरिनची सिरीज वापरून $f(x)$ फंक्शनचा विस्तार असेल

a. $f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$

b. $1+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots$

c. $f(0)-\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$

d. $f(1)+\frac{x}{1!}f'(1)+\frac{x^2}{2!}f''(1)+\frac{x^3}{3!}f'''(1)+\ldots$

18. वास्तविक संख्या x आणि त्याचा व्यस्त यांची जेव्हा बेरीज केली जाते तेव्हा बेरजेचे मिनीमम मूल्य $x =\ldots$ असेल

a. -2 b. 2 c. 1 d. -1

19. जर फंक्शन $f(x) = 2x^2 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$, जेथे $a > 0$, त्याची मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य अनुक्रमे p आणि q ला अशी प्राप्त करते कि $p^2 = q$, तर a चे मूल्य काय असेल

a. 1/2 b. 3 c. 1 d. 2

20. $f(x)$ फंक्शन साठी मॅक्लॉरिनच्या विस्तार सत्य होण्यासाठी हि अट आवश्यक आहे

a. ते कंटिन्यूयस असावे.
b. ते डिफरंशीएबल असावे
c. ते प्रत्येक बिंदूवर अस्तित्वात असले पाहिजे
d. ते कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल असावे

उत्तरे

1. a	2. c	3. d	4. c	5. b	6. b
7. d	8. a	9. c	10. d	11. b	12. b
13. b	14. d	15. b	16. c	17. a	18. c
19. c	20. d				

व्यक्तिनिष्ठ न सोडविलेली उदाहरणे (हॉट्स)

1. समजा $f(x)$ हे R वर एक कंटिन्यूयस आणि डिफरंशीएबल फंक्शन आहे, तर $f(x)$ च्या कोणत्याही दोन वास्तविक मुळांमध्ये, $f'(x)$ चे कमीत कमी एक मूळ अस्तित्वात असते हे दाखवा.
2. समजा $f: [a, b] \to R$ हे तीन वेळा डिफरंशीएबल फंक्शन आहे जसे की $f(a) = f(b) = f'(a) = f''(a) = 0$,तर सिद्ध करा की $c \in (a, b)$ जसे की $f'''(c) = 0$ हे *अस्तित्वात आहे.*
3. सरासरी मूल्य प्रमेय वापरून, हे सिद्ध करा कि $|\sin x - \sin y| \le |x - y| \ \forall\ x, y \in R$.
4. समजा $f: (0, \infty) \to R$ हे एक डिफरंशीएबल फंक्शन आहे तर सिद्ध करा की, कोणत्याही $a > 0$ साठी, जर

$\lim_{x\to\infty}\left(af(x)+f'(x)\right)=L$ तर $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{L}{a}$

5. जर $a_0 + a_1 + ... + a_n = 0$ जेथे $a_i \in R, 1 \le i \le n$ आहे तर $a_0 + 2a_1 x + ... + (n+1)\, a_n x^n = 0$ याला कमीत कमी एक वास्तविक मूळ (0, 1) मध्ये आहे हे दाखवा.
6. सरासरी मूल्य प्रमेय वापरून, दिलेली असमानता सिद्ध करा

   $\frac{y-x}{y} < \log\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{y-x}{x}$, सर्व $0 < x < y$ साठी
7. समजा $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ आणि $g(x) = \sin x \;\; \forall x \in R$. तर दाखवा कि $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

   परंतु $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ही अस्तित्वात नाही.
8. समजा $f : R \to R$ हे एक असे डिफरंशीएबल फंक्शन आहे की $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \le 4$ आणि $f(0) = 0$ तर सिद्ध करा की

   $f(1) \in [-4, 4]$ आणि $f(2) \in [-8, 8]$.
9. समजा I हा एक इंटरव्हल आहे आणि $f: I \longrightarrow R$, I वर डिफरंशीएबल आहे. जर डेरिवेटिव्ह f', I वर कधीही 0 नसेल तर एक तर $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in I$ किंवा $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in I$.
10. सिद्ध करा की सिलेंडरचे जास्तीत जास्त घनफळ जो कि उंची h आणि व्हर्टिकल अँगल 30° असलेल्या शंकूमध्ये कोरला जाऊ शकतो $\frac{4}{81}\pi h^3$ हे आहे.
11. एक पाण्याची टाकी उलट्या राईट सर्क्युलर कोन च्या आकारात आहे ज्याचा अक्ष उभा आहे आणि व्हर्टेक्स खालचा आहे. त्याचा सेमी व्हर्टिकल कोन $\tan^{-1}$ (0.5) आहे. त्यामध्ये 5 क्यूबिक मीटर प्रति तास स्थिर दराने पाणी ओतले जाते. टाकीतील पाण्याची खोली 4 मीटर असताना त्या वेळी पाण्याची पातळी किती वाढत आहे ते शोधा.

प्रात्यक्षिक

1. MATLAB टूल वापरून $[0, 2\pi]$ मध्ये साइन आणि कोसाइन फंक्शन्सचा आलेख रेखाटा.
2. MATLAB टूल वापरून R वर e^{3x} साठी आलेख रेखाटा.
3. M.S. एक्सेल मध्ये, $[x]$ काढा, ग्रेटेस्ट इंटीजर फंक्शन इंटरव्हल [0, 5] मध्ये.

क्रियाकलाप

1. फंक्शनसाठी रोल्सच्या प्रमेयाची पडताळनी करण्यासाठी MATLAB चा कोड लिहा.
   i. x^2, $[-3, 3]$ या इंटरवल मध्ये
   ii. $(x+2)^3 * (x-3)^4$, $[-2, 3]$ या इंटरवल मध्ये

   यासाठी एक वक्र देखील काढ़ा.

अधिक जाणून घ्या

1. $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right\}^{1/x}$ चे मूल्य आहे

   a. abc b. $(abc)^{1/3}$ c. $(abc)^{1/8}$ d. $\frac{1}{abc}$

2. x^x च्या मिनीमम मूल्य आणि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ च्या मॅक्सिमम मूल्याचा गुणाकर असेल

   a. e b. $\frac{1}{e}$ c. 1 d. e^2

3. $e^{\sin x}$ चा विस्तार ......

   a. $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\ldots$ b. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$

   c. $1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\ldots$ d. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{10}+\ldots$

4. 'a' आणि 'b' यातील रिलेशन शोधा अशा प्रकारे की L हॉस्पिटल रूल एकच वेळेस वापरुन खालील लिमिट प्राप्त होते $\lim_{x\to 0}\frac{ae^x+be^{2x}}{be^x+ae^{2x}}$.

   a. $b/a=2$ b. $a/b=2$ c. $a=b$ d. $a=-b$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)+\cos(bx)-2\cos(cx)}{\cos(ax)+2\cos(bx)-3\cos(cx)}$ ची फाइनाइट लिमिट काढण्यासाठी किती वेळेस डिफरनशीएशन करावे लागेल, दिलेले आहे $a\neq b\neq c$

   a. 3 b. 0 c. 2 d. 4

उत्तरे

1. b 2. c 3. b 4. d 5. c

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Bary, N.K. (1964). A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press.
2. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus, Wiley, NewYork.
3. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
4. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.

5. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
6. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947). Theory of Functions, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L.(1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

3 अनुक्रम आणि श्रेणी

युनिट निर्दिष्टे

या युनिटमध्ये आपण विषयांचा सविस्तर स्व -स्पष्टीकरणात्मक सिद्धांत दिला आहे - अनुक्रम आणि श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स, कॉन्व्हर्जन्स चाचण्या, पॉवर श्रेणी, टेलरची श्रेणी, एक्सपोनेन्शियल, त्रिकोणमितीय आणि लॉगरिदम फंक्शन्ससाठी श्रेणी, फोरियर श्रेणी: हाफ रेंज साइन आणि कोसाइन श्रेणी, पार्सेवलचे प्रमेय, आम्ही वस्तुनिष्ठ प्रश्न आणि व्यक्तिनिष्ठ प्रश्नांच्या स्वरूपात अनेक अभ्यास दिले आहेत. ब्लूमच्या वर्गीकरणाचे पालन केले गेले आहे.

तर्कशास्त्र

अनुक्रम आणि श्रेणी यांच्या संकल्पना गणितामध्ये फार महत्वाच्या आहेत, त्यांचा वित्त, भौतिकशास्त्र, सांख्यिकी आणि अभियांत्रिकी क्षेत्रात विस्तृत अनुप्रयोग आहेत. परिस्थिती किंवा घटनेच्या परिणामाचा अंदाज, मूल्यमापन आणि निरीक्षण करण्यात ते महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावतात, जे आपल्या दैनंदिन जीवनासाठी निर्णय घेण्यात खूप मदत करते. फोरियर श्रेणी (Fourier Series) मोठ्या प्रमाणावर दूरसंचार प्रणालीमध्ये वापरली जाते, व्हॉईस सिग्नलचे मॉड्युलेशन आणि डिमोड्युलेशनसाठी; नाडीच्या ठोक्यांचे इनपुट, आऊटपुट आणि गणना आणि त्यांचे साइन किंवा कोसाइन आलेख यांमध्ये व्यापक महत्त्व आहे जे अभियांत्रिकीच्या विविध क्षेत्रातील विविध जटिल समस्या सोडवण्यासाठी खूप उपयुक्त आहे.

पूर्वतयारी

1. डिफरंशिएशन (Differentiation) आणि इंटिग्रेशन (Integration) चे ज्ञान.
2. त्रिकोणमितीय गुणोत्तर आणि कोणत्याही चतुर्थांशातील कोनाचे मूल्य कसे शोधायचे याबद्दल स्पष्ट संकल्पना.
3. लॉगरिदमिक आणि एक्सपोनेन्शिअल फंक्शन्स आणि त्यांचे आलेख यांचे ज्ञान.
4. फंक्शनच्या लिमिटचे मूल्यांकन.

युनिट आऊटकम

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील:

U3-O1: बॉऊण्डेड, कॉन्व्हर्जंट, डायव्हर्जन्ट आणि मोनोटोनिक अनुक्रम ओळखा; g.l.b., l.u.b, आणि अनुक्रमाच्या लिमिटची गणना करा; गुणोत्तर, रूट, रॅबे, लॉगरिदम, गॉस चाचण्या श्रेणीच्या धन पदावर लागू करा. आणि अल्टरनेटिंग श्रेणीवर लीबनिट्झची चाचणी; कॉन्व्हर्जन्स साठी कंपॅरिजन चाचणी वापरा आणि इन्फायनाईट श्रेणीची अबसोल्यूट कॉन्व्हर्जन्स.

U3-O2: पॉवर श्रेणी म्हणून फंक्शन्सची मांडणी करा; कॉन्व्हर्जन्स ची त्रिज्या मोजा; ज्या क्षेत्रामध्ये पॉवर श्रेणी कॉन्व्हर्ज होतात त्याचे मूल्यांकन करणे.

U3-O3: कोणतेही फंक्शन बीजगणित किंवा ट्रांसीडेंटल असले तरी त्यांचा बहुपद म्हणून अंदाज बांधण्यासाठी टेलर आणि मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरणे.

U3-O4: फोरियर श्रेणीची संकल्पना लागू करणे; एका चलाच्या फंक्शनच्या फोरीयर श्रेणीचा डिफरंशिएशन आणि इंटिग्रेशन द्वारे विस्तार आणि मांडणी शिका.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट 3 आऊटकम	कोर्स आऊटकमसह अपेक्षित मॅपिंग *(1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)*				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U3-O1	2	–	3	–	1
U3-O2	–	1	3	1	–
U3-O3	–	3	–	–	1
U3-O4	1	–	2	1	–

इतिहास

अनंत श्रेणीच्या बेरीजसह पॅराबोलाच्या कमानीखालील क्षेत्राची गणना करण्याची पहिली ज्ञात संकल्पना ग्रीक गणितज्ञ आर्किमिडीज यांनी सादर केली जी आज कॅल्क्युलसच्या क्षेत्रात वापरली जाते. जेम्स ग्रेगरी (17 व्या शतक) ने अनंत श्रेणीवरील नवीन दशांश प्रणालीमध्ये काम केले आणि मॅक्लॉरिन श्रेणीवर अनेक परिणाम प्रकाशित केले. 1715 मध्ये, टेलर श्रेणी ज्या सर्व फंक्शन्ससाठी अस्तित्वात आहेत त्यांच्यासाठी एक सामान्य पद्धत ब्रुक टेलरने प्रदान केली होती. 18 व्या शतकात लिओनहार्ड यूलरने हायपर भौमितिक श्रेणी आणि क्यू-श्रेणीचा सिद्धांत विकसित केला. 1807 मध्ये फोरियर x च्या दिलेल्या फंक्शनच्या x च्या गुणकांच्या साईन किंवा कोसाइन विस्तारावर काम करण्यास सुरुवात केली. फोरियरने सर्वप्रथम प्रतिपादन केले आणि सामान्य प्रमेय सिद्ध करण्याचा प्रयत्न केला.

-लिओनार्ड यूलर

प्रस्तावना

जर आपण साध्या पेंडुलमचा विचार केला तर, दोलन मोजण्यासाठी, जेव्हा ते पुढे आणि मागे जाते तेव्हा अनुक्रम वापरले जातात.

पहिल्या रांगेत 30 जागा, दुसऱ्या रांगेत 32 जागा, तिसऱ्या ओळीत 34 जागा इत्यादी आणि एकूण 40 ओळी असलेल्या सिनेमागृहांचा विचार करूया. नाट्यगृहात किती जागा आहेत?

अशा प्रकारच्या समस्या सोडवण्यासाठी आपल्याला अनुक्रम आणि श्रेणी शिकण्याची गरज आहे.

येथे, आपल्याला सिनेमा थिएटरमध्ये किती जागा आहेत हे माहित असणे आवश्यक आहे, याचा अर्थ आपण गोष्टी मोजत आहोत आणि एकूण शोधत आहोत. दुसऱ्या शब्दांत, आपल्याला प्रत्येक पंक्तीतील सर्व जागांची बेरीज करण्याची आवश्यकता आहे. आपण या गोष्टींची बेरीज करत असल्याने, ही श्रेणी म्हणून पाहिले जाऊ शकते.

3.1 अनुक्रम

अनुक्रम (Sequence) हा फंक्शन $a: N \to S$ म्हणून परिभाषित केला जातो, जिथे डोमेन (Domain) नैसर्गिक संख्येचा संच आहे आणि श्रेणी (Range) कोणताही रिक्त नसलेला संच आहे.

> **टिप्पणी:** जर अनुक्रमांची श्रेणी वास्तविक संख्यांचा कोणताही उपसंच असेल तर त्या अनुक्रमाला वास्तविक अनुक्रम म्हणून ओळखले जाते.

जर $a: N \to R$ हा एक अनुक्रम असेल तर प्रत्येक $n \in N$ ची प्रतिमा a_n द्वारे दर्शवली जाते. अशाप्रकारे a_1, a_2, a_3 फंक्शन 'a' द्वारे 1, 2, 3 शी संबंधित वास्तविक संख्या आहेत आणि त्यांना अनुक्रमे प्रथम, द्वितीय, तृतीय संज्ञा म्हणतात.

अनुक्रम $a: N \to R$, $\langle a_n \rangle$ द्वारे दर्शविले जाते जेव्हा ते विस्तारित स्वरूपात दर्शविले जाते तेव्हा $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots \rangle$ असे लिहिले जाते.

3.1.1 अनुक्रमाचे वर्णन करण्याच्या पद्धती

अनुक्रमाचे वर्णन खालील प्रकारे केले जाऊ शकते:

i. अनुक्रमाच्या पहिल्या काही संज्ञा लिहून, जोपर्यंत अनुक्रमाचा नमुना स्पष्ट होत नाही.

उदाहरणार्थ: $\langle 1, 8, 64, 125, ... \rangle$ एक अनुक्रम आहे ज्याची n^{th} टर्म n^3 आहे.

ii. त्याच्या n^{th} टर्मसाठी एक सूत्र देऊन.

उदाहरणार्थ: $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ ज्याचे विस्तारित स्वरूप $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \right\rangle$ आहे

iii. अनुक्रमाच्या पहिल्या काही अटी आणि अनुक्रमाच्या इतर अटी निश्चित करण्यासाठी संबंध देऊन.

उदाहरणार्थ:

$a_1 = 3$ आणि $a_{n+1} = 8 + a_n \forall n \in N$

$a_1 = 3, a_2 = 8 + a_1 = 8 + 3 = 11$

$a_3 = 8 + a_2 = 8 + 11 = 19$

$a_4 = 8 + a_3 = 8 + 19 = 27$

अशा प्रकारे, क्रम <3, 11, 19, 27, ...> आहे.

3.1.2 अनुक्रमांचा श्रेणी (Range) संच

अनुक्रमाच्या सर्व वेगळ्या पदांच्या संचाला श्रेणी म्हणतात.

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची श्रेणी $\{a_n\}$ द्वारे दर्शवली जाते.

उदाहरणार्थ: जर $\langle a_n \rangle = \left\langle (-1)^n \right\rangle$, तर $\langle a_n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1 \cdots \rangle$

अनुक्रमाचा श्रेणी संच $\{-1, 1\}$ आहे.

टिपण्णी:

i. वेगवेगळ्या ठिकाणी येणाऱ्या अनुक्रमाच्या पदांना समान मूल्य असले तरीही त्यांना वेगळ्या संज्ञा मानल्या जातात.

ii. अनुक्रमांच्या पदांची संख्या नेहमीच अनंत असते परंतु अनुक्रमांची श्रेणी संच मर्यादित असू शकते कारण त्यात अनुक्रमाची फक्त भिन्न पदे असतात.

3.1.3 स्थिर अनुक्रम

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$, $a_n = c \; \forall \; n \in N$ द्वारे परिभाषित केलेल्या अनुक्रमाला स्थिर अनुक्रम म्हणतात.

अशा प्रकारे, $\langle a_n \rangle = \langle c, c, c, c, \cdots \rangle$ श्रेणी = {c}, सिंगलटन सेट, एक मर्यादित संच असलेला एक स्थिर अनुक्रम आहे.

3.1.4 मर्यादित (बाऊण्डेड) अनुक्रम

a. **बाऊण्डेड अबव्ह अनुक्रम (bounded above sequence):** अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ला बाऊण्डेड अबव्ह असे म्हटले जाते जर तेथे वास्तविक संख्या K अशी असेल कि $a_n \le K \; \forall \; n \in N$. K ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची अपर बाऊण्ड असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ: अनुक्रम $\langle -n \rangle = \langle -1, -2, -3, \cdots \rangle$ बाऊण्डेड अबव्ह आहे. $a_n \le -1 \; \forall \; n \in N$. म्हणून -1 हे या अनुक्रमाचे अपर बाऊण्ड आहे.

b. **बाऊण्डेड बिलो अनुक्रम (bounded below sequence):** अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ला बाऊण्डेड बिलो असे म्हटले जाते जर तेथे वास्तविक संख्या K अशी असेल कि $k \le a_n \; \forall \; n \in N$, k ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची लोवर बाऊण्ड म्हणतात.

उदाहरणार्थ: अनुक्रम $<n> = <1, 2, 3, \ldots>$ बाऊण्डेड बिलो आहे. $1 \le a_n$ म्हणून 1 हे या अनुक्रमाचे लोवर बाऊण्ड आहे.

c. **बाऊण्डेड अनुक्रम (bounded sequence):** अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ला बाऊण्डेड अनुक्रम असे म्हटले जाते जर तेथे वास्तविक संख्या k आणि K अशी अस्तित्वात असेल कि $k \le a_n \le K \; \forall \; n \in N$

उदाहरणार्थ: अनुक्रम $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots. \right\rangle$ वर तसेच लोवर बाऊण्ड आहे.

जर आपल्याकडे $0 \le a_n \le 1 \; \forall \; n \in N$ असेल तर 0 हे या अनुक्रमाचे लोवर बाऊण्ड आहे आणि 1 हे अपर बाऊण्ड आहे.

3.1.5 अनबाउंडेड अनुक्रम

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ अनबाउंडेड असे म्हटले जाते जर ते बाउंडेड नसेल म्हणजे एकतर ते अनबाऊण्डेड अबव्ह आहे किंवा अनबाऊण्डेड बिलो असेल किंवा दोन्ही.

i. अनुक्रम $< (-1)^n . n> = <-1, 2, -3, 4, \ldots>$ अनबाउंड आहे ज्याचे लोवर बाऊण्ड आणि अपर बाऊण्ड नाही.

ii. अनुक्रम $<n> = <1, 2, 3, \ldots>$ लोवर बाऊण्ड असले तरी अनबाऊण्डेड अबव्ह आहे.

म्हणून $<n>$ अनबाऊण्डेड अनुक्रम आहे.

3.1.6 अनुक्रमाचे किमान अपर बाऊण्ड (Supremum)

वास्तविक संख्या u ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची किमान अपर बाऊण्ड (l.u.b.) किंवा (supremum) म्हणतात जर

i. $a_n \le u \forall n \in N$ म्हणजे, u हे अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ चे अपर बाऊण्ड आहे.

ii. जर u' ही इतर कोणतीही वास्तविक संख्या आहे जसे की $a_n \le u' \forall n \in N$ तर $u \le u'$ म्हणजे, इतर कोणतीही अपर बाऊण्ड u पेक्षा कमी नाही.

उदाहरणार्थ:

i. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ... \right\rangle$ बाऊण्डेड अबव्ह आहे आणि $a_n \le 1 \ \forall \ n \in N$, म्हणून 1 हे $\langle a_n \rangle$ चे अपर बाऊण्ड आहे.

तसेच, 2, 3, 4, ... $\langle a_n \rangle$ चे अपर बाऊण्ड आहेत परंतु 1 त्यांच्यामध्ये सर्वात लहान अपर बाऊण्ड आहे.

म्हणजे $<a_n>$ चे l.u.b./supremum 1 आहे.

ii. $\langle a_n \rangle = \langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, \cdots \rangle$ अनबाऊण्डेड अबव्ह आहे आणि म्हणून l.u.b नाही.

iii. $\langle a_n \rangle = \left\langle -\frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ... \right\rangle$ बाऊण्डेड अबव्ह आहे आणि 0 हे $\langle a_n \rangle$ चे अपर बाऊण्ड आहे कारण कि $a_n \le 0 \ \forall \ n \in N$ तसेच 1, 2, 3, ... इत्यादी, $<a_n>$ ची अपर बाऊण्ड आहे परंतु त्यांच्यामध्ये 0 l.u.b आहे, म्हणजे 0 हा $\langle a_n \rangle$ चा l.u.b आहे.

टिपण्णी:

i. अनुक्रमाचा l.u.b. अस्तित्वात असू शकतो किंवा नसू शकतो.

ii. अनुक्रमाचा l.u.b., जर अस्तित्वात असेल, तो अद्वितीय असतो.

iii. अनुक्रमाचा l.u.b. अनुक्रम मधील असेल किंवा नसेल.

3.1.7 अनुक्रमाचा कमाल लोवर बाऊण्ड (Infimum)

वास्तविक संख्या l ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची कमाल लोवर बाऊण्ड (g.l.b.) (किंवा infimum) म्हणतात जर

i. $a_n \ge l \ \forall \ n \in N$ म्हणजे, $\langle a_n \rangle$ ची लोवर बाऊण्ड l आहे.

ii. जर l' ही इतर वास्तविक संख्या अशी आहे कि $l' \le a_n \ \forall \ n \in N$, तर $l \ge l'$ म्हणजे, इतर कोणतीही लोवर बाऊण्ड l पेक्षा मोठी नाही.

उदाहरणार्थ:

i. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \right\rangle$ बाऊण्डेड बिलो आहे आणि $a_n \ge 0 \ \forall \ n \in N$ म्हणून 0 हे $\langle a_n \rangle$ ची लोवर बाऊण्ड आहे.

तसेच −1, −2, −3, ... देखील $\langle a_n \rangle$ च्या लोवर बाऊण्ड आहेत परंतु 0 त्यांच्यामध्ये सर्वात मोठा आहे. $\langle a_n \rangle$ ची g.l.b/इनफ़िमम 0 आहे.

ii. $\langle a_n \rangle = \langle -n \rangle = \langle -1, -2, -3, \cdots \rangle$ अनबाऊण्डेड बिलो आहे आणि त्यामुळे g.l.b नाही.

iii. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle = \left\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\rangle$ अनबाऊण्डेड बिलो आहे आणि $a_n \geq -1 \;\; \forall \, n \in N$ म्हणून -1 हे $\langle a_n \rangle$ चे लोवर बाऊण्ड आहे.

तसेच, $-2, -3, -4, \ldots$ इत्यादी, $\langle a_n \rangle$ च्या लोवर बाऊण्ड आहेत परंतु -1 त्यापैकी सर्वात मोठा आहे. -1 हे $\langle a_n \rangle$ चे g.l.b इनफ़िमम आहे.

टिपण्णी:

i. अनुक्रमाचा g.l.b अस्तित्वात असू शकतो किंवा नसू शकतो.

ii. अनुक्रमाचा g.l.b., जर अस्तित्वात असेल, तो अद्वितीय आहे.

iii. अनुक्रमाचा g.l.b. अनुक्रम मधील असु शकतो किंवा नसू शकतो.

3.2 कॉन्व्हर्जंट, डायव्हर्जन्ट आणि ऑस्सीलेटरी अनुक्रम

a. **कॉन्व्हर्जंट अनुक्रम:** अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ वास्तविक संख्या l ला कॉन्व्हर्जंट असल्याचे म्हटले जाते जर कोणत्याही दिलेल्या $\varepsilon > 0$ साठी, ते कितीही लहान असले तरीही, तेथे एक धन पूर्णांक m (ε वर अवलंबून) असे असते की $|a_n - l| < \varepsilon \;\; \forall \; n \geq m$. वास्तविक संख्या l ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची लिमिट म्हणतात.

किंवा

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ कॉन्व्हर्जंट असल्याचे म्हटले जाते जर $\lim_{n \to \infty} a_n$ फायनाईट असेल, l म्हणा, असल्यास. वास्तविक संख्या l ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ची लिमिट म्हणतात आणि $\lim_{n \to \infty} a_n$ किंवा $a_n \to l$ लिहिले जाते

b. **डायव्हर्जन्ट अनुक्रम:** कोणताही अनुक्रम जर कॉन्व्हर्जंट नसेल तर त्याला डायव्हर्जन्ट म्हटले जाते. म्हणजे, $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ किंवा $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$

c. **दोलन (ऑसिलेटरी) अनुक्रम:** जर एखादा अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ फायनाईट संख्येला कॉन्व्हर्ज होत नाही किंवा ∞ किंवा $-\infty$ ला डायव्हर्ज होत नाही तर त्याला दोलन (ऑसिलेटरी) अनुक्रम म्हणतात. दोलन (ऑसिलेटरी)अनुक्रम दोन प्रकारचे आहेत:

a. **फायनाइटली ऑसिलेट:** एखादा अनुक्रम फायनाइटली ऑसिलेट असे म्हटले जाते जर

i. ते बाउंडेडआहे

ii. ते कॉन्व्हर्ज होत नाही आणि डायव्हर्ज हि होत नाही.

b. **इनफायनाइटली ऑसिलेट:**

i. ते अनबाउंडेड आहे.

ii. ते कॉन्व्हर्ज होत नाही आणि डायव्हर्ज हि होत नाही.

उदाहरणार्थ:

1. $<(-1)^n> = <-1, 1, -1, 1, ...>$ फायनाइटली ऑसिलेट.
2. $\left\langle 1+(-1)^n \right\rangle = \langle 0,2,0,2,....\rangle$ फायनाइटली ऑसिलेट.
3. $\left\langle (-1)^n n \right\rangle = \langle -1,2,-3,4,-5,6,....\rangle$ इनफायनाइटली ऑसिलेट.
4. $\left\langle 1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},.... \right\rangle$ इनफायनाइटली ओसिलेट.

3.2.1 अनुक्रमाचे लिमिट

जेव्हा $n \to \infty$ अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ला l लिमिटजवळ जाणे म्हटले जाते, जर प्रत्येक $\varepsilon > 0$ साठी धन पूर्णांक m असेल (ε वर अवलंबून) जसे की $|a_n - l| < \varepsilon \ \forall \ n \geq m$. म्हणजे $a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

प्रतीकात्मकपणे, आपण. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ लिहू शकतो.

उदाहरणार्थ:

1. $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}... \right\rangle$ ची लिमिट फक्त 0 आहे.
2. $<n^2> = <1, 4, 9, ...>$ ला लिमिट नाही.

3.2.2 अनुक्रमाचा लिमिट बिंदू (लिमिट पॉईंट)

वास्तविक संख्या l ला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ चा मर्यादा बिंदू म्हटले जाते जर दिलेल्या $\varepsilon > 0$ साठी आणि दिलेल्या धन पूर्णांक m साठी तेथे एक धन पूर्णांक $K > m$ असा आहे की $|a_K - l| < \varepsilon$ म्हणजे $a_K \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

लिमिट आणि लिमिट पॉईंट मधील फरक

लिमिट आणि लिमिट पॉईंट यातील मुख्य फरक असा आहे की, लिमिटच्या बाबतीत, इंटरव्हल $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ मध्ये असणाऱ्या संज्ञांची संख्या अनंत असली पाहिजे परंतु या इंटरव्हलच्या बाहेर असलेल्या पदांची संख्या मर्यादित असणे आवश्यक आहे; लिमिट पॉईंटच्या बाबतीत, इंटरव्हल $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ मध्ये असणाऱ्या संज्ञांची संख्या अनंत असली पाहिजे परंतु या इंटरव्हलच्या बाहेर असलेल्या संज्ञांची संख्या मर्यादित किंवा अनंत असू शकते.

महत्वाची निरीक्षणे

1. अनुक्रमाचे लिमिट देखील अनुक्रमाचा लिमिट पॉईंट असतो परंतु याच्या उलट खरे नसते.

   उदाहरणार्थ: $\langle a_n \rangle$ अनुक्रम विचारात घ्या जेथे $a_n = (-1)^n$ अनुक्रम $<-1, 1, -1, 1 ...>$ आणि $-1 \leq a_n \leq 1$ सर्व n साठी आहे.

   अनुक्रमाचा लिमिट पॉईंट $\{-1, 1\}$ आहे परंतु या अनुक्रमाला लिमिट नाही.
2. प्रत्येक कॉन्व्हर्जंट अनुक्रमाला एकमेव लिमिट असते त्यामुळे एकमेव लिमिट पॉईंट असतो, परंतु जर एका अनुक्रमामध्ये एकच लिमिट पॉईंट असेल तर तो कॉन्व्हर्जंट असू शकत नाही.

उदाहरणार्थ: अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ चा विचार करा जिथे $a_n = <1, 2, 1, 3, 1, 4, ...>$ अनुक्रमाचा लिमिट पॉईंट 1 आहे पण हा अनुक्रम कॉन्व्हर्जंट नाही.

3. प्रत्येक कॉन्व्हर्जंट अनुक्रम बाऊण्डेड असतो परंतु याच्या उलट खरे नसते. उदाहरणार्थ: अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ चा विचार करा जेथे $a_n = (-1)^n$ अनुक्रम $<-1, 1, -1, 1, ...>$ आणि $-1 \le a_n \le 1 \forall n \in N$ आहे.

   स्पष्टपणे, अनुक्रम $\langle a_n \rangle = (-1)^n$ बाऊण्डेड आहे परंतु लिमिटला कॉन्व्हर्ज होत नाही.
4. एक बाऊण्डेड अनुक्रम एकतर कॉन्व्हर्ज असतो किंवा फायनाइटली ऑसिलेट असतो.
5. एक अनबाउंड श्रेणी एकतर $+\infty$ किंवा $-\infty$ कडे वळतो किंवा ऑसिलेट इनफायनाइटली.

3.2.3 शून्य अनुक्रम

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ला शून्य अनुक्रम असे म्हटले जाते जर ते 0 मध्ये रूपांतरित होते. म्हणजे $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

उदाहरणार्थ: $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle, \left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$ शून्य अनुक्रम आहेत.

शून्य अनुक्रमांचे परिणाम

1. अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ हा l ला कॉन्व्हर्ज होतो जर अनुक्रम $\langle a_n - l \rangle$ शून्य अनुक्रम असेल.
2. जर $\langle a_n \rangle$ अनुक्रम असेल तर $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$
3. शून्य अनुक्रमांची बेरीज देखील शून्य अनुक्रम असते.

   $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$

असमानता आणि तुलना यावर परिणाम

1. जर अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ही a ला कॉन्व्हर्ज होत असेल आणि $a_n \ge 0 \ \forall n$ तर $a \ge 0$.
2. जर $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ आणि $a_n \le b_n \ \forall n \in N$ तर $a \le b$.
3. जर $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ आणि $a_n \ge k \ \forall n \in N$ तर $a \ge k$.

3.2.4 लिमिटचे बीजगणित (Algebra of Limits)

1. जर $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ तर $\lim_{n\to\infty} Ka_n = Ka, \ K \in R$
2. जर $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ तर $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
3. जर $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ आणि $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ तर

   a. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

   b. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{a},\ a_n \neq 0\ \forall\ n,\ a\neq 0$

d. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b},\ b_n \neq 0\ \forall\ n,\ b\neq 0$

वरील परिणामाचा व्यत्यास मात्र खरा नाही.

अनुक्रमांक	$<a_n>$	$<b_n>$	$<a_n + b_n>$
1.	कॉन्वर्ज होतात.	∞ मध्ये डायवर्ज होते.	∞ मध्ये डायवर्ज होते.
2.	कॉन्वर्ज होतात.	$-\infty$ मध्ये डायवर्ज होते.	$-\infty$ मध्ये डायवर्ज होते.
3.	∞ ला डायवर्ज होते.	∞ ला डायवर्ज होते.	∞ ला डायवर्ज होते.
4.	$-\infty$ ला डायवर्ज होते.	$-\infty$ ला डायवर्ज होते.	$-\infty$ ला डायवर्ज होते.

अनुक्रमांक	$<a_n>$	$<b_n>$	$<a_n . b_n>$
1.	∞ ला डायवर्ज होते.	∞ ला डायवर्ज होते.	∞ ला डायवर्ज होते.
2.	∞ ला डायवर्ज होते.	$-\infty$ ला डायवर्ज होते.	$-\infty$ ला डायवर्ज होते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.1: खालील अनुक्रमाच्या बाऊण्डेडनेसची चर्चा करा $\langle a_n \rangle$ जिथे a_n दिला आहे.

i. $a_n = 5$

ii. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$

उकल:

i. येथे $a_n = 5$ एक स्थिर अनुक्रम आहे, म्हणजे $< a_n > = <5, 5, 5, \ldots>$

स्पष्टपणे, $5 \leq a_n \leq 5\ \forall\ n \in N$

अशा प्रकारे, अनुक्रम बाऊण्डेड आहे.

ii. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$

$< \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ $\left\{\because n^2 < (n+1)^2, \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

$= \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1+1 = 2\ \forall n \in N$

तसेच, $a_n > 0\ \forall n$

अशा प्रकारे, $0 < a_n < 2 \; \forall n \in N$

म्हणून, अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ बाऊण्डेड आहे

उदाहरण 3.2: दिलेल्या अनुक्रमांसाठी, खालील गुणधर्मांवर चर्चा करा:

बाऊण्डेडनेस, l.u.b., g.l.b., लिमिट पॉईंट, कॉन्व्हर्जन्स, डायव्हर्जन्स, ऑसिलेटिंग फायनाइटली किंवा इनफायनाइटली.

i. $a_n = 1 + (-1)^n$ ii. $a_n = n^2$ चा किमान अविभाज्य विभाजक, $n \geq 2$

उकल:

i. $a_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ विषम आहे.} \\ 0 & n \text{ सम आहे.} \end{cases}$

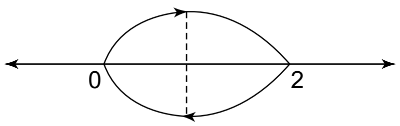
$\Rightarrow \quad \langle a_n \rangle = < 0, 2, 0, 2, 0, \ldots >$

स्पष्टपणे, $0 \leq a_n \leq 2 \forall n \in N$

तर, अनुक्रम लिमिट पॉईंट = {0, 2}

अशाप्रकारे अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ बाऊण्डेड आहे आणि l.u.b = 2 आणि g.l.b = 0

दिलेला अनुक्रम कोणत्याही एका बिंदूशी कॉन्व्हर्ज झाला नाही तर हा अनुक्रम फायनाइटली ऑसिलेटिंग आहे.



आकृती 3.1

अनुक्रम 0 आणि 2 दरम्यान ऑसिलेटिंग आहे.

ii. $a_n = n^2, n \geq 2.$ चे किमान अविभाज्य विभाजक, म्हणून, अनुक्रम

$\langle a_n \rangle = < 2, 3, 2, 5, 2, .. >$

स्पष्टपणे, $2 \leq a_n \forall n \in N$

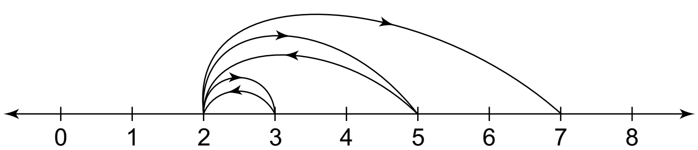
परंतु असे कोणतेही K अस्तित्वात नाही जसे की $a_n \leq K \; \forall n \in N$

अशाप्रकारे, $\langle a_n \rangle$ lub सह बाऊण्डेड बिलो आणि अनबाऊण्डेड अबव्ह आहे = अस्तित्वात नाही.

g.l.b. = 2

अनुक्रमाचा लिमिट पॉईंट $\langle a_n \rangle$ = {2, 3, 5, ...} म्हणजे, {p; p मूळ संख्या आहे}

हा अनुक्रम लिमिटला कॉन्व्हर्ज होत नाही आणि ± ∞ ला डायव्हर्ज होत नाही जरी ती ऑसिलेटिंग किंवा इनफायनाइटली असेल.



आकृती 3.2

उदाहरण 3.3: व्याख्येनुसार, ते दर्शवा

(i) $\lim_{n \to \infty} \frac{3n+7}{4n+8} = \frac{3}{4}$ (ii) $<n>$ ही ∞ ला डायव्हर्ज होते.

उकल:

(i) विचार करा $a_n = \frac{3n+7}{4n+8}$

समजा $\in > 0$ ही वास्तविक संख्या आहे.

आता, $$\left|a_n - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3n+7}{4n+8} - \frac{3}{4}\right|$$

$$= \left|\frac{12n+28-12n-24}{4(4n+8)}\right|$$

$$\left|a_n - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{4n+8} < \frac{1}{4n}$$

$\therefore$ $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \in$ जर $\frac{1}{4n} < \in$

$\Rightarrow$ $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \in$ जर $n > \frac{1}{4\in}$

$\Rightarrow$ $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \in$ जर $n > m$

जेथे $m > \frac{1}{4\in}$ एक धन पूर्णांक आहे.

$\Rightarrow$ $\left|a_n - \frac{3}{4}\right| < \in \ \forall n \geq m$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{4}$$

अशा प्रकारे, अनुक्रम $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+7}{4n+8} \right\rangle$ हा $\frac{3}{4}$ ला कॉन्वर्ज होतो.

पर्यायी पद्धत:

दिले आहे $a_n = \frac{3n+7}{4n+8}$

अंश आणि छेद यांना n ने भाग देऊन

$$a_n = \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 + \frac{8}{n}}$$

दोन्ही बाजूंनी $\lim_{n \to \infty}$ घेऊन,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{7}{n}}{4+\frac{8}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{4n+8}=\frac{3}{4}$$

अशा प्रकारे, अनुक्रम $\left\langle \frac{3n+7}{4n+8} \right\rangle$ हा $\frac{3}{4}$ ला कॉन्वर्ज होतो.

ii. समजा $a_n = n$ आणि $k > 0$ ही कोणतीही संख्या असू द्या.

आता $\quad a_n > k$ जर $n > k$

$a_n > k$ जर $n \geq m$, जेथे m किमान धन पूर्णांक आहे $> k$

$\therefore \quad a_n > k \forall n \geq m$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\therefore \quad \langle a_n \rangle = \langle n \rangle$ ला डायवर्ज होते.

पर्यायी पद्धत:

$\langle a_n \rangle = \langle n \rangle = <1, 2, 3, 4, ..>$

स्पष्टपणे, हा अनुक्रम बाऊण्डेड बिलो आणि अनबाऊण्डेड अबव्ह आहे.

तेथे कोणतेही $k \in R$ असे अस्तित्वात नाही जसे की $a_n \leq k \ \forall \ n \in N$

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\therefore \quad \langle a_n \rangle = \langle n \rangle$ वर डायवर्ज होते.

उदाहरण 3.4: अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ आणि $\langle b_n \rangle$ ची उदाहरणे अशी द्या कि

(i) $<a_n> \to \infty$, $<b_n> \to -\infty$ परंतु $\langle a_n + b_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात.

(ii) $<a_n> \to \infty$, $<b_n> \to -\infty$ परंतु $\langle a_n + b_n \rangle$ फाइनाइटली ओसिलेट होते.

(iii) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to \infty$ परंतु $\langle a_n . b_n \rangle$ हे ∞ ला डायवर्ज होते.

(iv) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to \infty$ परंतु $\langle a_n . b_n \rangle$ फाइनाइटली ओसिलेट होते.

(v) $\langle a_n - b_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात परंतु $\langle a_n \rangle$ आणि $\langle b_n \rangle$ कॉन्वर्ज होत नाहीत.

उकल:

(i) समजा $\quad a_n = n^2$ आणि $b_n = -n^2 \forall n$

$\therefore \quad \langle a_n \rangle \to \infty$ आणि $\langle b_n \rangle \to -\infty$

आता, $\quad a_n + b_n = n^2 - n^2 = 0 \forall n$

$\Rightarrow \quad \langle a_n + b_n \rangle \to 0$

अशा प्रकारे अनुक्रम $\langle a_n + b_n \rangle$, 0 ला कॉन्वर्ज होतो.

(ii) समजा a_n आणि $b_n = \begin{cases} -n, & n \text{ सम आहे.} \\ -n+1, & n \text{ विषम आहे.} \end{cases}$

$\langle a_n \rangle = <1, 2, 3, 4, .. > \to \infty$

आणि $\langle b_n \rangle = <0, -2, -2, -4, -4... > \to -\infty$

आता, $\langle a_n + b_n \rangle = <1, 0, 1, 0, 1, ... >$ चे दोन लिमिट पॉइंट {1, 0} आहेत आणि 0 ते 1 दरम्यान फायनाइटली ऑसिलेट होते.

(iii) समजा $a_n = -1$ आणि $b_n = -n \forall n$

$\langle a_n \rangle$ एक स्थिर अनुक्रम आहे आणि -1 ला कॉन्व्हर्ज होतो

$\langle b_n \rangle = \langle -n \rangle = < -1, -2, -3, ... > \to -\infty$

आता $a_n \cdot b_n = (-1)(-n) = n$

$\Rightarrow \quad \langle a_n \cdot b_n \rangle = \langle n \rangle \to \infty$

अशा प्रकारे अनुक्रम $\langle a_n \cdot b_n \rangle \infty$ वर डायवर्ज होते.

(iv) समजा $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \; b_n = n^2 \forall n$

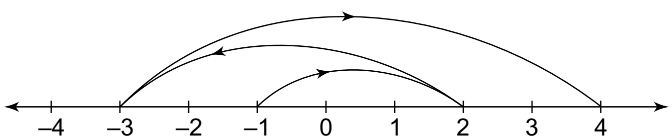
$\therefore \quad \langle a_n \rangle = \left\langle \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rangle \to 0$ आणि $\langle b_n \rangle = \langle n^2 \rangle \to \infty$

आता $a_n \cdot b_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \cdot n^2 = (-1)^n \cdot n$

$\Rightarrow \quad \langle a_n \cdot b_n \rangle = \langle (-1)^n \cdot n \rangle$

$= \langle -1, 2, -3, 4, -5 \rangle$

अशा प्रकारे, $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ अनबाउंड आहे आणि अनबाऊण्डेड आणि इनफायनाइटली ऑसिलेटिंग आहे.



आकृती 3.3

(v) समजा $a_n = n$ आणि $b_n = n \forall n$

$\therefore \quad a_n - b_n = 0 \forall n$

$\therefore \quad \langle a_n - b_n \rangle$ कॉन्व्हर्जंट आहे आणि 0 ला कॉन्व्हर्ज होते परंतु $\langle a_n \rangle$ किंवा $\langle b_n \rangle$ एकही कॉन्व्हर्जंट नाही.

उदाहरण 3.5: खालील अनुक्रमांची उदाहरणे द्या.

(i) जी बाऊण्डेड आणि फायनाइटली ऑसिलेटिंग आहे.

(ii) ज्यांना लिमिट नाही.

उकल:

(i) अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ चा विचार करा. जेथे $a_n = (-1)^n$

$\therefore \quad \langle a_n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, ... \rangle$

$\Rightarrow \quad -1 \le a_n \le 1, \forall\, n \in N$

$\Rightarrow \quad a_n$ ही बाऊण्डेड आणि -1 आणि 1 च्या दरम्यान ओसिलेट आहे.

(ii) अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ चा विचार करा. जेथे $a_n = n$

$\therefore \quad \langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, ... \rangle$

अनुक्रम $\langle n \rangle$ ही ∞ ला डायव्हर्ज होते आणि त्याला लिमिट पॉइंट नाही.

अभ्यास 3.1

1. खालील अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ च्या बाऊण्डेडनेसची चर्चा करा.

   (i) $a_n = C$ (कोणताही स्थिरांक) (ii) $a_n = (-1)^n 7$

   (iii) $a_n = n^2$ (iv) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

   (v) $a_n = n^{th}$ मुळसंख्या

2. दिलेल्या अनुक्रमांसाठी, खालील गुणधर्मांवर चर्चा करा: बाऊण्डेडनेस, l.u.b., g.l.b., लिमिट पॉईंट, कॉन्व्हर्जन्स, डायव्हर्जन्स, ऑसिलेटिंग फायनाइटली किंवा इनफायनाइटली.

   (i) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ (ii) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

   (iii) $a_n = -n^2$ (iv) $a_n = \dfrac{-1}{2n+1}$

   (v) $a_n = \langle 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5..... \rangle$ (vi) $a_n = (214)^n$ चा युनिट अंक

   (vii) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{जर } n = 1 \text{ किंवा मुळसंख्या} \\ n, & \text{जर } n \text{ संमिश्र असेल} \end{cases}$ (viii) $a_n = \begin{cases} 3, & n \text{ विषम असल्यास} \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ सम असल्यास} \end{cases}$

3. व्याख्येनुसार, ते दाखवा.

   (i) अनुक्रम $\left\langle \dfrac{1}{3^n} \right\rangle$ हा 0 ला कॉन्व्हर्ज होतो. (ii) अनुक्रम $\left\langle \dfrac{n^2+1}{2n+5} \right\rangle$ हा $1/2$ ला कॉन्व्हर्ज होतो.

(iii) अनुक्रम $\langle -n^2 \rangle$ ∞ ला डायव्हर्ज होतो. (iv) अनुक्रम $\left\langle \frac{2n+3}{3n+4} \right\rangle$ हा $\frac{2}{3}$ ला कॉन्व्हर्ज होतो.

(v) अनुक्रम $\langle n^2 \rangle$ ∞ ला डायव्हर्ज होतो.

4. व्याख्येनुसार, ते दर्शवा.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} = \frac{1}{3}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4}$ (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+5}{2n^2+5n+7} = \frac{1}{2}$

5. अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ आणि $\langle b_n \rangle$ ची अशी उदाहरणे द्या की

(i) $\langle a_n \rangle \to \infty, \langle b_n \rangle \to -\infty$ परंतु $\langle a_n + b_n \rangle$ ∞, ला डायवर्ज होते

(ii) $\langle a_n \rangle \to \infty, \langle b_n \rangle \to -\infty$ परंतु $\langle a_n + b_n \rangle$ $-\infty$, ला डायवर्ज होते

(iii) $\langle a_n \rangle \to \infty, \langle b_n \rangle \to -\infty$ परंतु $\langle a_n + b_n \rangle$ इनफाइनाइटली ओसिलेट.

(iv) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to \infty$ पण $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ कॉन्व्हर्जेस.

(v) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to \infty$ पण $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ -∞ वर डायवर्ज होते

(vi) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to \infty$ पण $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ फाइनाइटली ओसिलेट होते.

(vii) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to -\infty$ पण $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ इनफाइनाइटली ओसिलेट होते.

(viii) $\langle a_n \rangle$ कॉन्वर्ज होतात आणि $\langle b_n \rangle \to -\infty$ पण $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ कॉन्व्हर्जेस.

(ix) $\langle a_n \rangle$ कॉन्व्हर्जंट आहे परंतु $\langle b_n \rangle \to \infty$ पण $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ फाइनाइटली ओसिलेट होते.

(x) $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ कॉन्व्हर्जंट आहे परंतु $\langle a_n \rangle$ आणि $\langle b_n \rangle$ दोन्ही कॉन्व्हर्जंट नाहीत.

(xi) $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ कॉन्व्हर्जंट आहे परंतु $\langle a_n \rangle$ आणि $\langle b_n \rangle$ दोन्ही कॉन्व्हर्जंट नाहीत.

6. अनुक्रमाचे उदाहरण द्या.

(i) जे अनबाऊण्डेड आहे आणि इनफाइनाइटली ओसिलेट आहे.

(ii) दोन लिमिट पॉईंट आहेत.

7. (i) $\left\langle \frac{\sin n\frac{\pi}{3}}{\sqrt{n}} \right\rangle$ शून्य अनुक्रम आहे ते दाखवा. (ii) $\left\langle \frac{n!}{n^n} \right\rangle$ शून्य अनुक्रम आहे ते दाखवा.

सूचना: असमानता आणि तुलना यांचा परिणाम वापरा

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \qquad |a_n| \le |b_n| \forall n$$

उत्तरे

1. (i) बाऊण्डेड (ii) बाऊण्डेड (iii) अनबाऊण्डेड (iv) बाऊण्डेड (v) अनबाऊण्डेड
2. (i) बाऊण्डेड, l.u.b. = 1/2, g.l.b. = 0, लिमिट पॉईंट = {0}, 0 ला कॉन्व्हर्ज होते.
   (ii) बाऊण्डेड, l.u.b. = 3/2, g.l.b. = −2, लिमिट पॉईंट = {−1, 1}, फाइनाइटली ओसिलेट करतो
   (iii) अनबाउंडेड, l.u.b. = −1, g.l.b. = नाही, लिमिट पॉईंट नाही, - ∞ वर डायवर्ज होते.
   (iv) बाऊण्डेड, l.u.b. = 0, g.l.b. = −1/3, लिमिट पॉईंट = {0}, 0 मध्ये डायवर्ज होते.
   (v) अनबाउंडेड, l.u.b. = अस्तित्वात नाही, g.l.b. = 1, मर्यादा बिंदू = $\{n, n \in N\}$, इनफाइनाइटली ओसिलेट
   (vi) बाऊण्डेड, l.u.b. = 6, g.l.b. = 4, लिमिट पॉईंट = {4, 6}, फाइनाइटली ओसिलेट
   (vii) अनबाउंडेड, l.u.b. = अस्तित्वात नाही, g.l.b. = 0, लिमिट पॉईंट = {0}, इनफाइनाइटली ओसिलेट
   (viii) बाऊण्डेड, l.u.b. = 3, g.l.b. = 0, लिमिट पॉईंट = {0, 3}, इनफाइनाइटली ओसिलेट

5. (i) $a_n = 2n,\ b_n = -n$ (ii) $a_n = n,\ b_n = -2n$

   (iii) $b_n = -n,\ a_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ हा विषम आहे.} \\ n+1 & n \text{ हा सम आहे.} \end{cases}$ (iv) $a_n = \frac{1}{n^2},\ b_n = n$

   (v) $a_n = -\frac{1}{n},\ b_n = n^2$ (vi) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2},\ b_n = n$

   (vii) $a_n = \frac{(-1)^n}{n},\ b_n = -n^2$ (viii) $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = -n$

   (ix) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2},\ b_n = -n$ (x) $a_n = b_n = (-1)^n$

   (xi) $a_n = b_n = n$

6. (i) $\langle (-1)^n . n \rangle$ (ii) $\langle (-1)^n \rangle$

3.2.5 मोनोटोनिक अनुक्रम

एक तर मोनोटोनिक वाढते किंवा कमी होत असेल तर अनुक्रम मोनोटोनिक असल्याचे म्हटले जाते.

(a) अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ही $a_{n+1} \ge a_n \forall n \in N$ असल्यास मोनोटोनिकली वाढते असे म्हटले जाते.

म्हणजे, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le .... \le a_n \le a_{n+1} \le .....$

(b) अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ही $a_{n+1} \le a_n \forall n \in N$ असल्यास मोनोटोनिकली कमी होत असल्याचे म्हटले जाते.

म्हणजे, $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge .... \ge a_n \ge a_{n+1} \ge .....$

(c) अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ असे म्हटले जाते की $a_{n+1} > a_n \forall n \in N$ असल्यास काटेकोरपणे मोनोटोनिकली वाढते.

(d) अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ असे म्हटले जाते की जर $a_{n+1} < a_n \forall n \in N$ असल्यास काटेकोरपणे मोनोटोनिकली कमी होते

उदाहरणार्थ:

1. अनुक्रम <1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 ...> एक मोनोटोनिकली वाढणारा क्रम आहे.
2. अनुक्रम $\langle n \rangle, \langle n^2 \rangle, \langle 3^n \rangle$ काटेकोरपणे मोनोटोनिकली वाढत आहे.
3. अनुक्रम $\left\langle 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \ldots \right\rangle$ एक मोनोटोनिकली कमी होणारा क्रम आहे.
4. अनुक्रम $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$, काटेकोरपणे मोनोटोनिकली कमी होणारे क्रम आहेत.

मोनोटोनिक अनुक्रमांचे परिणाम

1. प्रत्येक मोनोटोनिकली वाढणारा अनुक्रम जो बाऊण्डेड अबव्ह आहे तो त्याच्या लिस्ट अपर बाउंड (l.u.b.) ला कॉन्व्हर्ज होते.
2. प्रत्येक मोनोटोनिकली कमी होणारा अनुक्रम जो बाऊण्डेड बिलो आहे तो त्याच्या ग्रेटेस्ट लोअर बाऊंड (g.l.b.) ला कॉन्व्हर्ज होते.
3. प्रत्येक बाऊण्डेड मोनोटोनिक अनुक्रम कॉन्व्हर्जंट असते.
4. प्रत्येक मोनोटोनिकली वाढणारा अनुक्रम अनबाऊण्डेड अबव्ह ∞ ला डायव्हर्ज होतो.
5. प्रत्येक मोनोटोनिकली कमी होणारा अनुक्रम अनबाऊण्डेड बिलो $-\infty$ ला डायव्हर्ज होतो.
6. प्रत्येक मोनोटोनिकली अनुक्रम एकतर कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्ट होतो.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.6: सिद्ध करा की ज्या अनुक्रमाचा n वा टर्म मोनोटोनिक दिलेला आहे. अनुक्रम वाढत आहे किंवा कमी होत आहे?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

उकल:

$$a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \forall n$$

$a_{n+1} > a_n$ सर्व n साठी

म्हणून, अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ मोनोटोनिकली वाढत आहे. (सिद्ध केले)

उदाहरण 3.7: सिद्ध करा की $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, a_1 = 1$ द्वारे परिभाषित केलेला अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ हा 3 ला कॉन्व्हर्ज होतो.

उकल: अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ विस्तारित स्वरूपात $\left\langle 1, \sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \ldots \right\rangle$ आहे.

मॅथेमॅटिकल इंडक्शन तत्व वापरून, आपण हे सिद्ध करू की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ मोनोटोनिकली वाढते आणि बाऊण्डेड अबव्ह आहे.

आता $\sqrt{3} > 1 \Rightarrow a_2 > a_1$

आपले इंडक्शन गृहितक म्हणून गृहीत धरा, की $a_n > a_{n-1}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3a_n} > \sqrt{3a_{n-1}}$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow$ $\langle a_n \rangle$ मॅथेमॅटिकल इंडक्शन तत्त्वानुसार मोनोटोनिकली वाढत आहे.

आता $a_1 = 1 < 3$

मॅथेमॅटिकल इंडक्शन तत्त्वानुसार, आपण असे गृहीत धरू की $a_n < 3$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3 \cdot a_n} < \sqrt{3 \cdot 3}$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} < 3$

$\Rightarrow$ $\langle a_n \rangle$ मॅथेमॅटिकल इंडक्शन तत्त्वानुसार बाऊण्डेड अबव्ह आहे, म्हणून अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ कॉन्व्हर्जंट आहे आणि समजा $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

आता, $\sqrt{3a_n} = a_{n+1}$ दिले आहे.

$\Rightarrow$ $a^2_{n+1} = 3a_n$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \cdot a^2_{n+1} = 3 \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

किंवा $l^2 = 3l$

किंवा $l(l-3) = 0$

$l = 0, 3$

अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ मोनोटोनिकली वाढत आहे आणि $a_1 = 1$, म्हणून

$a_n > a_1 \forall n$

$\Rightarrow$ $a_n > 1$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 1$

$\Rightarrow$ $l \geq 1$

$\therefore$ $l \neq 0$ आणि म्हणून $l = 3$

अशा प्रकारे, अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ हा 3 ला कॉन्व्हर्जं होतो.

अभ्यास 3.2

1. $\langle a_n \rangle$ अनुक्रम कॉन्व्हर्ज होतात हे दाखवा जेथे $\frac{3+2a_n}{2+a_n}, a_1 = 1$. त्याचे लिमिट शोधा.
2. हे दर्शवा की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$, $a_1 = \sqrt{2}$ आणि $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ द्वारे परिभाषित केला आहे तो 2 ला कॉन्व्हर्ज होतो.
3. (i) सिद्ध करा की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$, $a_1 = 1$ आणि $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ द्वारे परिभाषित केला आहे तो 2 ला कॉन्व्हर्ज होतो.

   (ii) सिद्ध करा की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$, $a_{n+1} = \sqrt{7a_n}, a_1 = 1$ द्वारे परिभाषित केला आहे, तो 7 ला कॉन्व्हर्ज होतो.
4. अनुक्रमाच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा $\langle a_n \rangle$ जेथे

   $(i)\quad a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ $\qquad (ii)\quad a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots \frac{1}{3^n}$

उत्तरे

1. $\sqrt{3}$

3.2.6 स्क्वीझ तत्व

विधान: जर $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ आणि $\langle c_n \rangle$ असे तीन अनुक्रम आहेत की

i. सर्व n साठी $a_n \le c_n \le b_n$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, तर $\langle c_n \rangle$ देखील l ला कॉन्व्हर्ज होतो, म्हणजे $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

3.2.7 कॉचिचे लिमिटचे पहिले प्रमेय

जर अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ l ला कॉन्व्हर्ज होत असेल म्हणजे, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ आणि $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ तर अनुक्रम $\langle b_n \rangle$ हा 'a' ला कॉन्व्हर्ज होते.

टिप्पणी: कॉचिच्या लिमिट वरील पहिल्या प्रमेयाचा व्यत्यास हा खरा नसतो.

उदाहरणार्थ: समजा $a_n = (-1)^n$, तर

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{जर } n \text{ सम असेल.} \\ -\frac{1}{n}, & \text{जर } n \text{ विषम असेल.} \end{cases}$$

$\Rightarrow \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \langle b_n \rangle$ कॉन्व्हर्ज होतात.

पण $\langle a_n \rangle$ कॉन्व्हर्ज नाही.

उपप्रमेय: जर $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ जेथे $a_n \ge 0 \forall n$

म्हणजे, जर $\langle a_n \rangle$ हि धन पदांची $a > 0$ ला कॉन्व्हर्ज होणारा अनुक्रम असेल आणि $\langle b_n \rangle = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$, तर $\langle b_n \rangle$ हि a ला कॉन्व्हर्ज होते.

3.2.8 कॉचिचे लिमिटचे दुसरे प्रमेय

विधान: जर $\langle a_n \rangle$ हा धन पदांचा अनुक्रम असेल आणि $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}$ आणि $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}$ दोन्ही अस्तित्वात आहेत फायनाइटली किंवा इन्फायनाइटली, तर $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}$

काही महत्त्वाचे निकाल:

a. समजा $\langle a_n \rangle$ अनुक्रम असा आहे की सर्व n $\in$ N साठी $a_n \neq 0$ आणि $\frac{a_n+1}{a_n} \to l$. जर $|l| < 1$, तर $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b. समजा $\langle x_n \rangle$ आणि $\langle y_n \rangle$ हे खालील अटींचे समाधान करणारे दोन अनुक्रम आहेत.

(i) y_n असे आहे की $\langle y_n \rangle$ मोनोटोनिकली वाढत आहे आणि $y_n \to \infty$ म्हणून $n \to \infty$

(ii) जर $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ तर $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$

टीप: [(b) स्टोल्झ प्रमेय म्हणून ओळखले जाते.]

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.8: स्क्वीझ तत्व वापरून हे दाखवा.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right] = 1$$

उकल: समजा

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \qquad ...(1)$$

पुन्हा,
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \qquad ...(2)$$

(1) आणि (2) द्वारे, आपल्याकडे आहे

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$, म्हणून स्क्वीझ तत्त्वानुसार, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

म्हणजे,
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right] = 1$$

उदाहरण 3.9: जर $a_n = \frac{n!}{n^n}$, तर $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

उकल: येथे,

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1 \qquad \{\because e = 2.718 \text{ approx.}\}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

उदाहरण 3.10: कॉचिचे लिमिटवरील पहिले प्रमेय वापरून, ते दाखवा.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0$$

उकल: समजा

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ मग } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

कॉचिच्या लिमिटवरील पहिल्या प्रमेयाद्वारे,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots.+a_n}{n}\right)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0$$

उदाहरण 3.11: कॉचिचे लिमिटवरील पहिले प्रमेय वापरून, हे सिद्ध करा

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}=e$$

उकल: समजा

$$a_n = \left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

तर $$a_{n+1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

आणि $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

तर, म्हणून कॉचिच्या लिमिटवरील दुसऱ्या प्रमेयाद्वारे,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = e$$

म्हणजे, $$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]=e$$

उदाहरण 3.12: दाखवा $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$

उकल: [सूचना: निकाल (b) वापरा स्टोल्झ प्रमेय]

उदाहरण 3.13: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$$

दोन्ही बाजूंनी लॉग घेऊन, आपल्याला मिळते

$$\log y=\lim_{n\to\infty}\log\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left[-n\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left[-n\left(-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}-\frac{1}{3n^6}\ldots..\right)\right]$$

किंवा

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{3n^5}\ldots..\right]=0$$

$\Rightarrow$

$$y=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}=1$$

उदाहरण 3.14: सिद्ध करा $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{-n}=e$

उकल: समजा

$$a_n=\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$\therefore\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

आता,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1) \cdot n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

येथे $\langle a_n \rangle$ धन पदांचा अनुक्रम असा आहे कि

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

कॉचीच्या लिमिटवरील दुसऱ्या प्रमेयाद्वारे,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = e$$

$$i.e., \ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

अभ्यास 3.3

1. स्क्वीझ तत्व वापरून, ते दर्शवा.

i. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right] = 0$

ii. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right] = \infty$

iii. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right] = 0$

iv. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right] = \frac{1}{2}$

2. कॉचिचे लिमिटवरील पहिले प्रमेय वापरून, दाखवा.

i. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{n}=0$$

ii. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right]=0$$

iii. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}\right]=1$$

3. कॉचिच्या लिमिटवरील दुसऱ्या प्रमेयानुसार, हे सिद्ध करा.

i. $\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=1$ ii. $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}=\infty$

iii. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right]^{\frac{1}{n}}=27$$

iv. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}{n^n}\right]^{1/n}=\frac{4}{e}$$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\ldots+n^{\frac{1}{n}}\right)=1$ ते दाखवा.

5. खालील लिमिटचे मूल्य शोधा:

i. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ ii. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+4}\right)^{n+5}$

iii. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ iv. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$

उत्तरे

5. i. $e^{3/2}$ ii. e iii. e^{-1} iv. 1

प्रस्तावना

सामान्य माणसाच्या दृष्टिकोनासह अनंत श्रेणीची संकल्पना ज्यांना संख्येची बेरीज माहित आहे

खालीलप्रमाणे:

आपण अनंत श्रेणीचा विचार करू

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots. \qquad \ldots(1)$$

जर एखाद्या सामान्य माणसाला कॅल्क्युलेटर किंवा इतर कोणतेही उपकरण वापरून वरील श्रेणीची बेरीज शोधण्यास सांगितले आणि दशांश मांडणी मध्ये बेरीज व्यक्त करा, तर तो अगदी अचूक बेरीज शोधण्याची अपेक्षा ठेऊन पदांची बेरीज करण्यास प्रारंभ करेल. या प्रक्रियेत तो प्राप्त करेल:

दोन पदांची बेरीज = 1 + 0.5 = 1.5

तीन पदांची बेरीज = 1.5 + 0.25 = 1.75

चार पदांची बेरीज = 1.75 + 0.125 = 1.875

पाच पदांची बेरीज = 1.875 + 0.0625 = 1.9375

सहा पदांची बेरीज = 1.9375 + 0.03125 = 1.96875

सात पदांची बेरीज = 1.96875 + 0.015625 = 1.984375

या श्रेणीच्या काही पदांची बेरीज केल्यावर, तो लवकरच या निष्कर्षावर येईल की या श्रेणीची बेरीज होऊ शकत नाही कारण पदांच्या बेरीज करण्याच्या प्रक्रियेचा कधीही अंत होणार नाही कारण तेथे अनंत पदे आहेत.

अशा प्रकारे आपण असा निष्कर्ष काढू की अमर्याद अनेक पदांची अचूक बेरीज शोधणे अशक्य आहे. होय,आपण बरोबर आहोत! पण हा निष्कर्ष क्षणभर एका बाजूला ठेवून, आपण श्रेणी (1) च्या पदांची बेरीज करण्याची प्रक्रिया पुन्हा सुरू करूया. श्रेणीच्या दहा पदांची बेरीज केल्यानंतर, आपल्याला 1.998046875 हि बेरीज मिळेल.

हा आकडा पाहता असे दिसते की आणखी काही पदांपैकी एक किंवा दोन पदांची बेरीज केल्यानंतर ही बेरीज 2 हि संख्या ओलांडेल.

तर, आपण अकराव्या टर्मचे मूल्य शोधूया, $\frac{1}{1024}=0.0009765625$ जे आहे

लक्षात घ्या की या अकराव्या टर्ममध्ये दशांशानंतर 0 ची संख्या पहिल्या दहा पदांच्या बेरीजमध्ये दशांशानंतर 9 च्या संख्येपेक्षा जास्त आहे. म्हणून श्रेणीच्या अकरा पदांची बेरीज 2 हि संख्या ओलांडणार नाही. अशा प्रकारे, आपल्याला श्रेणीची अचूक बेरीज सापडणार नाही परंतु ती 2 क्रमांकाच्या जवळ जाईल आणि तो कधीही पार करणार नाही. श्रेणीच्या या वर्तनासाठी गणितज्ञाने

'कॉन्व्हर्जंट' हे नाव निवडले आहे आणि म्हणून आपण म्हणतो की श्रेणी $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots.$ 2 या संख्येला कॉन्व्हर्ज होते. विशेषतः, 2 हा क्रमांक श्रेणीची बेरीज म्हणून 'परिभाषित' आहे. हे लक्षात घेतले पाहिजे की आपण श्रेणीची अचूक बेरीज 2 आहे असे म्हणत नाही.

समजा आणखी एक अनंत श्रेणी विचारात घेऊ

$$1+2+4+8+16+\ldots. \qquad \ldots(2)$$

स्पष्टपणे, या श्रेणीची बेरीज सर्व मर्यादेच्या पलीकडे जाईल आणि अशा श्रेणींना डायव्हर्जंट असे नाव देण्यात आले आहे.

श्रेणी (1) आणि (2) मधील मुख्य फरक म्हणजे श्रेणी (1) ची पदे लहान होत जात आहेत तर श्रेणी (2) ची पदे मोठी होत आहेत. आपले तात्कालिक ज्ञान (भावना) लक्षात घेऊन दोन श्रेणींमधील फरक काय सांगते. जे आणखी पुढे जाऊन तात्कालिक ज्ञानाने विचार करतील की जर पदे लहान होत असतील, तर श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि पदे मोठी होत असतील तर श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

3.3 इनफाइनाइट श्रेणी

श्रेणी म्हणजे अनुक्रमाच्या पदांची बेरीज. जर $u_1, u_2, u_3 ....$ एक अनुक्रम असेल तर सर्व पदांची बेरीज $u_1 + u_2 + u_3 + ...$ ला अनंत श्रेणी म्हणतात आणि $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ किंवा $\sum u_n$ द्वारे दर्शविले जाते.

जर $\sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + .. + u_n + ..$ अनंत श्रेणी असेल तर

$S_n = u_1 + u_2 + .. + u_n \forall n$

अनुक्रम $\{S_n\}$ ला श्रेणीच्या आंशिक बेरजेचा अनुक्रम म्हणतात आणि

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

प्रत्येक अनंत श्रेणीला, $\sum u_n$ त्याच्या आंशिक बेरजेचा $\{S_n\}$ अनुक्रम असतो.

टिपण्णी: एक अनंत श्रेणी त्याच्या आंशिक अनुक्रमानुसार कॉन्व्हर्ज, डायव्हर्ज किंवा ऑसिलेट असल्याचे म्हटले जाते जर बेरीज $\{S_n\}$ कॉन्व्हर्ज, डायव्हर्ज किंवा ऑसिलेट असेल.

टिपण्णी:

a. $\sum u_n$ ही श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असल्याचे म्हटले जाते जर त्याची आंशिक बेरीज $\{S_n\}$ कॉन्व्हर्जंट असेल.
म्हणजेच, $\lim_{n \to \infty} s_n = a$ फायनाईट संख्या असल्यास $\sum u_n$ कॉन्व्हर्जंट असतो.

b. $\sum u_n$ श्रेणी डायव्हर्जन्ट असल्याचे म्हटले जाते जर त्याची आंशिक बेरीज $\{S_n\}$ डायव्हर्जन्ट असेल. म्हणजेच,
$\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$ किंवा $-\infty$ असल्यास $\sum u_n$ डायव्हर्जन्ट आहे.

c. जर $\{S_n\}$ बाऊण्डेड असेल आणि एकतर कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्ट नसेल तर श्रेणी $\sum u_n$ फायनाईटली ऑसिलेट असते.

d. जर $\{S_n\}$ अनबाऊण्डेड असल्यास आणि कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्ट नसल्यास $\sum u_n$ श्रेणी ऑसिलेट इनफायनाईटली असते.

e. जर आपण श्रेणीतील काही पदे जोडले किंवा वगळले तर अनंत श्रेणीचे कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्ट प्रभावित होत नाही.

f. दिलेल्या शृंखलाला शुन्याव्यतिरिक्त स्थिर संख्येने गुणाकार केल्यावर अनंत श्रेणीचे स्वरूप बदलत नाही.

g. दोन कॉन्व्हर्जंट श्रेणींची बेरीज नेहमी कॉन्व्हर्जंट असते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.15: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+.....$

उकल: येथे,

$$S_n = 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+.....+(-1)^{n-1}\frac{1}{5^{n-1}}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{6} \text{ as } n\to\infty$$ {∴ तो फाइनाइट जी.पी. आहे $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ वापरा.

$\{S_n\}$ एक कॉन्व्हर्जंट अनुक्रम आहे. म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.16: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंन्सची चाचणी घ्या $1^2+3^2+5^2+7^2+...$

उकल:

$1^2+3^2+5^2+7^2+...$ च्या साठी

n^{th} पद $u_n=(2n-1)^2$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$

$\sum u_n$ एक कॉन्व्हर्जंट श्रेणी नाही आणि म्हणूनच ती एक डायव्हर्जन्ट श्रेणी आहे.

उदाहरण 3.17: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंन्सची चाचणी घ्या $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....$

उकल: श्रेणी म्हणून लिहिली जाऊ शकते

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+...\right]$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\Rightarrow \quad S_n\to\frac{1}{2}$ जर $n\to\infty$ $\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ कॉन्व्हर्जंट श्रेणी आहे.

उदाहरण 3.18: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंन्सची चाचणी घ्या $7-4-3+7-4-3+7-4-3+...$

उकल: दिलेल्या श्रेणीसाठी, आंशिक बेरजेचा $\{S_n\}$ अनुक्रम दिला आहे.

$S_n = 7$, जर $n = 3m+1$, $m\geq 0$ एक धन पूर्णांक

$= 0$, जर $n = 3m$, $m\geq 0$ एक धन पूर्णांक

$= 3$, जर $n = 3m-1$, $m > 0$ एक धन पूर्णांक.

म्हणून $\{S_n\}$ हा एक ऑसिलेटरी अनुक्रम आहे.

म्हणून $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ एक ऑसिलेटरी श्रेणी आहे.

अभ्यास 3.4

1. खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चाचणी करा.

   i. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}+...\infty$

   ii. $1^2+2^2+3^2+...n^2+...$

   iii. $-1-2-3.....-n...$

   iv. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

   v. $5-4-1+5-4-1+5-4-1+.....\infty$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ हि श्रेणी $\frac{3}{4}$ ला कॉन्व्हर्जंट होते हे दाखवा.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ हि श्रेणी 4 ला कॉन्व्हर्जंट होते हे दाखवा.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n$ हि श्रेणी इनफायनाईटली ऑसिलेट आहे हे दाखवा.

5. खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंट चाचणी करा:

   a. $1 + 3 + 5 + 7 \ldots \infty$

   b. $-1 - 8 - 27 - 64 \ldots \infty$

उत्तरे

1. i. कॉन्व्हर्जंट. ii. $+\infty$ ला डायव्हर्जन्ट. iii. $-\infty$ ला डायव्हर्जन्ट.
   iv. ऑसिलेट फायनाईटली. v. ऑसिलेट फायनाईटली.

5. a. डायव्हर्जन्ट. b. डायव्हर्जन्ट

3.3.1 जॉमेट्रिक श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स किंवा डायव्हर्जन्स

जॉमेट्रिक श्रेणी $a+ar+ar^2+...+\infty$

(i) कॉन्व्हर्जेस जर $|r|<1$

(ii) $r\geq 1$ असल्यास डायव्हर्जेस होते.

(iii) $r=-1$ असेल तर ऑसिलेट फायनाईटली.

(iv) $r<-1$ असल्यास ऑसिलेट इनफायनाईटली.

सिद्धता: येथे $S_n = a + ar + ar^2 + ..ar^{n-1}$

$$= \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}, \text{ r} \neq 1 \text{ प्रदान केले.}$$

प्रकरण I. जर $|r| < 1$, तर $r^n \to 0$ म्हणून $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$ जे अद्वितीय आणि फायनाईट आहे

अशा प्रकारे दिलेली श्रेणी $\frac{a}{1-r}$ ला कॉन्व्हर्जंट आहे.

प्रकरण II. जर $r > 1$ तर $r^n \to \infty$ म्हणून $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \infty$$

दिलेली श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

जर $r = 1$, तर $S_n = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ times}} = na$

म्हणून $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

अशा प्रकारे डायव्हर्जन्ट आहे.

प्रकरण III. जर $r = -1$, तर $S_n = a - a + a - a + ...$ n वेळा पर्यंत

$$= \begin{cases} a & \text{जर } n \text{ हे विषमअसेल} \\ 0 & \text{जर } n \text{ हे सम असेल} \end{cases}$$

म्हणून अनुक्रम $\{S_n\}$ ऑसिलेट आहे आणि म्हणून श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ऑसिलेट फायनाईटली.

प्रकरण IV. जर $r < -1$

$\Rightarrow$ $-r > 1 \Rightarrow x > 1$ जेथे $x = -r$

$\Rightarrow$ $x^n \to \infty, \; n \to \infty$

आता, $$S^n = \frac{a(1-r)^n}{1-r} = \frac{a\left(1-(-x)^n\right)}{1+x}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a\left(1-x^n\right)}{1+x} & n \text{ सम आहे.} \\[2ex] \dfrac{a\left(1+x^n\right)}{1+x} & n \text{ विषम आहे.} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} -\infty, & n \text{ सम आहे.} \\ \infty, & n \text{ विषम आहे.} \end{cases}$$

अशाप्रकारे अनुक्रम $\{S_n\}$ इनफायनाईटली ऑसिलेट होतो आणि म्हणून दिलेली श्रेणी इनफायनाईटली ऑसिलेट आहे.

जॉमेट्रिक श्रेणीची उदाहरणे (कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्ट)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

   ही $\quad r = \frac{1}{2}$ सह जॉमेट्रिक श्रेणी आहे.

   $r = \frac{1}{2} < 1$

   ही कॉन्व्हर्जंट श्रेणी आहे.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots$

   ही $\quad r = 3$ सह जॉमेट्रिक श्रेणी आहे.

   $r = 3 > 1$

   ही डायव्हर्जन्ट श्रेणी आहे.

3. $\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \dots.$

   ही $\quad r = -1$ सह जॉमेट्रिक श्रेणी आहे.

   $r = -1$

   दिलेली श्रेणी ऑसिलेट फायनाईटली.

3.3.2 धन पदांची श्रेणी

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ज्यासाठी $a_n > 0$ सर्व n साठी, धन संज्ञांची श्रेणी म्हणतात.

मूलभूत निष्पत्ती:

कॉन्व्हर्जन्स साठी पुरेशी अट: जर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्जेस, तर $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ आणि याच्या उलट नेहमी खरे नसते.

परिणाम:

a. (धन सज्ञांच्या श्रेणीसाठी एक मूलभूत चाचणी) एक धन संज्ञा श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्जंट असते

जर आणि तरच आंशिक बेरजेचा अनुक्रम $<S_n>$ बाऊण्डेड अबव्ह असेल म्हणजे एक धन संज्ञा श्रेणी $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जेस.

$\Rightarrow S_n < k \forall n$ म्हणजेच, (k हि एक धन वास्तविक संख्या आहे.)

b. मोनोटोनिक अनुक्रम एकतर कॉन्व्हर्जेस होते किंवा डायव्हर्ज होते ऑसिलेट होत नाही. म्हणून एक धन संज्ञा श्रेणी एकतर कॉन्व्हर्ज होते किंवा डायव्हर्ज होते.
म्हणजेच, धन संज्ञा श्रेणी ऑसिलेट असू शकत नाही.

टिपण्णी:

a. जर $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ तर धन संज्ञा श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $+\infty$ वर डायव्हर्ज होते.

b. जर $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, तर धन संज्ञा $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ श्रेणीच्या वर्तनाबद्दल काहीच निष्कर्ष काढता येत नाही.

3.3.3 कॉचिचे कॉन्व्हर्जंन्सचे सामान्य तत्व

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्ज होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट हीआहे कि प्रत्येक $\in > 0$ साठी, तेथे धन पूर्णांक संख्या m अशी अस्तित्वात असते कि

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$ सर्वांसाठी $n \geq m$.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.19: दाखवा $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \ldots$ श्रेणी कॉन्व्हर्ज होत नाही.

उकल: समजा दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्ज होते. तर दिलेल्या श्रेणीच्या आंशिक बेरीज $\langle S_n \rangle$ चा अनुक्रम कॉन्व्हर्जंट आहे. कॉचीच्या अनुक्रमासाठी कॉन्व्हर्जंन्स तत्त्वाद्वारे, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ साठी तेथे धन पूर्णांक संख्या m अशी अस्तित्वात येते कि

$$|S_n - S_m| < \frac{1}{2} \forall n \geq m$$

$$\left|\left(1+\frac{1}{2}+..+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+..+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+..\frac{1}{m}\right)\right|<\frac{1}{2}\forall n\geq m$$

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+..+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\forall n\geq m \qquad \ldots(i)$$

$n=2m$ घेतल्यावर आपण ते पाहू

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+..+\frac{1}{n}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+..+\frac{1}{2m}>\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+...+\frac{1}{2m}$$

$$=m.\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+..+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}(n=2m>m) \qquad \ldots(ii)$$

(i) आणि (ii) परस्परविरोधी विधान असल्याने, दिलेल्या श्रेणी कॉन्व्हर्जंट नाहीत.

3.3.4 तुलना चाचणी

चाचणी I.

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ या धन पदांची श्रेणी आहे आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे आणि एक धन स्थिरांक k

असा आहे की $a_n \leq kb_n$, ∀n>m तर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

चाचणी II.

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ दोन धन संज्ञा श्रेणी आहेत आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ डायव्हर्जन्ट आहे आणि एक धन स्थिरांक k असा आहे

की

$a_n > kb_n, \forall n > m$ तर $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ देखील डायव्हर्जन्ट आहे.

चाचणी III.

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ दोन धन संज्ञा श्रेणी आणि k, K या दोन धन संख्या अशा आहेत की $kb_n < a_n < k \cdot b_n$ सर्व

n साठी

तर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

चाचणी IV.

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ दोन श्रेणी किंवा धन संज्ञा अशा आहेत की $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

(फाइनाइट आणि शून्य नसलेले), तर दोन्ही श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

> **टिप्पणी:**
>
> वरील चाचणीमध्ये अशी अट आहे की $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ फायनाईट आहे आणि नॉन झिरो सोडले जाऊ शकत नाही. $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = \frac{1}{n^2}$ चा विचार करा आणि $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ येथे $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ हि डायव्हर्जन्ट आहे आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ हि कॉन्व्हर्जंट म्हणून $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होत नाहीत.

चाचणी V.

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ या धन संज्ञाच्या दोन श्रेणी अशा आहेत की

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ कॉन्व्हर्जंट असेल, तर एक $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्जंट असते.

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ डायव्हर्जन्ट असेल, तर एक $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ डायव्हर्जन्ट असते.

चाचणी VI.

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ धन संज्ञाच्या दोन श्रेणी अशा आहेत की $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}$ सर्व $n \geq m$ साठी, जेथे m धन पूर्णांक आहे, तर

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ कॉन्व्हर्जंट $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्जंट होतो.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ डायव्हर्जेस $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ डायव्हर्जेस.

3.3.5 तुलनासाठी महत्वाची चाचणी

[$\frac{1}{n^p}$ हायपर हार्मोनिक श्रेणी किंवा p- श्रेणी]

प्रमेय: श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}...+\frac{1}{n^p}+....$

(i) जर $p>1$ असल्यास कॉन्व्हर्ज होते.

(ii) जर $p\le 1$ असल्यास डायव्हर्ज होते.

सिद्धता: प्रकरण I. जर $p>1$

$$\frac{1}{1^p}=1$$

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=\frac{4}{4^p}=\frac{1}{4^{p-1}}=\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^2}$$

....

....

....

$$\frac{1}{\left(2^n\right)^p}+...+\frac{1}{\left(2^{n+1}-1\right)^p}<\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^n}$$

वरील असमानतेची बेरीज करून, आपल्याकडे आहे.

$$S_{2^{n+1}-1}<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^2}+...+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^n}$$

वरील असमानतेमध्ये उजवी बाजू सामान्य गुणोत्तर $\frac{1}{2^{p-1}}<1$ असलेली भौमितिक श्रेणी आहे.

$$S_{2^{n+1}-1}<\frac{1\left[1-\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^n}\right]}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} \qquad \left\{\because \; S_n=\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}\right\}$$

$$S_{2^{n+1}-1}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$$

$S_{2^{n+1}-1}<k$ जिथे $k=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$ निश्चित आहे.

परंतु $\qquad S_n<S_{2^{n+1}-1}$ सर्व n साठी

$$S_n < k \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

$\Rightarrow$ अनुक्रम $\langle S_n \rangle$ हा बाऊण्डेड अबव्ह आहे. परंतु प्रत्येक धन पदांचा अनुक्रम जो बाऊण्डेड अबव्ह तो कॉन्व्हर्जंट असतो.

$\Rightarrow$ $\langle S_n \rangle$ कॉन्व्हर्जंट आहे आणि म्हणून दिलेली श्रेणी $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

प्रकरण II. जर $p = 1$ या प्रकरणात आपल्याकडे श्रेणी आहे.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

आपल्याकडे आहे

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}$$

वरील असमानतेची बेरीज करून, आपल्याकडे आहे.

$$S_{2^n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots. \; n \text{ अटींपर्यंत.}$$

$$S_{2^n} > \frac{n}{2}$$

अनुक्रम S_{2^n} बाऊण्डेड अबव्ह नाही कारण n पुरेशी मोठी मूल्ये घेऊ शकते.

म्हणून श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $+\infty$ ला डायव्हर्ज होते.

प्रकरण III. जर $p<1$

येथे $n^p<n$ सर्व n किंवा $\dfrac{1}{n^p}>\dfrac{1}{n}$ सर्व n साठी.

प्रकरण II द्वारे, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ देखील डायव्हर्जन्ट आहे.

तुलना चाचणी द्वारे $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ देखील डायव्हर्जन्ट आहे.

हे निकाल सिद्ध करते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.20: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चाचणी घ्या:

(i) $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots\infty$ (ii) $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{2}{3.5}+\dfrac{3}{5.7}+\ldots\infty$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{1.2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2.3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3.4}}+\ldots\infty$

उकल:

(i) $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots\infty$

ही श्रेणी म्हणून लिहिली जाऊ शकते

$$\sum a_n=\sum\frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

समजा $b_n=\dfrac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n^2}}$$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$ नॉनझिरो आणि फायनाईट.

तुलना चाचणीद्वारे, $\sum a_n$ आणि $\sum b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

पण $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ हा $\sum \frac{1}{n^p}$ या स्वरूपाचा आहे.

येथे $p = 2 > 1$

$\therefore \sum b_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

$\Rightarrow \sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

ii. सूचना: $a_n = \frac{n}{(2n-1)(2n-1)}$ आणि $b_n = \frac{1}{n}$

iii. $\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \frac{1}{\sqrt{3.4}} + ...\infty$

येथे $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

समजा $b_n = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$\therefore \sum a_n$ आणि $\sum b_n$ दोन्ही एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

पण $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ डायव्हर्जन्ट आहे (p = 1 असल्याने).

म्हणून दिलेली श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.21: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा $\frac{2}{1^p} + \frac{3}{2^p} + \frac{4}{3^p} + ...\infty$

उकल: सूचना:

$a_n = \frac{(n+1)}{n^p}$ आणि $b_n = \frac{1}{n^{(p-1)}}$

उत्तर: दिलेली श्रेणी $p > 2$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $p \le 2$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.22: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(2n-1)}$

उकल: येथे

$$a_n = \frac{n+1}{n(2n-1)} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)}$$

समजा $$b_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$ (मर्यादित आणि शून्य नसलेले).

तुलनात्मक चाचणीद्वारे $\sum a_n$ आणि $\sum b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

परंतु $\sum b_n = \frac{1}{n}$ डायव्हर्जन्ट आहे $\{\because p = 1, p-test\}$

त्यामुळे दिलेली श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.23: खालील श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\,(n+1)^p}$ ii. $\frac{2^p}{1^q}+\frac{3^p}{2^q}+\frac{4^p}{3^q}+\ldots\infty$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ iv. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+1}$

उकल:

i. **सूचना:** $a_n = \frac{1}{(n^p)(n+1)^p}$ आणि $b_n = \frac{1}{n^{2p}}$

उकल:

दिलेली श्रेणी $p > \frac{1}{2}$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट असेल आणि $p \le \frac{1}{2}$ असल्यास डायव्हर्जन्ट असेल.

ii. **सूचना:** $a_n = \frac{(n+1)^p}{n^q}$ आणि $b_n = \frac{1}{n^{(q-p)}}$

उकल: दिलेली श्रेणी $q > p+1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट असेल आणि $q \le p+1$ असल्यास डायव्हर्जंट असेल.

iii. **सूचना:** $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\left(n^2+1\right)}$ आणि $b_n = \dfrac{1}{n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$

उकल: दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

iv. **सूचना:** $a_n = \dfrac{\sqrt{\left(n^2-1\right)}}{\left(n^3+1\right)}$ आणि $b_n = \dfrac{1}{n^2}$

उकल: दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.24: दिलेल्या श्रेणीचे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा:

a. $\dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{7} + \dfrac{\sqrt{3}}{9} + \dfrac{\sqrt{4}}{11} + \ldots \infty$

b. $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \ldots \infty$

उकल:

a. **सूचना:** $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{(2n+3)}$ आणि $b_n = \dfrac{1}{n^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$

उकल: दिलेली श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

b. $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + \ldots.\infty$

येथे $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}$

आणि समजा $b_n = \dfrac{1}{n^3}$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = 1 \qquad \text{(मर्यादित आणि शून्य नसलेले)}$$

$\sum a_n$ आणि $\sum b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

परंतु $\sum b_n = \dfrac{1}{n^3}$ कॉन्व्हर्जंट आहे कारण $p = 3 > 1$ पासून p-test द्वारे.

म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.25: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा $\sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

उकल:

येथे $$a_n = \sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

$$= \sqrt{n^2+1}-n \times \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

समजा $$b_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

तुलनात्मक चाचणीद्वारे $\sum a_n$ आणि $\sum b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

पण $\sum b_n = \frac{1}{n}$ डायव्हर्जन्ट आहे. ($\because \; p=1$, p चाचणी द्वारे)

म्हणून दिलेली श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.26: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा: $\sum\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.27: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चाचणी घ्या $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3}+.....$

उकल: सूचना: $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ आणि $b_n = \frac{1}{n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$

उत्तर: दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.28. श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चाचणी घ्या $\sum\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

उकल. दिलेली श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.29: खालील श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

(a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ (b) $\Sigma \cot^{-1} n^2$

(c) $\sum\left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

उकल:

(a) सूचना: वापरा $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.....$

उकल: दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

(b) $\sum a_n = \sum \cot^{-1} n^2$

$$a_n = \cot^{-1} n^2$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{n^2} \qquad \left\{\because \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n^2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{n^2}\right)^7 + ...$$

समजा $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$$

चाचणी वरून a_n आणि b_n एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

पण $b_n = \frac{1}{n^2}$, $p = 2 > 1$ म्हणून पी-चाचणीद्वारे कॉन्व्हर्जंट आहे.

$\Rightarrow \sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

(c) $a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}$

$$= \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{4n^4} \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} \cdots$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} \cdots \right]$$

समजा $b_n = \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$ (फाइनाइट आणि शून्य नसलेले)

$\sum a_n$ आणि $\sum b_n$ दोन्ही एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

पण $p = 2 > 1$ आहे म्हणून $\sum b_n = \frac{1}{n^2}$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

त्यामुळे a_n देखील कॉन्व्हर्जंट आहे.

(d) सूचना: वापरा $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots\ldots$

उकल: श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.30: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा $\sum \frac{x^{n-1}}{1+x^n}, x > 0$

उकल. समजा

$$a_n = \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$$

कॉन्व्हर्जंन्स तपासण्यासाठी, आपल्याकडे खालील प्रकरणे आहेत:

प्रकरण I. $\quad 0 < x < 1$

मग $\quad x^n \to 0$ म्हणून $n \to \infty$

समजा $\quad b_n = x^{n-1}$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+0} = 1$ (मर्यादित आणि शून्य नसलेले).

$\sum a_n$ आणि $\sum b_n$ दोन्ही एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायव्हर्ज होतात.

पण $\sum b_n = \sum x^{n-1}$ ही सामान्य गुणोत्तर $x<1$ असलेली G.P. श्रेणी आहे.

$\therefore \sum b_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

$\therefore \sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

प्रकरण II. जर $x=1$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ (मर्यादित आणि शून्य नसलेले)

जर $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, तर $\sum a_n$ बदलत नाही.

$\sum a_n$ ही एक डायव्हर्जन्ट श्रेणी आहे.

प्रकरण III. जर $x>1$ तर $0<\frac{1}{x}<1$ आणि $\frac{1}{x^n} \to 0$ म्हणून $n \to \infty$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n \cdot x\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} = \frac{1}{x} \neq 0$$

त्यामुळे श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

अशा प्रकारे दिलेली श्रेणी $x<1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट असते आणि $x \geq 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट असते.

अभ्यास 3.5

खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंन्स किंवा डायव्हर्जन्सची चाचणी घ्या:

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots\infty$

(2) $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\ldots\infty$

(3) $\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4}+\frac{3}{5.6}+\ldots\infty$

(4) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\ldots\infty$

(5) $1+\frac{1}{4^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{9^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{16^{\frac{2}{3}}}+\ldots\infty$

(6) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+\ldots$

(7) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots$

(8) $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{2}{6}}+\sqrt{\frac{3}{8}}+\ldots.+\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}+\ldots$

(9) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\frac{4^4}{5^5}\ldots$

(10) $\frac{\sqrt{2}-1}{3^3-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{4^3-1}+\frac{\sqrt{4}-1}{5^3-1}\ldots$

(11) $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+...$

(12) $\sum\frac{2n^3+5}{4n^5+1}$

(13) $\sum\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right)$

(14) $\sum\frac{\sqrt[3]{3n^2+1}}{\sqrt[4]{4n^3+2n+7}}$

(15) $\frac{1}{1^2}+\frac{1+2}{1^2+2^2}+\frac{1+2+3}{1^2+2^2+3^2}+...$

(16) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{1+2\sqrt{3}}+\frac{3}{1+3\sqrt{4}}+...$

(17) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{a}{(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+4b)(a+5b)}+...\infty, a>0, b>0$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n+x^{-n}}, x>0$

उत्तरे

1. कॉन्व्हर्जंट
2. कॉन्व्हर्जंट
3. डायव्हर्जन्ट
4. कॉन्व्हर्जंट
5. कॉन्व्हर्जंट
6. कॉन्व्हर्जंट
7. डायव्हर्जन्ट
8. डायव्हर्जन्ट
9. डायव्हर्जंट
10. कॉन्व्हर्जंट
11. $p>1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $p\le 1$ साठी डायव्हर्जंट
12. कॉन्व्हर्जंट
13. कॉन्व्हर्जंट
14. डायव्हर्जन्ट
15. डायव्हर्जन्ट
16. डायव्हर्जन्ट
17. कॉन्व्हर्जंट
18. कॉन्व्हर्जंट जर $p>\frac{1}{2}$ आणि $p\le\frac{1}{2}$ असल्यास डायव्हर्जन्ट
19. कॉन्व्हर्जंट
20. $x<1$ आणि $x>1$ साठी कॉन्व्हर्जंट परंतु x=1 साठी डायव्हर्जन्ट होते.

3.3.6 डी 'अलेम्बर्ट्स गुणोत्तर चाचणी

जर $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ हि धन पदांची अशी श्रेणी आहे कि $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l$, मग

(i) $l>1$ साठी, श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

(ii) $l<1$ साठी, श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

(iii) $l=1$ साठी, कोणताही निष्कर्ष नाही (म्हणजे, चाचणी अयशस्वी).

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.31: खालील श्रेणींच्या कॉन्व्हर्जंन्सची चर्चा करा:

$(i)\quad 1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+....\infty$

$(ii)\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+2^3}+....\infty$

$(iii)\ \frac{2}{1}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\frac{2.5.8.11}{1.5.9.13}+....\infty$

$(iv)\frac{2!}{3}+\frac{3!}{3^2}+\frac{4!}{3^3}+....\infty$

$(v)\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1.2}{3.5}\right)^2+\left(\frac{1.2.3}{3.5.7}\right)^2+\left(\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}\right)^2....\infty$

उकल:

(i) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+....\infty$

येथे $$a_n=\frac{n!}{n^n},a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^n.(n+1)}{n^n(n+1)n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

$\therefore\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

(ii) सूचना: $a_n=\frac{n}{1+2^n}$

उकल: कॉन्व्हर्जंट.

(iii) **सूचना:** $a_n=\frac{2.5.8.11....(3n-1)}{1.5.9.13...\left[4(n-1)+1\right]}$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

(iv) **सूचना:** $a_n = \dfrac{(n+1)!}{3^n}$

उकल: डायव्हर्जन्ट.

(v) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1.2}{3.5}\right)^2 + \left(\dfrac{1.2.3}{3.5.7}\right)^2 + \left(\dfrac{1.2.3.4}{3.5.7.9}\right)^2 ....\infty$

उकल: येथे $a_n = \left[\dfrac{1.2.3.4..n}{3.5.7.9...(2n+1)}\right]^2$

$$a_{n+1} = \left[\frac{1.2.3.4..n(n+1)}{3.5.7.9...(2n+1)(2n+3)}\right]^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+3)}{(n+1)}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\left(\frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$= 4 > 1$$

$\therefore \sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.32: खालील श्रेणींच्या कॉन्व्हर्जंन्सची चर्चा करा:

$(i)\ \sum \dfrac{2^{n-1}}{3^n+1}$ $\qquad (ii)\ \sum \dfrac{1}{n!}$

$(iii)\ \sum \dfrac{x^n}{3^n \cdot n^2}, x > 0$ $\qquad (iv) \sum \dfrac{x^n}{n}, x > 0$

$(v) \sum \dfrac{n}{n^2+1} \cdot x^n, x > 0$ $\qquad (vi) \sum \left(\dfrac{n^2}{2^n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

(i) **उकल:** $\sum \dfrac{2^{n-1}}{3^n+1}$

येथे $a_n = \sum \dfrac{2^{n-1}}{3^n+1}$

आणि $a_{n+1} = \sum \dfrac{2^n}{3^{n+1}+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n+1}\times\frac{3^{n+1}+1}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 3^{n+1}\left(1+\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{2\cdot 3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{3^{n+1}}}{1+\frac{1}{3^n}}\right)=\frac{3}{2}>1$$

$\therefore \sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

(ii) **स्वतः** प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट

(iii) **स्वतः** प्रयत्न करा.

उकल. श्रेणी $3\geq x$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $3<x$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

(iv) **स्वतः** प्रयत्न करा.

उकल: $x<1$ असल्यास श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x\geq 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट आहे.

(v) $\sum\frac{n}{n^2+1}\cdot x^n, x>0$

येथे $\qquad a_n=\frac{nx^n}{n^2+1} \qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)\cdot x^{n+1}}{(n+1)^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}x^n\times\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)x^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot x^n\cdot n^2\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]}{n\cdot n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n\cdot x}=\frac{1}{x}$$

गुणोत्तर चाचणीनुसार श्रेणी $\sum a_n$ ही $\frac{1}{x}>1$ म्हणजे $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x>1$ साठी डायव्हर्जंट आहे तर $x=1$ साठी चाचणी अयशस्वी होते.

दिलेल्या श्रेणीत $x=1$ ठेऊन, $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}$

समजा $b_n = \dfrac{1}{n}$ जे डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून $x<1$ साठी श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x \geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

(vi) $\sum\left(\dfrac{n^2}{2^n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\sum\left(\frac{n^2}{2^n}+\frac{1}{n^2}\right) = \sum a_n + \sum b_n$$

येथे $$a_n = \frac{n^2}{2^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$\therefore$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}x^n \times \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 \cdot 2^n \cdot 2}{2^n \cdot n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^2} = 2 > 1$$

त्यामुळे $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

तसेच $\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n^2}$ हे p-test द्वारे कॉन्व्हर्जंट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.33: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंन्सची चर्चा करा $\sum\sqrt{\dfrac{n+1}{n^3+1}}.x^n, x>0$

उकल: येथे $a_n = \sum\sqrt{\dfrac{n+1}{n^3+1}}.x^n$

$$a_{n+1} = \sum \sqrt{\frac{n+2}{(n+1)^3+1}} . x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} \cdot x^n \times \sqrt{\frac{(n+1)^3+1}{(n+2)}} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}$$

$\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $\frac{1}{x} > 1$ म्हणजे, $x < 1$ आणि जर $\frac{1}{x} < 1$ म्हणजे $x > 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.

जर $\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \quad x = 1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

दिलेल्या श्रेणीमध्ये $x = 1$ ठेवा

$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}$$

समजा $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ जे p-test द्वारे डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी $x < 1$ साठी आणि $x \geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.34: $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...\infty$

उकल: येथे $a_n = nx^n$

$$a_{n+1} = (n+1)x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^n}{(n+1)x^{n+1}} = \frac{1}{x}$$

डी च्या अलेम्बर्ट च्या गुणोत्तर चाचणी द्वारे, ही श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असेल जर $\frac{1}{x} > 1$ म्हणजे $x < 1$

तर $\frac{1}{x} < 1$ म्हणजे, $x > 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट असेल.

जर $\frac{1}{x} = 1$ म्हणजे, $x = 1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

दिलेल्या श्रेणीमध्ये $x = 1$ ठेवा.

$$\sum a_n = \sum n, \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$\therefore \ x=1$ साठी श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे, $x\geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.35: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा $x+\frac{3}{5}x^2+\frac{8}{10}x^3+\frac{15}{17}x^4+\ldots\frac{n^2-1}{n^2+1}x^n$

उकल: समजा

$$a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}x^n, a_{n+1}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}\cdot x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}\cdot x^n\times\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}=\frac{1}{x}$$

$\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $\frac{1}{x}>1$, म्हणजे, $x<1$ आणि जर $\frac{1}{x}<1$ म्हणजे $x>1$ असेल तर डायव्हर्जन्ट असेल.

$x=1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

दिलेल्या श्रेणीमध्ये $x=1$ ठेवा, आपल्याला मिळते,

$$a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}, \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$$

धन पदांच्या श्रेणीसाठी $\sum a_n$ परिणामानुसार, जर $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, तर $\sum a_n$ एक डेफिनाईटिली डायव्हर्जन्ट असते.

$\therefore \quad \sum a_n \quad x=1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

$\sum\frac{n^2-1}{n^2+1}\cdot x^n \quad x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे, $x\geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.36: $\sum\frac{3^n-2}{3^n+1}\cdot x^{n-1}, x>0$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x\geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.

उदाहरण 3.37: $\sum\frac{n.x^n}{(n+1)(n+2)}$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x\geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.

उदाहरण 3.38: $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\ldots.\infty$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: $x^2 < 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x^2 \geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.

उदाहरण 3.39: $\frac{4}{18}+\frac{4.12}{18.27}+\frac{4.12.20}{18.27.36}+\ldots\infty$

उकल: सूचना: श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उकल: $\frac{4.12.20\ldots(8n-4)}{18.27.36\ldots(9n+9)}$

अभ्यास 3.6

खालील श्रेणींच्या च्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

1. $1+\frac{2^p}{2!}+\frac{3^p}{3!}+\frac{4^p}{4!}+\ldots, (p>0)$
2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ldots+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots$
3. $\frac{1^2 . 2^2}{1!}+\frac{2^2 . 3^2}{2!}+\frac{3^2 . 4^2}{3!}+\frac{4^2 . 5^2}{4!}+\ldots\ldots\infty$
4. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\ldots\infty$
5. $\sum\frac{n^3+a}{2^n+a}$
6. $\sum\frac{n!3^n}{n^n}$
7. $\sum\frac{n!}{n^n}$
8. $\sum\frac{n^3-n+1}{n!}$
9. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x}{4\cdot5\cdot6}+\frac{x^2}{7\cdot8\cdot9}+\ldots\infty, (x>0)$
10. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\ldots+\frac{x^n}{n^2+1}+\ldots\infty$
11. $\frac{x}{1\cdot3}+\frac{x^2}{3\cdot5}+\frac{x^3}{5\cdot7}+\ldots$
12. $\frac{x}{2\sqrt{3}}+\frac{x^2}{3\sqrt{4}}+\frac{x^2}{4\sqrt{5}}+\ldots\infty$
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$
15. $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3+\sqrt{3}}+\ldots\infty$
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)^2 . 2^n}$
17. $1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\frac{7}{4!}+\ldots\infty$
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$
19. $1+\frac{1^2\cdot2^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\infty$
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot6\cdot9\ldots3n}{4\cdot7\cdot10\ldots(3n+1)}\cdot\frac{5^n}{3n+2}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}x^n, (x>0)$
22. $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+\frac{x^6}{5\sqrt{4}}+\ldots$

23. $1+\frac{2}{5}x+\frac{6}{9}x^2+\frac{14}{17}x^3+\ldots\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}.x^n+\ldots(x>0)$

24. $1+\frac{\alpha+1}{\beta+1}+\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)}+\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3a+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)(3\beta+1)}+\ldots$

उत्तरे

1. कॉन्व्हर्जंट
2. कॉन्व्हर्जंट
3. डायव्हर्जन्ट
4. कॉन्व्हर्जंट
5. कॉन्व्हर्जंट
6. डायव्हर्जन्ट
7. कॉन्व्हर्जंट
8. कॉन्व्हर्जंट
9. $x\le 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट, $x>1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
10. $x\le 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट $x>1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
11. $x\le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x>1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
12. $x\le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x>1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
13. कॉन्व्हर्जंट
14. कॉन्व्हर्जंट.
15. $x<1$ साठी कन्व्हर्जंट, $x\ge 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
16. $x\ge 2$ असल्यास कन्व्हर्जंट, $x>2$ असल्यास डायव्हर्जंट.
17. कॉन्व्हर्जंट
18. $x\le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x>1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
19. कॉन्व्हर्जंट
20. डायव्हर्जन्ट.
21. $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x\ge 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
22. $x^2\le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x^2>1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
23. $x<1$ असल्यास कन्व्हर्जंट, $x\ge 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
24. $\beta>\alpha>0$ असल्यास कन्व्हर्जंट, $\alpha\ge\beta>0$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.

3.3.7 कॉचीची मूळ चाचणी (Cahchy's Root Test)

जर $\sum a_n$ एक धन संज्ञा श्रेणी आणि $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$ आहे, तर

(i) जर $l < 1$ असेल तर $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

(ii) $l > 1$ असल्यास $\sum a_n$ डायव्हर्जन्ट आहे.

जर $l = 1$, चाचणी अयशस्वी होते, कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्टबद्दल कोणताही निष्कर्ष काढला जाऊ शकत नाही.

टिपण्णी: जेव्हा $\langle a_n \rangle$ n^{th} घातांक असणाऱ्या पदावलीच्या समावेष करते तेव्हा हि चाचणी उपयुक्त आहे.
जर ही चाचणी अयशस्वी झाली, तर तुलना चाचणी वापरली जाऊ शकते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.40: $\sum \frac{1}{n^n}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: येथे

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 0 < 1$$

कॉचीच्या चाचणीद्वारे, ही श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.41: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: येथे

$$a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} < 1$$

$\therefore$ श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.42: $\sum\left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट.

उदाहरण 3.43: $\sum\frac{(n-\log n)^{n}}{2^{n}\cdot n^{n}}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट.

उदाहरण 3.44: $\sum\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: येथे

$$a_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}=\frac{1}{e}$$

जे 1 पेक्षा लहान आहे. $\quad\therefore\ \frac{1}{e}<1$

म्हणून ही श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.45: $\sum\left(\frac{nx}{(n+1)}\right)^{n}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: येथे

$$a_n=\sum\left(\frac{nx}{(n+1)}\right)^{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = x$$

$x<1$ असल्यास श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

$x>1$ असल्यास श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

आणि $x=1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

दिलेल्या श्रेणीमध्ये $x=1$ ठेवा.

$$a_n = \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) = \frac{1}{e} \neq 0$$ (∵ जर $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, तर $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट नाही)

म्हणून $\sum a_n$ डायव्हर्जन्ट आहे.

दिलेली श्रेणी $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x \geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.46: $\sum 5^{-n-(-1)^n}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट.

उदाहरण 3.47: $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{4^3}+\ldots\infty$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: येथे

$$a_n = \frac{x^{n-1}}{n^{n-1}}$$ (पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून)

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{n^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{n^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot x^{\frac{-1}{n}}}{n\cdot n^{\frac{-1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0<1$$

$\therefore$ श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.48: $\sum\frac{(1+nx)^n}{n^n}$ चे कॉन्व्हर्जंन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x\geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

अभ्यास 3.7

खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंन्स किंवा डायव्हर्जन्सची चाचणी घ्या:

1. $\sum\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^{n^2}$ किंवा $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

2. $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots$

3. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\ldots(x>0)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot x^n}{n^{n+1}}$

5. $\frac{2x}{1^2}+\frac{3^2x^2}{2^3}+\frac{4^3x^3}{3^4}+\ldots+\frac{(n+1)^n\cdot x^n}{n^{n+1}}+\ldots$

उत्तरे

1. कॉन्व्हर्जंट
2. कॉन्व्हर्जंट
3. जर $x<1$ तर कॉन्व्हर्जंट, जर $x\geq 1$ तर डायव्हर्जंट.
4. जर $x<1$ तर कॉन्व्हर्जंट जर $x\geq 1$ तर डायव्हर्जंट
5. जर $x<1$ तर कॉन्व्हर्जंट जर $x\geq 1$ तर डायव्हर्जंट.

3.3.8 राबेची चाचणी (Raabe's Test)

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ धन पदांची श्रेणी अशी आहे कि $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=l$ आहे.

मग श्रेणी आहे.

(i) जर $l>1$ असेल तर कॉन्व्हर्जंट आहे.

(ii) $l<1$ असल्यास डायव्हर्जंट.

(iii) $l=1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी असते.

टिपण्णी:

a. डी 'अलेम्बर्ट गुणोत्तर चाचणी अपयशी झाल्यावर आणि $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ मध्ये e चा समावेष नसेल तेव्हा राबेची चाचणी वापरली जाते.

b. गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी झाल्यावर आणि $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ मध्ये e चा समावेष होत असेल तर लॉगरिद्मिक चाचणी वापरली जाते.

c. $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=1$ असताना राबेची चाचणी अनिर्णीत आहे.

3.3.9 लॉगरिद्मिक चाचणी

जर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ धन पदांची श्रेणी अशी आहे की $\lim_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+1}}=l$ तर श्रेणी आहे.

(i) जर $l>1$ असेल तर कॉन्व्हर्जंट.

(ii) $l<1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.

(iii) $l=1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

3.3.10 गॉस चाचणी

जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ धन पदांची श्रेणी अशी आहे कि $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ स्वरूपात विस्तारित केले जाऊ शकते.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

तर $\sum a_n$ जर $\lambda>1$ असेल तर कॉन्व्हर्जंट असते आणि $\lambda\leq 1$ असेल तर डायव्हर्जन्ट असतो.

टिपण्णी:

a. गॉस चाचणीसाठी, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ चा $\dfrac{1}{n}$ च्या घातांकामध्ये विस्तार करा म्हणून $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, जेथे $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

हे $\dfrac{1}{n}$ च्या उच्च घातांकाच्या पदासाठी दर्शविले जाते.

b. श्रेणी $\lambda = 1$ साठी डायवर्जेस होते म्हणून चाचणी कधीही अपयशी ठरत नाही. शिवाय $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ चाचणी लागू आहे गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी झाल्यानंतर आणि जेव्हा $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ याचा $\dfrac{1}{n}$ च्या घातांकामध्ये बायोनॉमिअल प्रमेयाद्वारे किंवा इतर कोणत्याही पद्धतीद्वारे विस्तार करणे शक्य आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.49: खालील श्रेणींच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

$(a)\ 1+\dfrac{2^2}{3^2}+\dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{4^2}{5^2}+\dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{4^2}{5^2}\cdot\dfrac{6^2}{7^2}+\ldots\infty$

$(b)\ 1+\dfrac{3}{7}x+\dfrac{3.6}{7.10}x^2+\dfrac{3.6.9}{7.10.13}x^3+\ldots\infty$

$(c)\ 1+\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\cdot4}{1\cdot3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}\cdot\dfrac{1}{4}+\ldots\infty$

$(d)\ x+\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{3^3x^3}{3!}+\dfrac{4^4x^4}{4!}+\dfrac{5^5x^5}{5!}\ldots\infty$

उकल:

(a) आपल्याकडे आहे, $1+\dfrac{2^2}{3^2}+\dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{4^2}{5^2}+\dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{4^2}{5^2}\cdot\dfrac{6^2}{7^2}+\ldots\infty$

पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून,

$$a_n = \frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2....(2n)^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2....(2n+1)^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2....(2n)^2(2n+2)^2}{3^2\cdot5^2\cdot7^2....(2n+1)^2(2n+3)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} = 1$$

$\therefore$ डी अलेम्बर्ट ची गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी झाली, आता आम्ही राबेची चाचणी लागू करू.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} - 1$$

$$= \frac{4n^2 + 9 + 12n - 4n^2 - 4 - 8n}{(2n+2)^2} = \frac{4n+5}{(2n+2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{5}{n}}{\left(2 + \frac{2}{n}\right)^2} = 1$$

$\therefore$ राबेची चाचणी अयशस्वी झाली, आता गॅास चाचणीद्वारे

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} - 1$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{-2}$$

$$= \left(1 + \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$1 + \frac{\lambda}{n} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ सोबत तुलना करून $\Rightarrow \quad \lambda = 1$

$\therefore$ गॅास चाचणी वरून श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

(b) $1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \ldots\infty$

पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून,

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdot 9....3n}{7\cdot 10\cdot 13....(3n+4)} x^n$$

$$a_{n+1} = \frac{3\cdot 6\cdot 9....3n(3n+3)}{7\cdot 10\cdot 13....(3n+4)(3n+7)} x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+7}{3n+3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

जर $\frac{1}{x} > 1$ म्हणजे $x < 1$ असेल तर श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $\frac{1}{x} < 1$ म्हणजे $x > 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट असेल.

आणि $x = 1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

आता राबेची चाचणी लागू करून, $x=1$ ठेवा, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{3n+7}{3n+3}-1=\frac{3n+7-3n-3}{3n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n+3}=\frac{4}{3}>1 \quad \therefore \sum a_n$$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी $x\le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे.

आणि $x>1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

(c) $1+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot\frac{1}{4}+\ldots\infty$

पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून,

$$a_n=\frac{2\cdot 4\cdot 6....(2n)}{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)}\cdot\frac{1}{(n+1)}$$

$$a_{n+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6....(2n)(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)(2n+1)}\times\frac{1}{(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{n+2}{(n+1)}=1$$

हे दाखवते की डी अलेम्बर्टची गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी झाली आहे,

आता राबेची चाचणी लागू करून,

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n^2+4n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=\frac{1}{2}<1$$

राबेच्या चाचणीद्वारे $\sum a_n$ डायव्हर्जन्ट आहे.

(d) $x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{4^4x^4}{4!}+\frac{5^5x^5}{5!}\ldots\infty$

येथे $$a_n=\sum\frac{n^nx^n}{n!}$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n^nx^n}{n!}\times\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] = \frac{1}{ex}$$

$\frac{1}{ex} > 1$ म्हणजे, $ex < 1$ साठी श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

म्हणजे, $x < \frac{1}{e}$

$\frac{1}{ex} < 1$ म्हणजे, $x > \frac{1}{e}$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

$x = \frac{1}{e}$ साठी चाचणी अयशस्वी होते.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ हे e चा समावेष करते म्हणून, लॉगरिदमिक चाचणी लागू करा,

$x = \frac{1}{e}$ दिलेल्या श्रेणीत ठेवा.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \log e - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\ldots\right)$$

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \ldots\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ $x = \frac{1}{e}$ साठी $\sum a_n$ डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी $x < \frac{1}{e}$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x \geq \frac{1}{e}$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.50: $1^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून

$$a_n = \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6....(2n)}\right]^p$$

$$a_{n+1} = \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6....(2n)(2n+2)}\right]^p$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = 1$$

$\therefore$ गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी होते.

आता गॉस चाचणी लागू करा

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-p} = \left[1+\frac{p}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1-\frac{p}{2n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \left[1+\left(p-\frac{p}{2}\right)\frac{1}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= 1+\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

येथे $\lambda = \frac{p}{2}$

गॉस चाचणीद्वारे $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $\frac{p}{2} > 1$ म्हणजे $p > 2$ आणि $p \le 2$ साठी डायव्हर्जन्ट असेल.

उदाहरण 3.51: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा $\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + ...\infty$

उकल: सूचना: $a_n = \frac{a(1+a)....(n+a)}{b(1+b)....(n+b)}$

उत्तर: जेव्हा $b > 1+a$ तेव्हा श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असते आणि $b \le 1+a$ साठी डायव्हर्जन्ट असते.

उदाहरण 3.52: $\sum \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$ कॉन्व्हर्जन्स चाचणी करा.

उकल: येथे

$$a_n = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{(n+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$$

∴ डी'अलेम्बर्ट गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी होते.

गॉस चाचणी लागू करून

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{1}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \left[1+\frac{x-1}{n}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

येथे $\lambda = x-1$

गॉस चाचणी नुसार जेव्हा $x-1>1$ म्हणजे $x>2$ असते तेव्हा श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असते आणि $x-1 \le 1$ म्हणजेच $x \le 2$ असते तेव्हा डायव्हर्जन्ट असते.

उदाहरण 3.53: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{3\cdot 4}+\frac{x^3}{5\cdot 6}+\frac{x^4}{7\cdot 8}+\ldots..\infty (x>0)$

उकल: येथे

$$a_n = \frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

डी 'अलेम्बर्ट गुणोत्तर चाचणी नुसार श्रेणी $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x>1$ साठी डायव्हर्जंट आहे. $x=1$ असेल तर चाचणी अपयशी होते.

राबेची चाचणी लागू करताना, $x=1$ ठेवून,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{4n^2+6n+2}{4n^2-2n}-1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{4n^2+6n+2-4n^2+2n}{4n^2-2n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{8n+2}{4n^2-2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+2n}{4n^2-2n} = 2 > 1$$

श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

अशा प्रकारे श्रेणी $x \le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x > 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.54: दिलेल्या श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा $1+\frac{a}{1!}+\frac{a(a+1)}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{3!}+....$

उकल: पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून

$$a_n = \frac{a(a+1)(a+2)....(a+n-1)}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)....(a+n-1)(a+n)}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{a}{n}}$$

$$= 1 \qquad \therefore \text{ गुणोत्तर चाचणी अयशस्वी.}$$

आता राबेची चाचणी लागू करा

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1}{a+n}-1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1-a)}{a+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-a}{\frac{a}{n}+1} = 1-a$$

राबेच्या चाचणीद्वारे, श्रेणी $1-a>1$ म्हणजे $a<0$ असेल तर कॉन्व्हर्जंट असते आणि $1-a<1$ म्हणजे $a>0$ असल्यास डायव्हर्जन्ट आहे.

जर $1-a=1$ म्हणजे $a=0$ तर चाचणी अयशस्वी होते.

या प्रकरणात श्रेणी $1+0+0....$ बनते.

हे कॉन्व्हर्जंट आहे.

म्हणून, $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $a \le 0$ आणि $a>0$ साठी डायव्हर्जन्ट असेल.

उदाहरण 3.55: $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6....(2n)}\cdot x^{2n}, x>0$ श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चाचणी करा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: जर $x^2 \le 1$ असेल तर श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असते आणि $x^2 > 1$ साठी डायव्हर्जन्ट असते.

उदाहरण 3.56: $1+\frac{(1!)^2}{2!}x^2+\frac{(2!)^2}{4!}x^4+\frac{(3!)^2}{6!}x^6+....\infty\left(x>0\right)$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: येथे

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$$

$$a_{n+1}=\frac{\left[(n+1)!\right]^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n!}{(2n)!}\times\frac{(2n+2)(2n+1)2n!}{(n+1)(n+1)n!n!}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{(n+1)}=\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{4}{x^2}$$

गुणोत्तर चाचणीनुसार श्रेणी $\sum a_n$, $\frac{4}{x^2}>1$ म्हणजे, $x^2<4$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $\frac{4}{x^2}<1$ म्हणजे, $x^2>4$ साठी डायव्हर्जन्ट असेल. जर $x^2=4$ असेल तर चाचणी अयशस्वी होते.

$x^2=4$ ठेवून आणि राबेची चाचणी लागू करून,

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{4n+2-4n-4}{4(n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{4(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\left[\frac{-2}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]\quad=-\frac{1}{2}<1$$

राबेच्या चाचणीनुसार श्रेणी डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी $x^2>4$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $x^2\geq 4$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

उदाहरण 3.57: $\frac{x^2}{2\log 2}+\frac{x^3}{3\log 3}+\frac{x^4}{4\log 4}+....\infty$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: सूचना:

$$a_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)\log(n+1)}$$

उकल: जेव्हा $x<1$ असते तेव्हा श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असते आणि $x\geq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट असते.

उदाहरण 3.58: $1+\frac{a}{b}x+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}x^3+....$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: पहिल्या पदाकडे दुर्लक्ष करून

$$a_n=\frac{a(a+1)(a+2)....(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)....(b+n-1)}x^n\ (x\geq 0)$$

$$a_{n+1}=\frac{a(a+1)(a+2)....(a+n)}{b(b+1)(b+2)....(b+n)}\cdot x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+n}{a+n}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

गुणोत्तर चाचणीनुसार $\sum a_n$ कॉन्वेर्जेन्स असेल जर $\frac{1}{x}>1$ म्हणजे, $x<1$ आणि $\frac{1}{x}<1$ म्हणजे, $x>1$ यासाठी डायव्र्हर्जन्ट आहे आणि $x=1$ साठी चाचणी अयशस्वी होते.

आता $x=1$ साठी राबेची चाचणी लागू करा.

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)}{\left(1+\frac{a}{n}\right)}=(b-a)$$

राबेच्या चाचणीनुसार $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जंट असेल जर $b-a>1$ आणि $b-a<1$ म्हणजे $b<1+a$ असल्यास डायव्र्हर्जन्ट असते.

$b-a=1$ साठी गॉस चाचणी वापरून,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+n}{a+n}=\frac{a+1+n}{a+n}$$

$$=\frac{a+1+n}{a+n}=\frac{n\left[1+\frac{a+1}{n}\right]}{n\left[1+\frac{a}{n}\right]}$$

$$=\left[1+\left(\frac{a+1}{n}\right)\right]\left[1-\left(\frac{a}{n}\right)+\left(\frac{a}{n}\right)^2...\right]$$

$$=1+\left(\frac{a+1}{n}\right)-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

गॉस चाचणीनुसार $\sum a_n$, $x=1$ आणि $b-a=1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी $\sum a_n$ जेव्हा $x<1$ असते तेव्हा कॉन्व्हर्जंट असते आणि $x>1$ असते तेव्हा डायव्हर्जन्ट असते.

$x=1$ साठी जर $b-a>1$ असेल तर हे कॉन्व्हर्जंट असते आणि ते $b-a\le 1$ साठी डायव्हर्जन्ट असते.

अभ्यास 3.8

खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्स आणि डायन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

1. $\frac{1^2}{4^2}+\frac{1^2\cdot 5^2}{4^2\cdot 8^2}+\frac{1^2\cdot 5^2\cdot 9^2}{4^2\cdot 8^2\cdot 12^2}+.....\infty$
2. $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}x+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}x^2+.....\infty$
3. $1+\frac{2x}{2!}+\frac{3^2x^2}{3!}+\frac{4^3x^3}{4!}+...\infty$
4. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)x}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)x^2}{b(b+d)(b+2d)}+.....$
5. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+.....$
6. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+...\infty$
7. $\sum\frac{4\cdot 7\cdot 10...(3n+1)x^n}{1\cdot 2\cdot 3...n}$
8. $\frac{1}{2}x+x^2+\frac{9x^3}{8}+x^4+\frac{25x^5}{32}+.....\infty$
9. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+.....$
10. $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+.....$
11. $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+.....$
12. $1+\frac{x}{2}+\frac{2!}{3^2}x^2+\frac{3!}{4^3}x^3+\frac{4!}{5^4}x^4+.....$
13. $\frac{a+x}{1!}+\frac{(a+2x)^2}{2!}+\frac{(a+3x)^3}{3!}+...$
14. $x^2(\log 2)^q+x^3(\log 3)^q+x^4(\log 4)^q+...$
15. $1+\frac{\alpha\beta}{1!.\gamma}x+\frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+...$
16. $1+\frac{2}{3}x+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5}x^2+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}x^3+.....$
17. $1+\frac{2^2}{3^2}x+\frac{2^2\cdot 4^2}{3^2\cdot 5^2}x^2+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}x^3+.....\infty$
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$
19. $\sum\frac{n^2(n+1)^2}{n!}$
20. $\frac{1}{(\log 2)^k}+\frac{1}{(\log 3)^k}+\frac{1}{(\log 4)^k}+...\infty$

उत्तरे

1. कॉन्व्हर्जंट
2. $x<1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x\ge 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.

3. $x \le \frac{1}{e}$ साठी कॉन्व्हर्जंट $x > \frac{1}{e}$ साठी डायव्हर्जन्ट.
4. $x < 1$ किंवा $x = 1$ आणि $b > a + d$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x > 1$ किंवा $x = 1$ आणि $b \le a + d$ साठी डायव्हर्जन्ट.
5. $x < 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x \ge 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
6. $x \le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x > 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
7. $x < \frac{1}{3}$ साठी कॉन्व्हर्जंट $x \ge \frac{1}{3}$ साठी डायव्हर्जन्ट
8. $x < 2$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x \ge 2$ साठी डायव्हर्जन्ट.
9. डायव्हर्जन्ट.
10. डायव्हर्जन्ट.
11. $x^2 \le 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट आणि $x^2 > 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट.
12. $x < e$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x \ge e$ साठी डायव्हर्जन्ट.
13. $x < \frac{1}{e}$ साठी कॉन्व्हर्जंट येते आणि $x \ge \frac{1}{e}$ साठी डायव्हर्जन्ट.
14. $x < 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x \ge 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
15. $x < 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x > 1$ साठी डायव्हर्जन्ट. जर $x = 1$ तर श्रेणी $\gamma > \alpha + \beta$ साठी कॉन्व्हर्ज होते आणि $\gamma \le \alpha + \beta$ साठी डायव्हर्ज होते.
16. $x < 2$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x \ge 2$ साठी डायव्हर्जन्ट.
17. $x < 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट, $x \ge 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
18. $x < \frac{1}{4}$ साठी कॉन्व्हर्जंट , $x \ge \frac{1}{4}$ साठी डायव्हर्जन्ट
19. कॉन्व्हर्जंट
20. डायव्हर्जन्ट.

3.3.11 कॉचीची इंटिग्रल टेस्ट

जर $f(x)$ धनात्मक, $x \ge 1$ मोनोटोनिकली कमी होणारे आणि $x \ge 1$ चे इंटिग्रेबल फंक्शन असे असेल कि $f(n) = a_n, \forall n \in N$,

तर श्रेणी $\sum a_n$ आणि इंटिग्रल $\int_1^\infty f(x)\,dx$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज होतात किंवा डायव्हर्ज होतात.

टिपण्णी: जर $x \ge k$, तर $\sum a_n$ आणि $\int_1^\infty f(x)dx$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज होतात किंवा डायव्हर्ज होतात.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.59: इंटिग्रल चाचणी वापरून, खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

$(i).\ \sum \frac{1}{2n+3}$ $\quad (ii).\ \sum \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad (iii).\ \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

$(iv).\ \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ $\quad (v).\ \sum \frac{2n^3}{n^4+3}$ $\quad (vi).\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

उकल:

(i) समजा

$$a_n = \frac{1}{2n+3} = f(n)$$

$f(x) = \frac{1}{2x+3}$ च्या साठी, $x \geq 1; f(x)$ धनात्मक आणि मोनोटोनिक कमी होणाराआहे.

कॉची इंटिग्रल टेस्ट लागू करून.

$$= \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(2x+3)\right]_1^{\infty} = \frac{1}{2}[\log\infty - \log 5]$$

$= \infty$ $\quad \therefore$ डायव्हर्जेन्ट

(ii) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

समजा $\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ $x \geq 1$च्या साठी, $\therefore$ $\quad f(x)$ धन आणि मोनोटोनिक कमी होणारा आहे.

$\therefore$ कॉचिच्या इंटिग्रल चाचणी वरून

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \left[\log x - \log(1+x)\right]_1^{\infty} = \left[\log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]_1^{\infty}$$

$$= \left[\log 1 - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^{\infty} = \left[\log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\right]_1^{\infty}$$

$$= \log 1 - \log 1 + \log 2$$

$$= \log 2 \text{ (फायनाईट) } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ कॉन्व्हर्जेस आणि}$$

म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

(iii) स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: डायव्हर्जन्ट.

(iv) $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$

उकल. स्वतः प्रयत्न करा. उत्तर: कॉन्व्हर्जंट.

(v) $\sum \frac{2n^3}{n^4+3}$

उकल. स्वतः प्रयत्न करा. उत्तर: डायव्हर्जन्ट.

(vi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

समजा $$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} = f(n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$x \geq 2$ साठी, $f(x)$ धन आहे आणि मोनोटोनिक कमी होनारी आहे.

म्हणून कॉचीची इंटिग्रल चाचणी लागू आहे.

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \left[\sec^{-1} x\right]_2^\infty$$

$$= \left[\cos^{-1} \frac{1}{x}\right]_2^\infty = \left[\cos^{-1} 0 - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ (मर्यादित)}$$

$\int_2^\infty f(x)\,dx$ कॉन्वेर्जेन्स आहे आणि म्हणून $\sum a_n$ देखील कॉन्वेर्जेन्स आहे.

उदाहरण 3.60: इंटिग्रल चाचणी वापरून खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

(i) $\sum n \cdot e^{-n^2}$ (ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}, p > 0$

(*iii*) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$ (*iv*) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$

उकल:

(i) समजा

$$a_n = n\cdot e^{-n^2} = f(n)$$

$$f(x) = x\cdot e^{-x^2}$$

$x \geq 1$ साठी, $f(x)$ धन आहे आणि मोनोटोनिक कमी होणारा आहे.

म्हणून कॉचीची इंटिग्रल चाचणी लागू आहे.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx \qquad \left[x^2 = t \quad \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_1^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-\infty}\frac{1}{-e}\right] = \frac{1}{2e} \text{ (मर्यादित).}$$

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ कॉन्व्हर्जंट आहे आणि म्हणून $\sum a_n$ देखील कॉन्व्हर्जंट आहे.

ii. समजा

$$f(n) = a_n = \frac{1}{n\log n(\log\log n)^p},\ p > 0$$

$$\therefore \qquad f(x) = \frac{1}{x\log x(\log\log x)^p}$$

$x \geq 3$ साठी $p > 0; f(x)$ धन आहे आणि मोनोटोनिक कमी होणारा आहे.

म्हणून कॉचीची इंटिग्रल चाचणी लागू आहे.

प्रकरण I:

जेव्हा $p > 1,\quad I_n = \int_3^n \frac{1}{x\log x(\log\log x)^p}\cdot dx$ म्हणून $n \to \infty$

समजा $\log(\log x) = t$

$$\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx = dt$$

तर $I_n = \int_3^n \frac{1}{t^p}\,dt$

$$= \left[\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right]_3^n = \left[\frac{\left(\log(\log x)\right)^{-p+1}}{-p+1}\right]_3^n$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left[\lim_{n\to\infty}(\log\log n)^{-p+1} - (\log\log 3)^{-p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{1-p}\left[(\log\log\infty)^{-p+1} - (\log\log 3)^{-p+1}\right]$$

$$= \frac{1}{1-p}\left[(\infty)^{-ve} - \frac{1}{(\log\log 3)^{p-1}}\right] = \frac{-1}{1-p}\left[\frac{-1}{(\log\log 3)^{p-1}}\right]$$

= मर्यादित.

$p>1$ साठी कॉन्व्हर्जंट

प्रकरण II: $p<1$ साठी

$$I_n = \frac{1}{1-p}\left[(\infty)^{+ve} - \log(\log 3)^{t-p}\right] = \infty \qquad p<1 \text{ साठी डायव्हर्जन्ट}$$

प्रकरण III: $p=1$ साठी

$$I_n = \lim_{n\to\infty}\int_3^n \frac{1}{x\log x(\log\log x)}dx \qquad \left[\begin{array}{l}\log\log x = t\\ \dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}dx = dt\end{array}\right.$$

$$= \int\frac{1}{t}dt = \log t \qquad = \lim_{n\to\infty}[\log\log\log 3]_3^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\log\log\log n - \log\log\log 3]$$

$= \infty \quad \therefore$ डायव्हर्जन्ट

म्हणून श्रेणी $p>1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आहे आणि $0<p<1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} = f(n)$$

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$$

$x\geq 1$ साठी; $f(x)$ धन आहे आणि मोनोटोनिक कमी होनारा आहे.

म्हणून कॉचीची इंटिग्रल चाचणी लागू आहे.

$$\int_1^n \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}dx=\left[\log\log(x+1)\right]_1^{\infty}$$

$$=\log\log(\infty+1)-\log\log 2$$

$=\infty$ म्हणून डायव्हर्जन्ट.

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ डायव्हर्जन्ट आहे आणि म्हणून $\sum a_n$ देखील डायव्हर्जन्ट आहे.

अभ्यास 3.9

इंटिग्रल चाचणी वापरून, खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जंट किंवा डायव्हर्जन्ट ची चाचणी घ्या:

(i) $\sum\frac{n}{\left(n^2+1\right)^2}$ (ii) $\sum\frac{1}{n^2+1}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

(iv) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p},(p>0)$ (v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\tan^{-1}n}{1+n^2}$

उत्तरे

1. कॉन्व्हर्जंट
2. कॉन्व्हर्जंट
3. $p>1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $0<p\leq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
4. $p>1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $0<p\leq 1$ साठी डायव्हर्जन्ट.
5. कॉन्व्हर्जंट

3.3.12 अल्टरनेटिंग श्रेणी

$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$ या स्वरूपातील जिथे $a_n>0$ सर्व $n\in N$ साठी श्रेणीला अल्टरनेटिंग श्रेणी म्हणतात आणि $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ द्वारे दर्शविले.

उदाहरणार्थ:

(1). $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$(2).\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

3.3.12.1 अल्टरनेटिंग श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्ससाठी लीबनिट्झची चाचणी

अल्टरनेटिंग श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\dots$ ($a_n>0$ सर्व n साठी) कॉन्व्हर्जंट असते जर

(i) $a_{n+1}<a_n$ सर्व n साठी (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

टिपण्णी:

a. जर $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ तर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ऑसिलेट असते.

b. जर दोन अटींपैकी कोणतीही एक पूर्ण झाली नाही तर अल्टरनेटिंग श्रेणी कॉन्व्हर्जंट नसते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.61: खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

$$(a).\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+....\infty \qquad (b).\ \frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}-\frac{1}{\log 5}+....\infty$$

$$(c).\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}+....\infty$$

उकल:

$$(a).\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+....\infty$$

येथे $\sum(-1)^{n-1}\cdot a_n = \sum(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}>0$$

किंवा $\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$$

हे $a_{n+1} < a_n \forall n$ दर्शवते

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ अशा प्रकारे लीबनिट्झ चाचणीच्या दोन्ही अटींचे समाधान झाले आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

$(b).\ \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \ldots\infty$

येथे $\sum(-1)^{n-1} a_n = \sum(-1)^{n-1} \frac{1}{\log(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{\log(n+1)};\quad a_{n+1} = \frac{1}{\log(n+2)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\log(n+1)} - \frac{1}{\log(n+2)}$$

$$= \frac{\log(n+2) - \log(n+1)}{\log(n+1)\log(n+2)}$$

$\log(n+2) > \log(n+1)$ म्हणून

हे दाखवते $a_n - a_{n+1} > 0$

$a_{n+1} < a_n$ सर्व n साठी

आणि $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$

म्हणून दिलेली श्रेणी लीबनिट्झ चाचणीद्वारे कॉन्व्हर्जंट आहे.

$(c).\ \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \ldots\infty$

समजा $\sum(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \sum(-1)^{n-1} a_n$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+1}$$

$n+2 > n+1 \forall n$

$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$ सर्व n साठी

$\sqrt{n+2}+1 > \sqrt{n+1}+1$ सर्व n साठी

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

$$a_{n+1} < a_n \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

तसेच $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = 0$$

म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.62: खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots\infty \qquad (a >, b > 0)$$

उकल: समजा

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{a+(n-1)b}$$

$$a_n = \frac{1}{a+(n-1)b}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a+nb}$$

$$nb > (n-1)b \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

$$a+nb > a+(n-1)b \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

$$\frac{1}{a+nb} < \frac{1}{a+(n-1)b} \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

$$a_{n+1} < a_n \text{ सर्व } n \text{ साठी}$$

तसेच $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a+(n-1)b} = \frac{1}{\infty} = 0$$

लीबनिट्झ चाचणीद्वारे, दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.63: $\frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \frac{x^4}{1+x^4} + \dots\infty \qquad (0 < x < 1)$ चे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट

उदाहरण 3.64: दिलेल्या श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: कॉन्व्हर्जंट

उदाहरण 3.65: दिलेल्या श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{5^n}$

उकल: समजा

$$a_n = \frac{n}{5^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)}{5^{n+1}}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{5^n} - \frac{(n+1)}{5^{n+1}} = \frac{5n-n-1}{5^{n+1}}$$

$$= \frac{4n-1}{5^{n+1}} > 0 \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow$ $\quad a_{n+1} < a_n$ सर्व n साठी

आणि $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{5^n} = \frac{\infty}{\infty}$ वरून एल. हॉस्पिटलचा नियम वापरून.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{5^n \log 5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

लिबनिट्झ चाचणीच्या दोन्ही अटी समाधानी आहेत.

म्हणून दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.66: दिलेल्या श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2+1}$

उकल: दिलेली श्रेणी आहे

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2+1} = \sum(-1)^n \frac{1}{n^2+1} = \sum(-1)^n \cdot a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$$n+1 > n$$

$$(n+1)^2 > n^2$$

$$(n+1)^2 + 1 > n^2 + 1$$

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

$\Rightarrow$ $\quad a_{n+1} < a_n$ सर्व n साठी

तसेच $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

म्हणून लिबनिट्झ चाचणीद्वारे दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

अभ्यास 3.10

खालील श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्स किंवा डायन्व्हर्जन्स ची चर्चा करा:

(1). $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$

(2). $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\dots$

(3). $\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}(1+2)+\frac{1}{4^3}(1+2+3)-\frac{1}{5^3}(1+2+3+4)+\dots$

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{2n-1}$

(5). $\frac{\log 2}{2^2}-\frac{\log 3}{3^2}+\frac{\log 4}{4^2}\dots\infty$

(6). $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots\infty$

(7). $\frac{1}{6}-\frac{2}{11}+\frac{3}{16}-\frac{4}{21}+\dots\infty$

(8). $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n(n-1)}, 0<x<1$

(9). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{n^2+1}$

(10). $\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log\left(\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\right)-\log\left(\frac{4}{5}\right)+\dots\infty$

उत्तरे

1. कॉन्व्हर्जंट 2. कॉन्व्हर्जंट नाही 3. कॉन्व्हर्जंट 4. कॉन्व्हर्जंट नाही

5. कॉन्व्हर्जंट 6. कॉन्व्हर्जंट 7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{5n+1}$, कॉन्व्हर्जंट नाही

8. कॉन्व्हर्जंट 9. कॉन्व्हर्जंट 10. कॉन्व्हर्जंट

3.3.13 श्रेणीचे अबसोलुट कॉन्वेर्जेन्स

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ जर कॉन्व्हर्जंट असेल तर $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट असल्याचे म्हटले जाते.

किंवा

जर एक कॉन्व्हर्जंट श्रेणी ज्याची पदे सर्व धन नसतील, तेव्हा कॉन्व्हर्जंट राहते, जेव्हा त्याची सर्व पदे धन बनतात, मग त्याला अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट श्रेणी म्हणतात.

उदाहरणार्थ:

1. श्रेणी $\sum a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे, जसे $\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$. पी-चाचणीद्वारे एक कॉन्व्हर्जंट श्रेणी आहे.

2. श्रेणी $\sum a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे, म्हणून $\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$. सामान्य गुणोत्तर असलेली भौमितिक श्रेणी $\frac{1}{2} < 1$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

3.3.14 कंडिशनल कॉन्व्हर्जन्स

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट असल्याचे म्हटले जाते, जर

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ कॉन्व्हर्जंट आहे, पण

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट नाही.

(म्हणजे,) श्रेणी कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट असल्याचे म्हटले जाते जर ती कॉन्व्हर्जंट असेल परंतु अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट नसेल.

उदाहरणार्थ:

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$. कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट श्रेणी आहे, म्हणून $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \frac{1}{n}$

लीबनिट्झच्या चाचणीद्वारे कॉन्व्हर्जंट आहे.

जेथे $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \frac{1}{n}$ पी-चाचणीद्वारे डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ एक कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट श्रेणी आहे.

एक महत्त्वाचे निरीक्षण: प्रत्येक अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे, त्याच्या उलट खरे असणे गरजेचे नाही.

टिपण्णी:

a. $\sum|a_n|$ चे डायन्व्हर्जन्स $\sum a_n$ चे डायन्व्हर्जन्स सूचित करत नाही.

उदाहरणार्थ, $\sum\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum\frac{1}{n}$ डायव्हर्जन्ट आहे, जेथे $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

b. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ धन पदांची श्रेणी आहे म्हणून,

धन पदांच्या श्रेणींच्या कॉन्व्हर्जन्स चाचणीसाठी वापरल्या जाणाऱ्या सर्व चाचण्या अल्टरनेटिंग श्रेणीच्या अबसोलुट कॉन्व्हर्जन्स देखील लागू आहेत.
तथापि या चाचण्या अल्टरनेटिंग श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सबद्दल कोणतीही माहिती देऊ शकत नाहीत.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.67: खालील श्रेणींचे कॉन्व्हर्जन्स आणि अबसोलुट कॉन्व्हर्जन्स तपासा

$(a).\ \frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$

$(b).\ 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots(p>0)$

$(c)\ \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

$(d)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{5n-7}$

$(e)\ 1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2\cdot 5}-\frac{1}{4^3\cdot 7}+\ldots$

उकल:

$(a).\ \frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots\infty$

दिलेली श्रेणी ही अल्टरनेटिंग श्रेणी आहे आणि प्रत्येक पद संख्यात्मकदृष्ट्या मागील पदापेक्षा कमी आहे

$$a_n=\sum(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{\infty}=0$$

लिबनिट्झ चाचणीद्वारे दिलेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

$$\sum|a_n|=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots..$$

$$a_n=\frac{1}{2n+3}=f(n)$$

$$f(x)=\frac{1}{2x+3}$$

$x \geq 1$ साठी $f(x)$ धन आणि मोनोटोनिक कमी होत आहे.

म्हणून कॉची इंटिग्रल टेस्ट लागू आहे.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(2x+3)\right]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\infty - \log 5\right] = \infty$$

इंटिग्रल चाचणी वरून $\sum|a_n|$ डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून दिलेली श्रेणी कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट आहे.

(b). $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots (p > 0)$

स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: दिलेली श्रेणी पूर्णपणे कॉन्व्हर्जंट असेल जर $p > 1$ आणि $0 < p < 1$ असेल तर कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट असेल.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$

स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: दिलेली श्रेणी कंडिशनल कॉन्व्हर्जंट आहे.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{5n-7}$

स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: दिलेली श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे.

(e) $1 - \frac{1}{4.3} + \frac{1}{4^2\cdot 5} - \frac{1}{4^3\cdot 7} + \ldots$

स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: दिलेली श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.68: श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चाचणी घ्या: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n+2}{2^n+5}$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: दिलेली श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.69: श्रेणी $1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \cdots$ कॉन्व्हर्जंट आहे किंवा नाही का ते तपासा?

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे आणि म्हणून कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.70: खालील श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे हे सिद्ध करा:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin n\alpha}{n^2}, \alpha \text{ वास्तविक}$$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उकल: दिलेली श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.71: श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स तपासा.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}}, \alpha \text{ वास्तविक}$$

उकल:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}}, = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}}$$

$$\because \quad |\cos^2 n\alpha| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{(-1)^{n-1}\cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

आता, $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ कॉन्व्हर्जंट आहे. $\because \quad p = \frac{3}{2} > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}} \text{ अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे.}$$

उदाहरण 3.72: खालील श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहेत हे सिद्ध करा:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{(n+1)!}$$

उकल:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{(n+1)!} = \sum a_n$$

$$|a_n| = \frac{n^3}{(n+1)!}$$

$$|a_{n+1}| = \frac{(n+1)^3}{(n+2)!}$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^3}{(n+1)!} \times \frac{(n+2)!}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3}{(n+1)!} \times \frac{(n+2)(n+1)!}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{(n+2)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$$

$\therefore$ $|a_n|$ डी ‘अलेम्बर्ट चाचणीद्वारे कॉन्व्हर्जंट आहे.

अशा प्रकारे दिलेली श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे.

उदाहरण 3.73: x च्या कोणत्या मूल्यांसाठी खालील श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहेत:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{3(1-x)^3} + \ldots.$$

उकल: समजा

$$a_n = \frac{1}{n(1-x)^n}$$

आणि

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(1-x)^{n+1}}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \quad \left|\frac{(1-x)^n}{(1-x)^{n+1}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{|1-x|}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l\,(\text{finite}) \\ l<1 \quad \Rightarrow \quad \text{convergent} \\ l>1 \quad \Rightarrow \quad \text{divergent} \\ \frac{1}{|l-x|}>1 \quad \Rightarrow \quad |1-x|<1 \quad \Rightarrow \quad \text{convergent} \end{array}\right.$$

गुणोत्तर चाचणीद्वारे $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ कॉन्व्हर्जंट आहे जर $\frac{1}{|1-x|}<1$

म्हणजे $|1-x|>1$

किंवा $(1-x)>1$ किंवा $(1-x)<-1$

म्हणून $x<0$ किंवा $x>2$ साठी श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आहे, म्हणून कॉन्व्हर्जंट आहे.

तसेच $x=2$ साठी श्रेणी $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots.$ जी कॉन्व्हर्जंट श्रेणी आहे.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$a_n > a_{n+1}$$

$\Rightarrow$ $$a_{n+1} < a_n$$

तसेच $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

म्हणूनच $\sum a_n$ लीबनिट्झ चाचणीद्वारे कॉन्व्हर्जंट आहे

अभ्यास 3.11

श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स आणि अबसोलुट कॉन्व्हर्जन्स (1-10) तपासा:

(1) $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}+\ldots.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!}$

(5) $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots$

(6) $1-\frac{1}{2^3}(1+2)+\frac{1}{3^3}(1+2+3)-\frac{1}{4^3}(1+2+3+4)+\ldots$

(7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{5^n}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]$

(10) $\frac{1}{2(\log 2)^p}-\frac{1}{3(\log 3)^p}+\frac{1}{4(\log 4)^p}\ldots.\infty\,(p>0)$

(11) सिद्ध करा कि श्रेणी $\frac{\sin x}{1^3}-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}\ldots$ कॉन्व्हर्जेस अबसोलुटली.

(12) श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$ x च्या सर्व मूल्यासाठी.

(13) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots$ श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स आणि अबसोलुट कॉन्व्हर्जन्स यावर चर्चा करा. x वास्तविक आहे.

(14) x च्या कोणत्या मूल्यांसाठी खालील श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहेत:

$$(a)\, x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\dots \qquad (b)\ 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\dots$$

(15) श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची चर्चा करा $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tan^{-1}n}{1+n^2}$

उत्तरे

1. अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
2. कंडिशनली कॉन्व्हर्जंट.
3. कंडिशनली कॉन्व्हर्जंट.
4. अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
5. अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
6. कंडिशनली कॉन्व्हर्जंट.
7. अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
8. अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
9. अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
10. जर $p > 1$ असेल तर अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट आणि $0 < p \le 1$ असल्यास कंडिशनली कॉन्व्हर्जंट.
11. सर्व x साठी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंट.
12. x च्या सर्व मूल्यांसाठी कॉन्व्हर्जंट.
13. दिलेली श्रेणी $1 \le x \le 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट आहे.
14. a. $-1 < x < 1$ b. $-1 < x < 1$
15. कॉन्व्हर्जंट

3.4 टेलरची अनंत श्रेणी

जर फंक्शन $f(x)$ साठी मध्यांतर $[a, a+h]$ मधील सर्व ऑर्डरचे डेरिव्हेटिव्ह्ज असतील तर प्रत्येक पूर्णांक h साठी, कितीही लहान असले तरी, तेथे टेलरच्या रिमेंडरचे लाग्रांजे स्वरूपचा विस्तार

म्हणजेच,

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{n!}f^n(a+ph)$$

जेथे $\quad 0<p<1$

किंवा $\quad f(a+h)=S_n+R_n$

जेथे $$S_n=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)$$

आणि $$R_n=\frac{h^n}{n!}f^n(a+ph)$$

$R_n \to 0$ म्हणून $n \to \infty$ तर $S_n = f(a+h)$ $n \to \infty$ म्हणून विचारात घेऊन

त्यामुळे $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

अशा प्रकारे जर

(i) $f(x)$ कडे $[a, a+h]$ मधील सर्व ऑर्डरचे डेरीवेटीव्ह आहेत.

(ii) $R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(a+ph)$ म्हणून $n \to \infty$ शून्य आहे, जेथे, $0 < p < 1$

मग,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + ... \qquad ...(i)$$

म्हणूनच 'h' च्या चढत्या इंटिग्रल घातांकामध्ये अनंत श्रेणी म्हणून $f(a+h)$ चा हा विस्तार आहे आणि त्याला टेलरची अनंत श्रेणी म्हणतात.

टिपण्णी: $(x-a)$ च्या चढत्या इंटिग्रल घातांकामध्ये $f(x)$ व्यक्त करण्यासाठी, $(a+h)$ ते x म्हणजेच $h = x - a$, मध्ये समीकरण (i), बदला तर $f(x) = f[a + (x-a)]$ आपल्याला मिळते

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{2!} f'''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) ....$$

3.4.1 टेलरची अनंत श्रेणी म्हणून विस्ताराची कार्यपद्धती

टेलरची श्रेणी म्हणून $f(x+h)$ विस्तृत करण्यासाठी, आपण खालील पावले उचलतो:

पायरी I: $f(x+h)$ दिलेले फंक्शन असू द्या.

पायरी II: $h = 0$ ठेवा आणि $f(x)$ शोधा.

तिसरी पायरी III: $f(x)$ अनेक वेळा डिफरन्शिएट करा आणि $f'(x), f''(x), f'''(x)$ मिळवा.

तिसरी पायरी IV: $f(x), f'(x), f''(x)$ च्या किमती खालील समीकरणामध्ये ठेऊन

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + ... + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + ...$$

टेलरच्या श्रेणीतील अपयश

टेलरची श्रेणी खालील परिस्थितींमध्ये $f(x+h)$ एक अनंत श्रेणी म्हणून विस्तारण्यात अपयशी ठरते:

(a) जर कोणतेही फंक्शन $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ अनंत झाले किंवा अस्तित्वात नाही, म्हणजे, अनिश्चित विचाराधीन मध्यांतरातील 'x' च्या कोणत्याही मूल्यासाठी.

(b) जर R_n म्हणजेच n वे पद $n \to \infty$ म्हणून शून्य होत नाहीत.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.74: टेलरची श्रेणी वापरून, हे सिद्ध करा

$$e^{x+h} = e^x\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\ldots.\right)$$

उकल: समजा

$$f(x+h) = e^{x+h}$$

$h=0, \quad f(x) = e^x$ ठेऊन

आपल्याकडे आहे, $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f''' = e^x, \ldots\ldots.$

टेलरच्या श्रेणीनुसार, $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x)\ldots\ldots$

अशा प्रकारे, $e^{x+h} = e^x + e^x \cdot h + e^x \cdot \frac{h^2}{2!} + e^x\frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots$ (मूल्ये टाकल्यानंतर)

$= e^x\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\ldots.\right)$ सिद्ध केले

उदाहरण 3.75: $a^{x+h} = a^x\left(1+h\log a+\frac{h^2}{2!}(\log a)^2+\frac{h^3}{3!}(\log a)^3+\ldots\ldots\right)$ सिद्ध करा

उकल: येथे $f(x+h) = a^{x+h}$

$h=0$ टाकल्यास, आपल्याकडे आहे

$$f(x) = a^x, f'(x) = a^x\log a, f''(x) = a^x(\log a)^2, f'''(x) = a^x(\log a)^3$$

टेलरच्या श्रेणीनुसार $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots..$

अशा प्रकारे, $f(x+h) = a^{x+h} = a^x + ha^x\log a + \frac{h^2}{2!}a^x(\log a)^2 .+ \frac{h^3}{3!}a^x(\log a)^3 \ldots.$

$= a^x\left(1+h\log a+\frac{h^2}{2!}(\log a)^2+\frac{h^3}{3!}(\log a)^3+\ldots\ldots\right)$ सिद्ध केले.

उदाहरण 3.76: सिद्ध करा $\log\cos(x+h) = \log\cos x - h\tan x - \frac{h^2}{2}\sec^2 x - \frac{h^3}{3}\sec^2 x.\tan x + \ldots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.77: सिद्ध करा $\sin^{-1}(x+h) = \sin^{-1}x + \frac{h}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{h^2}{2!} + \ldots.$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

उदाहरण 3.78: सिद्ध करा $\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+\frac{h}{1+x^2}-\frac{xh^2}{(1+x^2)^2}+....$

उकल: येथे

$$f(x+h)=\tan^{-1}(x+h)$$

$h=0$ टाकल्यास, आपल्याकडे आहे

$$f(x)=\tan^{-1}x, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}$$

$$f''(x)=(-1)(1+x^2)^{-2}\cdot(2x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^{-2}}$$

टेलरच्या श्रेणीनुसार, आपल्याकडे आहे $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)......$

$\Rightarrow$ $\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+\frac{h}{1+x^2}-\frac{h^2\cdot x}{(1+x^2)^2}+....$ सिद्ध केले.

उदाहरण 3.79: सिद्ध करा $\tan(x+h)=\tan x+h\sec^2 x+h^2\sec^2 x\tan x+\frac{h^3}{3}(1+3\tan^2 x)\cdot\sec^2 x+....$

उकल: येथे

$$f(x+h)=\tan(x+h)$$

$h=0$ टाकल्यास, आपल्याकडे आहे

$$f(x)=\tan x, f'(x)=\sec^2 x$$

$$f''(x)=2\sec x\cdot\sec x\tan x$$

$$=2\sec^2 x\tan x$$

$$f'''(x)=2(\sec^2 x\cdot\sec^2 x+\tan x\cdot 2\sec x\cdot\sec x\tan x)$$

$$=2(\sec^2 x\cdot\sec^2 x+2\sec^2 x\cdot\tan^2 x)$$

$$=2\sec^2 x(\sec^2 x+2\tan^2 x)$$

$$=2\sec^2 x(1+\tan^2 x+2\tan^2 x)$$

$$=2\sec^2 x(1+3\tan^2 x)$$

....

....

टेलरच्या श्रेणीनुसार, आपल्याकडे आहे $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)......$

$$\Rightarrow \qquad \tan(x+h)=\tan x+h.\sec^2 x+\frac{h^2}{2!}.\sec^2 x.\tan x+\frac{h^3}{3!}.2\sec^2 x\left(1+3\tan^2 x\right)....$$

$$=\tan x+h\sec^2 x+h^2\sec^2 x\tan x+\frac{h^3}{3}\sec^2 x\left(1+3\tan^2 x\right)+.... \text{ सिद्ध केले.}$$

उदाहरण 3.80: सिद्ध करा $\dfrac{f(x+h)+f(x-h)}{2}=f(x)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x)+\dfrac{h^4}{4!}f^{iv}(x)+....$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.81: h च्या घातांकामध्ये $\sin(x+h)$ चा विस्तार करा आणि सिद्ध करा कि $\sin(x+h)=\sin x\cosh+\cos x\sinh$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.82: टेलरच्या श्रेणीचा वापर करून, $(x-2)$ च्या घातांकामध्ये e^x चा विस्तार करा.

उकल: येथे

$$f(x)=e^x=e^{2+(x-2)}=e^{2+h} \text{ जेथे } h=x-2$$

$$f'(x)=e^x, \quad f(2)=e^2$$

$$f''(x)=e^x, \quad f'(2)=e^2$$

$$f'''(x)=e^x, \quad f''(2)=e^2$$

$$f'''(2)=e^2$$

टेलरच्या श्रेणीनुसार, $\quad f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+....$

$$=e^2+(x-2)\cdot e^2+\frac{(x-2)^2}{2!}\cdot e^2+\frac{(x-2)^3}{3!}e^2+.... \text{ [मूल्ये टाकल्यानंतर]}$$

$$=e^2\left[1+(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{(x-2)^3}{3!}+....\right]$$

उदाहरण 3.83: $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ च्या घातांकामध्ये $\sin x$ चा विस्तार करा. म्हणून $\sin 91^\circ$ चे मूल्य चार दशांश पर्यंत बरोबर शोधा.

उकल: येथे

$$f(x)=\sin x$$

किंवा $\quad =\sin\left[\dfrac{\pi}{2}+\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left[\dfrac{\pi}{2}+h\right], h=x-\dfrac{\pi}{2}$

टेलरच्या श्रेणीनुसार, $\quad =f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+hf'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{h^2}{2!}f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{h^3}{3!}f'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+....$

$$f(x)=\sin x\,,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$f'(x)=\cos x\,,\ \ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f''(x)=-\sin x\,,\ \ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$f'''(x)=-\cos x\,,\ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f^{iv}(x)=\sin x\,,\ f^{iv}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f(x)=1+h.0+\frac{h^2}{2!}(-1)+\frac{h^3}{3!}(0)+\frac{h^4}{4!}(1)+....$$ [मूल्ये टाकल्यानंतर]

$$\sin x=1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}....$$

$$=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}+......$$ **सिद्ध केले (भाग 1)**

भाग 2. $\sin 91^0$ चे मूल्य शोधा.

उकल: येथे

$$f(x)=\sin x$$

टेलरच्या श्रेणीनुसार, $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+....$

येथे, समजा $x=90^0, h=1^0$

$$\sin(x+h)=\sin x+1^o.\cos x+\frac{(1^o)^2}{2!}(-\sin x)+\frac{(1^o)^2}{3!}(-\cos x)+....$$

$$\sin 91^o=\sin 90^o+\left(\frac{\pi}{180}\right).\cos 90^o+\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(-\sin 90^o)+\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}(-\cos 90^o)+...$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4-...........$$

$$=1-0.00015+0.0000000039\ =1-0.00015=0.9985$$ **उत्तर**

उदाहरण 3.84: $(x-1)$ च्या घातांकामध्ये $\log_e x$ शोधा. त्यामुळे $\log_e 1.1$ चे मूल्य चार दशांश पर्यंत बरोबर शोधा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर. $\log_e x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ...$ सिद्ध केलेला भाग I.

उत्तर: भाग 2. 0.99985

उदाहरण 3.85: $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$च्या घातांकामध्ये $\tan x$ चा विस्तार करा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: $1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+....$

उदाहरण 3.86: $(x-1)$ च्या घातांकामध्ये $\tan^{-1} x$ चा विस्तार करा.

उकल: समजा

$$f(x) = \tan^{-1}\left[1+(x-1)\right]$$

$$= \tan^{-1}[x+h], \quad h = x-1 \;= f(x+h) \qquad x=1$$

$f(x) = \tan^{-1} x \quad h = 0$ ठेऊन

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$ आता, आपल्याकडे आहे $f(1) = \frac{\pi}{4}$

$$f''(x) = (-1)\left(1+x^2\right)^{-2}(2x) \qquad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} = -2x\left(1+x^2\right)^{-2} \qquad f''(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = -2\left[x.(-2)\left(1+x^2\right)^{-3}(2x)+\left(1+x^2\right)^{-2}(1)\right] \qquad f'''(1) = \frac{8}{8}-\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= 8x^2\left(1+x^2\right)^{-3} - 2\left(1+x^2\right)^{-2}$$

ही मूल्ये टेलरच्या श्रेणीमध्ये ठेऊन, आपल्याकडे आहे

$$f(x) = f(1) + hf'(1) + \frac{h^2}{2!}f''(1) + ...$$

$$= \frac{\pi}{4} + (x-1).\frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(x-1)^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\right) + ...$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12}...$$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12}...$ उत्तर

उदाहरण 3.87: $(x-1)$ च्या घातांकामध्ये $2+x^2-3x^5+7x^6$ चा विस्तार करा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$f(x)=f(1+(x-1))=f(x+h)$$

$h=x-1, h=0$ ठेवा, आपल्याकडे $x=1$ आहे

$$f(x)=2+x^2-3x^5+7x^6 \qquad f(1)=2+1-3+7=7$$

$$f'(x)=2x-15x^4+42x^5 \qquad f'(1)=2-15+42=29$$

$$f''(x)=2-60x^3+210x^4 \qquad f''(1)=2-60+210=152$$

$$f'''(x)=-180x^2+840x^3 \qquad f'''(1)=-180+840=660$$

$$f^{iv}(x)=-360+2520x^2 \qquad f^{iv}(1)=-360+2520=2160$$

$$f^{v}(x)=-360+5040x \qquad f^{v}(1)=-360+5040=4680$$

$$f^{vi}(x)=5040$$

टेलरच्या श्रेणीनुसार, $$f(x)=f(1)+hf'(1)+\frac{h^2}{2!}f''(1)+\frac{h^3}{3!}f'''(1)+....$$

$$=7+(x-1).29+\frac{(x-1)^2}{2!}.152+\frac{(x-1)^3}{3!}.660+....$$ उत्तर

उदाहरण 3.88: बिंदू $\frac{\pi}{3}$ बद्दल $\log\cos x$ चा विस्तार करा.

उकल:

आपल्याकडे आहे $$f(x)=\log\cos\left(\frac{\pi}{3}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$=\log\cos(x+h)=f(x+h)$, येथे $h=x-\frac{\pi}{3}, x=\frac{\pi}{3}$

$$f(x)=\log\cos x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\log\cos\frac{\pi}{3}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$f''(x)=-\sec^2 x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sec^2\frac{\pi}{3}=-4$$

$$f'''(x)=-2\sec x.\sec x.\tan x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sec^2\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{3}$$

$$=-2\sec^2 x.\tan x \qquad =-2.(-4)(-\sqrt{3})=-8\sqrt{3}$$

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+hf'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{h^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{3}\right)+....$$

$$=\log\cos\frac{\pi}{3}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!}(-4)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!}\left(-8\sqrt{3}\right)+...$$

$$=\log(0.5)-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+..... \text{ **उत्तर**}$$

उदाहरण 3.89: टेलरच्या श्रेणीचा वापर करून, $\sin 31^o$ चे मूल्य चार दशांश पर्यंत बरोबर शोधा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: 0.5151.

उदाहरण 3.90: जर $f(x)=x^3+8x^2+15x-24$ टेलरची श्रेणी वापरून $f\left(\frac{11}{10}\right)$ चे मूल्य मोजा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: 3.511.

उदाहरण 3.91 योग्य टेलर श्रेणीचे पहिली चार पदे घेऊन $\sqrt{17}$ चे अंदाजित मूल्य चार दशांश पर्यंत बरोबर शोधा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: 4.123.

उदाहरण 3.92: सिद्ध करा $f(ax)=f(x)+(a-1)xf'(x)+\frac{(a-1)^2\cdot x^2}{2!}f''(x)+$

उकल: टेलरच्या श्रेणीनुसार,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+....$$

आपल्याकडे आहे, $f(ax)=f(x+(a-1)x)$

$$=f(x+h), h=(a-1)x, x=x$$

अशा प्रकारे, $f(ax)=f(x)+(a-1)xf'(x)+\frac{(a-1)^2\cdot x^2}{2!}f''(x)+\frac{(a-1)^3\cdot x^3}{3!}f'''(x)$ ..सिद्ध केले

ii. सिद्ध करा $f\left(\frac{x^2}{1+x}\right)=f(x)-\frac{x}{1+x}f'(x)+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\frac{f''(x)}{2!}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\frac{f'''(x)}{3!}+.....$

$$f\left(\frac{x^2}{1+x}\right)=f\left(x-\frac{x}{1+x}\right)$$

$$=f(x+h)$$

$x = x, h = \frac{-x}{1+x}$ टेलरच्या श्रेणीत मूल्ये ठेऊन ,

$$f\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x}{1+x} f'(x) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \frac{f''(x)}{2!} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \ldots..$$ सिद्ध केले

अभ्यास 3.12

1. टेलरची श्रेणी वापरून, हे सिद्ध करा

   (a) $\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \frac{h^3}{x^4} + \ldots..$

   (b) $\sec^{-1}(x+h) = \sec^{-1} x + \frac{h}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \frac{h^2}{2!} + \ldots..$

2. टेलरची श्रेणी वापरून,

   (a) $f\left(\frac{21}{20}\right)$ चे मूल्य शोधा जर $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$

   (b) योग्य टेलर श्रेणीच्या विस्तारातील पहिले तीन पदे घेऊन $\sqrt{10}$ आणि $\sqrt{26}$ चे अंदाजित मूल्य चार दशांश पर्यंत बरोबर गणना करा.

   (c) टेलरच्या श्रेणीच्या अनुप्रयोगाद्वारे $f(x+h)$ साठी, $f\left(\frac{9}{10}\right)$ च्या मूल्याची गणना करा जर $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 11$.

3. $(x-3)$ च्या चढत्या घातांकामध्ये $\log\sin x$ चा विस्तार करा.

4. टेलरची श्रेणी वापरून अंदाजे $\log_{10} 404$ ची गणना करा जर $\log_{10} 4. = 0.6021$.

5. टेलरच्या श्रेणीचा वापर करून, $\cos 32^o$ च्या मूल्याची गणना करा.

6. टेलरचे प्रमेय वापरून $(x-2)$ च्या घातांकामध्ये $2x^3 + 7x^2 + x - 6$ हि बहुपदी व्यक्त करा.

7. टेलरची श्रेणी लागू करून $\sin(x+h)$ चा विस्तार शोधा.

उत्तरे

2. (a). 2.1623, 5.099 (b). 8.849

3. $\log\sin(3) + (x-3)\cot(3) - \frac{(x-3)^2}{2}\operatorname{cosec}^2(3) + \frac{(x-3)^3}{3} c\operatorname{osec}^3(3)\cot(3) + \ldots$

4. $\log_{10} 404 = 2.60641$

5. 0.8461

6. $40+53(x-2)+19(x-2)^2+2(x-3)^3$

7. $\log\sin x+h\cot x-\frac{h^2}{2}\cos ec^2 x+\frac{h^3}{2}\cos ec^2 x\cot x+....$

3.5 मॅक्लॉरिनची अनंत श्रेणी

जर आपण टेलरच्या अनंत श्रेणीत $a=0$ आणि $h=x$ असे ठेवले की

(i) $f(x)$ हे $[0,x]$ या मध्यांतरातील सर्व ऑर्डरचे डेरीवेटीव्ह धारण करते आणि

(ii) मॅक्लॉरिनचे रिमेंडर $R_n=\frac{x^n}{n!}f^n(a+ph)$ हे शून्याजवळ जाते जेव्हा $n\to\infty$ तर

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+....$$

जी मॅक्लॉरिनची अनंत श्रेणी म्हणून ओळखली जाते.

टिपण्णी: जर फंक्शन y द्वारे दर्शविले गेले तर मॅक्लॉरिनची अनंत श्रेणी अशी लिहीली जाऊ शकते.

$$y=y(0)+xy_1(0)+\frac{x^2}{2!}y_2(0)+\frac{x^3}{3!}y_3(0)+...+\frac{x^n}{n!}y_n(0)+....$$

जेथे $y(0),\ y_1(0),\ y_2(0),\ y_3(0),...,y_n(0)$ इत्यादी $x=0$ च्या साठी अनुक्रमे $y,y_1,y_2,.....y_n$ ची मूल्ये दर्शवतात .

3.5.1 मॅक्लॉरिनच्या श्रेणीच्या विस्ताराची कार्यपद्धती

पायरी I: $f(x)=$ दिलेले फंक्शन ठेवा.

पायरी II: $f(x)$ ला अनेक वेळा डिफरंशिएट करा, म्हणजे $f(x),f'(x),f''(x),f'''(x)$...... आणि असेच चालू ठेवा.

पायरी III: पायरी II च्या निकालात $x=0$ ठेवा आणि $f(0),f'(0),f''(0),f'''(0)$......वगैरे शोधा.

पायरी IV: मॅक्लॉरिनच्या श्रेणीत $f(0),f'(0),f''(0),f'''(0)$...... ची मूल्ये ठेऊन आपल्याला मिळेल,

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+....$$

मॅकलॉरिनच्या श्रेणीतील अपयश:

मॅक्लॉरिनची श्रेणी खालील परिस्थितीत अनंत श्रेणीत $f(x)$ चा विस्तार करण्यात अपयशी ठरते.

a. जर $f(x),f'(x),f''(x),$...... यांच्यापैकी कोणीही $[0,x]$ या क्लोज्ड इंटरव्हल मध्ये अनंत होत असेल किंवा अस्तित्वात येत नसेल.

b. R_n शून्याजवळ जात नाही जेव्हा $n\to\infty$.

काही उपयुक्त विस्तार:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ... \qquad (x<1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

$$a^x = 1 + x(\log a) + \frac{x^2}{2!}(\log a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\log a)^3 + ... \qquad (a>0)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ...$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^4}{40} + \frac{5x^2}{12} + ...$$

$$\cos^{-1} x = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + ...$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.93: मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून खालील फंकशन्सचा विस्तार करा:

(i) $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x, \qquad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = e^0 = 1$$

$f'''(x) = e^x$ $\qquad$ $f'''(0) = e^0 = 1$

$f^{(iv)}(x) = e^x$ $\qquad$ $f^{(iv)}(0) = e^0 = 1$

उकल: मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$ **उत्तर**

(ii) $f(x) = a^x,\ a > 0$

उकल: दिले आहे $f(x) = a^x$, $f(0) = a^0 = 1$

$f'(x) = a^x \log a$ $\qquad$ $f'(0) = \log a$

$f''(x) = a^x (\log a)^2$ $\qquad$ $f''(0) = (\log a)^2$

$f'''(x) = a^x (\log a)^3$ $\qquad$ $f'''(0) = (\log a)^3$

$f^{(iv)}(x) = a^x (\log a)^4$ $\qquad$ $f^{(iv)}(0) = (\log a)^4$

मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

$$= 1 + x\log a + \frac{x^2}{2!}(\log a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\log a)^3 + \cdots$$ **उत्तर**

(iii) $f(x) = \sin x$

$f(x) = \sin x$, $\qquad$ $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $f'''(0) = -1$

$f^{iv}(x) = \sin x$ $\qquad$ $f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = \cos x$ $\qquad$ $f^{v}(0) = 1$

$f^{vi}(x) = -\sin x$ $\qquad$ $f^{vi}(0) = 0$

उकल: मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

$$= 0 + x + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}(-1) + \frac{x^4}{4!}(0) + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$ **उत्तर**

(iv) $f(x) = \cos x$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ **उत्तर**

(v) $f(x) = \sec x$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \cdots$$ **उत्तर**

(vi) $f(x) = \sinh x$

$f(x) = \sinh x$, $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cosh x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \sinh x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \cosh x$ $\qquad f'''(0) = 1$

$f^{iv}(x) = \sinh x$ $\qquad f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = \cosh x$ $\qquad f^{v}(0) = 1$

उकल: मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$ **उत्तर**

(vii) $f(x) = \cosh x$ स्वतः प्रयत्न करा. **उत्तर** $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

(viii) $f(x) = \log(1-x)$

$f(x) = \log(1-x)$, $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1-x}(-1) = \frac{-1}{1-x}$ $\qquad f'(0) = \frac{-1}{1} = -1$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}(-1) = \frac{-2}{(1-x)^3} \qquad f'''(0) = -2$$

$$f^{iv}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}(-1) = \frac{-6}{(1-x)^4} \qquad f^{iv}(0) = -6$$

उकल: मॅक्लॉरिनच्या श्रेणीनुसार,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

$$= 0 + x(-1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(-2) + \frac{x^4}{4!}(-6) + \cdots$$

$$= -x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

उदाहरण 3.94: सिद्ध करा

(i) $e^{\sin x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + \cdots$

उकल: $f(x) = e^{\sin x}$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$f''(x) = e^{\sin x}(-\sin x) + \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$$

$$f'''(x) = e^{\sin x}[2\cos x(-\sin x) - \cos x] + (\cos^2 x - \sin x) \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$= e^{\sin x}\left[-2\sin x \cdot \cos x - \cos x + \cos^3 x - \sin x \cdot \cos x\right]$$

....

$$f(0) = 1, \; f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 1, \; f'''(0) = 0, \; f^{iv}(0) = -3$$

मॅक्लॉरिनच्या श्रेणीनुसार,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}(-3) + \cdots$$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$ **सिद्ध केले**

(ii) सिद्ध करा $e^{x \cos x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

(iii) सिद्ध करा $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360} x^4 + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

(iv) सिद्ध करा $\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

(v) सिद्ध करा $\log \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \cdots$

उकल: $f(x) = \log \sec x$

$f'(x) = \frac{1}{\sec x} \sec x \cdot \tan x = \tan x$

$f''(x) = \sec^2 x$

$f'''(x) = 2 \sec^2 x \cdot \tan x$

$f^{iv}(x) = 4 \sec^2 x \cdot \tan^2 x + 2 \sec^4 x$

$f^{v}(x) = 4\left[2 \sec^2 x \times \tan^3 x + \sec^2 x \times \left(2 \tan x \times \sec^2 x\right)\right] + 8 \sec^4 x \times \tan x$

$= 8 \sec^2 x \cdot \tan^3 x + 16 \sec^4 x \cdot \tan x$

$f^{vi}(x) = 8\left[2 \sec^2 x \cdot \tan^4 x + \sec^2 x \cdot \left(3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x\right)\right] + 16\left[4 \sec^4 x \cdot \tan^2 x + \sec^6 x\right]$

आता,

$f(0) = \log \sec 0 = 0$

$f'(0) = \tan 0 = 0$

$f''(0) = \sec^2 0 = 1$

$f'''(0) = 0$

$f^{iv}(0) = 2$

$f^{v}(0) = 0$

$f^{vi}(0) = 16$

मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$\log \sec x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}(2) + \frac{x^6}{6!}(16) + \cdots$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \cdots$$ सिद्ध केले.

(vi) सिद्ध करा $\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \cdots$

उकल: $f(x) = \cos^2 x$ $\qquad f(0) = \cos^2 0 = 1$

$f'(x) = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$ $\qquad f'(0) = -\sin 0 = 0$

$f''(x) = -2\cos 2x$ $\qquad f''(0) = -2\cos 0 = -2$

$f'''(x) = 4\sin 2x$ $\qquad f'''(0) = 4\sin 0 = 0$

$f^{iv}(x) = 8\cos 2x$ $\qquad f^{iv}(0) = 8\cos 0 = 8$

$f^{v}(x) = -16\sin 2x$ $\qquad f^{v}(0) = -16\sin 0 = 0$

मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून, $\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \cdots$

$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + \cdots$ **सिद्ध केले.**

(vii) सिद्ध करा $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

(viii) सिद्ध करा $\tan^{-1}(1+x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \cdots$

उकल: समजा

$$f(x) = \tan^{-1}(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x)}{\left[1+(1+x)^2\right]^2}$$

$$f'''(x) = -2\left\{\frac{\left[1+(1+x)^2\right]^2(1)-(1+x).2\left[1+(1+x)^2\right].2(1+x)}{\left[1+(1+x)^2\right]^4}\right\}$$

$$f(0) = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}, \quad f'''(0) = \frac{1}{2}$$

मॅक्लॉरिनची श्रेणी वापरून, $\tan^{-1}(1+x) = \frac{\pi}{4} + x\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \cdots$ **सिद्ध केले.**

उदाहरण 3.95: सिद्ध करा.

(i) $\log(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

(ii) सिद्ध करा $\log(1+e^x) = \log 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

(iii) सिद्ध करा $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.96: सिद्ध करा

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$

उकल. स्वतः प्रयत्न करा. **सूचना:** $x = \tan\theta$ ठेवा

(ii) सिद्ध करा. $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right] = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right]$

उकल. स्वतः प्रयत्न करा. **सूचना:** $x = \tan\theta$ ठेवा

(iii) सिद्ध करा. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \cdots$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा. **सूचना:** $x = \sin\theta$ ठेवा.

(iv) सिद्ध करा. $\sin^{-1}\left(3x-4x^3\right)=3\left(x+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^5}{40}+\cdots\right)$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा. **सूचना:** $x=\sin\theta$ ठेवा.

3.6 पॉवर श्रेणी (Power Series)

पॉवर सिरीज ही एक प्रकारची श्रेणी आहे ज्यामध्ये चलाचा समावेश आहे. अधिक विशेषतः, जर चल x असेल, तर श्रेणीच्या सर्व पदांमध्ये x च्या पॉवर चा समावेश असेल. परिणामी, एक पॉवर श्रेणी अमर्याद बहुपद (infinite polynomial) म्हणून विचार केली जाऊ शकते. पॉवर श्रेणी सामान्य फंक्शन्स दर्शविण्यासाठी वापरली जातात आणि नवीन फंक्शन्स परिभाषित करण्यासाठी सुद्धा. या विभागात आपण पॉवर श्रेणी परिभाषित करू आणि पॉवर सीरीजचे कॉन्व्हर्जन्स आणि डायन्व्हर्जन्स कसे ठरवायचे ते दाखवू. पॉवर सिरीज वापरून काही फंक्शन्सची मांडणी कशी करायची ते आपण पाहू.

3.6.1 व्याख्या

पॉवर श्रेणी ही खालील स्वरूपाची अनंत श्रेणी आहे.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \qquad \ldots(1)$$

येथे गुणांक $c_0, c_1, c_2, \cdots$ आणि चल x आणि 'a' सर्व वास्तविक संख्या आहेत. स्थिरांक 'a' ला पॉवर श्रेणीचे केंद्र म्हणतात. विशेषतः, जेव्हा केंद्र 'a' शून्य असते, तेव्हा पॉवर श्रेणी खालील स्वरूपाची असते.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

3.6.2 पॉवर श्रेणीचे कॉन्व्हर्जन्स (Convergence of Power Series)

हे स्पष्ट आहे की $x=0$ साठी, प्रत्येक पॉवर श्रेणी कॉन्व्हर्जंट (convergent) असते, गुणांकांच्या मूल्यांपासून स्वतंत्र. आता, आपण पॉवर श्रेणी च्या कॉन्व्हर्जन्स बद्दल तीन संभाव्य प्रकरणे (possible cases) देतो.

i. $x=0$ व्यतिरिक्त, x च्या कोणत्याही मूल्यांसाठी श्रेणी कॉन्व्हर्जंट होत नाही (जे कॉन्व्हर्जन्स मधील ट्रीव्हीयल बिंदू आहे), त्याला "कोठेही कॉन्व्हर्जंट नाही" असे म्हणतात. उदाहरणार्थ, श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$, x ची $x=0$ वगळता इतर कोणत्याही मूल्यासाठी कॉन्व्हर्जंट होत नाही.

ii. जर श्रेणी x च्या सर्व मूल्यांसाठी कॉन्व्हर्जंट होते, तर त्याला "सर्वत्र कॉन्व्हर्जंट" असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ: श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ सर्वत्र कॉन्व्हर्जंट आहे.

iii. श्रेणी x च्या काही मूल्यांसाठी कॉन्व्हर्जंट (convergent) होते आणि इतर मूल्यांसाठी डायव्हर्जन्ट (divergent) होते.

उदाहरणार्थ: श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n+1}}$, $x \le 1$ साठी कॉन्व्हर्जंट आणि $x > 1$ साठी डायव्हर्जन्ट आहे.

ज्या x च्या संचा साठी श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे त्याला "कॉन्व्हर्जंट क्षेत्र" म्हणतात.

3.6.3 कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या

प्रत्येक पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ साठी , (जे सर्वत्र कॉन्व्हर्जंट किंवा कोठेही कॉन्व्हर्जंट नाहीत त्या वगळता), एक फायनाईट धन संख्या R अशी अस्तित्वात असते की प्रत्येक $|x| < R$ साठी श्रेणी कॉन्व्हर्जंट होते आणि प्रत्येक $|x| > R$ साठी श्रेणी डायव्हर्जन्ट होते या संख्येला R ला दिलेल्या पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या म्हणतात.

3.6.4 कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल

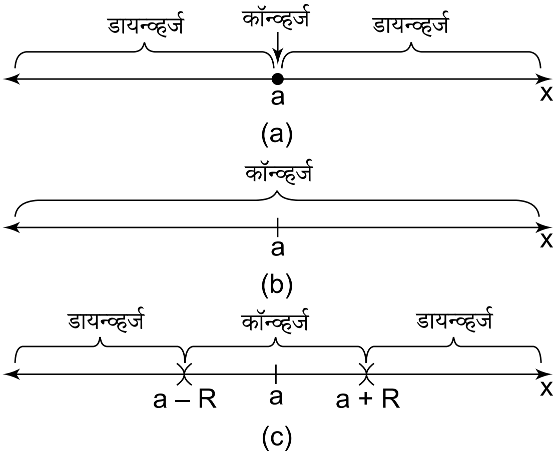
समजा पॉवर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ च्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या R असेल तर इंटरव्हल $(-R, R)$ ला त्या पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल म्हणतात.

उपयुक्त परिणाम

1. जर पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ अशी आहे कि $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$, तर ती पॉवर श्रेणी कॉन्व्हर्जंट असेल आणि त्याची कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या R असते.
2. पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या देखील $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, द्वारे परिभाषित केले जाते. (जर limit अस्तित्वात असल्यास).

3.6.5 पॉवर श्रेणीची आलेखीय मांडणी

पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ साठी आलेख (a) कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या $R = 0$ ला दर्शवितो, आलेख (b) कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या R = ∞ ला दर्शवितो आणि आलेख (c) कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या R ला दर्शवितो. आलेख (c) साठी लक्षात घ्या की श्रेणी शेवटच्या बिंदूं $x = a - R$ आणि $x = a + R$ वर कॉन्व्हर्ज होऊ शकतात किंवा नाही.



आकृती 3.4

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.97: खालील पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या निश्चित करा:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^n$

उकल:

(i) पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ विचारात घ्या.

जेथे $a_n = n!$ आणि केंद्र 0 आहे.

$$\therefore \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)}\right| = 0$$

अशा प्रकारे, कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या म्हणजे, R = 0 आहे.

⇒ पॉवर श्रेणी फक्त केंद्र 0 ला कॉन्व्हर्ज होते.

(ii) येथे $a_n = 2n-1$ आणि केंद्र 0 आहे.

$$\therefore \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right| = 1$$

अशा प्रकारे, कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या म्हणजे, R = 1 आहे.

उदाहरण 3.98: खालील पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या निश्चित करा:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^n (x-4)^n$

उकल:

(i) येथे $a_n = \frac{1}{n!}$ आणि केंद्र 2 आहे.

$$\therefore \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$$

अशा प्रकारे, कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या म्हणजे, $R=\infty$ आहे.

(ii) येथे $a_n = (n+2)^n$ आणि केंद्र 4 आहे.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|(n+2)^n\right|^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}|(n+2)|$$

$$= \infty$$

अशा प्रकारे, कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या म्हणजे, R = 0 आहे.

उदाहरण 3.99: पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} x^{3n}$ च्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या आणि कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल निश्चित करा.

उकल: येथे

$$a_n = 3^{-n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 3^{-1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad R = 3^{1/3}$$

आणि कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल $\left(-3^{1/3}, 3^{1/3}\right)$ आहे.

जेव्हा $x = -3^{1/3}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\left[(-3)^{1/3}\right]^{3n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}(-3)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}(-1)^n 3^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n, \begin{cases} 0, & \text{जर } n \text{ हा सम असेल} \\ -1, & \text{जर } n \text{ हा विषम असेल} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ श्रेणी $x = -3^{1/3}$ येथे कॉन्व्हर्जंट नाही.

जेव्हा $x = 3^{1/3}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \left[(3)^{1/3}\right]^{3n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} (3)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n+n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

जे डायव्हर्जन्ट आहे.

त्यामुळे, कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल $\left(-3^{1/3}, 3^{1/3}\right)$ आहे.

उदाहरण 3.100: पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)^2}$ च्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या आणि कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल निश्चित करा.

उकल: येथे

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} \text{ आणि केंद्र 0 आहे.}$$

$$\therefore \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n(n+2)^2}{(n+1)(n+1)^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right| = 1$$

$\therefore$ कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या $= 1$ आणि श्रेणी $|x-0| < 1$, म्हणजे $-1 < x < 1$, या इंटरव्हलमध्ये कॉन्व्हर्जंट आहे.

जेव्हा $x = -1$, पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} (-1)^n$ होते जी एक अल्टरनेटिंग (alternating) श्रेणी आहे आणि लीबनिट्झच्या चाचणीनुसार कॉन्व्हर्जंट आहे कारण कि

$$a_n > a_{n+1} \text{ आणि } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$$

जेव्हा $x=1,$ पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$ होते, जी धन श्रेणी आहे आणि डायव्हर्जन्ट आहे कारण कि

$$a_n=\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

समजा $b_n=\frac{1}{n}$ जेणेकरून

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2}=1$$ [नॉन झिरो आणि फायनाईट]

$\therefore \sum a_n$ आणि $\sum b_n$ एकत्रित कॉन्व्हर्ज किंवा डायन्व्हर्ज होतात.

परंतु, p-चाचणीद्वारे (p = 1), $\sum b_n=\sum\frac{1}{n}$ डायव्हर्जन्ट आहे.

$\therefore$ $$\sum a_n=\sum\frac{n}{(n+1)^2}$$ डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून पॉवर श्रेणीचा कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल $[-1,1)$ आहे.

उदाहरण 3.101: पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ च्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या निश्चित करा. पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल देखील शोधा.

उकल: येथे

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$ आणि पॉवर श्रेणीचा केंद्र 1 आहे.

$\therefore$ $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{n\cdot(-1)^{n+2}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n\cdot(-1)}\right|=1$$

$\therefore$ कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या = 1 आणि श्रेणी $|x-1|<1,$ म्हणजे $-1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$ इंटरव्हलमध्ये कॉन्व्हर्जंट आहे.

जेव्हा $x=2,$ पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ होते, जी एक अल्टरनेटिंग (alternating) श्रेणी आहे आणि लीबनिट्झच्या चाचणीनुसार

कॉन्व्हर्जंट आहे कारण कि $a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$

स्पष्टपणे, $a_n > a_{n+1}$ आणि $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$\therefore$ पॉवर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = 0$ बिंदू x = 2 ला कॉन्व्हर्जंट आहे.

जेव्हा $x = 0$, पॉवर श्रेणी अशी बनते,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(-1)}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n}$$

जे p-चाचणीद्वारे $[p = 1]$ डायव्हर्जन्ट आहे.

म्हणून पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल $(0, 2]$ आहे.

अभ्यास 3.13

1. खालील प्रत्येक पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या आणि कॉन्व्हर्जन्सचा इंटरव्हल निश्चित करा.

   (i) $\sum \frac{(n+1)x^n}{(n+2)(n+3)}$ (ii) $\sum \frac{2^n x^n}{n!}$

   (iii) $\sum \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$ (iv) $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$

   (v) $\sum \frac{(x-1)^n}{2n}$ (vi) $\sum \frac{n!(x+2)^n}{n^n}$

   (vii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\log n}$ (viii) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2. पॉवर श्रेणी $1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2 + ...$ ला कॉन्व्हर्जन्सची एकक त्रिज्या आहे हे सिद्ध करा.

3. खालील पॉवर श्रेणीच्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या निश्चित करा.

   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-1)^{2n}$

   (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n!}$

   (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x^{2n}$

   (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \cdot (x-a)^n$

   (v) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x-5)^{2n}$

उत्तरे

1. (i) $R=1,[-1,1)$ (ii) $R=\infty,\mathbb{R}$ (iii) $R=2,(-2,2)$
   (iv) $R=\infty,\mathbb{R}$ (v) $R=2,(-1,3)$ (vi) $R=e,(-2-e,-2+e)$
   (vii) $R=1,[-3,-1]$ (viii) $R=\sqrt{2},(-R,R)$

3. (i) $\sqrt{2}$ (ii) ∞ (iii) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
   (iv) 0 (v) 0

3.7 फोरियर श्रेणी (Fourier Series)

बऱ्याच अभियांत्रिकी आणि भौतिक समस्यांमध्ये, फोरियर श्रेणीचा अभ्यास आणि त्याच्या निराकारणाचा समावेश आहे; उदाहरणार्थ, उष्णतेचे वहन, इलेक्ट्रोडायनामिक्स आणि यांत्रिक कंपने. ही फंक्शन्स साइन आणि कोसाइनच्या श्रेणीत व्यक्त करणे आवश्यक आहे. गणितशास्त्रामध्ये उद्भवणारी बहुतेक एकल मूल्ये फंकशन्स, व्हेरिएबलच्या मूल्यांच्या इच्छित श्रेणीमध्ये, खाली दिलेल्या स्वरूपात मांडणी केली जाऊ शकते.

$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots\cdots+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots\cdots$ अशी श्रेणी फोरियर श्रेणी म्हणून ओळखली जाते.

काही महत्वाचे डेफिनेट इंटीग्रलस, खालीलप्रमाणे आहेत:

a. $\int_c^{c+2\pi}\sin mxdx=0$

b. $\int_c^{c+2\pi}\cos mxdx=0$

c. $\int_c^{c+2\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx=0,\quad m\neq n$

d. $\int_c^{c+2\pi}\cos mx\cdot\sin nxdx=0,\quad m\neq n$

e. $\int_c^{c+2\pi}\sin^2 mxdx=\pi,\quad m\neq 0$

f. $\int_c^{c+2\pi}\cos^2 mxdx=\pi,\quad m\neq 0$

g. $\int_c^{c+2\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=0,\quad m\neq n$

h. $\int_c^{c+2\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=0,\quad m\neq n$

3.7.1 फोरियर श्रेणीसाठी डिरिचलेटच्या अटी (कंडिशन्स)

जर इंटरव्हल $c \le x \le c+2\pi$ मध्ये परिभाषित केलेले फंक्शन $f(x)$ असेल

i. इंटरव्हलमध्ये फायनाईट आणि एकच मूल्य असलेले फंक्शन असेल.

ii. इंटरव्हलमध्ये सिंग्युलॅरिटीज (singularities) मर्यादित संख्येत असेल.

iii. आवर्त फंक्शन असेल.

iv. इंटरव्हलमध्ये मॅक्सिमा आणि मिनिमाची मर्यादित संख्या असेल.

तर फंक्शन $f(x)$ साठी फोरियर श्रेणीची व्याख्या खालील प्रमाणे असेल.

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

जेथे,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$a_0,\ a_n,\ b_n$ हे यूलरचे सूत्र म्हणून ओळखले जातात.

वरील चार अटी डिरिचलेटच्या अटी म्हणून ओळखल्या जातात.

टिपण्णी 1: हे लक्षात घेतले पाहिजे की फोरियर विस्तार प्रत्येक बाबतीत वैध नाही.

टिपण्णी 2: युलरचे सूत्र $a_0,\ a_n,\ b_n$ खालीलप्रमाणे प्राप्त होते, आपल्याकडे आहे,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) च्या दोन्ही बाजूंना c ते $c+2\pi$ पर्यंत इंटिग्रेट करा

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)dx = \int_c^{c+2\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_c^{c+2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,dx + \int_c^{c+2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_c^{c+2\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + a_n \times 0 + b_n \times 0$$

$$= a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)dx \quad \begin{cases} \because \int_c^{c+2\pi} \sin mx dx = 0 \\ \because \int_c^{c+2\pi} \cos mx dx = 0 \end{cases}$$

समीकरण (1) च्या दोन्ही बाजूंना $\cos nx$ ने गुणाकार करून आणि c ते $c+2\pi$ पर्यंत इंटिग्रेट करून, आपल्याकडे आहे,

$$\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx dx = \int_c^{c+2\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx dx + \int_c^{c+2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\right)\cos nx\, dx + \int_c^{c+2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\right)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\times 0 + a_n\times\pi + b_n\times 0 = a_n\pi$$

$$\Rightarrow \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_c^{c+2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\right)\cos nx\, dx \\ &= \int_c^{c+2\pi}(a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx + \cdots)\cos nx\, dx \\ &= a_n\pi \left\{ \begin{aligned} \because \int_c^{c+2\pi} \cos mx\cdot\cos nx dx &= 0, \quad m\neq n \\ &= \pi, \quad m = n \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

त्याचप्रमाणे, $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

पुढे,

(i) जर c = 0 असेल, तर इंटरव्हल $0 \le x \le 2\pi$ होईल, आणि समीकरण (1) वरून

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

आपल्याकडे आहे, $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

आणि $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

(ii) जर $c = -\pi$ असेल, तर इंटरव्हल $-\pi \le x \le \pi$ होईल, आणि समीकरण (1) वरून, आपल्याकडे आहे,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

आणि
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.102: $(-\pi,\pi)$ मध्ये e^{-ax} ची मांडणी करताना फोरियर श्रेणी मिळवा. म्हणून, $\pi/\sinh\pi$ साठी श्रेणी काढा.

उकल: समजा

$$f(x) = e^{-ax}$$

तर
$$e^{-ax} = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

तर,
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ax}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{-a\pi}\left[e^{-a\pi} - e^{a\pi}\right] = \frac{2}{a\pi}\sinh a\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \;\; = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ax}\cos nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-ax}}{a^2+n^2}[-a\cos nx + n\sin nx]\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2+n^2)}\left\{e^{-a\pi}[-a\cos n\pi + 0] - e^{a\pi}[-a\cos(-n\pi)+0]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2+n^2)}\cdot\left[-a(-1)^n\right]\left\{e^{-a\pi} - e^{a\pi}\right\}$$

$$= \frac{2a(-1)^n \sinh a\pi}{\pi(a^2+n^2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \;\; = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ax}\sin nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-ax}}{a^2+n^2}[-a\sin nx - n\cos nx]\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi\left(a^2+n^2\right)}\left\{e^{-a\pi}\left[-0-n\cos n\pi\right]-e^{a\pi}\left[0-n\cos(-n\pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi\left(a^2+n^2\right)}\cdot\left[n(-1)^n\right]\left\{e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right\} \quad = \frac{2(-1)^n n\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+n^2\right)}$$

अशा प्रकारे,

$$e^{-ax} = f(x) = \frac{\sinh a\pi}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+n^2\right)}\cdot\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+n^2\right)}\cdot\sin nx$$

$$= \frac{\sinh a\pi}{\pi a} - \frac{2a\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+1^2\right)}\cdot\cos x + \frac{2a\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+2^2\right)}\cdot\cos 2x - \frac{2a\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+3^2\right)}\cdot\cos 3x + \cdots$$

$$- \frac{2\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+1^2\right)}\cdot\sin x + \frac{(2\times 2)\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+2^2\right)}\cdot\sin 2x - \frac{(2\times 3)\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+3^2\right)}\cdot\sin 3x + \cdots$$

वरील समीकरणात $x = 0$, $a = 1$ ठेऊन,

$$1 = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\sinh\pi}{\pi\left(1^2+n^2\right)}$$

$$= \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi\left(1^2+n^2\right)}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{\pi}{\sinh\pi} = 2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{1^2+1^2}+\frac{1}{1^2+2^2}-\frac{1}{1^2+3^2}+\frac{1}{1^2+4^2}-\cdots\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{1^2+2^2}-\frac{1}{1^2+3^2}+\frac{1}{1^2+4^2}-\cdots\right]$$

उदाहरण 3.103: सिद्ध करा कि $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}, -\pi < x < \pi$

म्हणून, दाखवा कि

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$
2. $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$

उकल: समजा $f(x) = x^2$ आणि

$$x^2 = f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

तेव्हा, $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^2\cdot\left[\frac{\sin nx}{n}\right] - (2x)\cdot\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right] + (2)\cdot\left[\frac{-\sin nx}{n^3}\right]\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \qquad \{\because \sin n\pi = 0\}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}[\pi\cos n\pi - 0\times\cos 0]$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0 \qquad \{\because x^2 \sin nx \text{ हे विषम फंक्शन आहे}\}$$

$\therefore$ $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad ...(1)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + ...\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + ...\right]$$

समीकरण (1) मध्ये $x = \pi$ ठेवून, $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi\right]$

किंवा $$\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

अशा प्रकारे, $$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\cdots \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) मध्ये $x = 0$ ठेवून, आपल्या कडे असेल $\therefore$ $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

$\Rightarrow$ $$0=\frac{\pi^2}{3}+4\left[\frac{-1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$ (3) [भाग 2 सिद्ध झाले]

समीकरण (2) आणि (3) ची बेरीज करून,

$$\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}=2\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{(2n-1)^2}$$ [भाग 3 सिद्ध झाले]

आपल्याकडे आहे, $$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$ [समीकरण 1 वरून]

दोन्ही बाजूंना x^2 नी गुणाकार करून आणि इंटीग्रेट करून

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2}{3}x^2dx+4\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}x^2\cos nxdx$$

$\Rightarrow$ $$\frac{2\pi^5}{5}=\frac{1}{9}\left(2\pi^5\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{2\pi^5}{9}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}2\left[x^2\frac{\sin nx}{n}-2x\frac{\cos nx}{n^2}+2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2\pi^5}{9}+8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\left[\frac{2\pi\cos n\pi}{n^2}\right]\right)$$

$$=\frac{2\pi^5}{9}+16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^4}$$

$$=\frac{2\pi^5}{9}+16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

किंवा $$16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2\pi^5}{5}-\frac{2\pi^5}{9}$$

$$=\frac{8\pi^5}{45}$$

अशा प्रकारे, $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$ [भाग 4 सिद्ध झाला]

उदाहरण 3.104: इंटरवल $-\pi < x < \pi$ मध्ये फंक्शन $f(x) = x + x^2$ साठी फोरियर श्रेणी शोधा. त्यावरून सिद्ध करा

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots$$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.105: फोरियर श्रेणी म्हणून $f(x) = x\sin x,\ 0 < x < 2\pi$ चे मूल्यमापन करा आणि त्यावरून सिद्ध करा कि

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \cdots$$

उकल: दिलेले आहे कि $f(x) = x\sin x$

$\Rightarrow$ समजा
$$x\sin x = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

तेव्हा,
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x dx = \frac{1}{\pi}\{x[-\cos x] - [-\sin x]\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}[-2\pi] = -2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cdot[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{x\cdot\left[\frac{-\cos(n+1)x}{(n+1)} + \frac{\cos(n-1)x}{(n-1)}\right] - \left[\frac{-\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{2\pi\left[\frac{-\cos 2(n+1)\pi}{(n+1)} + \frac{\cos 2(n-1)\pi}{(n-1)}\right]\right\}$$

[दुसरे इंटिग्रल लिमिट ठेवल्यावर शून्य होते]

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{2\pi\cdot\left[\frac{-1}{(n+1)} + \frac{1}{(n-1)}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{2\pi\left[\frac{2}{n^2 - 1}\right]\right\}, n \neq \pm 1$$

$$= \frac{2}{n^2 - 1}, \quad n \neq \pm 1$$

जेव्हा $n = 1$,
$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x \cdot \cos x dx$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cdot\sin 2x dx \ = \frac{1}{2\pi}\left\{x\cdot\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]-(1)\cdot\left[\frac{-\sin 2x}{4}\right]\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}[-\pi] = -\frac{1}{2}$$

आता,
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\cdot\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cdot[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{x\cdot\left[\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)}-\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)}\right]-(1)\cdot\left[\frac{-\cos(n-1)x}{(n-1)^2}+\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}\right]\right\}_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos 2(n-1)\pi}{(n-1)^2}-\frac{\cos 2(n+1)\pi}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]-\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]\right\}$$

$$= 0, \text{ provided } n \neq \pm 1$$

जेव्हा $n = 1$,
$$\therefore b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cdot(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x^2-\frac{x^2}{2}-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{4\pi^2}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\times 2\pi^2 = \pi$$

अशा प्रकारे,
$$x\sin x = -1-\frac{1}{2}\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\cos nx+\pi\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}0\sin nx \qquad \ldots(1)$$

$\Rightarrow$
$$x\sin x = -1-\frac{1}{2}\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\cos nx+\pi\sin x \qquad \ldots.(2)$$

$x = \frac{\pi}{2}$, समीकरण (1) मध्ये ठेवुन आपल्याकडे असेल

$$\frac{\pi}{2}=-1+\pi+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$=-1+\pi+2\left[\frac{1}{2^2-1}\cos\pi+\frac{1}{3^2-1}\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{4^2-1}\cos 2\pi+\cdots\right]$$

किंवा $$-\pi+\frac{\pi}{2}=-1-2\left[\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\cdots\right]$$

$$1-\frac{\pi}{2}=-2\left[\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\cdots\right]$$

$$\frac{\pi-2}{4}=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\cdots$$

उदाहरण 3.106: जर $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2$ श्रेणी $0<x<2\pi$ मध्ये असेल, तर $f(x)=\frac{\pi^2}{48}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$ दाखवा.

उकल: दिलेले आहे $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2$, आपल्याकडे असेल

$$\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2=f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

तेव्हा, $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2dx=\frac{\pi^2}{24}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2\cos nxdx=\frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{16\pi}\left\{(\pi-x)^2\left[\frac{\sin nx}{n}\right]-\left[-2(\pi-x)\right]\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right]+2\left[\frac{-\sin nx}{n^3}\right]\right\}_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{16\pi}\left\{(\pi-x)^2\left[\frac{\sin nx}{n}\right]+2(\pi-x)\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right]-2\frac{\sin nx}{n^3}\right\}_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{16\pi}\left\{-2(\pi-x)\frac{\cos nx}{n^2}\right\}_0^{2\pi}=\frac{1}{16\pi}\left[2\pi\cdot\frac{\cos 2n\pi}{n^2}+2\pi\cdot\frac{1}{n^2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{16\pi}\left[\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right]=\frac{1}{16}\left[\frac{4}{n^2}\right]=\frac{1}{4n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2\sin nxdx=0$$

अशा प्रकारे, $$\left(\frac{\pi-x}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{48}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$$

उदाहरण 3.107: इंटर्वल $-\pi < x < \pi$ मध्ये सिद्ध करा कि $\cosh ax = \frac{2a^2}{\pi}\sin a\pi\left\{\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\cos nx\right\}$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा

अभ्यास 3.14

1. फंक्शन $f(x) = x\cos x,\ 0 < x < 2\pi$ साठी फोरियर श्रेणी शोधा.
2. फंक्शन $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ साठी फोरियर श्रेणी शोधा.
3. फोरियर श्रेणी म्हणून फंक्शन $f(x) = \sin ax,\ -\pi < x < \pi$ चा विस्तार करा.
4. फोरियर श्रेणी म्हणून फंक्शन $f(x) = x - x^2,\ -\pi < x < \pi$ चा विस्तार करा.
5. फंक्शन $f(x) = \begin{cases} 1+\frac{2x}{\pi}, & -\pi < x < 0 \\ 1-\frac{2x}{\pi}, & 0 < x < \pi \end{cases}$ साठी फोरियर श्रेणी मिळवा.
6. फंक्शन $f(x) = |\sin x|,\ -\pi < x < \pi$ साठी फोरियर श्रेणी शोधा.
7. जेव्हा $f(x+2\pi) = f(x)$ जेथे फंक्शन $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & 0 \le x < \pi \\ -x+\pi, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$. दिलेल्या फंक्शन साठी फोरियर श्रेणी शोधा.
8. रेक्टिफायरमधून गेल्यानंतर अल्टरनेटिंग करंट (Alternating Current) दिलेल्या स्वरूपात असतो जेथे मॅक्सीमम करंट I_0 असतो आणि पिरिएड 2π असतो. i ला फोरियर श्रेणी म्हणून व्यक्त करा. $i = \begin{cases} I_0 \sin x, 0 \le x \le \pi \\ 0, \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$
9. फोरियर श्रेणी म्हणून फंक्शन $f(x) = |\cos x|,\ -\pi < x < \pi$ चा विस्तार करा.
10. फोरियर श्रेणी म्हणून फंक्शन $f(x) = \sqrt{1-\cos x},\ -\pi < x < \pi$ चा विस्तार करा.

उत्तरे

1. $x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$
2. $f(x) = -\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right]$
3. $\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2-a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}-\cdots\right]$

4. $x - x^2 = -\dfrac{\pi^2}{3} + 4\left[\dfrac{\cos x}{1^2} - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + ...\right]$

5. $f(x) = \dfrac{8}{\pi^2}\left[\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$

6. $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos 2x}{3} + \dfrac{\cos 4x}{15} + \cdots\right]$

7. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right]$

8. $i = \dfrac{I_0}{2} + \dfrac{I_0}{2}\sin x - \dfrac{2I_0}{\pi}\left[\dfrac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \dfrac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \dfrac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \cdots\right]$

9. $|\cos x| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos 2x}{3} - \dfrac{\cos 4x}{15} + \cdots\right]$

10. $\sqrt{1 - \cos x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{4n^2 - 1}$

3.7.2 सम आणि विषम फंक्शन

जर $f(-x) = f(x)$, तर फंक्शन $f(x)$ एक सम फंक्शन आहे. **उदाहरण:** $x^2, \cos x$.

जर $f(-x) = -f(x)$, तर फंक्शन $f(x)$ हे एक विषम फंक्शन आहे. **उदाहरण:** $x, \sin x$.

जेव्हा $f(x)$ सम असतो, तेव्हा

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0$$ (सम फंक्शन × विषम फंक्शन) = विषम फंक्शन

जेव्हा $f(x)$ विषम असतो, तेव्हा

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$$ (विषम फंक्शन × विषम फंक्शन) = सम फंक्शन

3.7.3 डिसकंटिन्यूयस फंक्शन साठी फोरियर श्रेणी

समजा फंक्शन $F(x)$ हे $x = x_0$ वर डिसकंटिन्यूयस आहे.

हे सुचवते कि $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ आणि $f(x_0 + 0) > f(x_0)$

जर दोन्ही लिमिट्स $f(x_0 - 0)$ आणि $f(x_0 + 0)$ अस्तित्वात असतील परंतु समान नाहीत, तर डिसकंटिन्यूइटी च्या बिंदूवर (point of discontinuity) फंक्शनचे मूल्य $f(x_0 - 0)$ आणि $f(x_0 + 0)$ ची सरासरी म्हणून घेतले जाते.

म्हणजेच $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.108: $f(x)$ साठी फोरियर विस्तार शोधा, जर

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

हे देखील सिद्ध करा कि $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$

उकल: समजा

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

आपल्याला माहीत आहे, $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \Rightarrow \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi dx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx$

$$= \frac{1}{\pi}[-\pi x]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} - 0\right] = \frac{-\pi^2}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$\Rightarrow$ $a_0 = \dfrac{-\pi}{2}$

आता, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0} (-\pi)\cos nxdx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} - \left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\pi \times 0) + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2} + \left(\frac{-1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{जर } n \text{ सम असेल} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{जर } n \text{ वीषम असेल} \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{2}{1^2 \cdot \pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2}{3^2 \cdot \pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{2}{5^2 \cdot \pi} \ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-\pi)\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[x\frac{(-\cos nx)}{n} - \left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi)\left(\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi)\frac{1}{n} - \pi\left(\frac{\cos n\pi}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\cos n\pi}{n}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{2(-1)^n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{2(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}\left(1 - 2(-1)^n\right)$$

$$b_1 = 3, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = -\frac{1}{4}$$

अशा प्रकारे,

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right] + \left[3\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right] \quad \ldots(1)$$

समी (1) मध्ये $x = 0$ ठेवल्यास, $f(0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right]$ ....(2)

$x = 0$ पॉईंट ऑफ डिसकंटिन्यूइटी असल्यामुळे,

$$\therefore \quad f(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{-\pi + 0}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

$\therefore$ समी (2) वरून $\Rightarrow$ $\frac{-\pi}{2} = \frac{-\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right]$

किंवा $\frac{-\pi}{4} = -\frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right]$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

उदाहरण 3.109: जर $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ \sin x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ तर सिद्ध करा कि $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{4m^2-1}$

म्हणून दाखवा कि $\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}=\frac{\pi-2}{4}$

उकल: समजा

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

तेव्हा,
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\Rightarrow\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}\sin xdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}[1+1]=\frac{2}{\pi}$$

आणि
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\Rightarrow\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nxdx$$

$\Rightarrow$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin x\ coxnx\ dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x\right]dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\ dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi},n\ne 1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right)-\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

जेव्हा n सम असेल तेव्हा $n+1,\ n-1$ विषम असतात, तेव्हा

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{2}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{n^2-1}\right],n\ne 1$$

जेव्हा n विषम असेल $n+1,\ n-1$ सम असेल, तेव्हा

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]=0, n\neq 1$$

जेव्हा $n=1, a_1=0$ (विद्यार्थी तपासू शकतात)

आता $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$

$\Rightarrow$ $$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0.\sin nx \text{ dx}+\int_{0}^{\pi}\sin x \text{ sinnx dx}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi} 2\sin x\sin nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\left[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x\right]dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}=0, n\neq 1$$

जेव्हा $n=1,$ $b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}$ (विद्यार्थी शोधू शकतात)

$\therefore$ $$f(x) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{2,4,6}^{\infty}\frac{-2}{n^2-1}\cos nx+\frac{1}{2}\sin x$$

किंवा $f(x) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum\frac{\cos nx}{n^2-1}$ जेथे n सम पूर्णांक आहे. ...(3)

समी (3) मध्ये $n=2m$ ठेवा आपल्याला आवश्यक परिणाम मिळेल म्हणजेच, $\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}.....=\frac{\pi-2}{4}$

उदाहरण 3.110: दिलेल्या फंक्शन साठी फोरियर श्रेणी शोधा. $f(x)=\begin{cases}-x^2, & -\pi\leq x\leq 0\\ x^2, & 0\leq x\leq \pi\end{cases}$

उकल: जेव्हा $-\pi\leq x\leq 0$ किंवा $0\leq x\leq\pi$

$\Rightarrow$ $f(-x)=(-x)^2=x^2=-f(x)$

जेव्हा $0\leq x\leq\pi,$

$-\pi\leq -x\leq 0$

$f(-x)=-(-x)^2=-x^2=-f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ हे $[-\pi,\pi]$ मधील x चे एक विषम फंक्शन आहे. तसेच वरील फंक्शनचा आलेख ओरिजिन ला सीमेट्रिक आहे

$$a_0 = 0 = a_n$$

समजा $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

जेव्हा $$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin nx dx+\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x^2(-\cos nx)}{n}-\frac{(-2x)(-\sin nx)}{n^2}+\frac{(-2)(-\cos nx)}{n^3}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2(-\cos nx)}{n}-\frac{(2x)(-\sin nx)}{n^2}+\frac{(2)(\cos nx)}{n^3}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-2}{n^3}\right)-\left\{\frac{-\pi^2(-\cos nx)}{n}-\frac{-2\cos n(-\pi)}{n^3}\right\}+\frac{1}{\pi}\left\{\frac{-\pi^2\cos nx}{n}+\frac{2\cos n\pi}{n^3}\right\}-\left(\frac{2}{n^3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{n^3}-\frac{\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{2(-1)^n}{n}-\frac{\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{2(-1)^n}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{n^3}-\frac{2\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{4(-1)^n}{n^3}\right]$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{1^3}+\frac{2\pi^2}{1}-\frac{4}{1^3}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi^2}{1}-\frac{8}{1^3}\right]$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{2^3}-\frac{2\pi^2}{2}+\frac{4}{2^3}\right] \quad \Rightarrow b_2=\frac{1}{\pi}\left[-\pi^2\right]=-\pi$$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4}{3^3}+\frac{2\pi^2}{3}-\frac{4}{3^3}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{8}{3^3}+\frac{2\pi^2}{3}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi^2}{3}-\frac{8}{3^3}\right]$$

$$b_4=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{4}{4^3}-\frac{2\pi^2}{4}-\frac{4}{4^3}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi^2}{4}\right]=-\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\left(\frac{2\pi}{1^3}-\frac{8}{1^3..\pi}\right)\sin x-\pi\sin 2x+\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{3^3..\pi}\right)\sin 3x-\frac{\pi}{2}\sin 4x+....$$

उदाहरण 3.111: $-\pi < x < \pi$ च्यासाठी दाखवा कि

$$\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2-a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}.....\right]$$

उकल: समजा

$$f(x) = \sin ax \text{, तेव्हा}$$

$$\sin ax = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

आपल्याला माहित आहे की, $f(-x) = \sin(-ax) = -\sin ax = -f(x)$

म्हणून, दिलेले फंक्शन $f(x)$ एक विषम फंक्शन आहे,

$\therefore$ $$a_0 = 0, a_n = 0$$

आणि $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin nx dx$$

किंवा $$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin ax \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left[\cos(n-a)x - \cos(n+a)x\right]dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a} - \frac{\sin(n+a)x}{n+a}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-a)\pi}{n-a} - \frac{\sin(n+a)\pi}{n+a}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}\sin a\pi}{n-a} - \frac{(-1)^{n+1}\sin a\pi}{n+a}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{2n\sin a\pi}{n^2-a^2}\right], n \neq a$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-a^2)} n \sin a\pi$$

$$\sin ax = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(n^2-a^2)\pi} n \sin a\pi \sin nx$$

$$= \frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-a^2}\sin x - \frac{2}{2^2-a^2}\sin 2x + \frac{3}{3^2-a^2}\sin 3x.....\right]$$

उदाहरण 3.112: $f(x)$ द्वारे परिभाषित केलेल्या $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi$ फंक्शन साठी फोरियर श्रेणी मिळवा. तसेच

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+.....=\frac{\pi^2}{8}$$ हे दाखवा.

उकल: दिलेले आहे कि $f(x)=|x|$

$$|x|=f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

तेव्हा
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\left(0+\pi^2\right)+\left(\pi^2-0\right)\right]=0$$

$$=\frac{2\pi^2}{2\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}-\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right]=\frac{2}{\pi}\left[(-1)^n-1\right]\frac{1}{n^2}$$

प्रकरण I: जेव्हा n सम असते, $a_n=0$

प्रकरण II: जेव्हा n विषम असते, $a_n=\frac{-4}{\pi n^2}$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\text{ sinnx dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-(x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-(-1)\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)-\frac{-\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left(-\pi \frac{(-1)^n}{n} \right) + \left(-\pi \frac{(-1)^n}{n} \right) \right] = \frac{1}{\pi}[0] = 0$$

$\Rightarrow$
$$|x| = f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + ... \right] \quad ...(1)$$

$x = 0$ समी (1) मध्ये ठेवून, आपल्याकडे असेल

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... \right]$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... \right]$$

टीप: $|x|$ हे एक सम फंक्शन आहे, म्हणून ते असे विस्तारित केले जाऊ शकते $|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

उदाहरण 3.113: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ फंक्शन साठी फोरियर श्रेणी मिळवा.

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$ हे देखील शोधा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.114: $\begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi \le x \le 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ द्वारे दिलेल्या $f(x)$ फंक्शनसाठी फोरियर श्रेणी मिळवा

आणि तसेच $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$ काढा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

3.7.4 इंटरवल बदल (स्केल बदलणे)

आपण आतापर्यंत फक्त लांबी 2π म्हणजे (-π, π) किंवा (0, 2π) च्या इंटरवलचा विचार केला आहे, परंतु बहुतेक व्यावहारिक समस्यांमध्ये '2L' पिरिएडसह फंक्शनचा वापर समाविष्ट आहे. अशा परिस्थितीत, चलाच्या साध्या बदलाद्वारे कोणत्याही लांबीचे इंटरवल आपण साध्या पद्धतीने बदलतो म्हणजेच '$2l$' ला लांबी 2π मध्ये आणि नंतर फोरियर श्रेणी निश्चित करतो.

समजा इंटरवल $(-l, l)$ म्हणजेच $-l < x < l$ मध्ये फंक्शन परिभाषित केले आहे, आपल्याला ते $-\pi < x < \pi$ मध्ये बदलावे लागेल.

त्यासाठी आपण $z = \frac{\pi x}{l}$ किंवा $x = \frac{lz}{\pi}$ ठेवू $\quad \therefore f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$

जेव्हा $x=-l \Rightarrow z=-\pi$

आणि $x=l \Rightarrow z=\pi$

$F(z)$ हे इंटरवल $(-\pi,\pi)$ मध्ये परिभाषित केले आहे

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nz$$

जिथे,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)dz$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz dz$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz dz$$

व्यस्त परिवर्तन करून, आपल्याकडे असेल

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi x}{l}$$

जिथे,

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

3.7.5 हाफ रेंज श्रेणी

समजा आपल्याला $f(x)$ फंक्शनसाठी फोरियर श्रेणी शोधायची आहे जी अर्ध्या इंटरवल मध्ये परिभाषित आहे, जसे $0 \le x \le \pi$ किंवा $0 \le x \le l$. हे सर्व इंटरवल $-l \le x \le l$ मध्ये $F(x)$ फंक्शन परिभाषित करून केले जाऊ शकते असे कि $F(x): f(x)$, इंटरवल $0 \le x \le l$ मध्ये.

आता जर आपण $-l \le x \le l$ मध्ये $F(x)$ परिभाषित केले तर $F(x)$ ही श्रेणी मिळू शकते. $-l \le x \le l$ मध्ये $F(x)$ खालीलपैकी कोणत्याही दोन मार्गांनी निवडले आहे.

1. **हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी**

   समजा $-l \le x \le l$ मध्ये $F(x)$ एक सम फंक्शन असे आहे की $F(x)=f(x)$ $0 \le x \le l$ मध्ये, आपल्याकडे आहे

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} F(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

2. हाफ रेंज साइन श्रेणी

समजा $-l \le x \le l$ मध्ये $F(x)$ एक विषम फंक्शन आहे, तेव्हा

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

आणि $\quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

किंवा $\quad \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

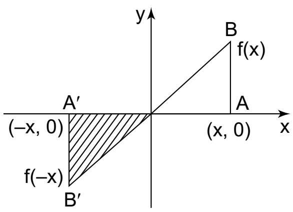
$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

किंवा

1. हाफ रेंज साइन श्रेणी

जर इंटरवल $0 < x < l$ मध्ये साइन श्रेणी म्हणून फंक्शन $f(x)$ विस्तारणे आवश्यक असेल, तर आपण ते ओरिजिनमध्ये प्रतिबिंबित करून $-l < x < l$ पर्यंत फंक्शन वाढवतो, जेणेकरून

$$f(-x) = -f(x) \text{ ज्यासाठी } a_0 = a_n = 0.$$



आकृती 3.5

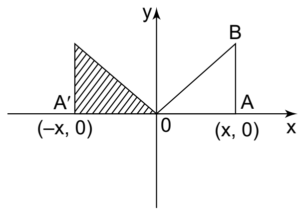
तेव्हा फंक्शन $f(x)$ विषम असेल आणि म्हणून, आपल्याकडे असेल

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad \text{जिथे, } b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

2. हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी

जर इंटरवल $0 < x < l$ मध्ये कोसाइन श्रेणी म्हणून फंक्शन $f(x)$ विस्तारणे आवश्यक असेल, तर आपण ते y-अक्षामध्ये प्रतिबिंबित करून $-l < x < l$ पर्यंत फंक्शन वाढवतो, जेणेकरून $f(-x) = f(x)$ ज्यासाठी $b_n = 0$.

मग $f(x)$ एक सम फंक्शन असेल आणि फोरियर श्रेणी असेल,



आकृती 3.6

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

जिथे, $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n=0$$

टीप:
जर $l=\pi$ असेल तर $0\le x\le\pi$ आणि हाफ रेंज साइन श्रेणी असेल,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \qquad a_0=0, a_n=0$$

जिथे, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$

आणि हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी असेल,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

जिथे, $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$

आणि $a_n=\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$ आणि $b_n=0$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.115: इंटरवल $(-l,l)$ मध्ये फोरियर श्रेणी म्हणून $f(x)=e^{-x}$ चा विस्तार करा.

उकल: समजा $f(x)=e^{-x}$

मग, $e^{-x}=f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

जिथे, $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{-x}dx \qquad \Rightarrow\frac{1}{l}\left[e^{l}-e^{-l}\right]=\frac{2}{l}\sinh l$

आणि $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{-x}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$$=\frac{1}{l}\left|\frac{e^{-x}}{1+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\left\{-\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}\right|_{-l}^{l}$$

$$\left\{\because \int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)\right\}$$

$$=\frac{2l(-1)^n}{l^2+n^2\pi^2}\sinh l$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{-x}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left|\frac{e^{-x}}{1+\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)}\left\{-\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right\}\right|_{-l}^{l}$$

$$=\left[\frac{2n\pi(-1)^n\sinh l}{l^2+n^2\pi^2}\right]$$

अशा प्रकारे,
$$e^{-x}=\frac{\sinh l}{l}+\sum\frac{2l(-1)^n}{l^2+n^2\pi^2}\sinh l\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum\frac{2n\pi(-1)^n}{l^2+n^2\pi^2}\sinh l\sin\frac{n\pi x}{l}$$

उदाहरण 3.116: दिलेल्या फंक्शन चा फोरियर श्रेणी म्हणून विस्तार करा $f(x)=\begin{cases}\pi x & 0\le x\le 1\\ \pi(2-x) & 1\le x\le 2\end{cases}$

उकल: समजा

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, l=1$$

मग,
$$a_0=\frac{1}{1}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\pi x dx+\int_1^2\pi(2-x)dx=\pi$$

$$a_n=\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=\int_0^1\pi x\cos n\pi x dx+\int_0^2\pi(2-x)\cos n\pi x dx$$

$$=\pi\left[x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}-\frac{(-\cos n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1+\pi\left[(2-x)\frac{\sin n\pi x}{n\pi}+\left(-\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_1^2$$

$$= \pi\left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right] + \pi\left[\left(\frac{-\cos 2n\pi}{n^2\pi^2}\right) + \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{जेव्हा } n \text{ सम असेल} \\ \dfrac{-4}{n^2\pi} & \text{जेव्हा } n \text{ विषम असेल} \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin n\pi x dx = \int_0^1 \pi x \sin n\pi x dx + \int_1^2 \pi(2-x)\sin n\pi x dx$$

$$= \pi\left[x\frac{(-\cos n\pi x)}{n\pi} - \frac{(-\sin n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 + \pi\left[(2-x)\frac{(-\cos n\pi x)}{n\pi} + \left(\frac{-\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right)\right]_1^2$$

$$= \pi\left[\frac{-\cos n\pi}{n\pi}\right] + \pi\left[\frac{-\sin 2n\pi}{n^2\pi^2} + \frac{\cos n\pi}{n\pi}\right]$$

$$= \pi\left[-\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}\right] = 0$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} \ldots\ldots\right]$$

$x = 0$ समी (1) मध्ये ठेवून, आपल्याकडे असेल

$$\Rightarrow \qquad f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \ldots\ldots\right]$$

अशा प्रकारे, $$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

उदाहरण 3.117: फोरियर श्रेणी मध्ये $f(x)$ इंटरवल $(-2, 2)$ साठी $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$ विकसित करा.

उकल.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + \sum b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

येथे, $$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} 1dx\right] = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$

आणि $$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 1.\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}[\cos n\pi - \cos 0] = \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \frac{2}{n\pi}, & \text{जेव्हा } n \text{ विषम असेल.} \\ 0, & \text{जेव्हा } n \text{ सम असेल.} \end{cases}$$

$$b_2 = 0 \;\; , b_4 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots\ldots$$

उदाहरण 3.118: एक साइनूसॉइडल व्होल्टेज $E\sin wt$ हाफ वेव्ह रेक्टिफायरमधून जात आहे जे तरंगाचा ऋण भाग क्लिप करते. परिणामी फंक्शन विकसित करा.

$$u(t)\begin{Bmatrix} 0, & \frac{-T}{2} < t < 0 \\ E\sin wt, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{Bmatrix} \text{ आणि } T = \frac{2\pi}{w} \text{ फोरियर श्रेणी मध्ये.}$$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.119: $f(x) = x$ साठी साइन आणि कोसाइन श्रेणी मिळवा, इंटरवल $0 \le x \le \pi$ मध्ये.

आणि त्यावरून दाखवा कि $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\ldots\ldots = \frac{\pi^2}{8}$

उकल: साइन श्रेणिसाठी

समजा ओरिजिन मध्ये $f(x)$ प्रतिबिंबित करून त्याचे इंटरवल $-\pi \le x \le \pi$ पर्यंत वाढवूया जेणेकरून $f(-x) = -f(x)$ त्यामुळे $f(x)$ विषम आहे.

$$a_0 = 0 \text{ आणि } a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{(-\cos nx)}{n} - \left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi \cos n\pi}{n} - (0)\right] = \frac{-2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

कोसाइन श्रेणिसाठी

$f(x)$ ला y-axis मध्ये परावर्तित करून $-\pi \le x \le \pi$ पर्यंत इंटरवल वाढवूया, जसे की $f(-x) = f(x)$ म्हणून $f(x)$ सम आहे, म्हणून $b_n = 0$ आणि

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} - \frac{(-\cos nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi n^2}, & \text{जेंव्हा } n \text{ हा विषम असेल} \\ 0, & \text{जेंव्हा } n \text{ हा सम असेल} \end{cases}$$

$$f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

उदाहरण 3.120: इंटरवल $0 < x < 1$ मध्ये $f(x) = (x-1)^2$ फंक्शनसाठी हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी शोधा.

त्यावरून दाखवा की $\pi^2 = 8\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots\right)$

उकल: $f(x)$ च्या इंटरवल ला $-1 < x < 1$ पर्यंत वाढवून $f(x)$ ला y-अक्षा मध्ये असे प्रतिबिंबित करा की $f(-x) = f(x)$ आणि नवीन फंक्शन हे इंटरवल (-1, 1) मध्ये सम फंक्शन आहे

$b_0 = 0$ आणि

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)^2\, dx = \frac{2}{1}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)^2 \cos\frac{n\pi x}{1}\, dx$$

$$= \frac{2}{1}\left[(x-1)^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi} - 2(x-1)\frac{(-\cos n\pi x)}{n^2\pi^2} + 2\frac{(-\sin n\pi x)}{n^3\pi^3}\right]_0^1$$

$$= 2\left[0 + \frac{2}{n^2\pi^2}\right] = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

म्हणून हाफ रेंजची कोसाइन श्रेणी आहे.

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}\right]$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2}\ldots..\right]$$ [पहिला भाग सिद्ध केला]

भाग २, स्वतः करा.

उदाहरण 3.121: $(0, \pi)$ मध्ये कोसाइन श्रेणी म्हणून $x \sin x$ चा फोरियर विस्तार मिळवा. तसेच दाखवा कि

$$\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \ldots\ldots = \frac{\pi - 2}{4}$$

उकल: कोसाईन श्रेणिसाठी, $f(x)$ च्या इंटरवल ला y-अक्षा मध्ये $f(x)$ परावर्तित करून $-\pi < x < \pi$ पर्यंत वाढवूया जसे की $f(-x) = f(x)$ तेव्हा $f(x)$ हे इंटरवल $(-\pi, \pi)$ मध्ये सम फंक्शन असेल, म्हणून $b_n = 0$ आणि

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{2}{\pi}\left[x(-\cos x) - 1(-\sin x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\pi \cos \pi\right] = 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(2\cos nx \sin x)\, dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)-1\left(\frac{-\sin(n+1)x}{(n+1)^2}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\pi\left(\frac{-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right)\right], n\neq 1$$

$$=\left[-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n-1}\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}, n\neq 1$$

जेव्हा $n = 1$,

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)-1\left(-\frac{\sin 2x}{2^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left[\frac{\cos 2x}{1.3}-\frac{\cos 3x}{2.4}+\frac{\cos 4x}{3.5}......\right]$$ [भाग 1 सिद्ध झाला]

भाग २, स्वतः करा.

उदाहरण 3.122: जर $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ तर दाखवा कि

1. $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x\right)$

2. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 6x+\frac{1}{5^2}\cos 10x\right)$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 3.123: हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी मिळवा $f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x\le \frac{l}{2} \\ k(l-x,) & \frac{l}{2}\le x\le l \end{cases}$

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}.....$ दिलेल्या श्रेणीची बेरीज मिळवा.

उकल: समजा

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

तेव्हा,

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}Kx\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}K(l-x)\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\left(K\frac{x^2}{2}\right)_0^{\frac{l}{2}}+K\left((lx)-\frac{x^2}{2}\right)_{\frac{1}{2}}^{l}\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\left(K\frac{l^2}{8}\right)+K\left(\left(l^2-\frac{l^2}{2}\right)-K\left(\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{8}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left(K\frac{l^2}{4}\right)=\frac{Kl}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}Kx\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{l}K(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]$$

$$=\frac{2k}{l}\left\{\left[x\left(\frac{\frac{\sin n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}}\right)-\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{l}}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[(l-x)\frac{\frac{\sin n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}}-(-1)\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{l}}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{l}\right\}$$

$$=\frac{2k}{l}\left[\left(\frac{\frac{l}{2}}{\frac{n\pi}{l}}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}}-\frac{l}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right)+\left(\frac{-l^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{l^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2k}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - \cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2k}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right]$$

जेव्हा n विषम असेल, तेव्हा $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$ आणि $\cos n\pi = -1$

जेव्हा n सम असेल $\quad a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$

$$a_n = \frac{2kl}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 2\right]$$

$$a_2 = \frac{4kl}{2^2\pi^2}[-2] = \frac{-8kl}{2^2\pi^2}$$

$$a_4 = \frac{4kl}{4^2\pi^2}[\cos 2\pi - 1] = 0$$

$$a_6 = \frac{2kl}{6^2\pi^2}[2\cos 3\pi - 1 - \cos 6\pi] = \frac{-8kl}{6^2\pi^2}$$ आणि असेच

$$f(x) = \frac{kl}{4} + \frac{8kl}{\pi^2}\left[\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{l} .....\right]$$ [पहिला भाग सिद्ध केला]

भाग 2, स्वतः करा.

अभ्यास 3.15

1. $f(x) = x - x^2, -1 < x < 1$ चा फोरियर विस्तार शोधा.

2. $(-1,1)$ मध्ये $f(x) = e^{-x}$ चा फोरियर श्रेणी म्हणून विस्तार करा.

3. फोरियर श्रेणी म्हणून $f(x) = 0, -2 < x < 0$ आणि $f(x) = 1, 0 < x < 2$ चा विस्तार करा.

4. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ फोरियर श्रेणी म्हणून विस्तार करा.

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x, -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ फोरियर श्रेणी म्हणून विस्तार करा.

6. $f(x) = |\cos x|$ चे फोरियर विस्तार मिळवा $(-\pi, \pi)$ मध्ये

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ फोरियर श्रेणी म्हणून विस्तार करा.

8. हे सिद्ध करा की, $0 < x < l$ मध्ये

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left\{\frac{cox\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + ...\right\}$$ म्हणून $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ... = \frac{\pi^4}{96}$ हे सिद्ध करा.

9. एक स्थिर फंक्शन 'a' ला $\frac{4a}{\pi}\left\{\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right\}$ म्हणून विस्तारित केले जाऊ शकते हे दर्शवा $0 < x < \pi$ श्रेणीत.

10. $0 < x < \pi, x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2}\right)$ हे दाखवा आणि त्यावरून $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ चे मूल्यमापन करा.

11. $0 < x < \pi$ मध्ये यूनिटी साठी साइन श्रेणी मिळवा आणि त्यावरून हे दाखवा $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$.

12. रेंज $(0, l)$ मध्ये हे सिद्ध करा की $x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\frac{\pi x}{l}\right]$

आणि त्यावरून $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ... = \frac{\pi^4}{96}$ चे मूल्य काढा.

13. $f(t) = 1 - t^2, -1 \le t \le 1$ साठी फोरियर श्रेणी मिळवा.

14. फोरियर श्रेणी म्हणून दिलेल्या फंक्शन चा विस्तार करा $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1 & 1 < x < \frac{3}{2} \\ x - 1 & \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$

15. हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी म्हणून $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ ला $0 < x < l$ मध्ये विकसित करा.

उत्तरे

1. $x - x^2 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{cox\pi x}{1^2} - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2}......\right\} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin \pi x}{1}.....\right]$

2. $$e^{-x} = \sinh l\left[\frac{1}{l} - 2l\left[\frac{1}{l^2 + \pi^2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{l^2 2^2 \pi^2}\sin\frac{2\pi x}{l}\right] + \frac{1}{l^2 + 3^3\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + ...\right]$$

$$-2\pi\left[\frac{1}{e^2 + \pi^2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{2}{3^2 + 2^2\pi^2}\sin\frac{2\pi x}{l}.......\right]$$

3. $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left\{\cos\pi x+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x}{5^2}......\right\}$

4. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}\right]$

5. $f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left[\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2}\right]$

6. $|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+....\right]$

7. $f(x)=\left(\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}\right)\sin\pi x+\left(\frac{1}{3\pi}-\frac{4}{3^2\pi^2}\right)\sin 3\pi x-\left(\frac{1}{5\pi}-\frac{4}{5^2\pi^2}\right)\sin 5\pi x-1$

11. $1=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+......\right]$

13. $f(x)=\frac{7}{16}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)\cos\pi x-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\sin\pi x$

14. $1-t^2=\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\left\{\cos\pi t-\frac{cox2\pi t}{2^2}+\frac{\cos 3\pi t}{3^2}+......\right\}$

15. $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\frac{\cos 2\pi x}{l}}{1.3}+\frac{\frac{\cos 4\pi x}{l}}{3.5}+\frac{\frac{\cos 6\pi x}{l}}{5.7}+.....\right]$

3.7.6 फोरियर श्रेणी वरील पार्सेवलचे प्रमेय

जर $f(x))$ ची फोरियर श्रेणी इंटरवल $c<x<c+2l$ वर अशाप्रकारे दिली असेल

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

तर,
$$=\frac{1}{2l}\int_c^{c+2l}\left[f(x)\right]^2dx=\frac{{a_0}^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2+{b_n}^2\right)$$

सिद्धता: आता आपल्याकडे इंटरवल आहे $c<x<c+2l$

$$\therefore f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad ...(i)$$

जिथे,
$$a_0=\frac{1}{l}\int_c^{c+2l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_c^{c+2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

आणि $$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

समी (i) च्या दोन्ही बाजूंना $f(x)$ ने गुणाकार केल्यास, आपल्याकडे असेल

$$[f(x)]^2 = \frac{a_0}{2}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

दोन्ही बाजूंना x ने इंटीग्रेट करून, लिमिट c ते $c+2l$ दरम्यान, आपल्याकडे असेल

$$\int_c^{c+2l}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0}{2}\int_c^{c+2l} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad ...(1)$$

$$= \frac{a_0}{2}a_0 l + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (la_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (lb_n)$$

$$= \frac{a_0^2}{2}l + \sum_{n=1}^{\infty} la_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} lb_n^2$$

प्रकरण I: जर $c = 0$ असेल तर समी (1) असेल,

$$\frac{1}{2l}\int_0^{2l}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

प्रकरण II: जर $c = -l$ इंटरवल $-l < x < l$ असेल, तर

(i) जर $f(x)$ हे $(-l,l)$ मध्ये सम असेल तर $\frac{2}{l}\int_0^l [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty} a_n^2$

(ii) जर $f(x)$ हे $(-l,l)$ मध्ये विषम असेल तर $\frac{2}{l}\int_0^l [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 3.124: $0 < x < \pi$ मध्ये यूनिटी साठी फोरियर श्रेणी शोधा आणि त्यावरून $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$ हे दाखवा.

उकल: आपल्याकडे हाफ रेंज साइन श्रेणी हाफ इंटरवल $0 < x < \pi$ मध्ये $f(x) = 1$ साठी आहे

$\therefore$ $$a_0 = 0, a_n = 0 \text{ आणि } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nxdx$$

जेथे $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}-\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$=\begin{cases}0, & \text{जेव्हा } n \text{ सम असेल}\\ \frac{4}{n\pi}, & \text{जेव्हा } n \text{ विषम असेल}\end{cases}$$

आता फोरियर श्रेणितील पार्सेवलच्या प्रमेयावरून,

$$\int_c^{c+2l}\left[f(x)\right]^2 dx=2l\left[\frac{a_0^{\,2}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}\right)\right]$$

$l=0$ आणि $\quad 2l=\pi \Rightarrow \int_0^{\pi}(1)^2 dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{16}{\pi^2 1^2}+\frac{16}{\pi^2 3^3}+\frac{16}{\pi^2 5^5}.....\right]$

किंवा, $\quad \pi=\frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}.....\right]$

अशा प्रकारे, $\quad \frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}.....$

उदाहरण 3.125: हे सिद्ध करा कि $0<x<l$ मध्ये, $x=\frac{1}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l}........\right]$

त्यावरून $\frac{\pi^4}{96}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}.....$ चे मूल्य काढा.

उकल: येथे

$$f(x)=x$$

आपल्याला कोसाइन श्रेणी म्हणून इंटरवल $0<x<l$ मध्ये $f(x)$ ला विस्तारित करावे लागेल

$$x=f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

जेथे $\quad a_0=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^1 xdx=\frac{2}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l=\frac{2}{l}\left[\frac{t^2}{2}\right]=l$

आणि $\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\frac{n\pi x}{l}dx \quad =\frac{2}{l}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$$=\frac{2}{l}\left[\frac{\frac{x\sin n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}}+\frac{\cos\frac{n\pi x}{l}}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\right]_0^l$$

$$=\frac{2}{l}\left[\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\left[(-1)^n-1\right]\right]$$

$$\begin{cases}\dfrac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right] & = 0 \text{ जर } n \text{ सम असेल}\\ \dfrac{-4l}{n^2\pi^2}, & \text{जर } n \text{ विषम असेल}\end{cases}$$

समी (1), वरुन $$x=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+.....\right]$$

आता $$\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx=\frac{l}{2}\left[\frac{a_0{}^2}{2}+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2......\right]$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{l}{2}\left\{\frac{a_0{}^2}{2}+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2......\right\}$$

$$=\frac{l}{2}\left[\frac{l^2}{2}+\frac{16l^2}{1^4\pi^4}+\frac{16l^2}{3^4\pi^4}+\frac{16l^2}{5^4\pi^4}........\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{l^3}{3}=\frac{l^3}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{16}{\pi^4}\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}\right\}\right]$$

किंवा $$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{16}{2\pi^4}\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}\right\}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\pi^4}{12}=8\left\{\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}......\right\}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\pi^4}{96}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}.....$$

अभ्यास 3.16

1. इंटरवल $(-\pi,\pi)$ मध्ये x^2 ची फोरियर श्रेणी शोधा. $\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+......$ हे सिद्ध करण्यासाठी पार्सेवलची आइडेन्टिटी वापरा.

2. जर $f(x)=\sum b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, $(0,l)$ मध्ये , तर सिद्ध करा कि $\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx=\frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2$.

3. जर $f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ ही पिरिएड $2l$ मध्ये $f(x)$ची हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी असेल, तर सिद्ध करा कि

$f(x)=\frac{a_o^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$, हा परिणाम हाफ रेंजच्या कोसाइन श्रेणी मध्ये वापरून (0, 2) मध्ये

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \pi x, & 0<x<1 \\ \pi(2-x), & 1<x<2 \end{Bmatrix}$$

द्वारे परिभाषित केलेल्या फंक्शनसाठी $1^{-4}+3^{-4}+5^{-4}+\ldots.$ चे मूल्य शोधा.

उत्तरे

1. $x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$

वास्तविक जीवनातील उदाहरणे

1. फिबोनाकी फक्त $n>1$ साठी खालील सोप्या सूत्राचा वापर करून प्राप्त केली जाते.

   $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

   हे आपल्याला खालील अनुक्रम देते जी इन्फिनिटी कडे जाते.

   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

   या अनुक्रमाचे सौन्दर्य म्हणजे ते निसर्गाशी संबंधित आहे.

   उदाहरणार्थ, हे आर्टीचोकच्या फुलांमध्ये दिसते. काही फुलांच्या पाकळ्या जसे कि डेसीज, मधमाश्या इ.

   विचार करा: हे आकाशगंगेच्या सर्पिलांमध्ये देखील होते का?

2. हे आणखी एक अतिशय मनोरंजक निरीक्षण आहे की पृथ्वी आणि चंद्राचे परिमाण फाय संबंधात आहेत, 1.618 आधारित त्रिकोण तयार करतात.

   विचार करा: फाय काय आहे आणि हे 1.618 काय आहे?

3. जर आपण क्रमाने कोणत्याही दोन सलग संख्या घेतल्या तर त्यांचे गुणोत्तर (X_n / X_{n-1}) 1.618 च्या जवळ जाते ज्याला

   आपण सुवर्ण गुणोत्तर म्हणतो:

   3/2 = 1.5

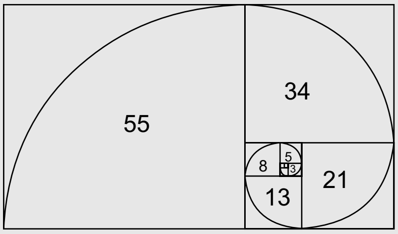
   13/8 = 1.666

   55/34 = 1.61764

   233/144 = 1.61805

   ……………………………………

   317, 811 / 196, 418 = 1.61803

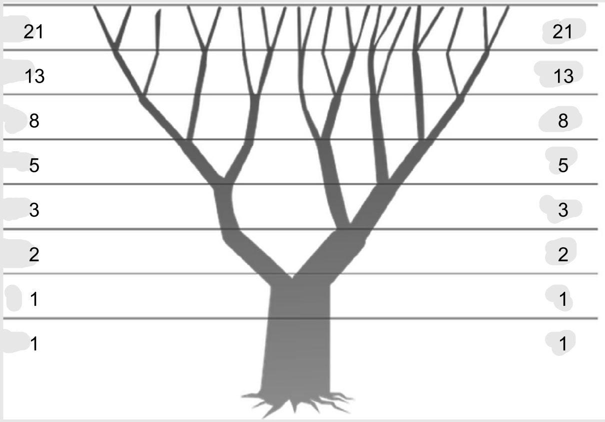


आकृती 3.7

इंफीनिटी कडे जाताना, गुणोत्तर 1.618 च्या जवळ जाते, याला फाय (φ) देखील म्हणतात.

- हे निसर्गात दिसते (पूर्वी नमूद केल्याप्रमाणे). काही झाडाच्या फांद्या एक उदाहरण आहेत. मुख्य शाखा तयार होईपर्यंत ट्रंक वाढेल आणि अशा प्रकारे दोन नवीन प्रारंभ बिंदू तयार होतील.

  हा नमुना दिलेल्या आकृतीत दर्शविलेल्या फिबोनाकी पॅटर्नसारखाच आहे:



आकृती 3.8

मनोरंजक तथ्ये

हे सौंदर्याचे प्रतिनिधित्व करते असे मानले जाते आणि जरी हा विश्वास सिद्ध झाला नसला तरी आपले मन सौंदर्याची व्याख्या कशी करते हे जाणून घेणे मनोरंजक आहे. उदाहरणार्थ, चेहरा. आता, पुढील संशोधन कदाचित सर्वात अचूक संशोधन नाही परंतु डॉ. श्मिड यांचे प्रमाण १० स्केल आहे आणि १० हे सर्वोच्च (सर्वात सुंदर व्यक्ती) आहेत ज्यात बहुतेक लोक ४ ते ६ दरम्यान गुण मिळवतात. सौंदर्य मेट्रिक प्रथम चेहऱ्याची लांबी आणि रुंदी द्वारे मोजले जाते आणि नंतर रुंदीने विभागले जाते. इष्टतम निकाल १.६१८ आहे. म्हणजे सुंदर व्यक्तीचा चेहरा रुंदीपेक्षा १.६१८ लांब असतो. नंतर, इतर गुणोत्तरे मोजली जातात जसे की नाकाचा तळ हनुवटीच्या तळाशी. शेवटी, अधिक सौंदर्य मेट्रिक्स तपासण्यासाठी सममिती चाचण्या केल्या जातात. डॉ. श्मिड म्हणतात की कानाची लांबी इतर वैशिष्ट्यांसह परिपूर्ण चेहऱ्यावर नाकाच्या लांबीच्या समान असावी.

- असे मानले जाते की आपल्या हाताचे आपल्या फोरहँडशी असलेले प्रमाण गोल्डन रेशोइतकेच आहे.
- हे भूमितीमध्ये देखील आहे. अनेक इमारतींमध्ये आणि कलाकृतींमध्ये सुवर्ण गुणोत्तर असते, याचे एक उदाहरण म्हणजे ग्रीसमधील पार्थेनॉन.

  पॅन्टाग्राममध्ये सोनेरी गुणोत्तर अंतर्भूत आहे.

आकृती 3.9

- फिबोनाकी दिवस २३ नोव्हेंबर आहे, कारण त्यात "१, १, २, ३" हे अंक आहेत जे अनुक्रमाचा भाग आहेत. तर पुढच्या २३ नोव्हेंबरमध्ये सर्वांना कळवा.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत-NPTEL)

Introduction to Fourier Series

Fourier Series (1)

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

उदाहरण 1: सिद्ध करा की जर एक पॉवर श्रेणी $\sum a_n x^n$ हि $x = b$ साठी कॉनवर्ज़ होते, तर ती सर्व x साठी अब्सोलुट कॉनवर्ज़ अशी असेल की $|x| < |b|$.

उकल: $\sum a_n b^n$ कॉन्वर्जंट असल्यामुळे,

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty}|a_n b^n| = 0$$

एक कॉन्वर्जंट अनुक्रम बॉऊण्डेड असल्याने, तेथे एक M असा अस्तित्वात आहे की $|a_n b^n| \le M \forall n$

समजा $$\left|\frac{x}{b}\right| = r < 1$$

तेव्हा $$|a_n x^n| = |a_n b^n| \cdot \left|\frac{x^n}{b^n}\right| < Mr^n$$

म्हणून, कॉन्वर्जंट भौमितिक श्रेणी च्या तुलनेत $\sum Mr^n, \sum |a_n x^n|$ कॉन्वर्जंट आहे.

उदाहरण 2: दिलेले आहे की $n! \ge 2^{n-1}$ सर्व $n \ge 1$ साठी, सिद्ध करा की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ ज्याचे n वे पद आहे.

$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ जे 3 ने बाउन्डेड अबाउ आहे , ते कॉन्वर्जंट आहे हे आपण का करू शकतो ते स्पष्ट करा.

उकल: दिलेले आहे कि $n! \geq 2^{n-1}$, $n \geq 1$ साठी आणि अशा प्रकारे

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ , } n \geq 1 \text{ साठी}$$

अशा प्रकारे,

$$a_n = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \text{ (भौमितिक श्रेणीचा सारांश करून)}$$

$$= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < 3$$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ पासून अनुक्रम काटेकोरपणे वाढत आहे आणि ते बाऊण्डेड अबव्ह आहे. मोनोटोनिक कॉन्वर्जंट प्रमेय, द्वारे ते कॉन्वर्जंट होते.

उदाहरण 3:

a. इंटीग्रल $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$ चे प्रथम 3 पदासहित इंटिग्रल ला मॅकलौरीन्स अप्रॉक्सिनेशन शोधून मूल्यांकन करा.

b. मूल्यमापन करा आणि तुलना करा.

उकल:

a. मॅक्लॉरिन श्रेणी साठी $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} .....$

त्यामुळे $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - .....\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15} + \frac{2x^7}{315} - .....\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = 0.0452941$

b. अचूक इंटीग्रल आहे

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24} = 0.045293$$

उदाहरण 4: तरंगलांबी L, तरंगवेळ T आणि पाण्याची खोली, d, पाण्यातील पृष्ठभागाच्या लाटेसाठी संबंध खलील प्रमाणे दिले जातात:

$$L=\frac{gT^2}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

एका विशिष्ट प्रकरणात लाटाचा पिरिएड 105 आणि पाण्याची खोली 6.1 मीटर होती. गुरुत्वाकर्षणामुळे त्वरण घेणे, g जसे $9.81ms^2$. $\tanh x$ साठी श्रेणी विस्तार वापरून तरंग लांबी निर्धारित करा.

उकल: लाटेच्या पिरिएड, पाण्याची खोली आणि g साठी प्रतिस्थापन करून, आपल्याला मिळते

$$L=\frac{9.81\times 10^2}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi\times 6.1}{L}\right)=\frac{490.5}{\pi}\tanh\left(\frac{12.2\pi}{L}\right)$$

$\tanh x$ चा श्रेणी विस्तार दिलेला आहे.

$$\tanh x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+.....$$

$\tanh x$ च्या श्रेणी विस्ताराचा वापर करून, आपण समीकरणाचा अंदाज लावू शकतो.

$$L=\frac{490.5}{\pi}\left(\frac{12.2\pi}{L}-\frac{1}{3}\left(\frac{12.2\pi}{L}\right)^3+.....\right)$$

πL^3 ने गुणाकार केल्यास, समीकरण बनते.

$$\pi L^4 = 490.5\times 12.2\pi L^2-\frac{490.5}{3}(12.2\pi)^3$$

असे समीकरण पुन्हा लिहिले जाऊ शकते

$$L^4-5984.1L^2+2930198=0$$

हे L^2 मधील वर्गसमीकरण म्हणून सोडवल्यास, आपल्याला $L=74m$ मिळेल.

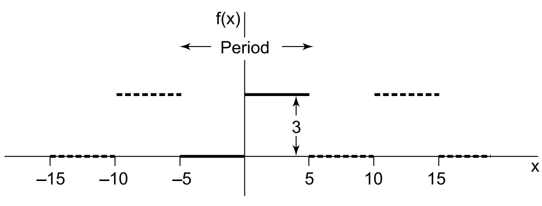
उदाहरण 5:

a. फंक्शनशी संबंधित फोरियर गुणांक शोधा $f(x)=\begin{cases}0 & -5<x<0\\ 3 & 0<x<5\end{cases}$ पिरिएड = 10

b. संबंधित फोरियर श्रेणी लिहा

c. फोरियर श्रेणी $x=-5, x=0$ आणि $x=5$ वर कॉनवर्ज़ होण्यासाठी $f(x)$ ला $-5\le x\le 5$ मध्ये कसे परिभाषित करावे?

उकल: $f(x)$ चा आलेख आकृती मध्ये दाखवला आहे



आकृती 3.10

a. पिरिएड = 2L = 10 आणि L = 5. c ते c + 2L इंटरवल निवडा कारण जसे -5 ते 5, म्हणजे $c=-5$. तेव्हा

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right\} \qquad dx$$

$$= \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = 0 \quad \text{जर } n \neq 0$$

जर $n = 0$,

$$a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 (3)\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

b. संबंधित फोरियर श्रेणी आहे.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \ldots\right)$$

c. $f(x)$ डिरीचलेट अटी पूर्ण करत असल्याने, आपण असे म्हणू शकतो की श्रेणी कंटिन्यूइटी च्या सर्व बिंदूंवर $f(x)$ मध्ये कॉनवर्ज होते आणि ते $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ डिसकंटिन्यूइटी च्या बिंदुवर. $x = -5, 0$ आणि 5 वर, जे डिसकंटिन्यूइटी चे बिंदु आहेत, आलेखावरून श्रेणी $\dfrac{(3+0)}{2} = \dfrac{3}{2}$ कॉनवर्ज होते. जर आपण $f(x)$ पुन्हा पुढीलप्रमाणे परिभाषित केले

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2} & x=-5 \\ 0 & -5<x<0 \\ \frac{3}{2} & x=0 \\ 3 & 0<x<5 \\ \frac{3}{2} & x=5 \end{cases} \qquad \text{पिरिएड} = 10$$

तर श्रेणी $-5 \le x \le 5$ साठी $f(x)$ मध्ये कॉनवर्ज होईल.

उदाहरण 6: $f(x)=\cos ax, -\pi \le x \le \pi$ साठी फोरियर श्रेणी शोधा जिथे $a \ne 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3....$

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

सारांश

1. $a_1, a_2......a_n...$ सारख्या क्रमिक संख्यांच्या संचाला अनुक्रम म्हणतात.
2. कॉन्व्हर्जन्ट अनुक्रमाची लिमिट हि नेहमीच एकमेव असते.
3. बॉऊण्डेड अनुक्रम ही एकतर कॉन्व्हर्जन्ट असते किंवा फायनाइटली ऑसिलेट असते.
4. अनंत श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ द्वारे दर्शवली जाते आणि प्रत्येक अनंत श्रेणी $\sum u_n$ ला त्याची एक अनुरूप $[S_n]$ आंशिक बेरीज असते.
5. अनंत श्रेणी कॉन्व्हर्जन्ट, डायव्हर्जन्ट आणि ऑसिलेट असल्याचे म्हटले जाते जर त्याची आंशिक बेरिज $\{S_n\}$ कॉन्व्हर्जन्ट, डायव्हर्जन्ट आणि ऑसिलेट असेल.
6. **कॉचीचे कॉन्व्हर्जन्सचे सामान्य तत्व:** श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ कॉन्व्हर्जन्ट असण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट म्हणजे प्रत्येक

   $\varepsilon > 0$ साठी, तेथे एक धन पूर्णांक m असा अस्तित्वात असतो की

   $|u_{m+1} + u_{m+2} + ...u_n| < \varepsilon, n \ge m$
7. अनंत श्रेणी ज्याची सर्व पदे धन असतात त्याला धन संज्ञा श्रेणी म्हणतात.
8. अनंत श्रेणी $\sum \frac{1}{n^p}$ ला हार्मोनिक श्रेणी किंवा फक्त 'p- श्रेणी' म्हणून ओळखली जाते. $p > 1$ असल्यास श्रेणी कॉन्व्हर्जन्ट असते आणि $p \le 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट असते.
9. **डी 'अलेम्बर्ट गुणोत्तर चाचणी:** जर $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ धन पदांची श्रेणी अशी आहे की $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = l$

   $l > 1$ साठी, श्रेणी कॉन्व्हर्जन्ट असते.

   $l < 1$ साठी, श्रेणी डायव्हर्जन्ट असते.

   $l = 1$ साठी, कोणताही निष्कर्ष काढता येत नाही (चाचणी अयशस्वी होते).

10. **कॉचीची मूळ चाचणी:** जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ एक धन संज्ञा श्रेणी आणि $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$ असेल, तर

    $\sum a_n$ कॉन्व्हर्जन्ट असते जर $l < 1$.

    $\sum a_n$ डायव्हर्जन्ट असते जर $l > 1$.

    जर $l = 1$ असेल तर चाचणी अयशस्वी होते, तर त्या बाबतीत, कॉन्व्हर्जन्स किंवा डायव्हर्जन्स शोधण्यासाठी, दुसरी चाचणी लागू करावी लागते.

11. **राबेची चाचणी:** जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ धन पदांची श्रेणी अशी आहे की आणि $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = l$, तर श्रेणी

    $l > 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जन्ट असते.

    $l < 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट असते.

    $l = 1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

12. **लॉगरिद्मिक चाचणी:** जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ धन पादांची श्रेणी अशी आहे की $\lim_{n\to\infty} n \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = l$

    तर श्रेणी

    $l > 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जन्ट असते.

    $l < 1$ डायव्हर्जन्ट असते.

    $l = 1$ असल्यास चाचणी अयशस्वी होते.

13. **गॉस चाचणी:** जर $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ धन पदांची श्रेणी अशी आहे की $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ला $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$ च्या स्वरूपात विस्तारित केले जाऊ शकते तर $\sum a_n$ कॉन्व्हर्ज होते जर $\lambda > 1$ आणि डायव्हर्ज होते जर $\lambda \le 1$.

14. **अल्टरनेटिंग श्रेणी:** $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$ या स्वरूपातील श्रेणी, जेथे $a_n > 0 \forall n$, याला अल्टरनेटिंग श्रेणी म्हणतात आणि $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ द्वारे दर्शविले जाते.

15. **अल्टरनेटिंग श्रेणींच्या कॉन्व्हर्जन्ससाठी लीबनिट्झची चाचणी:** अल्टरनेटिंग श्रेणी

    $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$$

    ($a_n > 0$ सर्व n साठी) कॉन्व्हर्जन्ट आहे जर

    $a_{n+1} < a_n \forall n$

    $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

16. **अब्सोलूटली कॉन्व्हर्जन्ट श्रेणी:** जर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ कॉन्व्हर्जन्ट असेल तर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ला अब्सोलूटली कॉन्व्हर्जन्ट श्रेणी म्हणतात.

17. **कंडीशनल कॉन्व्हर्जन्ट श्रेणी:** जर श्रेणी कॉन्व्हर्जन्ट असेल परंतु ती अब्सोलूटली कॉन्व्हर्जन्ट नसेल तर त्या श्रेणीला कंडीशनल कॉन्व्हर्जन्ट श्रेणी म्हटले जाते.
18. **टेलरची अनंत श्रेणी:** $f(x)$ हा $(x-a)$) च्या चढत्या घातांकामध्ये असा आहे.

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+....+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+.....$$

19. मॅक्लॉरिनची अनंत श्रेणी खालील प्रमाणे दिली आहे

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+....+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+.....$$

20. फोरियर श्रेणी $\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+b_1\sin x+b_2\sin 2x+....$ द्वारे दर्शविली जाते.
21. **फोरियर श्रेणीसाठी डिरिचलेटच्या अटी:** जर $f(x)$ फंक्शन इंटरव्हल $c\le x\le c+2\pi$ मध्ये परिभाषित केले असेल आणि आहे.
   (i) इंटरव्हल मध्ये फायनाइट, एकच मूल्य असते.
   (ii) इंटरव्हल मध्ये फायनाईट संख्येने सिंग्युलॅरिटीज असतील.
   (iii) आवर्त असेल.
   (iv) इंटरव्हल मध्ये मॅक्सिमा आणि मिनिमाची अनंत संख्या असेल.
22. **सम आणि विषम फ़ंक्शन्स:**

   जर $f(-x)=f(x)$ तर फंक्शन $f(x)$ एक सम फंक्शन असते.

   जर $f(-x)=-f(x)$ तर फंक्शन $f(x)$ एक विषम फंक्शन असते.
23. **हाफ रेंज साइन श्रेणी:** $f(x)$ फंक्शनसाठी हाफ रेंज साइन श्रेणी दिली जाते.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},-l<x<l$$

24. **हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी:** $f(x)$ फंक्शनसाठी हाफ रेंज कोसाइन श्रेणी खालील प्रमाणे दर्शविली जाते.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},-l<x<l$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. समजा $a_n=\sin n\left(\frac{\pi}{4}\right)$, अनुक्रम $a_1,a_2,....$ साठी, सुप्रीमम आहे.

   a. 0 आणि ते प्राप्त झाले. b. 0 आणि ते प्राप्त होत नाही.

   c. 1 आणि ते प्राप्त झाले. d. 1 आणि ते प्राप्त होत नाही.

2. अनुक्रम $\{x_n\}$ जेथे $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ आहे.

   a. वाढते पण बाऊण्डेड नाही.
   b. वाढते आणि बाऊण्डेड आहे.
   c. कमी होत जाते आणि बाऊण्डेड आहे.
   d. कमी होत आहे पण बाऊण्डेड नाही.

3. अनुक्रम $\sqrt{7}, \sqrt{7+\sqrt{7}}, \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7}}}$ ला कॉन्व्हर्ज होते.

   a. $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$
   b. $\frac{1+\sqrt{32}}{2}$
   c. $\frac{1+\sqrt{30}}{2}$
   d. $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

4. खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे?

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$ आणि $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \infty$
   b. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty$ आणि $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$
   c. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$ आणि $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$
   d. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$ परंतु $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ अस्तित्वात नाही.

5. विधाने विचारात घ्या.

   $(A)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(3n)!}{(n!)^3} \right)^{\frac{1}{n}} = 27$ $\qquad (B)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{4}$

   a. (A) सत्य आहे पण (B) असत्य आहे.
   b. (A) असत्य आहे परंतु (B) सत्य आहे.
   c. (A) आणि (B) दोन्ही सत्य आहेत.
   d. दोन्ही (A) किंवा (B) सत्य नाही.

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{e + e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{3}} + \ldots + e^{\frac{1}{n}}}{n}$ च्या समान आहे.

   a. 0
   b. 1
   c. e
   d. यापैकी काहीही नाही.

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + \ldots + n^{\frac{1}{n}} \right]$ च्या समान आहे.

   a. 0
   b. 1
   c. e
   d. यापैकी काहीही नाही.

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right)$ च्या समान आहे.

   a. $\sqrt{2}$
   b. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   c. $\sqrt{2}+1$
   d. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

9. विधाने विचारात घ्या

   A. श्रेणी $\sum \sin\frac{1}{n}$ डायव्हर्जन्ट आहे.

B. श्रेणी $\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2}{4^2}+\frac{3\cdot 4}{5^2\cdot 6^2}+\frac{5\cdot 6}{7^2\cdot 8^2}$ कॉन्व्हर्जंट आहे.

तेव्हा

a. दोन्ही विधाने (A) आणि (B) सत्य आहेत. b. (A) सत्य आहे परंतु (B) असत्य आहे.
c. (A) असत्य आहे परंतु (B) सत्य आहे. d. दोन्ही (A) किंवा (B) सत्य नाहीत.

10. 't' च्या कोणत्या वास्तविक संख्येसाठी अनंत श्रेणी $\sum\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{t'}$ कॉन्व्हर्ज होते.

a. $t>\frac{1}{3}$ b. $t>\frac{1}{2}$ c. $t>1$ d. $t>\frac{3}{2}$

11. जर $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, v_n=\sqrt{n^4+1}-n^2$, तर

a. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ कॉन्व्हर्जेस पण $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ डायव्हर्जेस. b. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ डायव्हर्जेस पण $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ कॉन्व्हर्जेस.

c. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ कॉन्व्हर्ज होतात. d. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ आणि $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ दोन्ही डायव्हर्ज होतात.

12. जर

$$b_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}} & n \text{ विषम असल्यास}\\ \frac{1}{n}, & n \text{ सम असल्यास}\end{cases}$$

a. $\langle b_n\rangle$ आणि $\sum b_n$ दोन्ही कॉन्व्हर्जंट आहेत. b. $\langle b_n\rangle$ आणि $\sum b_n$ दोन्ही डायव्हर्जन्ट आहेत.
c. $\langle b_n\rangle$ कॉन्व्हर्जंट पण $\sum b_n$ नाही. d. $\sum b_n$ कॉन्व्हर्जंट पण $\langle b_n\rangle$ नाही.

13. वस्तुस्थिती वापरुन $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ च्या समान आहे.

a. $\frac{\pi^2}{12}$ b. $\frac{\pi^2}{12}-1$ c. $\frac{\pi^2}{8}$ d. $\frac{\pi^2}{8}-1$

14. खालीलपैकी कोणते कॉन्व्हर्जंट आहे?

a. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2 2^{-n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}2^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

15. खालीलपैकी कोणती श्रेणी अबसोलुटली कॉन्व्हर्जंटआहे.

a. $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ b. $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ c. $\sum\frac{1}{\log(n+1)}$ d. $\sum\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$

16. वस्तुस्थिती वापरुन $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}$ च्या समान आहे.

a. $1-2\log 2$ b. $1+\log 2$ c. $(\log 2)^2$ d. $-(\log 2)^2$

17. पॉवर श्रेणी $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\log(n)x^n$ विचारात घेऊन, मग $f(x)$ या श्रेणीची कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या आहे,

a. 0 b. 1 c. 3 d. ∞

18. मॅक्लॉरिनच्या विस्तार $f(x)$ च्या फंक्शनसाठी सत्य असण्यासाठी आवश्यक अट आहे

a. $f(x)$ कंटिन्युयस असावे.

b. $f(x)$ डिफर्न्शिएबल असावे.

c. $f(x)$ प्रत्येक बिंदूवर अस्तित्वात असावा.

d. $f(x)$ कंटिन्युयस आणि डिफरेंशीएबल असावे.

19. $e^x \sin x$ चा विस्तार शोधा?

a. $1+x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{120}.......$

b. $1+x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{120}.......$

c. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}.......$

d. $x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{120}.......$

20. $f(x)-\log(\cos(x))$ दिल्यास $\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ चे मूल्य काढा.

a. -1.741 b. 1.741 c. 1.563 d. -1.563

21. समजा फंक्शन f चा दूसरा डेरीवेटिव $f''(x)=\sqrt{1+3x}$ आहे. f साठी $x=0$ च्या बाबतीत टेलर श्रेणीमध्ये x^3 चा सह-गुणक आहे.

a. $\frac{1}{12}$ b. $\frac{1}{6}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{2}$

22. समजा $p(x)=3-3x^2+6x^4$ हे f साठी $x=0$ च्या बाबतीत चौथ्या डिग्रीचे टेलर बहुपद आहे. तर $f^{(4)}(0)$ चे मूल्य काय आहे?

a. 0 b. $\frac{1}{4}$ c. 144 d. 164

23. $\sin^2 x$ च्या टेलर श्रेणीमध्ये $x = 0$ बद्दल x^2 चा सह-गुणक काय आहे?

a. -2 b. -1 c. 0 d. -1

24. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ खालीलपैकी कोणत्या फंक्शनसाठी टेलरची श्रेणी आहे?

a. $\sin x$ b. $\cos x$ c. e^x d. e^{-x}

25. खालीलपैकी कोणती फोरियर श्रेणी विस्तारासाठी डिरिचलेटची अट नाही?
   a. $f(x)$ आवर्त, एकच मूल्य असलेले, फायनाइट आहे.
   b. $f(x)$ मध्ये फक्त एकाच आवर्तन मध्ये डिसकंटीन्यूव्हिटीची फायनाइट संख्या आहे.
   c. $f(x)$ मध्ये मॅक्सिमा आणि मिनिमाची फायनाइट संख्या आहे.
   d. $f(x)$ एकच मूल्य असलेले आहे आणि फायनाइट असू शकते

26. फंक्शन $f(x) = x$ ची $0 < x < 1$ मध्ये हाफ रेंज फोरियर कोसाइन श्रेणी वापरुन $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+.....$ चे मूल्य शोधा.
   a. $\frac{\pi^4}{12}$ b. $\frac{\pi^4}{48}$ c. $\frac{\pi^4}{24}$ d. $\frac{\pi^4}{96}$

27. 0 ते 3 इनटर्वल मध्ये x^2 फंक्शनच्या हाफ रेंज साइन श्रेणीच्या विस्तारात b_n शोधा.
   a. $-18\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$ b. $18\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$ c. $-18\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$ d. $18\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$

28. जर $f(x)=a$ तेव्हा $[0,\pi]$, $2\pi - x$ जेंव्हा $[\pi,2\pi]$ मध्ये फोरियर श्रेणी विस्तार वापरुन $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+.....$ ची बेरीज शोधा.
   a. $\frac{\pi^2}{8}$ b. $\frac{\pi^2}{4}$ c. $\frac{\pi^2}{16}$ d. $\frac{\pi^2}{2}$

29. जेव्हा $0 < x < \frac{\pi}{2}$ तेव्हा $(\pi - x)$ आणि जेव्हा $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ तेव्हा f(x) = x या फंक्शनसाठी हाफ रेंज साइन श्रेणी शोधा’
   a. $\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin(3x)}{3^2}+\frac{\sin(5x)}{5^2}-\frac{\sin(7x)}{7^2}+...\right]$ b. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\sin 7x}{7^2}+...\right]$
   c. $\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\sin 7x}{7^2}+...\right]$ d. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\frac{\sin 7x}{7^2}+...\right]$

30. श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+....$ आहे
   a. $x^2 \le 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट; $x^2 > 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट
   b. $x^2 > 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट; $x^2 < 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट
   c. $x^2 < 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट; $x^2 \ge 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट
   d. $x \le 1$ असल्यास कॉन्व्हर्जंट; $x > 1$ असल्यास डायव्हर्जन्ट

उत्तरे

1. c	2. d	3. d	4. c	5. c	6. b	7. b	8. b	9. a	10. b	11. b
12. c	13. d	14. a	15. d	16. a	17. b	18. d	19. b	20. a	21. c	22. c
23. d	24. d	25. a	26. d	27. a	28. b	29. d	30. a			

व्यक्तिनिष्ठ न सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

1. जर $\sum a_n x^n$ ची कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या r_1 असेल आणि $\sum b_n x^n$ ची कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या $r_2 > r_1$ असेल तर बेरीज $\sum (a_n + b_n) x^n$ च्या कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या काय आहे?

2. खालील पॉवर श्रेणीसाठी कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या आणि इनटर्वल त्रिज्या निश्चित करा. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(4x-8)^n$

3. $f(x) = \log(1+x)$ फंक्शनसाठी मॅक्लॉरिन श्रेणी शोधा आणि म्हणून $\frac{\log(1+x)}{x}$ चेखील मूल्य शोधा.

4. सर्व $k \geq 2$ साठी $k^k \geq 2^k$ दिलेले आहे, अनुक्रम $\{x_n\}$ ज्याची n टर्म $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ आहे आणि $\frac{3}{2}$ वर बॉऊण्डेड अबव्ह आहे हे दाखवा.

5. जर $a_1 > b_1 > 0$ आणि a_n, b_n ची व्याख्या $n \geq 2$ साठी $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{a_{n-1} + b_{n-1}}, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ अशी केली जाते.हे सिद्ध करा की अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ आणि $\langle b_n \rangle$ मोनोटोनिक आहेत, एक वाढत जाऊन आणि दुसरा कमी होत जाऊन त्यांचे समान लिमिट असते.

6. सिद्ध करा कि

   a. $\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$

   b. $\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L} dx = 0$

   जेथे m आणि n यांची या 1, 2, 3, मूल्यांपैकी कोणतेही मुल्य गृहीत धरू शकतो.

7. $2l$ आवर्तनाच्या आणि खालीलप्रमाणे परिभाषित केलेल्या $f(x)$ साठी फोरियर श्रेणी मिळवा

   $$f(x) = \begin{cases} l - x & 0 < x < l \\ 0 & l \leq x < 2l \end{cases}$$

   म्हणून $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}$ आणि $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$ हे मिळवा

8. $-\pi < x < \pi$ साठी ते दाखवा $x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ....\right)$

   a. च्या परिणामाचे इंटीग्रेशन करून, $-\pi \le x \le \pi$ साठी हे दाखवा.

   $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + ...\right)$$

   b. च्या परिणामाचे इंटीग्रेशन करून, $-\pi \le x \le \pi$ साठी हे दाखवा.

   $$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + ...\right)$$

9. a. $\frac{1}{1-x}$ ची $x = 2$ च्या बाबतीत टेलर श्रेणीचा विस्तार करा.

   b. जर $|x-2| < 1$ असेल तर दाखवा की (a) च्या निकालात प्राप्त झालेली श्रेणी कॉन्व्हर्जंट आहे.

उत्तरे

1. r_1

2. $R = \frac{1}{8}$ आणि $\frac{15}{8} \le x < \frac{17}{8}$

3. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$ आणि $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + ...$

7. $f(x) = \frac{l}{4} + \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{2l}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}$

9. (a) $-1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 + .. + (-1)^{n+1}(x-2)^n + ...$

प्रकल्प/उपक्रम/प्रात्यक्षिके

प्रकल्प

1. खालील प्रत्येक फंक्शनसाठी आलेख काढा:

   a. $f(x) = |x-1| + |x+1|$, या (-5, 5) इनटर्वल मध्ये.

   b. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ आवर्तन $= 2\pi$

   c. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x < 4 \\ 0, & 4 \le x < 6 \end{cases}$ आवर्तन $= 6$

क्रियाकलाप

1. आपण अनंत संख्याची बेरिज करू शकतो का? (सूचना: याचे उत्तर तुम्ही ज्याप्रमाणे विचार करता तसे नाही)

प्रात्यक्षिक

1. MATLAB वापरुन, $\sin(x)$ चा विस्तार करण्यासाठी एक कोड लिहा.
2. MATLAB वापरुन फिबोनाकीच्या अनुक्रमाचा आलेख काढा.

अधिक जाणून घ्या

1. समजा $\langle a_n \rangle$ वास्तविक संख्येचा असा अनुक्रम आहे की $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = a$, तर $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

   a. 1 ला कॉन्व्हर्ज होते.
   b. डायव्हर्जेस
   c. 0 ला कॉन्व्हर्ज होते.
   d. a ला कॉन्व्हर्ज होते.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - a_{n-1}| < \infty$ चे समाधान करणाऱ्या वास्तविक संख्यांचा अनुक्रम $\langle a_n \rangle$ दिला आहे. तर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$ कॉन्व्हर्जंट आहे,

   a. $\mathbb{R}$ वर कोठेही नाही.
   b. $\mathbb{R}$ वर सर्वत्र.
   c. $(-1, 1)$ चा समावेश करनारे काही संच
   d. फक्त $(-1, 1)$ वर

3. समजा $S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ तर, खालीलपैकी कोणते सत्य आहे?

   a. $S_2 n \geq \frac{n}{2}$ प्रत्येक $n \geq 1$ साठी.
   b. S_n हा एक बॉऊण्डेड अनुक्रम आहे
   c. जेव्हा $n \to \infty$ तेव्हा $|S_2 n - S_{2^{n-1}}| \to 0$
   d. जेव्हा $n \to \infty$ तेव्हा $\frac{S_n}{n} \to 1$

4. आवर्त फंक्शनचा फोरियर श्रेणी विस्तार $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x, & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ जेव्हा $f(x+1) = f(x)$ दिले आहे.

   a. $\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x$
   b. $\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)\pi x$
   c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 4n\pi x$
   d. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos 2(2n-1)\pi x$

5. फंक्शन $f(x)=\begin{cases} -\pi, & -\pi<x<0 \\ x, & 0<x<\pi \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0 \end{cases}$ जेव्हा $f(x+2\pi)=f(x)$ चा फोरियर श्रेणी विस्तार असा दिला जातो.

a. $-\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{-1+(-1)^n}{n^2\pi}\right)\cos nx+\left(\dfrac{1-2(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right\}$

b. $-\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\right)\cos nx+\left(\dfrac{1+2(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right\}$

c. $-\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{-1+(-1)^n}{n\pi}\right)\cos nx+\left(\dfrac{1+2(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right\}$

d. $-\dfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)\cos nx+\left(\dfrac{1-2(-1)^n}{n}\right)\sin nx\right\}$

6. खालीलपैकी कोणते फंक्शन सर्वात वेगाने वाढते?

a. $x^{1,000,000,000,000}$ b. x^x

c. $x!$ d. $9,999,999,999,999,999,999^x$

7. जॉमेट्रिक 3, 15, 75, 375 ... श्रेणीसाठी एक्सप्लिसिट फॉम्युला आहे.

a. $2\times 6!\times 3^{n-1}$ b. $3\times 5^{n-1}$ c. $3\times 8^{n-1}$ d. $7\times 4^{n-1}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} m!(2x-1)^m$? पॉवर श्रेणीसाठी कॉन्व्हर्जन्सची त्रिज्या आणि इनटर्वल त्रिज्या काय आहे.

a. 3, 12 b. 1, 0.87 c. 2, 5.4 d. $0,\dfrac{1}{2}$

उत्तरे

1. c 2. c 3. a 4. b 5. a 6. b 7. b 8. d

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Bary, N.K.(1964). A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press.
2. Campbell, G.A. and R.M. Foster (1948).Fourier Integrals for practical Applications. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J.

3. Carslaw, H.S. (1921). Theory of Fourier Series and Integrals. St. Martin Press, Inc., New York.
4. Churchill, R.V. and J.W. Brown (1987). Fourier series and Boundary Value Problems, McGraw Hill, New York.
5. Courant R.(1988). Differential and Integral Calculus, Wiley, New York.
6. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
7. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
8. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
9. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
10. Knoop, K. (1987). Theory and Applications of Infinite Series. Blackie & Sons Ltd., Glasgow.
11. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewY ork.
12. Piskunov, N. (1969) Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
13. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
14. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
15. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.
16. Tolstov, G.P. (1976). Dover, New York.

4 मल्टीवेरिएबल कॅल्क्युलस

युनिट निर्दिष्टे

मल्टीव्हेरिएबल कॅल्क्युलसमध्ये लिमिट, कंटिन्यूइटी आणि पार्शियल डेरिवेटिव, डायरेक्शनल डेरिवेटिव, टोटल डेरिवेटिव, टॅनजेंट आणि नॉर्मल लाइन, मॅक्झिमा, मिनीमा आणि सॅडल पॉईंट्स, लॅगरेंज गुणकांची पद्धत, ग्रेडिएंट, कर्ल आणि डायवर्जन्स ची संकल्पना समाविष्ट आहे. या युनिटमध्ये आम्ही या विषयांवर चर्चा केली आहे. सोडवलेल्या आणि न सुटलेल्या उदाहरणांच्या मदतीने त्याचा उपयोग समजून घेण्यावर भर दिला जातो.

तर्कशास्त्र

दिलेल्या युनिटमधील प्रत्येक विषय आपल्या दैनंदिन जीवनात महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावतो. तापमान मोजणे, वाहन चालवताना त्वरण करणे, उद्योगाचा नफा जास्तीत जास्त करणे ते अंतराळ किंवा उड्डाणात असताना द्रवप्रवाहाच्या प्रवाहापर्यंत, प्रत्येक पैलूसाठी युनिटमध्ये नमूद केलेल्या विषयांचा वापर करणे आवश्यक आहे. केवळ गणितीच नव्हे, तर व्यवसाय आणि अर्थशास्त्र, उद्योग, जीवशास्त्र आणि औषधे, वास्तुकला, भौतिक विज्ञान आणि अभियांत्रिकी आणि इतर अनेक क्षेत्रांमध्ये किंवा विषयांना खूप महत्त्व आहे. इन्फिनिटि ला सामोरे जाण्यासाठी गणितात लिमिट हा एकमेव मार्ग आहे. प्रारंभिक वेग आणि प्रक्षेपकाच्या प्रक्षेपण कोनाचा अंदाज घेण्यासाठी (जी वस्तू फेकली जाते) त्याची उंची/श्रेणी जास्तीत जास्त करण्यासाठी मॅक्झिमा-मिनिमा चे महत्त्व आहे. लॅगरेंज गुणकांची पद्धत हे एक शक्तिशाली साधन आहे जे समस्यां सोडविण्यासाठी वापरले जाऊ शकते जिथे स्पष्टपणे अटी सोडवण्याची गरज नसते आणि नंतर अतिरिक्त चल काढून टाकण्यासाठी त्यांचा वापर करा. तसेच रेडिओ, टीव्ही ब्रॉडकास्ट, इलेक्ट्रिक मोटर किंवा डायनामो, मॅक्सवेलच्या समीकरणांचा वापर करून डिझाइन केले गेले आहेत जे ग्रेडिएंट, डायवर्जन्स आणि कर्लवर आधारित आहे.

पूर्वतयारी

विद्यार्थ्यांनी खाली दिलेल्याशी जागरूक असले पाहिजे

1. एका चलामधील फंक्शन, लिमिट आणि कंटीन्यूइटी
2. दिलेल्या फंक्शन चे पार्शियल डिफरनशीएशन
3. विविध प्रकारच्या ट्राजेक्टरिजचे ज्ञान
4. दिलेल्या वक्रासाठी आलेखाचे रेखाटन
5. एका चलामधील मॅक्झिमा-मिनीमाची संकल्पना
6. 3-डी निर्देशांक, 3-डी प्रतलात गतीची दिशा
7. वेक्टर वरील क्रिया किंवा जसे की बेरिज, वजाबाकी इ.

यूनिट आउटकम

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील:

U4-O1: लिमिट काढ़ने, कंटीन्यूइटी तपासने आणि डिफरंशीएशन भौमितिकपणे समजून घेणे; लिमिट, कंटीन्यूइटी आणि डिफरंशीएशन किंवा आंतरसंबंध शिकणे; इतर क्षेत्रांशी डिफरंशीएशन संबंधित करणे.

U4-O2: कॅल्क्युलसमधील एका चलापासून अनेक चलापर्यंत संकल्पनात्मक प्रगती शिकणे; शृंखला नियमाच्या वापरासह संमिश्र फंक्शन च्या व्युत्पन्नांच्या मूल्यांकनाची संकल्पना जाणून घेणे.

U4-O3: समस्या ऑप्टिमाइझ करण्यात मल्टीव्हेरिएबल कॅल्क्युलस लावने; लॅगरेंजच्या गुणक पद्धतीच्या मदतीने गुंतागुंतीच्या समस्यांचे निराकरण करणे आणि मूल्यमापन करने.

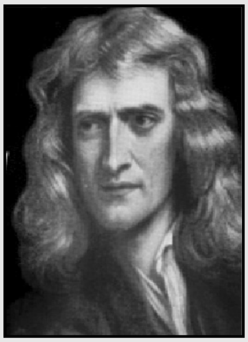
U4-O4: ग्रॅडिएंट, डायव्हर्जन्स आणि कर्ल सह दिशात्मक डेरिवेटिव्ज वापरने; आकृत्यांच्या मदतीने किंवा भौमितिक अर्थ स्पष्ट करने.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट 4 आउटकम	कोर्स आऊटकमसह अपेक्षित मॅपिंग *(1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)*				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U4-O1	2	–	–	3	–
U4-O2	–	2	2	3	1
U4-O3	1	–	–	3	1
U4-O4	1	1	1	3	–

इतिहास

कॅल्क्युलस, ज्यात सामान्यत: लिमिट, डेरिव्हेटिव्ह आणि इंटीग्रल्स चे घटक असतात, गणिताची ही शाखा आहे जी सामान्यत: डोमेनमधील पॉइंट्स च्या बदलामुळे फंक्शन च्या मूल्यातील बदलाच्या अभ्यासाशी संबंधित आहे. इनपुट काही मूल्याकडे जात असताना काही मूल्याकडे पोहोचणार् या फंक्शन चे मूल्य म्हणजे लिमिट आहे. कॅल्क्युलसचा समावेश असलेली सध्याची सामग्री असंख्य शास्त्रज्ञांच्या प्रयत्नांचा परिणाम आहे. आधुनिक कॅल्क्युलसची निव गॉटफ्रीड विल्हेल्म लेब्निझ (1646-1716) आणि सर आयझॅक न्यूटन (1642-1727) यांनी ठेवली होती. 17 व्या आणि 18 व्या शतकात विकसित झाले असले, तरी कॅल्क्युलसचे आधुनिक स्वरूप 1817 पासून आहे जेव्हा बर्नार्ड बोल्झानो ने ऑगस्टिन-लुई कॉची ची संकल्पना पुढे नेत "लिमिटची एप्सिलॉन-डेल्टा व्याख्या" ची औपचारिक व्याख्या दिली. शिवाय, निश्चित आधुनिक विधान शेवटी कार्ल वेयरस्ट्रास यांनी प्रदान केले. कंटिन्यूइटी (याचा अर्थ आलेख त्याच्या कार्यक्षेत्रात एकच अखंड वक्र म्हणून राहतो), मॅक्झिमा आणि मिनीमा (फंक्शन चे सर्वात मोठे आणि सर्वात लहान मूल्य), डायवर्जन्स (3-डी मध्ये वेक्टरच्या बदलाच्या दराचे वर्णन करणे) कॅल्क्युलसचे असे अधिक भाग आहेत.



आपल्याला जे माहीत आहे ते एक थेंब आहे, जे आपल्याला माहीत नाही ते समुद्र आहे.

–आयझॅक न्यूटन

4.1 फंक्शन ची लिमिट

एकाच चलाच्या फंक्शन च्या लिमिट ची कल्पना दोन चलांच्या फंक्शन च्या मर्यादेपर्यंत वाढविली जाऊ शकते.

व्याख्या: एक फंक्शन $f(x, y)$ विषयी म्हटले जाते कि त्याचे लिमिट'l' आहे, कारण (x, y) हे (a, b) कड़े प्रवृत्त होते, जर एखाद्या निवडलेल्या धनात्मक संख्या 'ε' साठी, मग ती कितीही छोटी असेल, तेथे एक धनात्मक संख्या 'δ'

अशाप्रकारे की जी 'ε' वर अवलंबून असेल, जसे कि (a, b)शिवाय सगळ्या (x, y) साठी.

म्हणजेच $|f(x,y)-l|<\varepsilon$ सर्व $0<|x-a|<\delta$ आणि $0<|y-b|<\delta$ साठी

आणि आपण त्याला खालीलप्रमाणे लिहू शकतो

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l \text{ किंवा } \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=l$$

'l' ही $f(x, y)$ ची लिमिट (दुहेरी लिमिट किंवा एक सामाईक लिमिट) आहे जेव्हा (x, y), (a, b) कड़े प्रवृत्त होते,

4.1.1 लिमिट चे बीजगणित

प्रमेय: जर $\lim_{(x-y)\to(a,b)} f(x,y)=l$ आणि $\lim_{(x-y)\to(a,b)} g(x,y)=m$ तर

i. $\lim\left[f(x,y)+g(x,y)\right]=l+m$

ii. $\lim\left[f(x,y)-g(x,y)\right]=l-m$

iii. $\lim\left[f(x,y).g(x,y)\right]=l.\,m$

iv. $\lim\left[k.f(x,y)\right]=k.l$ [k च्या कोणत्याही मूल्यासाठी]

v. $\lim\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{l}{m}$ जेव्हा $(x,y)\to(a,b)$ [अट $m\neq 0$]

हे याच्या सिद्ध्ता एकाच चलासाठी संबंधित प्रमेयांच्या अगदी सारखेच आहेत.

काही सोडवलेलि उदाहरणे

उदाहरण 4.1 सिद्ध करा कि $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left(x^2+3y\right)=4$.

उकल: पद्धत I: लिमिट च्या व्याख्येचा उपयोग करून

आपल्याला हे दाखवायचे आहे कि एखाद्या $\varepsilon > 0$ साठी आपण $\delta > 0$ अशाप्रकारे मिळवू शकतो कि

$|x^2 + 3y - 4| < \varepsilon$, जेव्हा $|x - 1| < \delta$, $|y - 1| < \delta$

जर $|x - 1| < \delta$ आणि $|y - 1| < \delta$, तेव्हा

$-\delta + 1 < x < \delta + 1$ आणि $1 - \delta < y < \delta + 1$, $x = 1, y = 1$ सोडून

अशाप्रकारे, $(1 - \delta)^2 < x^2 < (\delta + 1)^2$

किंवा $1 + \delta^2 - 2\delta < x^2 < 1 + \delta^2 + 2\delta$ ...(A)

आणि $3 - 3\delta < 3y < 3\delta + 3$ ...(B)

समीकरण (A) आणि (B) जोडल्यावर, आपल्याला मिळेल

किंवा $\delta^2 - 5\delta + 4 < x^2 + 3y < \delta^2 + 5\delta + 4$

किंवा $\delta^2 - 5\delta < x^2 + 3y - 4 < \delta^2 + 5\delta$

आता ,जर $\delta \leq 1$,अशाप्रकारे की

$$-6\delta < x^2 + 3y - 4 < 6\delta$$

म्हणजेच $|x^2 + 3y - 4| < 6\delta = \varepsilon$, जेथे $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$

$\therefore$ $|x^2 + 3y - 4| < \varepsilon$ जेव्हा $|x - 1| < \delta, |y - 1| < \delta$

$\therefore$ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(x^2 + 3y\right) = 4$

पद्धत II: लिमिट च्या बीजगणितावर आधारित प्रमेयाचा उपयोग करून

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + 3y = \lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,1)} 3y$$

$$= 1 + 3 = 4$$

उदाहरण 4.2: दाखवा कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0\ 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$. अस्तित्वात नाही.

उकल: समजा कि $(x, y) \to (0, 0)$, $y^3 = mx$ च्या वाटेत आहे, जेथे 'm' ही एक वास्तविक संख्या आहे.

जर $x \to 0$ तर $y \to 0$,

$y^3 = mx$ च्या वाटेत.

आता $$\lim_{(x,y)\to(0\ 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m}{1 + m^2}$$

जे कि m च्या वेगवेगळ्या मूल्यासाठी वेगवेगळे आहे.

$\therefore$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0\ 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$. अस्तित्वात नाही.

टिप्पणी

एकल चलामध्ये जर उजवीकडून आणि डावीकडून लिमिट अस्तित्वात असेल आणि समान असेल, तर आपण लिहीतो कि लिमिट अस्तित्वात आहे. त्याचप्रमाणे, येथे जर प्रत्येक संभाव्य मार्ग आणि समान ते साठी लिमिट अस्तित्वात असेल, तर आपण म्हणतो की लिमिट अस्तित्वात आहे. जर दोन वेगवेगळे मार्ग अस्तित्वात असतील ज्यासाठी लिमिट समान नाही, तर आपण म्हणतो की लिमिट अस्तित्वात नाही.

उदाहरण 4.3: दाखवा कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0\,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. अस्तित्वात नाही.

उकल: जर आपण पाथ $y = x$, घेऊ तर $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.x}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

जर आपण पाथ $y = 2x$, घेऊ तर $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.2x}{x^2+4x^2} = \dfrac{2}{5}$

येथे, दोन वेगवेगळ्या पाथ साठी, लिमिट समान नाही.

म्हणून $\lim\limits_{(x,y)\to(0\,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. अस्तित्वात नाही

उदाहरण 4.4: दाखवा कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0\,0)} f(x,y) = 0$ अस्तित्वात नाही

जेथे $$f(x,y) = x.\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0,\ y \neq 0$$

उकल: समजा कि $\varepsilon > 0$ एक वास्तविक संख्या आहे

आता $$|f(x,y) - 0| = \left|x.\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right| \leq \left|x.\sin\frac{1}{y}\right| + \left|y\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\leq |x|\left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\leq |x| + |y| \qquad \left[\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1 \text{ आणि } \left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq 1\right]$$

$$= |x-0| + |y-0| \qquad \ldots(1)$$

समजा कि $|x-0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ आणि $|y-0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

समीकरण (1) वरून $|f(x,y) - 0| \leq |x-0| + |y-0|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$ $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ जेव्हा $|x-0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ आणि $|y-0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ घेऊन, आपल्याला मिळेल

$|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ जेव्हा $|x-0| < \varepsilon$ आणि $|y-0| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0\,0)} f(x,y) = 0$

उदाहरण 4.5 दाखवा कि $\lim_{(x,\, y)\to(0\ 0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

उकल: समजा कि $\varepsilon > 0$ एक वास्तविक संख्या आहे

आता $$|f(x,y)-0| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \Rightarrow \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$x = r\cos\theta$ आणि $y = r\sin\theta$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल $x^2+y^2 = r^2$

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{r^2\cos\theta.\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}\right|$$

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{r^2(\cos\theta.\sin\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}\right|$$

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{r^2}{r}(\cos\theta.\ \sin\theta)\right|$$

$$|f(x,y)-0| = |r\ (\cos\theta.\ \sin\theta)|$$

$$\le |r\ | = r \qquad [\because |\cos\theta| \le 1,\ |\sin\theta| \le 1]$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} \qquad [\because r^2 = x^2+y^2]$$

$\therefore$ $|f(x,y)-0| < \varepsilon$ जर $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$

म्हणजे जर $x^2+y^2 < \varepsilon^2$

म्हणजे जर $|x^2| < \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, $|y^2| < \dfrac{\varepsilon^2}{2}$

म्हणजे जर $|x| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $|y| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \delta$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल $|f(x,y)-0| < \varepsilon$, जेव्हा $|x-0| < \delta$ आणि $|y-0| < \delta$

$$\therefore \qquad \lim_{(x,\, y)\to(0\ 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

4.1.2 पुनरावृति लिमिट

जर एक फंक्शन $f(x, y)$ ला (a, b), च्या काही शेजारच्या भागात परिभाषित केले आहे, तर लिमिट $\lim_{x\to a} f(x,y)$, जर हे

अस्तित्वात असेल आणि समजा कि हे $\phi(y)$, y चे एक फंक्शन आहे . तेव्हा ,जर लिमिट $\lim_{y\to b} \phi(y)$ अस्तित्वात असेल आणि

λ च्या बरोबर आहे,तेव्हा आपण लिहितों, $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=\lambda$ आणि असे मानतों कि λ, $f(x, y)$ ची पुनरावृति लिमिट आहे कारण $x \to a, y \to b$.

जर आपण लिमिट चा उपयोग करण्याचा क्रम बदलतों, तेव्हा आपल्याला दूसरी पुनरावृति लिमिट मिळते, $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)=\lambda_1$ (समजा कि) जेथे पहिले $y \to b$ आणि तेव्हा $x \to a$.

या दोन लिमिट समान असू पण शकतात आणि नसू पण शकतात.

काही सोडवलेलि उदाहरणे

उदाहरण 4.6: फंक्शन $f(x,y)=\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ ची $(0,0)$ वर पुनरावृति लिमिट आणि दुहेरी लिमिट शोधा.

उकल: समजा कि

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6} \text{ तेव्हा}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}(0)=0 \text{ त्याचप्रमाने } \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

अशाप्रकारे पुनरावृति लिमिट अस्तित्वात आहे आणि समान आहे. पण $y^3 = mx$ ठेवल्यावर दुहेरी लिमिट अस्तित्वात नाही जसे कि उदाहरण 4.2 मध्ये दखविले आहे.

टिप्पणी: जर पुनरावृत्ति लिमिट समान नसतील, तर एकाच वेळी (दुहेरी) लिमिट अस्तित्वात असू शकत नाही परंतु व्यत्यास खरा नाही.

उदाहरण 4.7: फंक्शन $f(x,y)=\dfrac{(y-x)}{(y+x)}\cdot\dfrac{(1+x)}{(1+y)}$. ची $(0,0)$ वर पुनरावृति लिमिट आणि दुहेरी लिमिट शोधा.

उकल: समजा कि

$$f(x,y)=\frac{(y-x)}{(y+x)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)} \qquad \ldots(1)$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)}{(x)}(1+x)=-1$$

आणि $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}\frac{(1)}{(1+y)}=1$$

दुहेरी लिमिट $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(y-x)}{(y+x)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+y)} \qquad \ldots(2)$$

$y = mx$ ठेवल्यावर, तेव्हा समीकरण (2) वरून

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(mx-x)}{(mx+x)}\cdot\frac{(1+x)}{(1+mx)}$$

$$= \frac{m-1}{m+1}$$

जे m च्या वेगवेगळ्या मूल्यांसाठी वेगळे आहे.

अशा प्रकारे, दोन पुनरावृति लिमिट अस्तित्वात आहेत परंतु समान नाहीत, परिणामी, एकाच वेळी लिमिट अस्तित्वात असू शकत नाही.

4.1.3 फंक्शन ची कंटिन्यूइटी

एक फंक्शन $f(x,y)$ ला एक बिंदु (a,b) वर कंटिन्युयस म्हटले जाते जर एखाद्या दिलेल्या $\varepsilon > 0$ साठी, आपण एक वास्तविक संख्या $\delta > 0$ प्राप्त करू शकतो(ε वर अवलंमबुन आहे) अशाप्रकारे कि $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ सर्व x, y साठी जे संतुष्ट करते

$$|x-a| < \delta \text{ आणि } |y-b| < \delta.$$

4.1.4 कंटिन्युयस फंक्शन चे बीजगणित

प्रमेय: जर $f(x, y)$ आणि $g(x, y)$, संच D वर x आणि y चे कंटिन्युयस फंक्शन आहे आणि k एक स्थिरांक आहे, तेव्हा

i. $f(x, y) + g(x, y)$, D वर कंटिन्युयस आहे

ii. $f(x, y) - g(x, y)$, D वर कंटिन्युयस आहे

iii. $f(x, y).\, g(x, y)$, D वर कंटिन्युयस आहे

iv. $k f(x, y)$, D वर कंटिन्युयस आहे

v. $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$, D वर कंटिन्युयस आहे (x_0, y_0) च्या त्या बिंदुना सोडून जेथे $g(x_0, y_0) = 0$

वरील सर्वांच्या सिद्धता एकाच चलासाठी संबंधित प्रमेयसारखेच आहेत.

काही सोडवलेलि उदाहरणे

उदाहरण 4.8: दाखवा कि फंक्शन $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ आरंभ बिन्दु वर कंटिन्युयस आहे

उकल: समजा कि

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ (x,y) \neq (0,0)$$

$x = r\cos\theta$ आणि $y = r\sin\theta$ ठेवल्यावर, आपल्याला मिळते $x^2 + y^2 = r^2$

$$\therefore \quad \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{r^4\cos^2\theta.\sin^2\theta}{r^2}\right|$$

$$= \left|r^2\cos^2\theta.\sin^2\theta\right|$$

$$\leq r^2 \quad [\because |\sin\theta| \leq 1, \text{ आणि } |\cos\theta| \leq 1]$$

$$= x^2 + y^2$$

$\therefore$ $$\left|\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \text{ जर } x^2 + y^2 < \varepsilon$$

जर $$\left|x^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|y^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

म्हणजे जर $$|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad |y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} = \delta$ घेऊन, आपल्याला मिळते

$\Rightarrow$ $$\lim_{(x,y)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

म्हणून $f(x,y)$, $(0,0)$ वर कंटिन्युयस आहे.

उदाहरण 4.9: दिलेल्या फंक्शन साठी, (0, 0) वर कंटिन्यूइटी तपासा,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

उकल: स्वता: सोडवून बघा.

उदाहरण 4.10: दिलेल्या फंक्शन साठी, (2, 3) वर कंटिन्यूइटी तपासा,

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy, & (x,y) \neq (2,3) \\ 6, & (x,y) = (2,3) \end{cases}$$

उकल: समजा कि $f(x,y) = 3xy, \quad (x,y) \neq (2,3)$

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} 3xy = 18 \neq f(2.3)$$

म्हणून $f(x,y)$, $(2,3)$ वर कंटिन्युयस नाही.

> **टिप्पणी:** जर $f(2, 3) = 18$, तर $f(x, y)$ हे (2, 3) वर कंटिन्युयस आहे. म्हणून $f(x)$ ला (2, 3) वर काढून टाकन्या योग्य डिसकंटिन्युयस आहे.

उदाहरण 4.11: सिद्ध करा कि फंक्शन

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ वर कंटिन्युयस आहे.

उकल: समजा कि $\varepsilon > 0$ कोणतीही एक दिलेली संख्या आहे तेव्हा

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right| = \left|y\sin\frac{1}{x}-0\right|$$

$$= \left|y\sin\frac{1}{x}\right| = |y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\le |y| \qquad \left[\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1\right]$$

$\therefore$ $$\left|f(x,y)-f(0,0)\right| \le |y-0| \qquad ....(1)$$

समजा कि $|x-0| < \varepsilon$ आणि $|y-0| < \varepsilon$

समीकरण (1) वरून, आपल्याला मिळेल $\left|f(x,y)-f(0,0)\right| < \varepsilon$

म्हणून $f(x, y)$, (0,0) वर कंटिन्युयस आहे

अभ्यास 4.1

1. दाखवा कि $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$

2. निम्नलिखित लिमिट चे मूल्यांकन करा:

   i. $\lim_{(x,y)\to(0,\,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ ii. $\lim_{(x,y)\to(0,\,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x^2-y^2\right)^2}$

   iii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ (संकेत $y = x - mx^3$ ठेवल्यावर)

3. दाखवा कि

   i. $\lim_{(x,y)\to(0,\,0)}\dfrac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0$ ii. $\lim_{(x,y)\to(0,\,0)}\dfrac{\sin^{-1}(xy-2)}{\tan^{-1}(3xy-6)}=\dfrac{1}{3}$

   iii. $\lim_{(x,y)\to(0,\,1)}\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}=0$ iv. $\lim_{(x,y)\to(3,2)}(x+y)\dfrac{\sin^{-1}(xy-6)}{\cos^{-1}(2xy-12)}=0$

4. निम्नलिखित फंक्शन चे आरंभ बिन्दु वर कंटिन्यूइटी तपासा.

   i. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   ii. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

iii. $f(x,y)=\begin{cases} 2xy.\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ (संकेत $y=x-mx$ ठेवल्यावर)

iv. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

5. दाखवा कि फंक्शन $f(x,y)=\begin{cases} 1, & x \text{ अपरिमेय आहे} \\ 0, & x \text{ परिमेय आहे} \end{cases}$ हे कुठेही कंटिन्युयस नाही.

6. दाखवा कि फंक्शन $f(x,y)=\begin{cases} 1, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$ हे (a, b) वर कंटिन्युयस नाही जर b=0 असेल.

7. दाखवा कि फंक्शन $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$ (0, 0) वर कंटिन्युयस आहे.

8. जर $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}\left[1-\cos\left(x^2+y^2\right)\right], & (x,y)\neq 0 \\ k, & (x,y)=0 \end{cases}$ तर, k चे असे मूल्य काढ़ा की ज्यासाठी $f(x, y)$ हे (0, 0) वर कंटिन्युयस आहे.

9. जर $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\{2(x^2+y^2)e^{3x\sin(4/y)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0 \\ \alpha, & (x,y)=0 \end{cases}$ तर, α चे असे मूल्य काढ़ा की ज्यासाठी $f(x, y)$ हे (0, 0) वर कंटिन्युयस आहे.

उत्तरे

2.

i. 0

ii. अस्तित्वात नाही

iii. अस्तित्वात नाही

4.

i. (0, 0) वर कंटिन्युयस नाही

ii. (0, 0) वर कंटिन्युयस आहे

iii. (0, 0) वर कंटिन्युयस आहे

iv. (0, 0) वर कंटिन्युयस नाही

Continuity of Function of Two Variable

मनोरंजक तथ्ये (लिमिट आणि कंटिन्यूइटी)

- ड्रायव्हर गाडी चालवत असताना त्याचा वेग वाढतच जातो, ज्याला "त्वरण" असे म्हटले जाते. कालांतराने वेग कसा बदलतो याचे वर्णन करण्यासाठी ही एक संकल्पना वापरली जाते. कॅल्क्युलसच्या मूलभूत संकल्पनेचा वापर करून वेग आणि त्वरण मोजले जाते ज्याला डेरिव्हेटिव्ह म्हणतात.
- टेलिस्कोप उत्पादनाच्या क्षेत्रात महत्त्वपूर्ण वापर असलेल्या डेरिव्हेटिव्हजचा वापर टॅन्जेन्ट्स शोधू शकतात (जिथे कोनाची काळजी घेणे आवश्यक आहे).
- वेळ कंटिन्युयस मानला जातो (परंतु क्वांटम फिजिक्स, वेळ आणि स्पेस यांची ओळख नॉन-कंटिन्युयस म्हणून मानली गेली आहे)

वास्तविक जीवनातील उदाहरणे (लिमिट आणि कंटिन्यूइटी)

- रसायनशास्त्रात, लिमिटच्या संकल्पनेच्या साहाय्याने एका टप्प्यावर दबाव शोधणे (कारण व्यासाच्या आत प्रति युनिट क्षेत्र त्याचे बल शून्यापर्यंत कमी होते).
- कोणत्याही क्षणी पडणाऱ्या वस्तूचा वेग मोजण्यास मदत होते.
- भौतिकशास्त्रात थर्मोडायनॅमिक्स ची संकल्पना लिमिटची संकल्पना वापरते, कारण मॅक्रोस्कोपिक समतोल पोहोचण्यासाठी, अनिश्चित कालावधीसाठी थांबले पाहिजे.
- त्वरण हे कंटिन्यूइटी चे उदाहरण आहे. असे नाही कि ते ताबडतोब 50 ते 2 पर्यंत खाली येते (दरम्यान कंटिन्युयस मूल्ये असतात).

4.2 दिशात्मक डेरिवेटिव

येथे, आपण एक प्रकारचा डेरिव्हेटिव्ह सादर करतो, ज्याला दिशात्मक डेरिवेटिव म्हणतात, जे आपल्याला कोणत्याही दिशेने दोन किंवा अधिक चलांच्या फंक्शन**च्या** दरातील बदल शोधण्यास सक्षम करते.

व्याख्या: समजा कि $S \subseteq R^m$ आणि $f : S \rightarrow R^m$, R^m मधील मूल्यांसह S वर परिभाषित एक फंक्शन आहे. तेव्हा 'u' च्या दिशेने 'c' वर 'f' च्या दिशात्मक डेरिवेटिव ला $f'(c, u)$ च्या स्वरूपात लिहिले जाते आणि अशाप्रकारे परिभाषित जाते

$$D_u f(c) = f'(c, u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hu) - f(c)}{h}$$

काही सोडवलेलि उदाहरणे

उदाहरण 4.12: $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ साठी (0, 0) वर $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$च्या सह दिशात्मक डेरिवेटिव शोधा.

उकल: येथे

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

आता
$$f'(c,u)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0)+h\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h\sqrt{2},\,h\sqrt{2}\right)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h\sqrt{2}.\left(h\sqrt{2}\right)^2}{2h^2+4h^4}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\;\frac{h^3.\,2\sqrt{2}}{2h^2+4h^4}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3}\;\frac{2\sqrt{2}}{2\left(1+2h^2\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}}{\left(1+2h^2\right)}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

उदाहरण 4.13 $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x \text{ किंवा } y\neq 0\\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases}$ साठी $(0,\,0)$ वर $(a,\,b)$, $a\neq 0,\; b\neq 0$ च्या सह दिशात्मक डेरिवेटिव शोधा.

उकल: येथे
$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x \text{ किंवा } y\neq 0\\ 0, & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

आता
$$f'(c,u)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0)+h(a,b)-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ha+hb}{h}=a+b$$

उदाहरण 4.14: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ च्या साठी $(0,\,0)$ वर $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$च्या दिशे सह दिशात्मक डेरिवेटिव शोधा.

उकल: दिलेल्या $f(x,\,y)$ साठी, आपल्याजवळ दिशात्मक डेरिवेटिव आहे:

$$f'(c,u)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(0,0)+h\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\frac{h^2}{2}\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}}{\frac{h^4}{4}+\frac{h^2}{2}}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\frac{h^3}{2\sqrt{2}}}{\frac{h^4+2h^2}{4}}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h^3}{2\sqrt{2}}\times\frac{4}{h^2\left(2+h^2\right)}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{2}\left(2+h^2\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

टिप्पणी 1: जर $f:R^n\to R^m$ असे असेल कि $f(x_1,x_2,...,x_n)=(f_1,f_2,f_3,...,f_m)$ तर $f'(c,u)$ अस्तित्वात आहे फक्त आणि फक्त जर $f_i\,(c,u)$ अस्तित्वात असेल $\forall\ i=1$ ते m.

उदाहरण: जर $f: R^2\to R^2$ असे आहे कि $f(x,y)=(3x-2y+x^2, 4x+3y+y^2)$, $(0,0)$ वर (a,b) च्या दिशे सह दिशात्मक डेरिवेटिव शोधा.

उकल: येथे $f'(c,u)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3ha-2hb+h^2a^2,4ha+3hb+h^2b^2\right)}{h}$$

$$f'(c,u)=\lim_{h\to 0}\left(3a-2b+ha^2,4a+3b+hb^2\right)$$

$$=(3a-2b,\ 4a+3b)$$

म्हणून दिशात्मक डेरिवेटिव प्रत्येक दिशेने अस्तित्वात आहे

(प्रत्येक दिशेने लिमिट अस्तित्वात असल्याने)

टिप्पणी 2: दिशात्मक डेरिवेटिव चे अस्तित्व कंटिन्यूइटी सुनिश्चित करत नाही.

उदाहरण: जर $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

उकल: दिलेल्या फंक्शन साठी, दिशात्मक डेरिवेटिव $(1, 0)$ सह$(0, 0)$ वर अस्तित्वात आहे

समजा कि $c=(0,0),\ u=(1,0)$

तेव्हा $$f'(c,u)=\lim_{h\to 0}\frac{[f(0,0)+h(1,0)]-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h}=0$$

आणि $$\lim_{(x,y)\to(0\,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{m}{1+m^2}$$ [$x=my^2$ ठेवल्यावर]

म्हणून $$\lim_{(x,y)\to(0\,0)}f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}$$ अस्तित्वात नाही [पाथ वर अवलंबून आहे]

येथे, दिशात्मक डेरिवेटिव अस्तित्वात आहे पण f कंटिन्युयस नाही, लिमिट सुद्धा $(0, 0)$ वर अस्तित्वात नाही

परिणाम: एक फंक्शन $f:R^n\to R^m$ असे आहे कि $f(x)=(f_1,f_2,...,f_m)$ आणि जर $f(x)$ अट संतुष्ट करते

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha.f(x)+\beta.f(y)$$

रेषीय फंक्शन $\forall\ x,y\in R^n$ आणि $\forall\ \alpha,\beta$ स्केलर तर 'f' चा दिशात्मक डेरिवेटिव 'c' वर 'u' च्या दिशेने $f'(c,u)=f(u)$ द्वारा दाखवले जाते. म्हणजेच, जर 'f' एक रेषीय चित्रण आहे, तर

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+hu)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)+hf(u)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(u)$$

$\Rightarrow$ $$f'(c,u)=f(u)$$

उदाहरण: जर $f: R^2\to R^2$ असे आहे कि $f(x,y)=(x,-y)$, $(1, 0)$ वर (a, b) च्या दिशे सह दिशात्मक डेरिवेटिव शोधा.

उकल: कारण 'f', रेषीय गुणधर्माला संतुष्ट करते

$\therefore$ $$f'(c,u)=f(u)\ \forall\ c\in R^n$$

किंवा $$f'(c,u)=f(1,0)=(1,0)$$

4.2.1 पार्शियल डेरिवेटिव संबंधित दिशात्मक डेरिवेटिव

समजा कि $f:R^2\to R$ आणि $f(x,y)$ एक दिलेले फंक्शन आहे तेव्हा $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ याचा अर्थ आहे कि दिशात्मक डेरिवेटिव हे $(1, 0)$ आणि $(0, 1)$ च्या दिशेने म्हणजे क्रमश x-अक्ष आणि y-अक्ष च्या दिशेने.

दिशात्मक डेरिवेटिव, $c = (a, b)$ वर, $(1, 0)$ च्या दिशेने

म्हणजे, $c = (a, b) \in R^2$ आणि $u = (1,0)$

$$f'(c,u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(c+h(1,0)\right)-f(c)}{h}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} = f'(c,u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,\, b)-f(a,b)}{h}$$

त्याचप्रमाने, दिशात्मक डेरिवेटिव, $c = (a, b)$ वर, $(0, 1)$ च्या दिशेने, म्हणजे, $u = (0,1)$ आणि $c = (a, b) \in R^2$

तेव्हा
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} = f'(c,u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,\, b+h)-f(a,b)}{h}$$

सामान्यपणे, जर $f : R^n \to R$ एक महत्वपूर्ण फंक्शन आहे, तेव्हा पार्शियल डेरिवेटिव $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ बिंदु 'c' वर u_k च्या दिशेने दिशात्मक डेरिवेटिव आहे जिथे u_k , k^{th} अक्ष च्या दिशेने एक यूनिट वेक्टर आहे

म्हणजे,
$$u_k = [0, 0, \ldots, \underset{\uparrow\ K^{th}\text{ स्थिति}}{1}, 0, 0, \ldots]$$

म्हणजे, $f'(c, u_k)$, दिशेने 'f' चा पार्शियल डेरिवेटिव आहे.

$$\text{बिंदु 'c' वर, } f'(c,u_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

टिप्पणी: सगळ्या दिशेने दिशात्मक डेरिवेटिव चे अस्तित्व स्पष्ट रूपाने पार्शियल डेरिवेटिव चे अस्तित्व दर्शवते. तथापि, व्यत्यास सत्य नाहीं म्हणजे, पार्शियल डेरिवेटिव च्या अस्तित्वाचा अर्थ हा नाही कि सगळ्या दिशेने दिशात्मक डेरिवेटिव चे अस्तित्व असते.

उदाहरण: दाखवा कि $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \text{ किंवा } y=0 \\ 1, & \text{अन्यथा} \end{cases}$ द्वारे परिभाषित फंक्शन $f : R^2 \to R$ साठी दोन्ही पहिल्या क्रमाचे पार्शियल डेरिवेटिव $(0, 0)$ वर अस्तित्वात आहेत, परंतु दिशात्मक डेरिवेटिव सगळ्या दिशेने $(0, 0)$ वर अस्तित्वात नाही.

उकल: येथे

$$D_1 f(0,0) = f_x(0,0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

आणि
$$D_2 f(0,0) = f_y(0,0)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

परंतु, जर एखाद्या दुसऱ्या दिशा $u = (u_1, u_2)$, वर विचार करू, जिथे $u_1 \neq 0$ आणि $u_2 \neq 0$, आहे तेव्हा

$$D_y f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$, जे कि अस्तित्वात नाही

अभ्यास 4.2

1. समजा कि $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = 3x + 4y + x^2$. द्वारे परिभाषित एक फंक्शन आहे. तेव्हा दिलेल्या साठी'f' चा दिशात्मक डेरिवेटिव शोधा.
   - i. $(0, 0)$ वर, $(1, 2)$ दिशेने
   - ii. $(1, -1)$ वर, $(1, -1)$ दिशेने
   - iii. $(1, 2)$ वर, $(1, -3)$ दिशेने
   - iv. $(1, -1)$ वर, $(1, 0)$ दिशेने
   - v. $(1, -1)$ वर, $(0, 1)$ दिशेने
   - vi. (c_1, c_2) वर, (u_1, u_2) दिशेने
2. समजा कि $f : R^2 \to R^2$ असे आहे $f(x, y) = (x, -y)$ तेव्हा 'f' चा दिशात्मक डेरिवेटिव, $(2, 3)$ च्या दिशेने (a, b) वर शोधा.
3. समजा कि $f(x,y) = \begin{cases} x + y, & x \text{ किंवा } y=0 \\ 1, & \text{अन्यथा} \end{cases}$ तेव्हा'f' चा दिशात्मक डेरिवेटिव, $(a, 0)$, $a \neq 0$ च्या दिशेने $(0, 0)$ वर शोधा.
4. समजा $f : R^2 \to R^2, f(x, y) = (7x + x^4, 3x + 4y + y^4)$, द्वारे परिभाषित आहे तेव्हा 'f' चा दिशात्मक डेरिवेटिव, (a, b) च्या दिशेने $(0, 0)$ वर शोधा.

उत्तरे

1.	i. 11	ii. 1	iii. −7	iv. 5	v. 4
	vi. $3u_1 + 4u_2 + 2c_1u_1$				
2.	$(2, -3)$	3. a	4. $7a, 3a + 4b$		

4.3 पार्शियल डेरिवेटिव

जर z दोन स्वतंत्र चल x, y चे एक फंक्शन आहे , म्हणजे जर $z = f(x, y)$ तेव्हा z चा डेरिवेटिव x च्या सापेक्ष, y ला स्थिर घेऊन, z चा पार्शियल डेरिवेटिव x च्या सापेक्ष म्हटला जातो आणि $\frac{\partial z}{\partial x}$ प्रतीक द्वारे दर्शविला जातो.

याचप्रकारे जेव्हा x ला स्थिर मानले जाते, तेव्हा आपण y च्या सापेक्ष z चा पार्शियल डेरिवेटिव काढू शकतो, ज्याला आपण $\frac{\partial z}{\partial y}$ द्वारे दर्शवितों

अशाप्रकारे

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\right] = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y) - f(x,y)}{\delta x}$$

आणि

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)\right] = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y}$$

अटीनुसार लिमिट अस्तित्वात असायला पाहिजे.

दोन चलांच्या फंक्शन च्या पार्शियल डेरिवेटिव ला दर्शविण्यासाठी सामान्यतः खालील प्रतिकांचा उपयोग केला जातो

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y)\right],\ f_x(x,y)$$

आणि

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)\right],\ f_y(x,y)$$

सर्व साधारणपणे, जर 'u' हे, n स्वतंत्र चल $x_1,\ x_2, x_3,..x_n$, यांचे एक फंक्शन आहे, तेव्हा u चा पार्शियल डेरिवेटिव कोणतेही चल x_r , $r = 1, 2,\ldots n$ यांच्या सापेक्ष तसेच बाकी सर्व चलांना स्थिरांक मानुन मिळविला जातो.

4.3.1 उच्च घातांकाचे पार्शियल डेरिवेटिव

जर $z = f(x, y)$, तर पार्शियल डेरिवेटिव $\frac{\partial z}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial z}{\partial y}$ सामान्यता x आणि y दोघांचे फंक्शन आहे (जरी त्यापैकी एक किंवा

दोन्ही एकतर स्थिर असू शकतात किंवा केवळ एका चलावर अवलंबून असू शकतात) त्यांचा x आणि y च्या सापेक्ष पार्शियल डेरिवेटिव असू शकतो. या पार्शियल डेरिवेटिव ला z चा दुसऱ्या घातांकाचा पार्शियल डेरिवेटिव म्हणतात.

हे डेरिवेटिव खालीलपैकी कुठल्याही प्रतिकद्वारे दर्शविले जाऊ शकते.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx};$$

उच्च घातांकाचे पार्शियल डेरिवेटिव याचप्रमाणे परिभाषित केले जाऊ शकतात.

टिप्पणी: हे लक्षात घ्यायला हवे की $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ आणि $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ सर्वसाधारणपणे समान नाहीत. तथापि, फंक्शन ला दुसर् या घातांकाचे कंटिन्युयस पार्शियल डेरिवेटिव आहेत, तर $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ आणि ह्या गुणांना पार्शियल डेरिवेटिव चे क्रमविनमेय गुणाचे रूप म्हटले जाते.

काही सोडवलेलि उदाहरणे

उदाहरण 4.15: $\frac{\partial u}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial u}{\partial y}$ चे मूल्य शोधा जेव्हा $u = \log_e(x^2 + y^2)$

उकल: येथे

$$u = \log_e(x^2 + y^2) \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला x च्या सापेक्ष (y ला स्थिर मानुन) पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2}.2x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

समीकरण (1) ला y च्या सापेक्ष (x ला स्थिर मानुन) पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}.2y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

उदाहरण 4.16: दाखवा कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ जेथे $u = \log_e\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$

उकल: येथे

$$u = \log_e\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$$

किंवा

$$u = \log_e(x^2 + y^2) - \log_e x - \log_e y \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2}.2x - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) ला y च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}.2y - \frac{1}{y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y} \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) ला y च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}.\,2y$$

म्हणजे $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) ला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून , आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{y}\right) = 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{-2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.\,2x$$

म्हणजे $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \ldots(5)$$

$\therefore$ समीकरण (4) आणि (5) वरून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$ **सिद्ध झाले**

उदाहरण 4.17: जर $u(x+y) = \left(x^2+y^2\right)$ तर दाखवा कि $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

उकल: स्वता प्रयत्न करावे.

उदाहरण 4.18: जर $u = f(y+ax) + \phi(y-ax)$ सिद्ध करा कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

उकल: स्वता प्रयत्न करावे.

उदाहरण 4.19: जर $u = \log_e\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ तर दाखवा कि $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}$

उकल: दिलेले आहे कि

$$u = \log_e\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$$

$\therefore$ $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(3x^2-3yz\right)}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)} \qquad \ldots(1)$$

आणि $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left(3y^2-3xz\right)}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)} \qquad \ldots(2)$$

आणि $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\left(3z^2-3xy\right)}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)} \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1), (2) आणि (3) ची बेरिज करून, आपल्याला मिळेल

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{3\left(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\right)}{(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\right)}$$

$$=\frac{3}{(x+y+z)} \qquad \ldots(4)$$

आता

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{3}{(x+y+z)}$$ [समीकरण (4) वरून]

$$=-\frac{3}{(x+y+z)^2}-\frac{3}{(x+y+z)^2}-\frac{3}{(x+y+z)^2}$$

$$=-\frac{9}{(x+y+z)^2}$$ **सिद्ध झाले**

उदाहरण 4.20: जर $u=\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ तर दाखवा कि $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$

उकल: स्वता प्रयत्न करावे.

उदाहरण 4.21: जर $x^x y^y z^z=\lambda$ तर दाखवा कि $x=y=z$ वर $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left(x\log_e xe\right)^{-1}$

उकल: दिलेले आहे कि $x^x y^y z^z=\lambda$ जेथे z , x आणि y चे एक फंक्शन आहे

दोन्ही कड़े लॉग्यरिथम घेऊन, आपल्याला मिळेल

$$x\log x+y\log y+z\log z=\log\lambda \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\left[\log x+x.\frac{1}{x}\right]+\left[\log z+z.\frac{1}{z}\right].\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

किंवा

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(1+\log x)}{(1+\log z)} \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) ला y च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\left[\log y+y.\frac{1}{y}\right]+\left[\log z+z.\frac{1}{z}\right].\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

किंवा

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(1+\log y)}{(1+\log z)} \qquad \ldots(3)$$

आता $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{(1+\log x)}{(1+\log z)}\right]$$

$$= -(1+\log x)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{(1+\log z)}\right]$$

$$= -(1+\log x)\left[-\frac{1}{(1+\log z)^2}\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{1}{z}\frac{(1+\log x)}{(1+\log z)^2}\left[-\frac{(1+\log y)}{(1+\log z)}\right]$$ [समीकरण (3) वरून]

$$= -\frac{(1+\log x)(1+\log y)}{z(1+\log z)^2}$$

∴ $x = y = z$ घेऊन

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{(1+\log x)^2}{x(1+\log x)^3} = -\frac{1}{x(1+\log x)}$$

$$= -\frac{1}{x[\log_e e + \log_e x]} = -\frac{1}{x\log_e xe}$$

अशाप्रकारे $x = y = z$ वर $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -(x\log ex)^{-1}$ **सिद्ध झाले**

उदाहरण 4.22: जर $z = x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \log x - \log y$ तर दाखवा कि

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

उकल: दिलेले आहे कि

$$z = x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \log x - \log y \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^4 y^2 . \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} . \frac{1}{y} + 4x^3 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = x^5 y^2 . \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} + 4x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) ला y च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^4y^2.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}.\left(-\frac{x}{y^2}\right)+2x^4y\,\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y}$$

किंवा
$$y\frac{\partial z}{\partial y}=-x^5y^2.\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+2x^4y^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-1 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) आणि (3) ची बेरिज करून, आपल्याला मिळेल

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=6x^4y^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$ **सिद्ध झाले**

उदाहरण 4.23: $\frac{\partial z}{\partial r}$ आणि $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ चे मूल्य शोधा जर $z=e^{r\cos\theta}.\cos(r\sin\theta)$

उकल: दिलेले आहे कि

$$z=e^{r\cos\theta}.\cos(r\sin\theta) \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला r च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial z}{\partial r}=e^{r\cos\theta}\left[\{-\sin(r\sin\theta)\sin\theta\}+\{\cos(r\sin\theta).\cos\theta\}\right]$$

$$\left[\because\ \cos(x+y)=\cos x.\cos y-\sin x.\sin y\right]$$

$$=e^{r\cos\theta}.\cos(r\sin\theta+\theta) \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) ला θ च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=e^{r\cos\theta}\left[-\sin(r\sin\theta)r\cos\theta\right]+\left[-r\sin\theta\ e^{r\cos\theta}\right].\cos(r\sin\theta)$$

$$=-re^{r\cos\theta}\left[\sin(r\sin\theta)\cos\theta+\sin\theta\cos(r\sin\theta)\right]$$

$$=-re^{r\cos\theta}\left[\sin(r\sin\theta+\theta)\right]$$ **उत्तर**

उदाहरण 4.24: जर $u=f(r)$ जेथे $r^2=x^2+y^2$ तर दाखवा कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$

उकल: दिलेले आहे कि

$$r^2=x^2+y^2 \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून , आपल्याला मिळेल

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r} \qquad \ldots(2)$$

याचप्रमाणे $$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r} \quad \ldots(3)$$

आता $u=f(r)$ दिलेले आहे कि

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r).\frac{x}{r}$$ [समीकरण (2) वरून]

दोन्ही बाजूला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r).\frac{x}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r\left[f'(r).1+x.f''(r).\frac{\partial r}{\partial x}\right]-xf'(r).\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}\left[r.f'(r)+x^2 f''(r)-\frac{x^2}{r}f'(r)\right]$$ [समीकरण (2) वरून] ...(4)

त्याचप्रमाने, $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left[r.f'(r)+y^2 f''(r)-\frac{y^2}{r}f'(r)\right] \quad \ldots(5)$$

समीकरण (4) आणि (5) ची बेरिज करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left[2rf'(r)+\left(x^2+y^2\right)f''(r)-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{r}f'(r)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[2rf'(r)+r^2 f''(r)-\frac{r^2}{r}f'(r)\right]$$ [समीकरण (1) वरून]

किंवा $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$$ **सिद्ध झाले**

उदाहरण 4.25: जर $\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$ तर दाखवा कि

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=2\left[x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

उकल: स्वता प्रयत्न करावे.

उदाहरण 4.26: जर $\theta=t^n.e^{-r^2/4t}$ 'n' चा कोणत्या मूल्यासाठी आपल्याला मिळेल $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial t}$

उकल: स्वता प्रयत्न करावे.

उत्तर $n=-\frac{3}{2}$

उदाहरण 4.27: जर $u = x^y$ तर दाखवा कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$

उकल: स्वता प्रयत्न करावे.

उदाहरण 4.28: जर $u = e^{xyz}$ तर दाखवा कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \left(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2\right) e^{xyz}$

उकल: समजा कि

$$u = e^{xyz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz} \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला z च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = x\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{xyz}\right)$$

$$= x\left[y.z.x.e^{xyz} + e^{xyz}\right]$$

$$= e^{xyz}\left[x^2 yz + x\right] \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) ला x च्या सापेक्ष पार्शियली डिफरंशीएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{xyz}\left(x^2 yz + x\right)\right]$$

$$= e^{xyz}(2xyz + 1) + yze^{xyz}\left(x^2 yz + x\right)$$

$$= e^{xyz}\left(1 + 2xyz + x^2 y^2 z^2 + xyz\right)$$

$$= e^{xyz}\left(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2\right)$$

अभ्यास 4.3

1. $\frac{\partial u}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial u}{\partial y}$ चे मूल्य शोधा जर

   i. $u = x\sin y + y\sin x$ ii. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

   iii. $u = x^y$ iv. $u = \sin^{-1} x / y$

2. जर $u = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, सिद्ध करा कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

3. जर $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, तर सिद्ध करा कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

4. जर $u=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, तर दाखवा कि $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$

5. जर $u=e^{x}\left(x\cos y-y\sin y\right)$, तर दाखवा कि $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

6. जर $u=\tan^{-1}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, तर सिद्ध करा कि $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}$

7. जर $u=\left(1-2xy+y^2\right)^{-1/2}$, तर सिद्ध करा कि $\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\}=0$

8. p आणि q चे मूल्य शोधा जर $\begin{cases} x=\sqrt{a}\left(\sin u+\cos v\right) \\ y=\sqrt{a}\left(\cos u-\sin v\right) \\ z=1+\sin\left(u+v\right) \end{cases}$

जेथे p आणि q क्रमशः $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ आणि $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ आहे. **संकेत:** $z=\dfrac{1}{2a}\left(x^2+y^2\right)$

9. जर $f\left(u\right)=\sin u$ आणि $u=\sqrt{x^2+y^2}$, तर दाखवा कि $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\cos^2 u$

10. जर $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{(x-a)^2}{4y}}$, तर सिद्ध करा कि $f_{xy}\left(x,y\right)=f_{yx}\left(x,y\right)$

11. जर $v=\log\left(x^2+y^2\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, तर दाखवा कि $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

12. जर $v=e^{xyz}+\left(\dfrac{xz}{y}\right)$, तर सिद्ध करा कि $x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=2xyz,\ y\dfrac{\partial v}{\partial y}+z\dfrac{\partial v}{\partial z}=2xyzv$

हे पण दाखवा कि $x\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\neq y\dfrac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}$

13. जर $u=x\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, तर दाखवा कि,

i. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ii. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

14. जर $v=x^2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)-y^2\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, तर सिद्ध करा कि $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$ जेथे v, x आणि y चे एक फंक्शन आहे

उत्तरे

1. i. $\sin y + y\cos x;\ x\cos y + \sin x$ ii. $\dfrac{-x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}};\ \dfrac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

iii. $x^{y}.\dfrac{y}{x};\ x^y \log x$ iv. $\dfrac{-1}{\sqrt{y^2-x^2}};\ -\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

8. $p = x/a$ आणि $q = y/a$

4.4 होमोजिनियस फंक्शन

एक फंक्शन $f(x, y)$ ला n घातांक (किंवा कोटी) असलेले एक होमोजिनियस फंक्शन म्हटले जाते, जर प्रत्येक पदामध्ये x आणि y समान घात n चे आहेत.

अशाप्रकारे पदावली $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots a_ny^n$, n घात चे एक होमोजिनियस फंक्शन आहे.

या पदावलीला अशाप्रकारे लिहिले जाऊ शकते $x^n\left[a_0 + a_1\left(\dfrac{y}{x}\right) + a_2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \ldots a_n\left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right]$ ज्याला $x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ द्वारे दर्शविले जाऊ शकते. म्हणूनच होमोजिनियस ची संकल्पना वाढविण्यासाठी जेणेकरून त्याच्या कार्यक्षेत्रात अगदी ट्रांसीडेंटल फंक्शन आणता येतील, आपण होमोजिनियस फंक्शन खालीलप्रमाणे परिभाषित करतो.

दोन चल x आणि y असलेल्या फंक्शन ला n घात असलेले x, y मधील होमोजिनियस फंक्शन म्हटले जाते जर त्याला $x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ च्या रूपात दर्शविले.

अशा प्रकारे, उदाहरणार्थ, पदावली, $ax^2 + by^2 + 2hxy$ म्हणजे $x^2\left[a + b\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2h\dfrac{y}{x}\right]$ ला 2 घात असलेले x, y मधील होमोजिनियस फंक्शन म्हटले जाते.

4.4.1 युलरचे प्रमेय

विधान: जर u हे x आणि y मधील n डिग्रीचे होमोजिनिअस फंक्शन असेल तर $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = nu$.

सिद्धता: u हे x आणि y मधील n डिग्रीचे होमोजिनिअस फंक्शन आहे म्हणून, ते असे लिहिले जाऊ शकते, $u = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{n-2} f'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots(1)$$

आणि
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= x^{n-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) आणि (2) ला अनुक्रमे x आणि y द्वारे गुणाकार करून बेरीज केल्यावर, आपल्याला मिळते

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) = nu \qquad ...(3)$$

अशा प्रकारे प्रमेय सिद्ध केले.

या प्रमेयाचे कितीही चलांच्या होमोजिनिअस फंक्शनसाठी सामान्यीकरण केले जाऊ शकते. अशा प्रकारे जर $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ हे $x_1, x_2, ..., x_m$ चलांमधील n डिग्रीचे फंक्शन असेल तर

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial u}{\partial x_3} + ... + x_m\frac{\partial u}{\partial x_m} = nu$$

याची सिद्धता हि दोन चलांमधील सिद्धतेसारखीच आहे.

डिडक्शन I: जर u हे x आणि y चलांमधील n डिग्रीचे होमोजिनिअस फंक्शन असेल आणि $u = f(v)$ तर

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = n\frac{f(v)}{f'(v)}, \text{ आणि}$$

डिडक्शन II: $x^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = g(v)[g'(v) - 1]$ जेथे $g(v) = n\dfrac{f(v)}{f'(v)}$.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.29: जर $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$, तर, सिद्ध करा $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$.

उकल: येथे

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$$

$\therefore$
$$\sin u = \left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) = f(x, y) \text{ (म्हणू) } = \sqrt{x}\left[\frac{1+\frac{y}{x}}{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}\right]$$

$\Rightarrow$ $\sin u$ हे होमोजिनिअस फंक्शन्स आहे ज्याची डिग्री $\dfrac{1}{2}$ आहे.

म्हणून युलरच्या प्रमेयद्वारे,

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u)+y\frac{\partial}{\partial y}(\sin u)=\frac{1}{2}\sin u$$

किंवा $$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cos u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin u$$

किंवा $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\sin u}{\cos u}=\frac{1}{2}\tan u$$ **(सिद्ध झाले)**

उदाहरण 4.30: जर $u=\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, तर, सिद्ध करा $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

उकल: संकेत: हे घेऊन $u_1=\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ आणि $u_2=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

उदाहरण 4.31: जर $v=\log_e\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right)$ तर, सिद्ध करा $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=3$.

उकल: दिले,

$$v=\log_e\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right)$$

येथे v हे होमोजिनिअस फंक्शन नाही, परंतु

$$z=e^v=\frac{x^4+y^4}{x+y}=\frac{x^4\left(1+y^4/x^4\right)}{x(1+y/x)}$$

$$=x^3\phi\left(\frac{y}{x}\right),\Rightarrow$$ z हे होमोजिनिअस फंक्शन्स आहे ज्याची डिग्री 3 आहे.

आता युलरची प्रमेय लागू करा आणि $z=e^v$ टाकून हेच सिद्ध करा.

उदाहरण 4.32: जर $u=\sin^{-1}\left(\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^8+y^8+z^8}}\right)$ तर, सिद्ध करा $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=-3\tan u$.

उकल: दिले,

$$u=\sin^{-1}\left(\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^8+y^8+z^8}}\right)$$

$\therefore$ $$\sin u=\left(\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^8+y^8+z^8}}\right)$$

$\Rightarrow$ $\sin u$ हे फंक्शन आहे ज्याची डिग्री $1-4=-3$ आहे. म्हणून युलरच्या प्रमेयाद्वारे,

$$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u)+y\frac{\partial}{\partial y}(\sin u)+z\frac{\partial}{\partial z}(\sin u)=-3\sin u$$

$$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cos u\frac{\partial u}{\partial y}+z\cos u\frac{\partial u}{\partial z}=-3\sin u$$

किंवा $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=-3\frac{\sin u}{\cos u}=-3\tan u$$

किंवा $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+3\tan u=0$$ **(सिद्ध झाले).**

उदाहरण 4.33: जर $v=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ तर, सिद्ध करा,

i. $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=\sin 2v$ ii. $x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2\cos 3v\sin v$

उकल: येथे v हे होमोजिनिअस फंक्शन नाही,

परंतु $$z=\tan v=\frac{x^3+y^3}{x-y}=\frac{x^3\left(1+y^3/x^3\right)}{x\left(1-y/x\right)}=f(x)$$ (म्हणू) $=x^2\phi\left(\frac{y}{x}\right)$

z हे होमोजिनिअस फंक्शन आहे ज्याची डिग्री 2 आहे. म्हणून युलरच्या डिडक्शन I प्रमेयाद्वारे,

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=n\frac{f(v)}{f^{'}(v)}=2\frac{\tan v}{\sec^2 v}=\frac{2\sin v\cos^2 v}{\cos v}$$

$$=2\sin v\cos v=\sin 2v$$

तसेच युलरच्या डिडक्शन II प्रमेयद्वारे,

$$x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=g(v)\left[g^{'}(v)-1\right]$$

येथे

$$g(v)=\sin 2v$$

$$x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\sin 2v\left(2\cos 2v-1\right)$$

$$=2\sin 2v\cos 2v-\sin 2v$$

$$=\sin 4v-\sin 2v \qquad \left[\because \sin A-\sin B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$=2\sin v\cos 3v$$ **(सिद्ध झाले).**

उदाहरण 4.34: जर $u=\sin^{-1}\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{ax+by+cz}\right)$ तर, सिद्ध करा $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=2\tan u$.

उकल: संकेत: $\sin u=\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{ax+by+cz}\right)=f(x,y)$ (म्हणू)

$\Rightarrow$ $\sin u$ हे होमोजिनिअस फंक्शन आहे ज्याची डिग्री 3-1 = 2 आहे. युलरच्या प्रमेयाद्वारे.

उदाहरण 4.35: जर $u = x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ तर, सिद्ध करा, $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उदाहरण 4.36: जर $v = \sec^{-1}\left(\frac{x^3 - y^3}{x+y}\right)$ तर, सिद्ध करा $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 2\cot v$, तसेच मूल्यमापन करा.

$$x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

उकल: संकेत: $\sec v = \left(\frac{x^3 + y^3}{x+y}\right) = f(x, y)$.

उदाहरण 4.37: जर $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}}\right)^{1/2}$ तर, सिद्ध करा

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{144}\left(13 + \tan^2 u\right)$$

उकल: $z = \sin u = \left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}}\right)^{1/2}$, z हे होमोजिनिअस फंक्शन आहे ज्याची डिग्री $-\frac{1}{12}$ आहे. म्हणजेच $n = -\frac{1}{12}$

आता युलरचे प्रमेयाद्वारे, आपल्याकडे आहे,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{12}\tan u$$, आपल्याकडे आहे,

पुन्हा, $g(u) = -\frac{1}{12}\tan u$, तर

युलरच्या डिडक्शन II सूत्राद्वारे,

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(u)\left(g'(u) - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{12}\tan u\left[-\frac{1}{12}\sec^2 u - 1\right] = \frac{\tan u}{144}\left(\tan^2 u + 13\right)$$

अभ्यास 4.4

1. खालील फंक्शन्स साठी युलरच्या प्रमेयाची पडताळणी करा:

   i. $u = 3x^2yz + 4xy^2z + 5y^4$ ii. $u = axy + byz + czx$

   iii. $u = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$ iv. $u = x^2\log\left(\frac{y}{x}\right)$ v. $u = \frac{x\left(x^3 - y^3\right)}{x^3 + y^3}$

2. जर $u = \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3}$, सिद्ध करा $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u$.

3. जर $v = \log\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)$, सिद्ध करा $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 1$.

4. जर $u = x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, मग त्याचे मूल्य शोधा $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$.

5. जर $u = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$, तर, सिद्ध करा $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

6. जर $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$, सिद्ध करा $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = \sin 2u$.

7. जर $u = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x^3 + 5y^3}$, सिद्ध करा $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} + 3u = 0$.

8. युलरचे प्रमेय स्पष्ट करा आणि सिद्ध करा आणि त्याची पडताळणी करा $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

उत्तरे

4.5 टोटल डिफरन्शिअल कोईफिशएंट

जर $u = f(x, y)$ येथे $x = \phi(t)$ आणि $y = \psi(t)$, तर u स्वत: एकाच व्हेरिएबल 't' चे फंक्शन आहे, आणि म्हणून आपण

सामान्य डेरिव्हेटीव्ह $\frac{du}{dt}$ शोधू शकतो. या पार्शिअल डिफरेन्शिएशन ला u चे t बरोबर टोटल डिफरेन्शिएशन असे म्हणतात.

आता समस्या $\frac{du}{dt}$ शोधण्याची आहे, x आणि y चे मूल्य t च्या स्वरुपामध्ये $f(x, y)$ मध्ये न ठेवता. आपण पुढीलप्रमाणे पुढे जाऊ शकतो:

जर $\delta x, \delta y$ आणि δu स्मॉल इन्क्रीमेंट दर्शविते x, y आणि u मध्ये अनुक्रमे t मधील एका छोट्या इन्क्रीमेंट δt t मध्ये.

आपल्याकडे आहे, $x + \delta x = \phi(t + \delta t)$ आणि $y + \delta y = \psi(t + \delta t)$

$$\therefore \qquad u + \delta u = f(x + \delta x, y + \delta y)$$

मग व्याख्येनुसार,

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta x) + f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta t}\right]$$

$$= \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta t}\right] + \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta t}\right]$$

जर $\delta t \to 0, \delta x \to 0$ आणि $\delta y \to 0$,

$\therefore$ $$= \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}; \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt};$$

$\therefore$ $$\frac{du}{dt} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x}\right]\cdot\left[\lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta x}{\delta t}\right] + \lim_{\delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y}\right]\cdot\left[\lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta y}{\delta t}\right]$$

परंतु पार्शिअल डेरीवेटीव्ह च्या व्याख्येनुसार,

$$\lim_{\delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y}\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

आणि $$\lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x}\right] = \frac{\partial f(x, y+\partial y)}{\partial x}$$

आता असे गृहीत धरू, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ हे y चे कंटिन्यूअस फंक्शन आहे,

$\therefore$ $$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\partial f(x, y+\delta y)}{\delta x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

म्हणून $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

म्हणजेच $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad ...(A)$$

वरील परिणाम दोनपेक्षा जास्त चलांच्या फंक्शनपर्यंत वाढविला जाऊ शकतो, म्हणजेच,
जर c आणि $x_1, x_2 ..., x_n$ हे t चे फंक्शन आहे मग आपण हे सिद्ध करू शकतो,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt} \qquad ...(B)$$

डिडक्शन: जर $u = f(x,y)$, $x = \phi(t_1, t_2)$ आणि $y = \psi(t_1, t_2)$, मग वरील निकालावरून,

आपल्याकडे आहे, $$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

आणि $$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

तसेच दिलेल्या समीकरणांवरून आपण मिळवू शकतो. t_1, t_2 , x, y च्या रूपात.म्हणजेच, $t_1 = \phi_1(x, y)$ आणि $t_2 = \phi_2(x, y)$.

नंतर $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x}$$

आणि $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y}$$

ही समीकरणे वापरून आपण स्वतंत्र चलांची एक प्रणाली स्वतंत्र चलांच्या दुसऱ्या प्रणालीत बदलू शकतो.

वरील परिणामांच्या वारंवार अनुप्रयोगाद्वारे आपल्यातील उच्च क्रम पार्शिअल डेरीवेटीव्ह प्राप्त केले जाऊ शकतात.

4.6 डिफरन्शिएशन ऑफ इंप्लिसिट फंक्शन्स

आधीच्या विभागाचे निकाल (A) इम्प्लीसीट फंक्शन चे डिफरन्शिअल कोइफिशिअंट शोधण्यासाठी वापरले जाऊ शकतात.

जर $u = f(x, y)$, आणि y हे x चे फंक्शन आहे, तर टोटल डिफरन्शिअल कोइफिसिएंट u चे x बरोबर दिले जाते,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

विशेषत:, जर आपल्याला x आणि y मधील इंप्लिसिट संबंध, $u = f(x, y) = c$ च्या फॉर्ममध्ये दिला आहे.

जेथे 'c' स्थिर असते, मग, $0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

म्हणजेच $$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

किंवा $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

सर्वसाधारणपणे, जर $u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n)$ आणि चल, $x_2, x_3, \ldots. x_n$ हे सर्व x_1 चे फंक्शन आहे.

मग आधीच्या विभागातील निकालावरून (B) आपण मिळवतो,

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_1} + \ldots\ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}$$

4.6.1 सेकंड ऑर्डर डेरीवेटीव्ह ऑफ इंप्लिसिट फंक्शन्स

जर $f(x, y) = c$, आपल्याकडे आहे $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$

आता आमचे उद्दीष्ट $\frac{d^2 y}{dx^2}$ शोधणे आहे, $f(x, y)$ च्या पार्शल डेरीवेटीव्ह च्या रूपात. सध्या तरी आपण ते पार्शल डेरीवेटीव्ह

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ अनुक्रमे p, q, r, s आणि t ने दर्शवू.

या नोटेशन्सचा वापर करून, आपल्याकडे आहे,

$$\frac{dy}{dx} = -{}^{p}\!/\!_{q}$$

x बरोबर डिफरन्शिएशन करून आपल्याला मिळते,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(q\frac{dp}{dx} - p\frac{dq}{dx}\right)}{q^2} \qquad ...(1)$$

p आणि q, x आणि y चे फल असल्यामुळे,

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= r + s\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{qr - ps}{q}$$

त्याचप्रमाणे, $$\frac{dq}{dx} = \frac{qs - tp}{q}$$

हि समीकरणे (1) मध्ये टाकून,आपल्याला मिळते,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{q^2r - 2pqs + p^2t}{q^3}\right]$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.38: जर $u = x^5y^4$, जेथे $x = t^2$ आणि $y = t^3$, शोधा $\frac{du}{dt}$.

उकल: येथे u हे x आणि y चे फंक्शन आहे, जेथे x आणि y हे t ची फंक्शन्स आहेत.

$\therefore$ u हे सुध्दा सिंगल व्हेरिएबल t चे फंक्शन आहे.

$$\therefore \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(5x^4y^4\right)\cdot 2t + \left(4x^5y^3\right)\cdot 3t^2$$

$$= 10x^4y^4t + 12x^5y^3t^2$$

$$= 10t^8\cdot t^{12}\cdot t + 12\cdot t^{10}\cdot t^9\cdot t^2 = 22t^{21}.$$

उदाहरण 4.39: जर $u = f(x-y, y-z, z-x)$, सिद्ध करा $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

उकल: संकेत: $x - y = X$ ...(1) $\quad$ $y - z = Y$ ...(2) $\quad$ $z - x = Z$ ...(3)

$\therefore u = f(X, Y, Z)$, हे सर्व x, y, z चे फंक्शन आहे. तर

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x} \qquad ...(4)$$

आता आवश्यक ते सर्व डेरीवेटीव्ह शोधा आणि आवश्यक परिणाम मिळविण्यासाठी (4) मध्ये ठेवा.

उदाहरण 4.40: जर $x=r\cos\theta, y=\sin\theta$ तर, सिद्ध करा $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}$

उकल: जर $x=r\cos\theta, y=\sin\theta$

$$r^2=x^2+y^2 \qquad ...(1)$$

x बरोबर (1) डिफरन्शिएशन करून आपल्याला मिळते,

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \text{ किंवा } \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right) \text{ (वरून)}$$

$$\text{किंवा} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3} \qquad ...(2)$$

त्याचप्रमाणे, आपण शोधू शकतो,

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r} \text{ आणि } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3} \qquad ...(3)$$

(2) आणि (3) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळते,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$=\frac{2r^2-(x^2+y^2)}{r^3}=\frac{2r^2-r^2}{r^3}=\frac{1}{r}$$

$$\text{अशा प्रकारे डावी बाजू} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{1}{r} \qquad ...(4)$$

$$\text{उजवी बाजू} \qquad \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}=\frac{1}{r}\left\{\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{r^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r}= \text{ डावी बाजू} \qquad ...(5)$$

म्हणून (4) आणि (5) वरून, आपल्याला मिळते,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}$$ **(सिद्ध झाले).**

उदाहरण 4.41: शोधा $\frac{dy}{dx}$ जर $e^x+e^y=2xy$.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर: $\frac{2y-e^x}{e^y-2x}$.

उदाहरण 4.42: जर $f(x,y)=0, \phi(y,z)=0$, तर, सिद्ध करा $\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y}$.

उकल: जर $f(x,y)=0,$ तर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(\partial f/\partial x)}{(\partial f/\partial y)} \quad \ldots(1)$$

जर $\phi(y,z)=0,$ तर $\frac{dz}{dy}=\frac{-(\partial \phi/\partial y)}{(\partial \phi/\partial z)}$ ...(2)

(1) आणि (2) यांचा गुणाकार करून, आपल्याला मिळते

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}=\frac{(\partial f/\partial x)}{(\partial f/\partial y)}\cdot\frac{(\partial \phi/\partial y)}{(\partial \phi/\partial z)}$$

किंवा $$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y}$$ **(सिद्ध झाले).**

उदाहरण 4.43: जर $u=x\log xy,$ जेथे $x^3+y^3+3xy=1,$ शोधा $\frac{du}{dx}$.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर: $(1+\log xy)-\frac{x}{y}\frac{(x^2+y)}{(y^2+x)}$

उदाहरण 4.44: शोधा $\frac{dy}{dx}$ जर $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+y^3+1=0; x>0, y>0$

उकल: संकेत: हे वापरा $\frac{dy}{dx}=\frac{-(\partial f/\partial x)}{(\partial f/\partial y)}$

उत्तर: $\frac{-y}{3y^4+3y^2x^2-x}$

उदाहरण 4.45: जर $x+y=2e^{\theta}\cos\phi$ आणि $x-y=2ie^{\theta}\sin\phi$, सिद्ध करा $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

उकल: आपल्याकडे आहे,

$$x+y=2e^{\theta}\cos\phi \qquad \text{...(1)}$$

आणि $$x-y=2ie^{\theta}\sin\phi \qquad \text{...(2)}$$

(1) आणि (2) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळते,

$$2x=2e^{\theta}(i\sin\phi+\cos\phi)$$

$$x=e^{\theta+i\phi} \qquad \left(\because e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi\right) \qquad \text{...(3)}$$

(2) मधून (1) वजा करून, आपल्याला मिळते,

$$2y=2e^{\theta}\,(\cos\phi-i\sin\phi)=e^{\theta-i\phi} \qquad \text{...(4)}$$

स्पष्टपणे, $u=f(x,y)$ आणि x, y हे θ,ϕ चे फंक्शन आहे. म्हणून u हे θ आणि ϕ संमिश्र फंक्शन आहे.

आता, $$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

$$=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \left[\because e^{\theta+i\phi}=x, e^{\theta-i\phi}=y\right]$$

आणि $$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

किंवा $$=\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right]x+\frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right]y \qquad \text{...(5)}$$

पुन्हा, $$\frac{\partial u}{\partial\phi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\phi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\phi}$$

$$=i\left[x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$\therefore$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\phi}$$

$$=i\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right](ix)+i\frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right](-iy)$$

$$=-x\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right]+y\frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$=-x\left[\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right]+y\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

किंवा $$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = -\left[x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right] + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left[x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \quad \ldots(6)$$

(5) आणि (6) यांची बेरीज करून, आपल्याला मिळते,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$ **(सिद्ध झाले).**

अभ्यास 4.5

1. जर $x^x + y^y = c$, तर शोधा $\frac{dy}{dx}$.

2. जर $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$, तर शोधा $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3. जर $u = e^{mx}(y-z), y = m\sin x$ आणि $z = \cos x$, शोधा $\frac{du}{dx}$.

4. जर $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ आणि $lx + my + nz = 0$, तर $\frac{dy}{dx}$ आणि $\frac{dz}{dx}$ शोधा.

5. जर वक्र $f(x, y) = 0$ आणि $\phi(x, y) = 0$ एकमेकांना स्पर्श करतात, तर संपर्काच्या बिंदूवर ते दर्शविते
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

6. जर $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, तर सिद्ध करा

   a. $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$ b. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\right)^2$

7. जर $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, तर सिद्ध करा $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\frac{\partial \theta}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$

8. जर $z = z(x, y), x = e^u + e^{-v}, y = e^{-u} - e^v$, सिद्ध करा $\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$

9. जर $x^4 + y^4 = 4a^2 xy$, सिद्ध करा $\left(a^2 x - y^3\right)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = 2a^2 xy\left(3a^4 + x^2 y^2\right)$.

10. जर $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$, सिद्ध करा $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 0$.

    संकेत: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0$.

11. जर $z = f(x, y)$, येथे $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ तर सिद्ध करा; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = e^{2u}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$

12. समीकरण बदला $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ समीकरणाला पोलार निर्देशांकात रूपांतरित करा.

उत्तरे

1. $-\left[\frac{y^x \cdot \log_e y + yx^{y-1}}{x^y \cdot \log_e x + xy^{x-1}}\right]$

2. $-\frac{\left[(hx+by)^2 \cdot a - 2(hx+by)(ax+by)h + (ax+hy)^2 b\right]}{(hx+by)^2}$

3. $e^{mx}(m^2+1)\sin x$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{clz - anx}{bny - cmz}, \frac{dz}{dx} = \frac{amx - bly}{bny - cmz}$

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

मनोरंजक माहिती

- टोटल डेरीवेटीव्ह कधी कधी फ्लुइड मेकॅनिक्स मध्ये मटेरियल डेरीवेटीव्ह म्हणून देखील वापरला जातो.
- डेरिव्हेटिव्ह हा कोणत्याही बिंदूवर त्वरित बदलाचा दर दर्शविण्याचा एक मार्ग आहे.
- डेरिव्हेटिव्ह हे कोणत्याही फंक्शन $f(x)$ वरील गणिती ऑपरेशन आहे आणि त्याचे चिन्ह $\frac{d}{dx}$ आहे.
- खोकताना जास्तीत जास्त वेगाने हवा बाहेर काढण्यासाठी श्वासनलिका (विंडपाइप) किती संकुचित होते, त्याची गणना डेरिव्हेटिव्ह्जच्या संकल्पनेद्वारे केली जाते.
- ब्रँचिंग कोन काय असावा, ज्यामध्ये रक्तवाहिन्या घर्षणामुळे ऊर्जा कमी करतात, जसे शाखांमधून रक्त वाहते, अगदी समान संकल्पनेवर आधारित आहे.

वास्तविक जीवन उदाहरणे

- उपग्रह आणि खगोलशास्त्रात, कलमन फिल्टर नावाचे एक तंत्र आहे, जे इष्टतम मार्ग आहे, निरीक्षणावर आधारित अंदाज सुधारण्यासाठी (आपण असे म्हणूया कि आवाज असणारे अवकाशातील कोणतेही निरीक्षण). कलमन फिल्टरच्या मध्यभागी एक मॅट्रिक्स ऑब्जेक्ट आहे ज्याला जॅकोबियन म्हणतात, जो वेक्टर व्हॅल्यूड फंक्शनचा त्याच्या पॅरामीटर सोबत पहिल्या ऑर्डरचा पार्शल डेरीवेटीव्हचा मॅट्रिक्स आहे. कलमन फिल्टर सर्वत्र वापरले जातात, उदाहरणार्थ मार्गदर्शन प्रणालींमध्ये आणि स्वायत्त वाहनाचा सेन्सर डेटा पासून मार्ग शोधण्यात.
- आलेख वापरून व्यवसायात नफा आणि तोटा शोधण्यासाठी डेरिव्हेटिव्ह्जचा वापर केला जाऊ शकतो.

- डेरिव्हेटिव्ह्ज अगदी रेखीय अंदाजात वापरले जातात.
- टोटल डेरीवेटीव्ह वापरून टोटल डिफरंशियल समीकरणे सोडवली जाऊ शकतात.
- एकूण डेरिव्हेटिव्ह फंक्शनला त्याच्या सर्व वितर्कांच्या संदर्भात, केवळ एकच नाही, आणि जेव्हा फंक्शनमध्ये अनेक व्हेरिएबल्स असतात तेव्हा त्याचा वापर केला जातो.
- डेरिव्हेटिव्ह्जची संकल्पना बऱ्याच प्रकारे वापरली जाते जसे की तापमानात बदल किंवा आकार बदलणे आणि परिस्थितीनुसार वस्तूंचा आकार.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत NPTEL)

Continuity of Function of Two Variable

4.7 दोन चलांसाठी टेलरचे प्रमेय

समजा $f(x, y)$ हे दोन स्वतंत्र चल x आणि y चे फंक्शन आहे आणि सर्व बिंदूंवर (x, y) कण्टीन्यूवस पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज आहेत, तर दोन चलांमधील टेलरची मालिका खालीलप्रमाणे असते:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + \ldots$$

सिद्धता: असे समजा की $f(x+h, y+k)$ हे एका चलाचे फंक्शन आहे, x म्हणा, तर एका चलाच्या फंक्शनसाठी टेलरच्या प्रमेयाद्वारे,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + h\frac{\partial}{\partial x} f(x, y+k) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial}{\partial x^2} f(x, y+k) + \ldots\ldots..$$

प्रत्येक पदाचा विस्तार करून,

$$f(x+h, y+k) = \left[f(x, y) + k\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) + \ldots\right]$$

$$+h\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x, y) + k\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \ldots.\right]$$

$$+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x, y) + k\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \ldots.\right]$$

म्हणून,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \ldots$$

हे कधीकधी प्रतीकात्मकरित्या लिहिले जाते,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) + \ldots.$$

$$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + \ldots$$

जेथे $$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

आणि $$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f = h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nh^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \ldots. + k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

टिप्पणी: वरील प्रमेय कोणत्याही संख्येने स्वतंत्र चलांपर्यंत सहजपणे वाढवले जाऊ शकते.

आणखी एक रूप:

$$f(x, y) = f(a, b) + \left[(x-a)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} + (y-b)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}\right] + \frac{1}{2!}$$

$$\left[(x-a)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,b)} + 2(x-a)(y-b)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(a,b)} + (y-b)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}\right] + ..$$

जर $a = 0$, $b = 0$, तर

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}\right] + \frac{1}{2!}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)} + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(0,0)}\right] + \ldots$$

याला दोन चलांसाठी मॅकलॉरिनची मालिका म्हणतात.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.46: e^{xy} चा $(1,1)$ या बिंदूबद्दल विस्तार करा.

उकल: जर

$$f(x, y) = e^{xy} \quad \Rightarrow \quad f(1,1) = e^1 = e$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = e^1 = e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = e^1 = e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1,1)} = 1^2 \cdot e^1 = e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xye^{xy} + e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(1,1)} = 1 \cdot 1 \cdot e^1 + e^1 = 2e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(1,1)} = 1^2 \cdot e^1 = e$$

टेलरच्या प्रमेयानुसार दोन चलांच्या फंक्शन साठी, आपल्याकड़े आहे,

$$f(x,y) = f(a,b) + \left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} f(a,b) + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} f(a,b)\right] + \frac{1}{2!}$$
$$\left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad e^{xy} = e\left[1 + (x-1) + (y-1)\right] + \frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2\right]e + \ldots..$$

उदाहरण 4.47: $e^x \cos y$ चा टेलरच्या मालिकेने $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ या बिंदूबद्दल विस्तार करा.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर:

$$\frac{e}{\sqrt{2}} + \left[(x-1)\frac{e}{\sqrt{2}} + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{e}{\sqrt{2}}\right)\right] +$$
$$\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2 \frac{e}{\sqrt{2}} + 2(x-1)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{e}{\sqrt{2}}\right) + \left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(-\frac{e}{\sqrt{2}}\right)\right] + ..$$

उदाहरण 4.48: चौथ्या ऑर्डर च्या पदापर्यंत x आणि y च्या घातांकामध्ये $\cos x \cos y$ चा विस्तार शोधा.

उकल: समजा

$$f(x,y) = \cos x \cos y \quad \Rightarrow \quad f(0,0) = \cos 0 \cos 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cos y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos x \sin y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x \cos y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin x \sin y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos x \cos y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(0,0)} = -1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \sin x \cos y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -\cos x \sin y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \sin x \cos y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \cos x \sin y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \cos x \cos y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = -\sin x \sin y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \cos x \cos y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = -\sin x \sin y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \cos x \cos y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{(0,0)} = 1$$

टेलरच्या प्रमेयात ही मूल्ये ठेऊन, आपल्याला मिळते,

$$f(x,y) = f(0,0) + \left[x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] + \frac{1}{2!}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + 3x^2 y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) + 3xy^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) + y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)\right] + \frac{1}{4!}$$

$$\times\left[x^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) + 4x^3 y\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) + 4xy^3\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0,0)\right.$$

$$\left. +6x^2y^2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) + y^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0,0)\right] + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \cos x \cos y = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(-x^2 + 0 - y^2\right) + \frac{1}{6}\left(0 + 0 + 0 + 0\right)$$

$$+\frac{1}{24}\left(x^4 + 0 + 6x^2y^2 + 0 + y^4\right) + \ldots..$$

किंवा $$\cos x \cos y = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + ...$$

उदाहरण 4.49: दुसऱ्या डिग्रीच्या पदापर्यंत किंवा त्याला समाविष्ट करणाऱ्या बिन्दु (1, 1) च्या बाबतीत $f(x, y) = \tan^{-1} y/x$ चा टेलर विस्तार मिळवा. म्हणून $f(1.1, 0.9)$ ची गणना करा.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर: 0.7862

उदाहरण 4.50: $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 + -4x^2 y$ ची (1, 2) बिंदूबद्दल वर्ग टेलरच्या श्रेणीचा विस्तार शोधा.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर: $10 - 10(x - 1) + 20(y - 2) - 2(x - 1)^2 - 8(x - 1)(y - 2) + 12(y - 2)^2 + 2(x - 1)^3$
$- 4(x - 1)^2 (y - 2) + 2(y - 2)^3 + ...$

ज्याची प्रत्यक्ष विस्ताराद्वारेही पडताळणी केली जाऊ शकते.

उदाहरण 4.51: h आणि k च्या घातांकामध्ये दुसऱ्या डिग्री पर्यंत किंवा त्याला समाविष्ट करणाऱ्या $\frac{(x+h)(y+k)}{(x+h+y+k)}$ चा विस्तार करा.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर: $\frac{xy}{(x+y)} + \frac{hy^2}{(x+y)^2} + \frac{kx^2}{(x+y)^2} - \frac{h^2 y^2}{(x+y)^3} + \frac{2hkxy}{(x+y)^3} - \frac{k^2 y^2}{(x+y)^3} + ...$

उदाहरण 4.52: टेलरच्या प्रमेयद्वारे $f(x, y) = x^2 y + 3y - 2$ चा $(x-1)$ आणि $(y + 2)$ च्या घातांकामध्ये विस्तार करा.

उकल: टेलरच्या प्रमेयामुळे आपल्याला माहीत आहे,

$$f(x, y) = f(a, b) + \left[(x-a)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + (y-b)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2!}$$
$$\left[(x-a)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2(x-a)(y-b)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + (y-b)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right] + .. \qquad ...(1)$$

येथे, $a + h = x$ आणि $h = x - 1$ म्हणून $a = 1$ आणि $b + \mathrm{k} = y$ आणि $k = y + 2$ म्हणून $b = -2$.

$$f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad \Rightarrow \quad f(1, -2) = -10$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,-2)} = -4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,-2)} = 4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1,-2)} = -4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(1,-2)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(1,-2)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{(1,-2)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(1,-2)} = 2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{(1,-2)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{(1,-2)} = 0$$

ही मूल्ये (1) मध्ये ठेवून, आपल्याला मिळते,

$$x^2 y + 3y - 2 = (-10) + \left[(x-1)(-4) + (y+2).4\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2(-4) + 2(x-1)(y+2).2 + (y+2)^2.0\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left[(x-1)^3.0 + 3(x-1)^2(y+2).2 + 0 + 0\right]$$

किंवा $\quad x^2 + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2).$

उदाहरण 4.53: तिसऱ्या डिग्रीच्या पदापर्यंत x^y चा $(x-1)$ आणि $(y-1)$ च्या घातांकामध्ये विस्तार करा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$f(x, y) = x^y$$

येथे, $\quad a + h = x$, आणि $h = x - 1 \Rightarrow a = 1$

आणि $\quad b + k = y$, आणि $k = y - 1 \Rightarrow b = 1$

तसेच $\quad f(1,1) = 1$

(1) ला x बरोबर डिफरन्शिअट करून, आपल्याला मिळते,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{(1,1)} = 0$$

पुन्हा $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y lox \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\log x)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^y (\log x)^3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^y \frac{1}{x} + yx^{y-1}\log x = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x=1,y=1} = 1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\log x + yx^{y-2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(1,1)} = 1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = yx^{y-1}(\log x)^2 + 2x^{y-1}\log x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{(1,1)} = 0$$

आता टेलरचे प्रमेय लागू करताना, आपल्याला मिळते

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right] + \ldots$$

$$\therefore \quad f(x,y) = x^y = 1 + (x-1) + 0 + \frac{1}{2!}(0 + 2(x-1)(y-1) + 0)$$
$$+ \frac{1}{3!}[0 + 3(x-1)^2(y-1) + 0 + 0] + \ldots.$$

$$\Rightarrow \quad x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1).$$

उदाहरण 4.54: x आणि y च्या घातांकामध्ये $e^x \sin y$ चा तिसऱ्या डिग्रीच्या पदापर्यंत विस्तार करा.

उकल: समजा

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

x आणि y च्या पावरमध्ये टेलरची मालिका.

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{x^2}{2!}f_{xx}(0,0) + \frac{y^2}{2!}f_{yy}(0,0) + \frac{2xy}{2!}f_{xy}(0,0) +$$
$$+ \frac{x^3}{3!}f_{xxx}(0,0) + \frac{y^3}{3!}f_{yyy}(0,0) + \frac{3x^2y}{3!}f_{xxy}(0,0) + \frac{3xy^2}{3!}f_{xyy}(0,0) + \ldots\ldots \quad \ldots(A)$$

आता,
$$f(x,y)=e^x\sin y \quad \therefore \quad f(0,0)=0$$
$$f_x(x,y)=e^x\sin y \quad \therefore \quad f_x(0,0)=0$$
$$f_y(x,y)=e^x\cos y \quad \therefore \quad f_y(0,0)=1$$
$$f_{xx}(x,y)=e^x\sin y \quad \therefore \quad f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{xy}(x,y)=e^x\cos y \quad \therefore \quad f_{xy}(0,0)=1$$
$$f_{yy}(x,y)=-e^x\sin y \quad \therefore \quad f_{yy}(0,0)=0$$
$$f_{xxx}(x,y)=e^x\sin y \quad \therefore \quad f_{xxx}(0,0)=0$$
$$f_{xxy}(x,y)=e^x\cos y \quad \therefore \quad f_{xxx}(0,0)=1$$
$$f_{xyy}(x,y)=-e^x\sin y \quad \therefore \quad f_{xyy}(0,0)=0$$
$$f_{yyy}(x,y)=-e^x\cos y \quad \therefore \quad f_{yyy}(0,0)=-1$$

ही सर्व मूल्ये समीकरण (A) मध्ये ठेवल्यास आपल्याला मिळते

$$f(x,y)=e^x\sin y=0+x(0)+y(1)+\frac{x^2}{2!}(0)+xy(1)+\frac{y^2}{2!}(0)$$
$$+\frac{x^3}{3!}(0)+\frac{3x^2y}{3!}(1)+\frac{3xy^2}{3!}(0)+\frac{x^3}{3!}(-1)+\ldots\ldots$$

त्यामुळे
$$e^x\sin y=y+xy+\frac{x^2y}{2}-\frac{y^3}{6}+\ldots..$$

उदाहरण 4.55: जर $f(x,y)=\tan^{-1}(xy)$ तर $f(0.9, -1.2)$ च्या अंदाजे मूल्याची गणना करा.

उकल: येथे

$$f(x,y)=\tan^{-1}(xy) \quad \therefore \quad f(1,-1)=\frac{-\pi}{4} \qquad \ldots(\text{i})$$

समजा बिंदू (1, -1) जवळ $f(x, y)$ चा विस्तार करूया.

$$\begin{aligned}f(0.9,-1.2)&=f(1-0.1,-1-0.2)\\&=f(1,-1)+[(0.1)f_x(1,-1)+(-0.2)f_y(1,-1)]\\&+\frac{1}{2!}[(-0.1)^2f_{xx}(1,-1)+(-0.2)^2f_{yy}(1,-1)]\\&+2(-0.1)(-0.2)f_{xy}(1,-1)+\ldots..\end{aligned} \qquad \ldots(\text{A})$$

समीकरण (i) वरून

$$f_x(x,y)=\frac{y}{1+x^2y^2} \quad \therefore \quad f_x(1,-1)=\frac{-1}{2} \qquad \ldots(\text{ii})$$

$$f_y(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2} \qquad \therefore \quad f_y(1,-1)=\frac{1}{2} \qquad \text{...(iii)}$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \qquad \therefore \quad f_{xx}(1,-1)=\frac{1}{2} \qquad \text{...(iv)}$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} \qquad \therefore \quad f_{yy}(1,-1)=\frac{1}{2} \qquad \text{...(v)}$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \qquad \therefore \quad f_{xy}(1,-1)=0 \qquad \text{...(vi)}$$

ही सर्व मूल्ये समीकरण (A) मध्ये ठेवल्यास आपल्याला मिळते

$$f(0.9,-1.2)=\frac{-\pi}{4}+(-0.1)\left(-\frac{1}{2}\right)+(-0.2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[(-0.1)^2\left(\frac{1}{2}\right)+2(-0.1)(-0.2)(0)+(-0.2)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right]+..... \qquad \left[\therefore \frac{\pi}{4}=0.785\right.$$

$$=-\frac{\pi}{4}+0.05-0.1+\frac{1}{2}[0.005+0.04]$$

$$=-\frac{\pi}{4}+0.05-0.1+0.0225$$

$=-0.8125$ **उत्तर.**

4.8 जॅकोबियन

प्रस्तावना

अनेक व्हेरिएबल्सचे फंक्शनच्या अभ्यासात, आपल्याला त्यांच्या डेरिव्हेटिव्ह्जचे विशेष फंक्शन म्हणून ओळखले जाते त्याला दिलेल्या फंक्शन चे फंक्शनल डिटरमिनन्ट म्हणतात. जर्मन गणितज्ञ कार्ल गुस्ताव जॅकोबी (1804-1851) यांनी फंक्शनल डिटरमिनन्टचा प्रथम अभ्यास केला गेला. या फंक्शनल डिटरमिनन्टला जॅकोबीयन म्हणतात, त्याच्या नावावरून. या विषयात आपण या डिटरमिनन्टशी आणि त्यांच्या गुणधर्मांचा विचार करू. एक जॅकोबीयनचा महत्त्वाचा अनुप्रयोग एकाधिक इंटिग्रल्सच्या व्हेरिएबल्सच्या बदलाशी संबंधित आहे.

व्याख्या जर $u_1,u_{2,}......u_n$ हे n स्वतंत्र चल $x_1,x_{2,}.......x_n$ ची फंक्शन्स असतील तर डिटरमिनन्ट

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

ला $x_1, x_{2,} \ldots\ldots x_n$ च्या संदर्भात $u_1, u_{2,} \ldots\ldots u_n$ चे जॅकोबियन म्हणतात

आणि $\frac{\partial(u_1, u_1, \ldots u_n)}{\partial(x_{1,} x_{2,} \ldots x_n)}$ चिन्हाद्वारे दर्शविले जाते. हे $J(u_1, u_{2,} \ldots\ldots u_n)$ किंवा फक्त J द्वारे देखील दर्शविले जाते जेव्हा व्हेरिएबल्सच्या संदर्भात कोणतीही अस्पष्टता नसते.

4.8.1 जॅकोबियननचे गुणधर्म

1. समजा $J_1 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ आणि $J_2 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ तर $J_1 . J_2 = 1$.

2. जर u आणि v हे s, t चे फंक्शन्स असतील, जेथे s, t हे x, y चे फंक्शन्स आहेत तर

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \times \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}$$

विशेष स्वरूप

जर $x_1, x_{2,} \ldots\ldots x_n$ व्हेरिएबल्सचे $u_1, u_{2,} \ldots\ldots u_n$ हे फंक्शन $u_1 = f_1(x_1); u_2 = f_2\ (x_1, x_2); \ldots\ldots\ u_n = f_n\ (x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ संबंधाने परिभाषित केले असेल

तर,

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots.u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots.x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$$

म्हणजेच, जॅकोबियन हा डिटरमिनन्टच्या मुख्य घटकाच्या गुणाकारामध्ये कमी करते.

3. जर u, v, w ही तीन स्वतंत्र व्हेरिएबल्स x, y, z आणि फंक्शनल रीलेटेडची फंक्शन्स असतील तर

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.56: जर $u = x + 2y + z$, $v = x - 2y + 3z$ आणि $w = 2xy - xz + 4yz - 2z^2$, ते स्वतंत्र नसल्याचे सिद्ध करा. u, v आणि w मधील संबंध शोधा.

उकल: येथे u, v आणि w स्वतंत्र नाहीत,

जर $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0 \quad \ldots(1)$$

आता, $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \ldots(2)$$

येथे $$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -2, \frac{\partial v}{\partial z} = 3$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2y - z, \frac{\partial w}{\partial y} = 2x + 4z, \frac{\partial w}{\partial z} = -x + 4y - 4z$$

(2) वरून, आपल्याकडे आहे,

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2y - z & 2x + 4z & -x + 4y - 4z \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $$C_2 \to C_2 - 2C_1, C_3 \to C_3 - C_1,$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2y - z & 2x - 4y + 6z & -x + 2y - 4z \end{vmatrix}$$

$$= -4(-x + 2y - 3z) - 2(2x - 4y + 6z)$$

$$= 4x - 8y + 12z - 4x + 8y - 12z = 0$$

म्हणून, u, v, w स्वतंत्र नाहीत

आता, $$u + v = 2x + 4z \quad \ldots(3)$$

$$u - v = 4y - 2z \quad \ldots(4)$$

(3) आणि (4), चा गुणाकार करून आपल्याला मिळते

$$(u + v)(u - v) = (2x + 4z)(4y - 2z)$$

$$u^2 - v^2 = 4(2xy + 4yz - zx - 2z^2)$$

$$\Rightarrow \qquad u^2 - v^2 = 4w$$

उदाहरण 4.57: खालील फंक्शन्स फंक्शनली संबंधित आहेत का ते सत्यापित करा आणि तसे असल्यास, संबंध शोधा

$$u = \frac{x+y}{1-xy}, v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$$

उकल: आपल्याला माहित आहे की

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \dfrac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \dfrac{1}{(1+x^2)} & \dfrac{1}{(1+y^2)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-xy)^2} - \frac{1}{(1-xy)^2} = 0$$

म्हणून, u, v फंक्शनली डिपेन्डन्ट आहेत. आता, आपल्याला माहित आहे की,

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \tan^{-1} u \text{ (दिलेले आहे)} \qquad \therefore \ u = \tan v$$

उदाहरण 4.58: जर $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तर $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ आणि $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ शोधा.

उकल: येथे

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

आणि
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

आपल्याकडे आहे
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

आता, $r^2 = x^2 + y^2$ आणि $\theta = \tan^{-1}(y/x)$

$\therefore$ $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$

आणि $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{r^2}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

$\therefore$ $\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{vmatrix}$

$$= \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

टिप्पणी: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \times \dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = r.\dfrac{1}{r} = 1$

उदाहरण 4.59: जर $x = r\sin\theta.r\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ तर दाखवा की $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\theta.$

उकल: येथे, आपल्याकडे आहे,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi$$

आणि $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \ \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \ \dfrac{\partial z}{\partial \phi} = 0$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\cos\theta(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi+r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi)+ \qquad \text{[तिसऱ्या पंक्तीने विस्तारित]}$$
$$r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\phi+r\sin^2\theta\sin^2\phi)$$

$$=r^2\sin\theta\cos^2\theta+r^2\sin^3\theta$$

$$=r^2\sin\theta$$

उदाहरण 4.60: जर $y_1=\frac{x_2x_3}{x_1},\ y_2=\frac{x_3x_1}{x_2},\ y_3=\frac{x_1x_2}{x_3}$ तर सिद्ध करा की y_1,y_2,y_3 चे जॅकोबियन x_1,x_2,x_3 हे 4 आहे.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 4.61: जर $x=r\cos\theta.\cos\phi, y=r\sin\theta\sqrt{1-m^2\sin^2\phi}, z=r\sin\ \phi\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}$ जेथे $m^2+n^2=1$

तर $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ चे जॅकोबियन शोधा.

उकल: दिलेल्या पदावलीचा वर्ग आणि बेरिज करुन, आपल्याकडे आहे,

$$x^2+y^2+z^2=r^2\cos^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin^2\theta(1-m^2\sin^2\phi)+r^2\sin^2\phi(1-n^2\sin^2\theta\ )$$

$$=r^2(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\phi+\sin^2\phi) \qquad (\because\ m^2+n^2=1)$$

$$=r^2(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi) \qquad (\because 1-\sin^2\phi=\cos^2\phi)$$

$$=r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=r^2$$

r,θ,ϕ सोबत पार्शिअल डिफरेंशिएशन करून, आपल्याला मिळते

$$x\frac{\partial x}{\partial r}+y\frac{\partial y}{\partial r}+z\frac{\partial z}{\partial r}=r \qquad \ldots(1)$$

$$x\frac{\partial x}{\partial \theta}+y\frac{\partial y}{\partial \theta}+z\frac{\partial z}{\partial \theta}=0 \qquad \ldots(2)$$

आणि $$x\frac{\partial x}{\partial \phi}+y\frac{\partial y}{\partial \phi}+z\frac{\partial z}{\partial \phi}=0 \qquad \ldots(3)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x}\begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

xR_1 आणि $(R_2y + R_2z)$ यांची बेरीज करून आणि (1) ते (3) वापरुन

$$= \frac{r}{x}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r}{x}\begin{vmatrix} r\cos\theta\sqrt{1-m^2\sin^2\phi} & \frac{-r\sin\theta.m^2\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\phi)}} \\ \frac{-r\sin\phi.n^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(1-n^2\sin^2\theta)}} & r\cos\phi\sqrt{1-n^2\sin^2\theta} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{r}{x}\left[r^2\cos\theta\cos\phi\sqrt{1-m^2\sin^2\phi}\sqrt{(1-n^2\sin^2\theta)} - \frac{m^2n^2r^2\sin^2\phi\sin^2\theta\cos\theta\cos\phi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\phi}\sqrt{(1-n^2\sin^2\theta)}}\right]$$

$$= \frac{r^3\cos\theta\cos\phi}{x}\left[\frac{(1-m^2\sin^2\phi)(1-n^2\sin^2\theta)-m^2n^2\sin^2\theta\sin^2\phi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\phi)}\sqrt{(1-n^2\sin^2\theta)}}\right]$$

$$= \left[\frac{r^2(1-m^2\sin^2\phi-n^2\sin^2\theta)}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\phi)}\sqrt{(1-n^2\sin^2\theta)}}\right] \qquad (\because m^2+n^2=1)$$

उदाहरण 4.62: जर $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ आणि $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$ तर सिद्ध करा की

$$\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} = -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3$$

उकल: आपल्याकडे आहे $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ आणि $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\sin x_1 & 0 & 0 \\ \cos x_1 \cos x_2 & -\sin x_1 \sin x_2 & 0 \\ \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3 & \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3 & -\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \end{vmatrix}$$

R_1 चा विस्तार करत, आपल्याला मिळते,

$$= -\sin x_1 [\sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3]$$

$$= -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3$$

उदाहरण 4.63: सिलेंड्रिकल कोऑर्डिनेटस मध्ये $x = \rho \cos\phi, y = \rho \sin\phi, z = z$ सिद्ध करा की $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho$

उकल: आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\phi, \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin\phi, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\phi, \frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho\cos\phi, \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \text{ आणि}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \text{ सिद्ध केले.}$$

अभ्यास 4.6

1. जर $u = \frac{y^2}{2x}, v = \frac{x^2 + y^2}{2x}$ तर $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ शोधा.

2. जर $x = a\cos u \cosh v, y = a \sin u \sinh v$ तर सिद्ध करा की $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2} a^2 (\cos 2u - \cosh h2kv)$

3. जर $u = 3x + 2y - z, v = x - 2y + z, w = x(x + 2y - z)$ तर सिद्ध करा की $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$.

4. जर $u = 2xy,\ v = x^2 - y^2, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तर $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$ शोधा.

5. जर $u = \frac{x}{y-z}, v = \frac{y}{z-x}, w = \frac{z}{x-y}$ तर सिद्ध करा की $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0$.

6. जर $x = uv,\ y = \frac{u+v}{u-v}$ तर $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ शोधा.

7. ट्रान्सफॉर्मेशनसाठी $x = e^u \cos v,\ \ y = e^u \sin v$ तर सिद्ध करा की $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \times \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$.

8. जर $x = e^v \sec u, y = e^u \tan u$ तर $JJ' = 1$ ची पडताळणी करा.

9. जर $u_1 = \frac{x_1}{n}, u_2 = \frac{x_2}{n}, \ldots, u_n = \frac{x_n}{n}$ आणि $x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = 1,$ तर $\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots u_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_n)}$ शोधा.

10. जर $u = \frac{y-x}{1+xy}$ आणि $v = \tan^{-1} y - \tan^{-1} x$ तर $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ शोधा.

11. जर $x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2, x_2 = r\sin\theta_1 \cos\theta_2, x_3 = r\cos\theta_1 \sin\theta_2, x_4 = r\cos\theta_1 \cos\theta_2$ तर सिद्ध करा की

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = r^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1$$

12. $y_1, y_2, \ldots., y_n$ असे आहेत की

$$\begin{aligned} &y_1 = x_1(1-x_2), y_2 = x_1x_2(1-x_3), \ldots., y_{n-1} = x_1x_2\ldots x_{n-1}(1-x_n) \\ &y_n = x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

तर जॅकोबियन शोधा.

13. जर $x = u(1-v), y = uv$ तर $JJ' = 1$ ची पडताळणी करा.

14. जर $x = \sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi$ तर $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} \times \frac{\partial(\theta,\phi)}{\partial(x,y)} = 1$ ची पडताळणी करा.

15. जर $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तर सिद्ध करा $\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = 4r^3.$.

उत्तरे

1. $-y/2x$ 4. $-4r^3$ 6. $\frac{(u-v)^2}{4uv}$ 9. $\frac{1}{x_n^{n-1}}$ 10. 0 12. $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots\ldots x_{n-1}.$

4.9 पुष्कळ चलांच्या फ़ंक्शनचा एक्सट्रीमा आणि मल्टीप्लायर्सची लॅग्रेन्ज पद्धत

प्रस्तावना: या विषयामध्ये, आपण एखाद्या फंक्शनची मूल्ये निश्चित करू जी सर्वात मोठी किंवा कमीत कमी आहेत. त्यांचा जवळचा परिसर, तांत्रिकदृष्ट्या त्यांना कमाल आणि किमान मूल्ये म्हणून संबोधले जाते. या मूल्यांचे ज्ञान वक्र शोधण्यात आणि सर्वात मोठे आणि निश्चित करण्यात मदत करते कोणत्याही मर्यादित मध्यांतरात फंक्शनची किमान मूल्ये.

फंक्शनची मॅक्सिमा आणि मिनिमा: फंक्शन $F(x)$ ला $x = a$, या बिंदुवर मॅक्सिमा आणि मिनिमा आहे असे म्हटले जाते जर 'a' चा एखादा लहान परिसर अस्तित्वात असेल अर्थात, जर धन संख्या ε अशी अस्तित्वात असेल, जसे की $f(x) < f(a)$ किंवा $f(x) > f(a)$, x च्या सर्व मूल्यांसाठी ज्यासाठी $0 < |(x-a)| < \varepsilon$.

टीप 1: एक्सट्रीम मूल्ये हा शब्द कमाल तसेच किमान वापरला जातो आणि बिंदू जेथे हि मूल्ये उदभवतात त्यांना एक्सट्रीम बिंदू म्हणतात

टीप 2: हे देखील लक्षात घेतले पाहिजे की $f(x)$ चे कमाल किंवा किमान मूल्य $f(a)$ सर्वात मोठे किंवा फंक्शनचे किमान मूल्य फक्त बिंदू $x = a$ च्या एका लहान परिसरामध्ये आहे. आणि $f(x)$ व्याख्येच्या संपूर्ण इंटर्वल मध्ये अपरिहार्य पणे नाही.

खरं तर, फंक्शनमध्ये अनेक कमाल आणि किमान मूल्ये असू शकतात.

स्थिर मूल्य: फंक्शन $F(x)$ हे $x = a$ वर स्थिर असल्याचे म्हटले जाते, जर डेरिव्हेटीव्ह $f'(x)$ हे $x = a$ वर नाहीसे झाले तर

म्हणजे $f'(a) = 0$ असल्यास. $F(a)$ हे मूल्य स्थिर मूल्य किंवा $f(x)$ चे वळण मूल्य असे म्हटले जाते. पद 'स्थिर' हे बदलाचा दर या वस्तुस्थितीवरून उद्भवते, $f(x)$ फंक्शनचा x संबंधित $f'(x)$ हा x च्या मूल्यासाठी शून्य आहे ज्यासाठी $f(x)$ स्थिर आहे.

हे लक्षात घेतले पाहिजे की फंक्शनचे कमाल किंवा किमान मूल्य देखील स्थिर मूल्य आहे परंतु स्थिर मूल्य कमाल किंवा किमान मूल्य असू शकत नाही. उदाहरणार्थ, फंक्शन $f(x) = (x-1)^3 + 2$ मध्ये $f(x)$ असूनही कमाल किंवा किमान $x = 1$ नाही.

या टप्प्यावर स्थिर मूल्य.

4.9.1 स्वतंत्र चलांच्या फंक्शनचा मॅक्सिमा आणि मिनिमा

अनेक स्वतंत्र चलांच्या फंक्शनच्या कमाल किंवा किमान मूल्याची व्याख्या एकाच चलांच्या फंक्शनसाठी दिल्याप्रमाणे असू शकते. अशा प्रकारे, फंक्शन $f(x, y, z, ...)$ ला $(a, b, c ......)$ बिंदूवर कमाल किंवा किमान मूल्य आहे असे म्हटले जाते जर $f(x, y, z, ...) < f(a, b, ...)$ किंवा $f(x, y, z, ...) > f(a, b, ...)$ बिंदू $(a, b, c, ...)$. च्या शेजारच्या सर्व $(x, y, z, ...)$.

4.9.1.1 दोन स्वतंत्र चलांच्या फंक्शनचा मॅक्सिमा आणि मिनिमा

दोन स्वतंत्र चलांच्या $f(x, y)$ फंक्शनला (a, b) बिंदूवर कमाल मूल्य (स्थानिक कमाल) आहे असे म्हटले जाते जर तेथे लहान धन संख्या δ अशी अस्तित्वात असेल कि $f(a+h, b+k) < f(a,b)$, h, k च्या सर्व मूल्यांसाठी जसे की $|h| < \delta, |k| < \delta$.

दोन स्वतंत्र चलांच्या $f(x, y)$ फंक्शनला (a, b) बिंदूवर किमान मूल्य (स्थानिक किमान) आहे असे म्हटले जाते जर तेथे लहान धन संख्या δ अशी अस्तित्वात असेल कि $f(a+h, b+k) > f(a,b)$, h, k च्या सर्व मूल्यांसाठी जसे की $|h| < \delta, |k| < \delta$.

आपण आता दोन स्वतंत्र चलांच्या फंक्शनच्या कमाल आणि किमान मूल्याच्या अस्तित्वासाठी अटी स्थापित करुया.

मॅक्सिमा आणि मिनिमाच्या अस्तित्वासाठी आवश्यक अटी

समजा $f(a,b)$ हे फंक्शन $f(x, y)$ चे (a,b) या बिंदूवर एक्सट्रीम (कमाल किंवा किमान) मूल्य आहे.

तर, व्याख्येनुसार $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ ने h आणि k च्या सर्व पुरेशा लहान मूल्यांसाठी निश्चित चिन्ह (किमानसाठी धन आणि कमालसाठी ऋण) संरक्षित केले पाहिजे.

आता, टेलरच्या मालिका विस्तारापासून, आपल्याकडे आहे,

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}} + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}} + ... \quad ...(1)$$

h, k पुरेसे लहान घेऊन, h, k मधील पहिल्या पदाची डिग्री $R.H.S.$ च्या चिन्हावर नियंत्रण ठेवते आणि म्हणून समीकरण (1) च्या $L.H.S$ च्या चिन्हावर नियंत्रण ठेवते.

परंतु जेव्हा h आणि k ची चिन्हे उलटी होतात तेव्हा पहिल्या पदाच्या डिग्री चे चिन्ह बदलतात. म्हणून $L.H.S.$ एक निश्चित चिन्ह जतन करू शकते, त्यासाठी हे आवश्यक आहे.

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=0 \qquad ...(2)$$

h आणि k हे अहेतुक आणि एकमेकांपासून स्वतंत्र असल्याने, आपल्याकडे असणे आवश्यक आहे

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=0 \text{ आणि } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=0$$

म्हणून, $f(x, y)$ साठी (a, b) या ठिकाणी कमाल किंवा किमान मूल्य असण्यासाठी आवश्यक अट म्हणजे, पहिल्या ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज $\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial f}{\partial y}$ बिंदू $x = a$ आणि $y = b$ साठी शून्य होणे आवश्यक आहे.

मॅक्सिमा आणि मिनिमाच्या अस्तित्वासाठी पुरेशा अटी

जर फंक्शन $f(x, y)$ साठी $\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial f}{\partial y}$ दोन्ही $x = a$ आणि $y = b$ वर शून्य झाले, तर (1) पासून, आपल्याकडे आहे.

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial f^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}+...$$

$$=\frac{1}{2!}\left(rh^2+2shk+tk^2\right)+...... \qquad ....(3)$$

जेथे, थोडक्यात, आपण ठेवले आहे

$$r=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}},\ s=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}},\ t=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}$$

h आणि k च्या पुरेशा लहान मूल्यांसाठी.

समीकरण (3) मधील $R.H.S.$ चे चिन्ह h, k च्या दुसऱ्या डिग्री पदाद्वारे नियंत्रित केले जाते आणि म्हणून $L.H.S.$

अशाप्रकारे, जर h, k च्या सर्व संभाव्य मूल्यांसाठी, $\left(rh^2+2shk+tk^2\right)$ चे चिन्ह धन असेल, तर आपल्याकडे $f(x, y)$ ची मिनिमा असेल आणि जर ती ऋण असेल तर आपल्याकडे मॅक्सिमा असेल. पदावलीचे चिन्ह $\left(rh^2+2shk+tk^2\right)$ ओळखण्यासाठी, आपण हे असे लिहितो,

$$rh^2+2shk+tk^2=\frac{1}{r}\left(r^2h^2+2rshk+rtk^2\right)$$

$$=\frac{1}{r}\left[\left(rh+sk^2\right)+\left(rt-s^2\right)k^2\right] \qquad ....(4)$$

आपल्याकडे आता खालील प्रकरणे आहेत:

1. जर $r > 0$ आणि $rt - s^2 > 0$ तर समीकरण (4) चे चिन्ह धन असेल.
2. जर $r < 0$ आणि $rt - s^2 > 0$ तर समीकरण (4) चे चिन्ह ऋण असेल.
3. जर $rt - s^2 < 0$ तर समीकरण (4) चे चिन्ह ओळखता येत नाही.
4. जर $rt - s^2 = 0$ आणि $rh + sk \neq 0$ तर समीकरण (4) चे चिन्ह धन आणि ऋण असेल जर r हा धन किंवा ऋण असेल. तथापि, $rt - s^2 = 0$ आणि $rh + sk = 0$ असल्यास, पुढील तपास आवश्यक आहे.

म्हणून, जर $r > 0$ आणि $rt - s^2 > 0$,फंक्शन $f(x, y)$ बिंदू (a, b) वर किमान असते. जर $r < 0$ आणि $rt - s^2 > 0$, फंक्शन $f(x, y)$ बिंदू (a, b) वर कमाल असते. तथापि, जर $rt - s^2 < 0$ असल्यास, फंक्शन (a, b) वर कमाल किंवा किमान नसते.

पुन्हा, जर $rt - s^2 = 0$ आणि $rh + sk \neq 0$, r चे चिन्ह फक्त फंक्शनची कमाल आणि मिनिमा ठरवेल. जर $rt - s^2 = 0$ आणि $rh + sk = 0$, तर (4) मधील दुसऱ्या डिग्रीचे पद नाहीशी होतात आणि आपण h आणि k मधील उच्च ऑर्डर च्या पदांचा विचार केला पाहिजे. वरील अटी फंक्शन चे कमाल आणि किमान मूल्य निश्चित करण्यासाठी पुरेशा अटी आहेत (याला लाग्रेंजच्या अटी देखील म्हणतात).

काम करण्याचे नियम

f(x, y) फंक्शनची मॅक्सिमा किंवा मिनिमा निर्धारित करण्यासाठी, आपण खालीलप्रमाणे पुढे जाऊ:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ शोधा आणि त्याची शुन्याबरोबर तुलना करा. x आणि y साठी ही एकसामायिक समीकरणे सोडवा.

   समजा (a_i, b_i), $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ हि मुळे आहेत. या (a_i, b_i) ला स्थिर बिंदू म्हणतात.

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ आणि $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ शोधा. $x = a_i$ आणि $y = b_i$ यांच्या किंमती ठेवा. मूल्यांच्या प्रत्येक जोडीसाठी

   $rt - s^2$

   चे मूल्य मोजा.

3. मुळांच्या जोडीसाठी जर $r > 0$ आणि $rt - s^2 > 0$ असेल, तर *f(x, y)* हे या जोडीसाठी किमान असते. $rt - s^2 > 0$ असल्यास, ते कमाल असते. जर $rt - s^2 < 0$, तर फंक्शन कमाल किंवा किमान नसते आणि त्या बिंदूला सॅडल पॉईंट म्हणतात. जर $rt - s^2 = 0$, प्रकरण अनिर्णित असते आणि दिलेल्या फंक्शन चे स्वरूप निश्चित करण्यासाठी पुढील तपास करणे आवश्यक आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.64: $(x-1)(x-2)(x-3)$ फंक्शनची कमाल आणि किमान मूल्ये शोधा.

उकल: समजा

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

मग कमाल किंवा किमान, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 12x + 11 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}},\ 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

तसेच $\quad f''(x) = 6x - 12$

स्पष्टपणे $\quad f''\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ धन आहे $f''\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ऋण आहे

म्हणून, दिलेले फंक्शन हे $2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ येथे कमाल आहे आणि $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ येथे किमान आहे. म्हणून f (x) चे

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$ हे कमाल मूल्य आहे

आणि $$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$ हे किमान मूल्य आहे.

उदाहरण 4.65: गॅस धारक एक दंडगोलाकार पात्र आहे जो शीर्षस्थानी बंद असतो आणि तळाशी उघडतो (जे पाण्यात बुडवणे), दिलेल्या मूल्यासाठी त्याची उंची आणि व्यासाचे गुणोत्तर काय असावे जेणेकरून बांधकामासाठी किमान सामग्रीची आवश्यकता असू शकते?

उकल: समजा R सिलेंड्रिकल भांड्याची त्रिज्या आणि d टाकीची खोली आहे.

समजा V टाकीची दिलेली क्षमता आहे आणि ती बांधण्यासाठी आवश्यक असलेल्या शीटचे क्षेत्रफळ A आहे

$$V = \pi R^2 d \qquad \ldots(1)$$

$\therefore \quad d = \frac{V}{\pi R^2}$

आणि $\quad A$ = पायाचे क्षेत्रफळ + सिलेंड्रिकल भिंतीचे क्षेत्र

$\Rightarrow \quad A = \pi R^2 + 2\pi R d$

किंवा $\quad A = \pi R^2 + 2\pi R . \frac{V}{\pi R^2}$

$\Rightarrow \quad A = \pi R^2 + \frac{2V}{R} \quad \Rightarrow \frac{dA}{dR} = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}$

पुन्हा $\quad \frac{d^2 A}{dR^2} = 2\pi + \frac{4V}{R^3}$

कमाल किंवा किमान साठी $\frac{dA}{dR} = 0$

$\Rightarrow \quad 2\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \quad \Rightarrow V = \pi R^3$

$$\left(\frac{d^2A}{dR^2}\right)_{V=\pi R^3} = 6\pi > 0 \text{ (किमान)}$$

त्यामुळे $$d = \frac{V}{\pi R^2} \Rightarrow d = \frac{\pi R^3}{\pi R^2}$$

$$\frac{d}{2R} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{उंची/व्यास} = \frac{d}{D} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 4.66: असे गृहीत धरुन की, मोटर बोट चालवताना पेट्रोल जळून (प्रति तास) वेगाच्या क्यूबप्रमाणे बदलते त्याचा वेग C किमी/तासाच्या प्रवाहाच्या विरूद्ध जाताना सर्वात किफायतशीर वेग शोधा.

उकल: समजा मोटर बोटीचा वेग v किमी./तास आहे. सापेक्ष बोटीचा वेग वर्तमान $(v - c)$ किमी./तास आहे. समजा एकूण d किमी अंतर कव्हर केले जाते. मग $\frac{d}{v-c}$ तास वेळ घेऊन

तसेच, आपल्याला दिलेले पेट्रोल एका तासात αv^3 एवढे जळते , जेथे α स्थिरतेचे प्रमाण असते.

$\therefore$ जर d किलोमीटरच्या आच्छादनात जळलेल्या पेट्रोलची एकूण रक्कम P असेल तर

$$P = \frac{\alpha v^3 d}{v-c}$$

$$\therefore \quad \frac{dP}{dv} = \alpha d\left[\frac{(v-c)3v^2 - v^3.1}{(v-c)^2}\right] = \frac{\alpha d(2v^3 - 3cv^2)}{(v-c)^2}$$

आणि डिफरंशिएट करून, आपल्याकडे आहे $\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{\alpha d}{(v-c)^4}\left[(v-c)^2(6v^2-6vc) - (2v^3-3cv^2).2(v-c)\right]$

$$= \frac{\alpha d}{(v-c)^3}\left[6v(v-c)^2 - 2v^2(2v-3c)\right]$$

कमाल किंवा किमान साठी $\frac{dP}{dv} = 0$

$$2v^3 - 3cv^2 = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ किंवा } \frac{3}{2}c$$

जर $v = 0$, $P = 0$, म्हणजे कोणतेही पेट्रोल जाळले नाही.

जर $V = \frac{3c}{2}, \frac{d^2P}{dv^2} =$ धन आहे. म्हणजे, P किमान आहे.

$\therefore$ पेट्रोल जळणे किमान असते जेव्हा $V = \frac{3c}{2}$, म्हणजे, $\left(\frac{3c}{2}\right)$ किमी./तास, सर्वात किफायतशीर गती आहे.

उदाहरण 4.67: फंक्शन $x^3y^2(1-x-y)$ ची कमाल किंवा किमान मूल्ये शोधा.

उकल : स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: $f(x)$ हे $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ येथे कमाल आहे आणि $\frac{1}{432}$ येथे किमान आहे.

उदाहरण 4.68: त्रिकोणामध्ये एक बिंदू असा शोधा की त्याच्या चौरसांची बेरीज तीन शिरोबिंदू पासून किमान आहे.

उकल: समजा $(x_n, y_n); n=1,2,3$ हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत आणि त्रिकोणमध्ये (x, y) कोणताही बिंदू आहे.

मग समजा $$v=\sum_{n=1}^{3}\left[(x-x_n)^2+(y-y_n)^2\right] \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$ $$\frac{\partial v}{\partial x}=\sum_{n=1}^{3}2(x-x_n)=2[(x-x_1)+(x-x_2)+(x-x_3)]$$

आणि $$\frac{\partial v}{\partial y}=\sum_{n=1}^{3}2(y-y_n)=2[(y-y_1)+(y-y_2)+(y-y_3)]$$

आणि $$r=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6, s=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=0, \text{ आणि } t=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=6$$

कमाल किंवा किमान v साठी, आपल्याकड़े आहे $\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow 2[(x-x_1)+(x-x_2)+(x-x_3)]=0$

$\Rightarrow$ $$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

आणि $$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow 2[(y-y_1)+(y-y_2)+(y-y_3)]=0$$

$\Rightarrow$ $$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

अशा प्रकारे $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, हा एकमेव बिंदू आहे ज्यावर v मॅक्सिमम किंवा मिनिमम असू शकतो.

या टप्प्यावर $r=6, s=0, t=6$ म्हणजे $rt-s^2=36$ (धन)

म्हणून बिंदूवर v चे स्थिर मूल्य $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ एक एक्सट्रिम मूल्य आहे.

परंतु $r>0$, नंतर v चे हे एक्सट्रिम मूल्य मिनिमम आहे.

अशा प्रकारे आवश्यक बिंदू $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ ज्यावर v मिनिमम आहे, याला त्रिकोणाचे केंद्र म्हणून ओळखले जाते.

उदाहरण 4.69: फंक्शन $z=x^3y^2(12-x-y)$ हे $x>0, y>0$ स्थितीचे समाधान करणारे स्थिर बिंदू शोधा आणि त्यांचे स्वरूप तपासा.

उकल: समजा

$$z = x^3 y^2 (12 - x - y) \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = x^3 y^2 (-1) + (12 - x - y) 3x^2 y^2$$

$$= 3x^2 y^2 (12 - x - y) - x^3 y^2$$

$\therefore$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = 36x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 \qquad \ldots(2)$$

तसेच, $$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 y^2 (-1) + (12 - x - y) x^3 .2y$$

$$= 24x^3 y - 2x^4 y - 2x^3 y^2 - x^3 y^2$$

किंवा $$\frac{\partial z}{\partial y} = 24x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 \qquad \ldots(3)$$

z च्या कमाल किंवा किमान मूल्यासाठी , आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$\therefore$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 36x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x^2 y^2 (36 - 4x - 3y) = 0$$

$\Rightarrow$ $$x = 0, y = 0, 4x + 3y = 36 \qquad \ldots(4)$$

तसेच $$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow 24x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 = 0$$

किंवा $$x^3 y(24 - 2x - 3y) = 0$$

तसेच $$x = 0, y = 0, \; 2x + 3y = 24 \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (4) आणि (5) वरून, आपल्याला मिळते

$$x = 0, y = 0, \; x = 6 \quad \text{आणि} \quad y = 4$$

आता $$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 72xy^2 - 12x^2 y^2 - 6xy^3 \qquad \ldots(6)$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^3 - 2x^4 - 6x^3 y \qquad \ldots(7)$$

आणि $$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(24x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2)$$

$$s = 72x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \qquad \ldots(8)$$

अशा प्रकारे, $x = 6$ आणि $y = 4$ येथे

$$r = 72\times6\times16 - 12\times(36)\times(16) - 6\times6\times64$$

$$= -2054$$

$$t = 24(216) - 2(1216) - 6(216\times4) = -2592$$

$\therefore$ $$s = 72(36)(4) - 8(216)(4) - 9(36)\times(16) = -1728$$

$\therefore$ $$rt - s^2 = (-2504)\times(-2592) - (-1728) > 0$$

म्हणून $$rt - s^2 > 0, r < 0$$

$x = 6, y = 4$ येथे आपल्याकडे कमाल आहे.

उदाहरण 4.70: फंक्शन $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ यांच्या कमाल आणि किमान ची चर्चा करा.

उकल:मॅक्सिमा आणि मिनिमाचे पॉईंट दिले आहेत,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y[\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)] = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin y[\sin(2x+y)] = 0 \qquad \ldots(1)$$

आणि $$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x[\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)] = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin x \sin(x+2y) = 0 \qquad \ldots(2)$$

ही समीकरणे सोडवताना, स्थिर बिंदू $(0,0)$ आणि $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ आहेत

आता $$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y \cos(2x+y),$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin y \cos(2x+y) + \cos y \sin(2x+y) \ = \sin(2x+2y),$$

आणि $$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\sin x \cos(x+2y),$$

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ येथे, $$r = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos(\pi) = -\sqrt{3}$$

$$s = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

आणि $$t = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\pi = -\sqrt{3}.$$

स्पष्टपणे $r<0$ आणि $rt-s^2=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}>0.$ म्हणून $f(x,y)$ हे $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ येथे कमाल आणि

$f_{\max}=\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$ हे त्याचे कमाल मूल्य आहे. $(0,0)$ वर, आपल्याला $r=1, s=t=0$ मिळते

म्हणून $rt-s^2=0$.

अशा प्रकारे या टप्प्यावर कोणताही निष्कर्ष काढता येत नाही आणि उच्च ऑर्डरच्या अटी विचारात घेणे आवश्यक आहे. तथापि, या टप्प्यावर $f(x,y)=0$, हे दिलेल्या फंक्शनचे किमान असू शकते.

उदाहरण 4.71: फंक्शन $f(x,y)=x^2+y^2+6x+12$ यांच्या कमाल आणि किमान ची चर्चा करा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: फंक्शन $f(x,y)=x^2+y^2+6x+12$ हे $x=-3$ आणि $y=0$ वर किमान आहे किमान मूल्य 3 आहे.

उदाहरण 4.72: फंक्शन $u=xy+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}$ यांच्या कमाल आणि किमान ची चर्चा करा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर : फंक्शन $f(x,y)$ हे $x=a$ आणि $y=a$ वर किमान आहे. किमान मूल्य 3a² आहे.

उदाहरण 4.73: फंक्शन $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ची यांच्या कमाल आणि किमान चाचणी अशा पॉईंट करा जो की $x^2+y^2=1$ वर्तुळावर नाही.

उकल:समजा

$$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x}=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}(-2x)+2xe^{-(x^2+y^2)}$$

$$=e^{-(x^2+y^2)}[1-(x^2+y^2)]2x$$

आणि

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-(x^2+y^2)}[1-(x^2+y^2)]2y$$

कमाल आणि किमानसाठी, आपल्याकड़े आहे

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x[1-(x^2+y^2)]e^{-(x^2+y^2)}=0$$

आणि

$$2y[1-(x^2+y^2)]e^{-(x^2+y^2)}=0$$

$$\Rightarrow \quad x=0, y=0 \text{ आणि } x^2+y^2=1$$

दिलेल्या नुसार $x^2 + y^2 = 1$ सोडल्यास, आम्ही $x = 0, y = 0$ घेतो.

म्हणून बिंदू $(0,0)$ हा फक्त स्थिर बिंदू आहे.

पुन्हा, $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r = (2-6x^2-2y^2)e^{-(x^2+y^2)} + (2x-2x^3-2xy^2)e^{-(x^2+y^2)}(-2x)$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}[4x^4-10x^2+4x^2y^2-2y^2+2]$$

आणि $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s = (-4xy)e^{-(x^2+y^2)} + (2x-2x^3-2xy^2)e^{-(x^2+y^2)}(-2y)$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}[-8xy+4x^3y+4xy^3]$$

आणि $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t = e^{-(x^2+y^2)}[(2-2x^2-10y^2-4x^2y^2+4y^4)$$

बिंदू $(0,0)$ वर $\quad r = 2, s = 0, t = 2$

$rt - s^2 = 4 > 0$, तसेच $r > 0$.

फंक्शन $\quad f(x,y)$ हे $(0,0)$ वर किमान आहे.

किमान मूल्य $\quad (0+0)e^{-0} = 0$ आहे.

उदाहरण 4.74: फंक्शन $x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ ची कमाल आणि किमान मूल्ये शोधा.

उकल: समजा

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$$

कमाल आणि किमानसाठी, आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x + y = 0 \qquad \ldots(1)$$

आणि $$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4y^3 + x - 2y = 0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) मधून (2) वजा करून, आपल्याला मिळेल

$$4(x^3 - y^3) - 3(x-y) = 0$$

$\Rightarrow \quad x - y = 0$ किंवा $4(x^2 + y^2 + xy) - 3 = 0$

म्हणून समीकरण (1) पासून, $x = y = 0$ किंवा $\pm\frac{1}{2}$, पुन्हा (1) आणि (2) जोडून, आपल्याला मिळते

$$4(x^3 + y^3) - (x+y) = 0$$

$\Rightarrow \quad x + y = 0$ किंवा $4(x^2 + y^2 - xy) = 0$

समीकरण (2) वरून आपल्याला मिळते

$$x = -y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

पुढे, आपल्याकडे, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$ आणि $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

म्हणून $rt - s^2 = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 1$

$= 3 > 0,$ जेव्हा $x = 0, y = 0$

$= 0,$ जेव्हा $x = y = \pm\frac{1}{2}$

$= 48 > 0,$ जेव्हा $x = -y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

तसेच $r = -2 < 0,$ जेव्हा $x = 0, y = 0$

$= 1 > 0,$ जेव्हा $x = y = \pm\frac{1}{2}$

$= 7 > 0,$ जेव्हा $x = -y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

म्हणून कमाल आहे, जेव्हा $x = 0, y = 0$ आणि जेव्हा $x = -y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ किमान आहे

$f(x, y)$ ची मूल्ये अनुक्रमे शून्य आणि $\frac{-9}{8}$ आहे.

जेव्हा $x = y = \pm\frac{1}{2}$ चाचणी अयशस्वी होते. या प्रकरणात, टेलर च्या हायर डिग्री टर्मच्या साहाय्याने परिणाम मिळवा.

म्हणून जेव्हा $x = y = \pm\frac{1}{2}$ असते तेव्हा किमान ते असते. ‘f’ असण्याचे किमान मूल्य $\left(\frac{-1}{8}\right)$

4.9.1.2 तीन स्वतंत्र व्हेरिएबल्सच्या फंक्शनचा मॅक्सिमा आणि मिनिमा

समजा $f(x, y, z)$ हे तीन स्वतंत्र व्हेरिएबल्सचे फंक्शन आहे आणि फंक्शन $f(a, b, c)$ हे (a,b,c) बिंदूवर एक्सट्रीम मूल्य आहे. नंतर व्याख्यानुसार $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ ने एक चिन्ह (किमान साठी धन आणि कमाल साठी ऋण) निश्चित जतन केले पाहिजे सर्व पुरेशा लहान h, k आणि l च्या मूल्यांसाठी.

आता टेलरच्या विस्तारापासून, आपल्याकडे आहे, $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$

$$= \frac{1}{2!}[Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl + 2Glh + 2Hhk] + \text{हायर ऑर्डर टर्म}$$

जेव्हा $x = a, y = b$ आणि $z = c$ वर $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ आहे

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, B=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, C=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, F=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}, G=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}, H=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$ बिंदूवर (a,b,c) .

चिन्ह ओळखण्यासाठी, आपण लिहूया

$$Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Fkl+2Glh+2Hhk$$

$$=\frac{1}{A}[A^2h^2+ABk^2+ACl^2+2AFkl+2AGlh+2AHhk]$$

$$=\frac{1}{A}[(Ah+Hk+Gl)^2+(AB-H^2)k^2+2(AF-GH)kl+(CA-G^2)l^2]$$

यात A सारखेच चिन्ह असेल, जर $AB-H^2>0$ आणि $(AB-H^2)(CA-G^2)-(AF-GH)^2>0$ म्हणजे, जर

$$AB-H^2>0 \text{ आणि } A(ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2)>0$$

आपण हे असे लिहू शकतो

$$AB-H^2=\begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}=D_1 \text{ (म्हणा)}$$

आणि

$$ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}=D_2 \text{ (म्हणा)}$$

म्हणून वरील धन पदावली असेल, जर A, D_1, D_2 सर्व धन असतील आणि ऋण असतील, जर हे वैकल्पिकरित्या ऋण आणि धन आहेत. म्हणून फंक्शन $f(x,y,z)$ किमान असेल, जर $A>0, D_1>0$ आणि $D_2>0$; आणि कमाल असेल, जर $A<0, D_1>0, D_2<0$.

काम करण्याचे नियम:

फंक्शन $u=f(x,y,z)$ मध्ये तीन स्वतंत्र व्हेरिएबल्स x, y आणि z आहेत.

1. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ शोधा आणि x, y आणि z ची मूल्ये मिळवण्यासाठी शून्याशी बरोबरी करा.

2. $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, B=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, C=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, F=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}, G=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}, H=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ शोधा.

   आता, आपल्याकडे खालील प्रकरणे आहेत:

   a. फंक्शन $u=f(x,y,z)$ हे (a,b,c) वर किमान असेल, जर पदावली A, $\begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$ हे

   (a,b,c) वर सर्व धन असेल.

b. फंक्शन $u=f(x,y,z)$ हे (a,b,c) वर किमान असेल, जर पदावली A, $\begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$

वैकल्पिकरित्या ऋण आणि धन असेल.

c. प्रकरणे (a) आणि (b) समाधानी नसल्यास, आपल्याकडे कमाल किंवा किमान नाही.

काही सोडवलेलि उदाहरणे

उदाहरण 4.75: दाखवा की फंक्शन $u = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24xyz + a^3$ ला (1, 1, 1) वर मिनिमम आणि (−1, −1, −1) वर मॅक्सिमम आहे.

उकल: दिलेले आहे,

$$u=(x+y+z)^3-3(x+y+z)-24xyz+a^3 \qquad \ldots(1)$$

तेव्हा
$$\frac{\partial u}{\partial x}=3(x+y+z)^2-3-24yz \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3(x+y+z)^2-3-24xz \qquad \ldots(3)$$

आणि
$$\frac{\partial u}{\partial z}=3(x+y+z)^2-3-24xy \qquad \ldots(4)$$

u च्या मॅक्सिमम किंवा मिनिमम साठी, आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

समीकरण (2), (3) आणि (4) वरून, आपल्याला मिळेल

$$x=y=z$$

$y = x$ आणि $z = x$ ला समीकरण (2) मध्ये ठेवल्यावर आपल्याला मिळेल

$$27x^2-3-24x^2=0$$

$\Rightarrow$ $x=\pm 1$

$\Rightarrow$ $x = y = z = 1$ आणि $x = y = z = -1$ ही समीकरण (2), (3) आणि (4) ची उकल आहे.

म्हणून (1, 1, 1) आणि (−1, −1, −1) स्थिर (Stationary point) बिंदु आहे.

आता
$$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6(x+y+z), \qquad B=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6(x+y+z)$$

$$C=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6(x+y+z), \qquad F=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=6(x+y+z)-24x$$

$$G=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=6(x+y+z)-24y, \qquad H=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6(x+y+z)-24z$$

बिन्दु $(1, 1, 1)$ साठी,

$$A = 18, B = 18, C = 18, F = -6, G = -6 \text{ आणि } H = -6$$

$\therefore$ बिन्दु $(1, 1, 1)$ वर आपल्याकडे असेल,

$$A = 18 > 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -6 & -6 \\ -6 & 18 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{vmatrix} = 3426 > 0$$

तिन्ही पदावली धन असल्याने आपल्या कडे u चे बिंदु $(1, 1, 1)$ वर मिनिमम आहे.

पुन्हा बिन्दु $(-1, -1, -1)$ साठी,

$$A = -18, B = -18, C = -18, F = 6, G = 6 \text{ आणि } H = 6$$

$\therefore$ बिन्दु $(-1, -1, -1)$ वर आपल्याकडे आहे,

$$A = -18 < 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 6 & 6 \\ 6 & -18 & 6 \\ 6 & 6 & -18 \end{vmatrix} = -3426 < 0$$

म्हणून, वरील तीन पदावली आलटून पालटून ऋण आणि धन आहेत.

म्हणून बिंदु $(-1, -1, -1)$ वर मॅक्सिमम आहे.

उदाहरण 4.76: सिद्ध करा की जास्तीत जास्त घनफळचे आयताकृती घन जे दिलेल्या गोल मध्ये कोरले जाऊ शकते तो एक घन आहे.

उकल : स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 4.77: फंक्शन $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 8x - 12y + 4$ सापेक्ष कमाल/किमान मूल्य शोधा. जर ते $x = 2, y = 3$ आणि समन्वय अक्षांनी बांधलेल्या आयताकृती क्षेत्रामध्ये आहे.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उत्तर: दिलेल्या आयताकृती क्षेत्रात बिंदू $(1, 2/3)$ वर फंक्शनचे सापेक्ष किमान मूल्य $= -12$ आहे

उदाहरण 4.78: तीन धन संख्यांची बेरीज स्थिर आहे. दाखवा की जेव्हा ते समान असतात तेव्हा त्यांचा गुणाकार जास्तीत जास्त असतो.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 4.79: संख्या 24 चे असे तीन भाग करा कि पहिल्या, दुसऱ्या संख्येचा वर्ग आणि तिसऱ्या संख्येचा घन यांचा कंटिन्यूड गुणाकार मॅक्सिमम आहे .

उकल: समजा 24 ला x, y आणि z भागांमध्ये विभागलेले आहे.

तेंव्हा $$x+y+z=24 \qquad \ldots(1)$$

दिलेले आहे , $$f(x, y, z)=x^3y^2z$$

$$\Rightarrow \quad f(x, y, z)=x^3y^2(24-x-y) \qquad \text{[समीकरण (1) वरून]}$$

तेंव्हा $$\frac{\partial f}{\partial x}=72x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=r=144xy^2-12x^2y^2-6xy^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=48x^3y-2x^4y-3x^3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=t=48x^3-2x^4-6x^3y$$

आणि $$s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=144x^2y-8x^3y-9x^2y^2$$

मॅक्सिमम किंवा मिनिमम साठी, आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow \quad (72-4x-3y)\,x^2y^2=0 \qquad \ldots(2)$$

आणि $$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \;\Rightarrow\; x^3y(48-2x-3y)=0$$

$$\Rightarrow \quad 48-2x-3y=0, x=0, y=0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) आणि (3) सोडवल्यावर आपल्याला, $x=12,\ y=8$ मिळते.

बिन्दु (12, 8) वर, आपल्याला $rt-s^2=+ve$ आणि $r<0$ मिळते, म्हणून $f(x, y)$, (12, 8) वर मॅक्सिमम आहे .

$x = 12$ आणि $y = 8$ समीकरण (1) मध्ये ठेवल्यास, आपल्याला $z = 4$ मिळते.

अशा प्रकारे, $x = 12$, $y = 8$ आणि $z = 4$, संख्या 24 विभाजित करून मिळवलेले , $f(x, y, z)$ चे मॅक्सिमम मूल्य आहे.

उदाहरण 4.80: वरून उघडलेल्या आयताकृती बॉक्सची क्षमता दिलेली आहे, अशा बॉक्सचा आकार शोधा ज्याच्या बांधकामासाठी किमान साहित्य आवश्यक आहे.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

अभ्यास 4.7

1. फंक्शन $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ चे निश्चित बिंदू शोधा आणि त्यांचे स्वरूप तपासा.
2. एक्सट्रीम मूल्यांसाठी $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^3 + 72x$ चे परीक्षण करा.

3. $f(x, y) = xye^{-(2x+3y)}$ चे मॅक्सिमम मूल्य शोधा.
4. खालीलपैकी मॅक्सिमम आणि मिनिमम चर्चा करा.

   i. $u(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$

   ii. $u(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 4y$

   iii. $f(x, y) = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x+y) + \cos(x+y)$

   iv. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$
5. दाखवा की फंक्शन $u = axy^2z^3 - x^2y^2z^3 - xy^3z^3 - 3xy^2z^4$ चा स्थिर बिंदू $a/7, 2a/7, 3a/7$ आहे, निर्धारित करा कि हे देखील एक एक्सट्रीम बिंदू आहेत.
6. $u = y^2 + 2z^2 - 5x^4 + 4x^5$ चे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य शोधा.
7. एक समभुज त्रिकोणABC अशा प्रकारे शोधा कि $u = \sin^m A \sin^n B \sin^p C$ चे मूल्य मॅक्सिमम आहे.
8. सिद्ध करा की जास्तीत जास्त घनफळच्या सिलेंडरची उंची जी त्रिज्या r मध्ये लिहिली जाऊ शकते $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ आहे.
9. $u(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ च्या पहिल्या क्वाड्रंट मध्ये त्रिकोणी प्लेटवर $x = 0$, $y = 0$ आणि $y = 9 - x$ अबसोल्यूट मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य शोधा.
10. x आणि y ची मूल्ये शोधा ज्यासाठी $x^2 + y^2 + 6x - 12 = 0$ सर्वात कमी आहे आणि ते सर्वात कमी मूल्य देखील शोधा.
11. L मीटर लांबीच्या झाडाच्या खोडाला गोलाकार शंकूच्या (Frustum) आकार असतो ज्याच्या शेवटच्या त्रिज्या असतात r_1 आणि r_2 मीटर, जेथे $r_1 > r_2$. एकसमान चौरस क्रॉस-सेक्शनच्या बीमची लांबी शोधा जी झाडाच्या खोडातून कापली जाऊ शकते जेणेकरून बीमची जास्तीत जास्त मात्रा असेल
12. वायरच्या बेलनाकार कॉइलचा विद्युत वेळ स्थिर अंदाजे $\alpha = \frac{mxyz}{ax + by + cz}$ द्वारे व्यक्त केली जाऊ शकते , जेथे z कॉइलची अक्षीय लांबी आहे, y हा बाह्य त्रिज्या आणि अंतर्गत त्रिज्या यांच्या मधील फरक आहे आणि x ही सरासरी त्रिज्या आहे; a, b, c आणि m धन स्थिरांक दर्शवतात. जर कॉईल चे घनफळ हे निश्चित असेल, x आणि y चे मूल्य शोधा जे वेळ स्थिर करते, α शक्य तितके मोठे आहे .
13. $ABCD$ एक चतुर्भुज आहे ज्यामध्ये पुन्हा प्रवेश (re-entrant) न केलेले कोन आहेत आणि P त्याच्या प्रतला त एक बिंदू आहे. P ची स्थिती शोधा ज्यासाठी शिरोबिंदूंपासून अंतरांची बेरीज किमान आहे.
14. एक समभुज त्रिकोण ΔABC मध्ये, $\cos A \cos B \cos C$ चे मॅक्सिमम मूल्य शोधा.
    [संकेत: $A + B + C = \pi$]
15. फंक्शन $u(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ परीक्षण करा कमाल किंवा किमान बिंदू ओरिजिन नाही

16. खाली दिलेल्या उदाहरणामध्ये एक्सट्रीम मूल्यांची चर्चा करा :

i. x^3+y^3+3xy

ii. $x^3+y^3-63(x+y)+12xy$

iii. $x^3y^2(1-x-y)$

iv. $x^2+2xy+2y^2+2x+y$

v. $\sin x+\sin y+\sin(x+y)$

vi. $x^3-y^2-7x^2+4y+15x-13$

vii. $x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$

17. दिलेले फंक्शन $u=\left(ax^2+by^2\right)^{-x^2-y^2}$, $a\neq b,$ चा मॅक्सिमम आणि मिनिमम चा विचार करा , जेंव्हा $a = b = 1$ झाल्यावर काय होईल?

18. दाखवा कि $(ax+by+cz)e^{-\left(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2\right)}$ चे मॅक्सिमम मूल्य $\left[\frac{1}{2e}\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\right]^{1/2}$ आहे.

उत्तरे

1. $(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right);$ z चे सर्वात कमी मूल्य आहे $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ आणि $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

2 $(4,0);112$ आणि $(6,0);108$

3. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);\frac{1}{6e^2};(0,0)$ फंक्शनचे मॅक्सिमम मूल्य बिन्दु $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ येथे आहे

4. i. $(1, 1)$ वर मिनिमम.

ii. $\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$ वर मिनिमम.

iii. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ आणि $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ वर मॅक्सिमम.

iv $(-3, 0)$ वर मिनिमम आहे आणि मिनिमम मूल्य $= 3$

5. मॅक्सिमम मूल्य $=\frac{108a^7}{7^7}$

6. मिनिमम $(1, 0, 0)$ वर ; $(0, 0, 0)$ वर मॅक्सिमम नाही आणि मिनिमम पण नाही.

7. u मॅक्सिमम जेंव्हा $=\frac{\tan A}{m}=\frac{\tan B}{n}=\frac{\tan C}{p}$

9. $(1, 1)$ वर मॅक्सिमम मूल्य $= 4$

10. $(-3, 0)$, सर्वात कमी मूल्य $= 3$

11. $\frac{8r_1^3\,l}{27(r_1-r_2)}$

13. P हा चौकोनाच्या कर्णांच्या छेदनबिंदूचा बिंदू आहे.

14. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ वर, मॅक्सिमम मूल्य = 1/8

15. (3, 2) वर मॅक्सिमम.

16.

i. (−1, −1) वर, मॅक्सिमम मूल्य = 1

ii. (−7, −7) वर, मॅक्सिमम मूल्य = 784

तसेच (3, 3) वर मिनिमम मूल्य = −216

iii. (0, 0) वर कोणतेही एक्सट्रीम मूलय नाही.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ वर, मॅक्सिमम मूल्य $= \frac{1}{432}$

iv. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ वर मिनिमम मूल्य $= -\frac{5}{4}$

v. $x = y = \frac{\pi}{3}$ वर, मॅक्सिमम

vi. (3, 2) वर मॅक्सिमम पण नाही आणि मिनिमम पन नाही.

$x = 5/3, y = 2$ वर मॅक्सिमम.

viii. $x = 0$, $y = 0$ वर, मॅक्सिमम

(3, 3), (−3, −3) आणि (1, −1)) वर मॅक्सिमम पण नाही आणि मिनिमम पन नाही.

17. मॅक्सिमम किंवा मिनिमम (0, 0) a आणि b या दोन्हीनुसार ऋणात्मक किंवा धनात्मक आहे; $b > 0$ आणि $a < b$ किंवा $b < 0$ आणि $a > b$ च्या अनुसार मॅक्सिमम किंवा मिनिमम (0, ± 1) ।, $a > 0$ आणि $b < a$ किंवा $a < 0$ आणि $b > a$ च्या अनुसार मॅक्सिमम आणि मिनिमम (± 1, 0) ।, जेंव्हा $a = b = 1$, सर्व बिंदूंवर मॅक्सिमम जिथे $x^2 + y^2 = 1$ आणि मिनिमम (0, 0) आहे

Extreme Values-I

रोचक तथ्य

- मॅक्सिमा आणि मिनिमा वापरून आढळणारे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य एकल म्हणून ओळखले जाते एक्सट्रीमा (एक्सट्रीममचे बहुवचन)
- कजाकिस्तानच्या अस्ताना येथे झालेल्या वर्ल्ड एक्स्पो 2017 मध्ये एक शिल्प प्रदर्शित करण्यात आले, ज्याचे नाव देण्यात आले मिनिमा | मॅक्सिमा, ज्याची रचना स्वतःच अद्वितीय होती.

वास्तविक जीवन उदाहरणे (मॅक्सिमा, मिनीमा आणि सॅडल पॉइंट्सचा वापर)

- औषधांची प्रभावीता / औषधांचा प्रसार / रोगांचा प्रसार (किती वेळानंतर जास्तीत जास्त कार्यक्षमता दिसून येते).
- अणुऊर्जा क्षेत्रात क्षय होण्याचा अभ्यास.
- लोकसंख्या वाढ वक्र.

- व्यवसायात, उद्योग या संकल्पनेचा वापर त्यांच्या नफ्यात जास्तीत जास्त किंवा तोटा कमी करून, वस्तूंच्या किंमतींचा अंदाज घेऊन आणि ते किती स्टॉकमध्ये ठेवतात.
- फंक्शन किंवा पृष्ठभागाचा बिंदू जो स्थिर बिंदू आहे परंतु एक्सट्रेमम नाही त्याला सॅडल पॉईंट म्हणतात. उदा. रुमाल आणि माकडांची कठडी हे काही पृष्ठभाग आहेत ज्यात सॅडल पॉईंट समाविष्ट आहेत.

4.9.2 फंक्शनच्या मॅक्सिमम आणि मिनिमम साठी अधीन असलेल्या अटी

येथे आपण एका वेगळ्या स्वरूपात अनेक व्हेरिएबल्सच्या फंक्शन्सची मॅक्सिमा आणि मिनिमा निर्धारित करण्याच्या समस्यांचा विचार करू.

समजा $$u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad ...(1)$$

n चलांचे $x_1, x_2, \ldots x_n$ फंक्शन आहे जे सर्व स्वतंत्र नाहीत, परंतु ते m ($m < n$) अटींच्या (Constraints) माध्यमातून जोडलेले आहेत.

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \phi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad ...(2)$$

म्हणून फक्त $n - m$ चल स्वतंत्र आहेत आणि समीकरण (2) मध्ये m समीकरने आणि समीकरण (1) च्या मध्ये m आश्रित चल दूर करू शकतो. अशा प्रकारे u कोणत्याही अटिशिवाय (n - m) चलांचे एक फंक्शन बनतो आणि समस्याचे उकल आता ($n - m$) स्वतंत्र चलांचे फंक्शन च्या मॅक्सिमम आणि मिनिममच्या मूल्यांकनना बरोबर आहे व्हेरिएबल्स दूर करण्याची पद्धत काहिशी गैरसोयीची आहे आणि कधीकधी ती अशक्य असते. म्हणून, आपण लाग्रेन्जची अनिर्धारित गुणक पद्धत म्हणून ओळखली जाणारी पद्धत खाली स्पष्ट करू.

4.9.3 लैग्रेंजची अनडीटरमाइंड सहगुणकांची पद्धत

u च्या मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्यांसाठी, आपल्याकडे आहे,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad ...(3)$$

जेथे डिफर्न्शियल्स $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ सर्व स्वतंत्र नाहीत, परंतु खालील समीकरनाच्या माध्यमातून जोडलेले आहेत,

$$\left.\begin{array}{l} d\phi_1 = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ d\phi_2 = \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\phi_m = \dfrac{\partial \phi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial \phi_m}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial \phi_m}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{array}\right\} \qquad ...(4)$$

जे समीकरण (2) मध्ये दिलेल्या m समीकरनाला डिफरंशिएट करून मिळविले जाते.

समीकरण (4) ला काही प्रतिबन्ध $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ने अनुक्रमे गुणाकार करून आणि समीकरण (3) सोबत बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + ... + P_n\, dx_n = 0 \qquad ...(5)$$

जेथे $$P_r = \frac{\partial f}{\partial x_r} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_r} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_r} + ... + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_r}$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ अहेतुक आहे म्हणून, त्याना अशा प्रकारे निवडले जाते की ते m समीकरनाचे समाधान करतील.

$$P_1 = P_2 = ... + P_m = 0 \qquad ...(6)$$

तर समीकरण (5) अशा प्रकारे लिहिले जाऊ शकते

$$P_{m+1}\, dx_{m+1} + P_{m+2}\, dx_{m+2} + ... + P_n\, dx_n = 0 \qquad ...(7)$$

अगोदर स्पष्ट केल्याप्रमाणे, n चलांचे $(n - m)$ स्वतंत्र आहेत (त्यांच्यापैकी कोणीही असू शकते). आपण $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ ला स्वतंत्र चल समजुया, परिणामी समीकरण (7) मध्ये $dx_{m+1}, dx_{m+2}, ..., dx_n$ चे सहगुणक स्वतंत्रपणे शून्य असायला पाहिजे. म्हणून आपल्याकडे निश्चित स्वरूपात असले पाहिजे

$$P_{m+1} = P_{m+2} = ... = P_n = 0$$

अशा प्रकारे, आपल्याला $(n + m)$ समीकरने मिळतील

$$P_1 = P_2 = ... = P_n = 0$$

तसेच $$\phi_1 = \phi_2 = ... = \phi_m = 0$$

जे m सहगुणक $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ आणि n चल $x_1, x_2, ..., x_n$ चे मूल्य निश्चित करते ज्यासाठी फंक्शन $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ चा मॅक्सिमम किवा मिनिमम मूल्य प्रतिबन्ध (2) च्या सबंधित जाणून घेते.

टिप्पणी: वरील समीकरणे जी व्हेरिएबल्सची मूल्ये निर्धारित करतात ज्यासाठी तुमच्याकडे कमाल किंवा किमान फंक्शन आहे ते सोयीस्करपणे खालीलप्रमाणे लिहिले जाऊ शकते:

समीकरण (4) ला अनुक्रमे $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ने गुणाकार करुन आणि समीकरण (3) मध्ये मिळवून, आपल्याला मिळेल,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}\right] dx_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + ... + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2}\right] dx_2 + ...$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n}\right] dx_n = 0$$

किंवा $$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad ...(A)$$

जेथे आपण फंक्शन F ला खालील पदावली द्वारे परिभाषित केले जाते

$$F = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + ... + \lambda_m \phi_m \qquad ...(B)$$

स्पष्टपणे , F हे n चलांचे $x_1, x_2, ..., x_n$ फंक्शन आहे.

स्थिरांक $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, आपल्या निवडीवर आहेत, m समीकरणे पूर्ण करण्यासाठी त्यांना निवडा

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \quad ...(C)$$

तर समीकरण (A) ला अशा प्रकारे लिहिले जाऊ शकते,

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad ...(D)$$

n चलापैकी $(n - m)$ स्वतंत्र आहेत, समजा ते $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ हे आहेत. म्हणून, समीकरण (D) मध्ये $dx_{m+1}, dx_{m+2}, ..., dx_n$ चे सह गुणक स्वतंत्रपणे शून्य असायला पाहिजेत. अशा प्रकारे आपल्याकडे असणे आवश्यक आहे,

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

म्हणून फंक्शनसाठी कमाल किंवा किमान असण्यासाठी अटी आहेत

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad ...(E)$$

जे m समीकरणांसह (2) व्हेरिएबल्सची आवश्यक मूल्ये निर्धारित करतात.

परंतु समीकरणे *(E)* ही देखील अट आहे ज्यामध्ये फंक्शन F जे n स्वतंत्र $x_1, x_2, ..., x_n$ चलाचे फंक्शन मानले जाते, कमाल किंवा किमान असण्यासाठी अशा प्रकारे $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ कमाल किंवा किमान करण्याच्या समस्येमध्ये m अटी आहेत हे (2) च्या F साठी कमाल किंवा किमान शोधन्याच्या बरोबर आहे.

काम करण्याची पद्धत: समजा $u = F(x, y, z)$ हे तीन चलांचे x, y, z फंक्शन आहे जे $\phi(x, y, z) = 0$ याने जोडलेले आहेत.

i. एका नवीन फंक्शन ला परिभाषित करा $U = F(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$

ii. $\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ आणि $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ ही समीकरने मिळवा.

iii. वरील समीकरने $\phi(x, y, z) = 0$ च्या सहित सोडवा. अशा प्रकारे x, y, z मिळविलेले मूल्य $f(x, y, z)$ चे स्थिर मूल्य होईल.

टिपण्णी : जरी लाग्रंजेची पद्धत बऱ्याचदा अनुप्रयोगांमध्ये खूप उपयुक्त असली तरीही कमतरता म्हणजे आपण स्थिर बिंदूचे स्वरूप निर्धारित करू शकत नाही. हे कधीकधी समस्यांच्या भौतिक विचारातून निश्चित केले जाऊ शकते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.81: फंक्शन $u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ मॅक्सिमम आणि मिनिममचा विचार करा, जेथे x, y, z हे त्रिकोणाचे कोन आहेत.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे,

$$u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z \qquad \ldots(1)$$

जेथे व्हेरिएबल्स खालील संबंधाने संबंधित आहेत जे आहे

$$x + y + z = \pi \qquad \ldots (2)$$

आपल्याकडे u मॅक्सिमम आणि मिनिमम साठी,

$$du = \cos x \sin y \sin z \, dx + \sin x \cos y \sin z \, dy + \sin x \sin y \cos z \, dz \qquad \ldots(3)$$

तसेच समीकरण (2) पासून,

$$dx + dy + dz = 0 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (4) ला λ ने गुणाकार करून आणि (3) मध्ये जोडून,

dx, dy, dz चे गुणांक शून्याच्या समान ठेवून, आपल्याला मिळेल

$$\cos x \sin y \sin z + \lambda = 0$$

$$\sin x \cos y \sin z + \lambda = 0$$

$$\sin x \sin y \cos z + \lambda = 0$$

या समीकरणांमधून, आपल्याला मिळेल

$$-\lambda = \cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z$$

म्हणजेच $\cot x = \cot y = \cot z$ (sinx siny sinz भाग देऊन)

म्हणजेच $x = y = z = \dfrac{\pi}{3}$, समीकरण (2) वरून

x, y, z मध्ये फक्त संबंध (2) दिला जातो म्हणून आम्ही x, y असे दोन व्हेरिएबल्स मानू शकतो इंडिपेन्डन्ट आणि z डिपेन्डन्ट म्हणून. आता मॅक्सिमम किंवा मिनिमम निश्चित करण्यासाठी, आपल्याला r, s, t, शोधावे लागेल

आपल्याला मिळेल

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ आणि } 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

समीकरण (1) वरून ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z + \sin x \sin y \cos z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \cos x \sin y \sin z - \sin x \sin y \cos z \qquad \left[\because \frac{\partial z}{\partial x} = -1\right]$$

$$= \sin y \left(\cos x \sin z - \sin x \cos z\right) = \sin y \sin(z - x)$$

आणि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin y \cos(z - x)\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = -2 \sin y \cos(z - x)$$

त्याचप्रमाणे

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \sin x \cos(z - x)$$

आता

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos y \sin(z-x) + \sin y \cos(z-x)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \cos y \sin(z-x) - \sin y \cos(z-x)$$

$$= \sin(z-x-y)$$

$x = y = z = \frac{\pi}{3}$ चे मूल्य ठेवून आपल्याला मिळेल,

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\sin\frac{\pi}{3}\cos 0 = -\sqrt{3}$$

$$t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\sin\frac{\pi}{3}\cos 0 = -\sqrt{3}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ $$rt - s^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

पण $r < 0$ आणि $rt - s^2 > 0.$

∴ $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ वर u मॅक्सिमम आहे

उदाहरण 4.82: फंक्शन $u = x^2 + y^2 + z^2$ चे मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य शोधा, जेव्हा ते $xy + yz + zx = 3a^2$ द्वारे प्रतिबंधित आहे.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \ldots(1)$$

आणि $$\phi = xy + yz + zx - 3a^2 \qquad \ldots(2)$$

लैग्रेंज च्या निर्बंधानुसार

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(xy + yz + zx - 3a^2)$$

स्टेशनरी मूल्यांसाठी, $dF = 0$

$$\left[2x + \lambda(y+z)\right]dx + \left[2y + \lambda(z+x)\right]dy + \left[2z + \lambda(x+y)\right]dz = 0$$

∴ $$2x + \lambda(y+z) = 0 \qquad \ldots(3)$$

$$2y + \lambda(z+x) = 0 \qquad \ldots(4)$$

$$2z + \lambda(x+y) = 0 \qquad \ldots(5)$$

आता, समीकरण (3) ला y द्वारे, (4) ला z द्वारे आणि (5) ला x द्वारे गुणाकार करून, आपल्याला मिळेल

$$2(xy + yz + zx) + \lambda(y^2 + yz + zx + z^2 + x^2 + yx) = 0$$

$\Rightarrow \qquad 2(3a^2)+\lambda(u+3a^2)=0 \qquad \ldots(A)$

$[\because\ xy+yz+zx=3a^2$ आणि $u=x^2+y^2+z^2]$

आता, समीकरण (3) ला x द्वारे, (4) ला y द्वारे आणि (5) ला z द्वारे गुणाकार करून, आपल्याला मिळेल

$$u=-3a^2\lambda$$

समीकरण (A) वरून

$$\Rightarrow \qquad 6a^2+\lambda\left(-3a^2\lambda+3a^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \qquad 6a^2-3a^2\lambda(\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow \qquad 2-\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1,\ 2$$

$\lambda=-\dfrac{u}{3a^2}$ मध्ये $\lambda=-1$ ठेवून आपल्याला मिळेल

$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3a^2}=1$ अर्थात $u=3a^2$ जे मॅक्सिमम मूल्य आहे

त्याचप्रमाणे $\lambda=2$, ठेवून $u=-6a^2$ आपल्याला मिळेल, जे मिनिमम मूल्य आहे

उदाहरण 4.83: फंक्शन $x^2+y^2+z^2$ चे मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य शोधा, जेव्हा ते $ax+by+cz=P$ द्वारे प्रतिबंधित आहे.

उकल: समजा कि

$$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

आणि दिले आहे

$$\phi=ax+by+cz-P \qquad \ldots(1)$$

मॅक्सिमम आणि मिनिमम च्या साठी

$$du=2xdx+2ydy+2zdz=0$$

आणि $\qquad adx+bdy+cdz=0$

म्हणून, लैग्रेंजच्या अनिर्धारित गुणकांची पद्धत वापरून,

$$2x+\lambda a=0, 2y+\lambda b=0 \text{ आणि } 2z+\lambda c=0 \qquad \ldots(2)$$

या समीकरणांना अनुक्रमे x, y, z गुणाकार करून आणि बेरीज करून, आपल्याला मिळेल,

$$2(x^2+y^2+z^2)+\lambda(ax+by+cz)=0$$

$$\Rightarrow \qquad 2u_m+\lambda P=0 \qquad \ldots(3)$$

u_m, u चे मिनिमम मूल्य दर्शवते. सर्वा सोबत (1) आणि (2) वरून, आपल्याला मिळेल

$$a\left(-\frac{\lambda a}{2}\right)+b\left(-\frac{\lambda b}{2}\right)+c\left(-\frac{\lambda c}{2}\right)=P$$

$\Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{2P}{a^2+b^2+c^2}$

ही मूल्ये समीकरण (3) मध्ये ठेवून, आपल्याला मिळेल

$$u_m = \frac{P^2}{a^2+b^2+c^2}$$

हे मिनिमम मूल्य (आणि मॅक्सिमम नाही) हे भौमितिक विचारातून पाहिले जाऊ शकते, u हा आरंभबिंदूपासून प्रतल (1) वरील बिंदूपर्यंतच्या अंतराचा वर्ग दर्शवतो. जसजसा बिंदू अनंतापासून आरंभबिंदूकडे जातो तसतसे हे अंतर कमी होते आणि पुन्हा वाढते कारण बिंदू किमान मूल्य प्राप्त केल्यानंतर दूर जातो.

उदाहरण 4.84: फंक्शन $x^2 + y^2 + z^2$ चे मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य शोधा, जेव्हा ते $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ आणि $lx + my + nz = 0$ द्वारे प्रतिबंधित आहे.

उकल: येथे

$$u = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \ldots(1)$$

आणि व्हेरिएबल्स x, y आणि z मध्ये खालील संबंध दिले

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \qquad \ldots(2)$$

आणि $\qquad lx + my + nz = 0 \qquad \ldots(3)$

मॅक्सिमम आणि मिनिमम च्या साठी

$$du = 0$$

$\Rightarrow \qquad 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0$

$\Rightarrow \qquad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \qquad \ldots(4)$

समीकरण (2) आणि (3) वरून, आपल्याला मिळेल

$$ax\,dx + by\,dy + cz\,dz = 0 \qquad \ldots(5)$$

आणि $\qquad l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0 \qquad \ldots(6)$

आता (4) ला 1, (5) ला l_1 आणि (6) ला l_2 ने गुणाकार करून, आपल्याला मिळेल

$$(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + l_1(ax\,dx + by\,dy + cz\,dz) + l_2(l\,dx + m\,dy + n\,dz) = 0$$

किंवा $\qquad (x + a\,l_1\,x + l\,l_2)dx + (y + b\,l_1\,y + m\,l_2)dy + (z + c\,l_1\,z + n\,l_2)dz = 0$

आता dx, dy, dz चे गुणांक शून्याच्या समान ठेवून , आपल्याला मिळेल

$$x + a\,l_1\,x + l\,l_2 = 0 \qquad \ldots(7)$$

$$y + b\,l_1\,y + m\,l_2 = 0 \qquad \ldots(8)$$

आणि $\qquad z + c\,l_1\,z + n\,l_2 = 0 \qquad \ldots(9)$

समीकरणे (7), (8) आणि (9) ला अनुक्रमे x, y आणि z गुणाकार करून आणि बेरीज करून आपल्याला मिळेल

$$(x^2 + y^2 + z^2) + l_1(ax^2 + by^2 + cz^2) + l_2(lx + my + nz) = 0$$

$\Rightarrow \qquad u + l_1.1 + l_2.(0) = 0$ [समीकरण (1), (2) व (3) वरून]

$\Rightarrow \qquad u = -l_1$

समीकरण (7), (8) आणि (9) मध्ये l_1 ठेवून आपल्याला मिळेल

$$x = \frac{l_2\, l}{au-1},\; y = \frac{l_2\, m}{bu-1},\; z = \frac{l_2\, n}{cu-1} \qquad \ldots(10)$$

समीकरण (3) आणि (10) वरून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{l_2\, l^2}{au-1} + \frac{l_2\, m^2}{bu-1} + \frac{l_2\, n^2}{cu-1} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{l^2}{au-1} + \frac{m^2}{bu-1} + \frac{n^2}{cu-1} = 0 \qquad \ldots(11)$$

जे $u = x^2 + y^2 + z^2$ चे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य आहे

टीप:

(i) समीकरण (11) हे u मधील एक बहुपदी आहे. त्यामुळे ते u चे दोन स्थिर मूल्ये देते.

(ii) भौमितिकदृष्ट्या, पृष्ठभाग $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ एक एलिप्सॉइड दर्शवितो ज्याचे केंद्र ओरिजिन आहे आणि $lx + my + nz = 0$ ओरिजिन मधून जाणारे प्रतल दर्शविते. बिंदु (x, y, z)हे अट (2) आणि (3) दोघांचे समाधान करते जे कोनिकवर आहे ज्यात (2) आणि (3) एकमेकांना छेदतात. या अंतराचे जास्तीत जास्त मूल्य हे या कोनिकचे मेजर अक्ष आहे आणि या अंतराचे किमान मूल्य या कोनिकचा माइनर अक्ष आहे. म्हणूनच, समीकरण (11) कोनिकच्या इंटरसेक्शन च्या अर्ध-अक्षाच्या लांबीचे चौकोन देते.

उदाहरण 4.85: फंक्शन $u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ चे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य $lx + my + nz = 0$ आणि $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ अधीन असलेली बंधने शोधा.

उकल: मॅक्सिमम आणि मिनिमम साठी F ची व्याख्या खालीलप्रमाणे करा

$$F = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda_1 (l\,x + my + nz) + \lambda_2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^4} + \lambda_1.l + \lambda_2.\frac{2x}{a^2} = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^4} + \lambda_1.m + \lambda_2.\frac{2y}{b^2} = 0 \qquad \ldots(2)$$

आणि

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2x}{c^4} + \lambda_1.n + \lambda_2.\frac{2z}{c^2} = 0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) ला x ने, (2) ला y ने आणि (3) ला z ने गुणाकार करून, जेव्हा आपण जोडतो, तेव्हा आपल्याला मिळते

$$2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\lambda_1(lx+my+nz)+2\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0$$

$$2u+\lambda_1(0)+2\lambda_2(1)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_2=-u$$

$\therefore$ समीकरण (1) हून,

$$\frac{2x}{a^4}+\lambda_1.l-\frac{2ux}{a^2}=0$$

$$\Rightarrow \qquad x=-\frac{\lambda_1 l a^4}{2(1-ua^2)}$$

त्याचप्रमाणे, $$y=-\frac{\lambda_1 m b^4}{2(1-ub^2)}$$

आणि $$z=-\frac{\lambda_1 n c^4}{2(1-uc^2)}$$

x, y, z ही मूल्ये $lx + my + nz = 0$ मध्ये ठेवल्यावर आपल्याला मिळते

$$\frac{l^2 a^4}{1-a^2u}+\frac{m^2 b^4}{1-b^2u}+\frac{n^2 c^4}{1-c^2u}=0 \qquad \ldots(4)$$

हे समीकरण u चे आवश्यक मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य देतो.

भौमितिक अर्थ: $u=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$, हा इलिप्सोईड (equation) वरील आरंभबिंदूपासून स्पर्शिका प्रतल (equation) च्या अंतराच्या वर्गाचा व्यस्त आहे.सपाट $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1$ अंतराच्या चौकोनाचा उलटा आहे. जर बिंदू (x, y, z) प्रतल $lx + my + nz = 0$ वर असेल तर स्पर्शिका प्रतल आणि इलिप्सोईडचे आरंभबिंदूपासून प्रतल $lx + my + nz = 0$ आणि इलिप्सोईडला सामाईक असलेल्या बिंदूपर्यंतच्या अंतराच्या वर्गाच्या व्यस्ताचा मॅक्सिमा किंवा मिनिमा शोधण्याचा प्रश्न आहे..

उदाहरण 4.86: लॅग्रांजची पद्धत वापरुन (अनिश्चित गुणकांची), बिंदु (1, 2, 2), $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ गोलापासून किमान अंतर शोधा

उकल : एक बिंदू (x, y, z) गोलावर आहे असे गृहीत धरा, तर त्याचे अंतर (1, 2, 2) या बिंदुपसून आहे,

$$F=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$$

साहजिकच, अंतर आणि चौरसात समान मूल्यांसाठी एक्सट्रिम मूल्ये आहेत x, y, z

समजा $$F(x, y, z)=\left\{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2\right\}+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-36\right)$$

जेथे λ गुणक आहे. F च्या स्थिर मूल्यासाठी,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \frac{\partial F}{\partial y}=0, \frac{\partial F}{\partial z}=0$$

$\therefore$ $$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad 2(x-1)+2\lambda x=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0, \quad 2(y-2)+2\lambda y=0$$

आणि $$\frac{\partial F}{\partial z}=0, \quad 2(z-2)+2\lambda z=0$$

त्यांची गणना करून आपल्याला मिळेल, $x=\frac{1}{1+\lambda}, y=\frac{2}{1+\lambda}, z=\frac{2}{1+\lambda}$. आता ही मूल्ये समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ मध्ये ठेवल्यावर, आपल्याला मिळेल

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2}+\frac{4}{(1+\lambda)^2}+\frac{4}{(1+\lambda)^2}=36$$

$\Rightarrow$ $$(1+\lambda)=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$$

म्हणूनच, बिंदू (2, 4, 4) आणि (−2, −4, -4) दरम्यानचे किमान अंतर खालीलप्रमाणे आहे,

$$=\sqrt{(1-2)^2+(2-4)^2+(2-4)^2}$$

$$=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

आणि जास्तीत जास्त मूल्य

$$=\sqrt{(1+2)^2+(2+4)^2+(2+4)^2}$$

$$=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$$

उदाहरण 4.87: जर दोन चल x आणि y संबंध $ax^2 + by^2 = ab$ संबंधित आहेत, तर ते फंक्शन दाखवा $x^2 + y^2 + xy$ चे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य संबंध $4(u-a)(u-b)=ab$ यांनी दिले आहे.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उदाहरण 4.88: फंक्शन $x^p\, y^q\, z^r$ चे प्रतिबन्ध $ax + by + cz = p + q + r$ मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य शोधा

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उदाहरण 4.89: त्या पृष्ठभागाचे मूल्य $s = 400xyz^2$ मधे कोणताही बिंदु (x, y, z) पण तापमान t आहे. तर एकक क्षेत्र $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ च्या पृष्ठभागावरील कमाल तापमान शोधा.

उकल: आपण म्हणूया $s=400xyz^2$ आणि $x^2+y^2+z^2=1$

समजा $$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$$

लॅगरेंजच्या पद्धतीनुसार, आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial s}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

$\Rightarrow$ $$400\,yz^2+\lambda(2x)=0 \qquad \ldots(1)$$

आणि $$\frac{\partial s}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$\Rightarrow$ $$400\,xz^2+\lambda(2y)=0 \qquad \ldots(2)$$

आणि $$\frac{\partial s}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

$\Rightarrow$ $$800\,xyz+\lambda(2z)=0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) ला x ने, (2) ला y ने आणि (3) ला z ने गुणाकार करून, आपल्याला मिळते

$$1600xyz^2+2\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$$

$\Rightarrow$ $$1600xyz^2+2\lambda(1)=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda=-800\,x\,y\,z^2$$

λ चे मूल्य समीकरण (1) मध्ये ठेवले जाते, तेव्हा आपल्याला मिळते,

$$400\,yz^2+2x\left(-800xyz^2\right)=0$$

$$1-4x^2=0 \qquad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{1}{2}$$

त्याचप्रमाणे $$y=\pm\frac{1}{2}$$

λ चे मूल्य समीकरण (3) मध्ये ठेवले जाते, तेव्हा आपल्याला मिळते,

$$800xyz-1600xyz^3=0$$

$$1-2z^2=0 \qquad \Rightarrow \quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

s मध्ये x, y आणि z गृहीत धरून, आपल्याला मिळते,

$$s=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=50$$

उदाहरण 4.90: सर्वात मोठ्या आयताकृती समांतरग्रामचे प्रमाण शोधा जे दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ त्यात बांधले जाऊ शकते.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा .

उदाहरण 4.91: फंक्शन $x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz$, $k \neq 2$ एक्सट्रीम मूल्य शोधा, x, y, z चे निर्बंध $x + y + z = 1$ आणि ते सिद्ध करा कि $k > 2$ किंवा $k < 2$ सममित टोकाच्या मूल्यानुसार मॅक्सिमम किंवा मिनिमम आहे.

उकल: आपल्याकड़े आहे,

$$u = x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz$$

जेथे $x + y + z = 1$

आपण असे गृहीत धरू या की लॅगरेंजच्या फंक्शन

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz + \lambda(x + y + z - 1)$$

u एक्सट्रीम मूल्यांसाठी $df = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\left(x^2 + kyz\right) + \lambda = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\left(y^2 + kxz\right) + \lambda = 0 \qquad \ldots(2)$$

आणि $$\frac{\partial f}{\partial z} = 3\left(z^2 + kxy\right) + \lambda = 0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) मधुन (2) वजा करून आपल्याला मिळते

$$(x - y)(x + y - kz) = 0$$

आणि समीकरण (1) मधुन (3) वजा करून आपल्याला मिळते

$$(x - z)(x + z - ky) = 0$$

तर एकतर

i. $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ किंवा

ii. $x = y = \dfrac{z}{k-1} = \dfrac{1}{k+1}$

iii. $x = z = \dfrac{y}{k-1} = \dfrac{1}{k+1}$ किंवा

iv. $y = z = \dfrac{x}{k-1} = \dfrac{1}{k+1}$, उकल (i) x, y, z सममित आहे, ज्यातून $u = \dfrac{1}{9}(1+k)$ मिळते; उकल (ii), (iii) आणि (iv) असममित आहेत, पण प्रत्येक बाबतीत $u = \dfrac{k^3+1}{(1+k)^3}$ ते बनवतात. हे पाहिले जाऊ शकते की जर, $k = 2$ आहे, तर एकच उकल आहे, म्हणजे, (i).

पुढे, आपल्याकडे आहे, $$d^2 f = 6\left(x\,dx^2 + y\,dy^2\right) + 6k\left(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy\right)$$

$$= 2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2x\left(dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy\right) \qquad \text{(समीकरण (1) हून)}$$

परंतु $dx + dy + dz = 0,$ सर्व $x + y + z = 1$ च्या साठी

म्हणून $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = -2\left(dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy\right)$$

आता, हे स्पष्ट आहे की $k > 2$ असल्यावर d^2f ऋणात्मक होतो आणि $k < 2$ जेव्हा ते असते, तेव्हा ते धनात्मक असते.

म्हणून, सममित स्थितीत u चे मूल्य $k > 2$ किंवा $k <2$ त्या अनुषंगाने मॅक्सिमम किंवा मिनिमम असते.

उदाहरण 4.92: $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3$ चे स्थिर बिंदु शोधा एक्सट्रीम मूल्यांसाठी फंक्शनची चाचणी करा.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उत्तर: बिंदु $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ वर कमाल मूल्य आहे आणि किमान मूल्य $-\frac{4}{37}$ आहे.

उदाहरण 4.93: $ax + by - c = 0$ या अटींच्या अधीन राहून $x^2 + y^2$ चे किमान मूल्य शोधा.

संकेत: आपण असे गृहीत धरूया की लॅगरेंजच्या फंक्शन,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(ax + by - c)$$

आता $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \lambda a = 0 \text{ आणि } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \lambda b = 0$$

सोडवून, $$x = -\frac{1}{2}a\lambda, \;\; y = -\frac{1}{2}b\lambda$$

ही मूल्ये $ax + by = c$ मध्ये ठेवल्यावर $\lambda = \frac{-2c}{a^2 + b^2}$ आपल्याला मिळते.

हा बिन्दु $\left(-\frac{a}{2}\lambda, -\frac{b}{2}\lambda\right)$ वर $(x^2 + y^2)$ चे मिनिमम मूल्य, जेथे $\lambda = \frac{-2c}{a^2 + b^2}$.

उदाहरण 4.94: फंक्शन $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + ax + by$ चे मिनिमम मूल्य, जेथे a, b अचल आहेत.

संकेत: $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + a = 0$$ (मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्यांसाठी)

आणि $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x + b = 0$$

ही समीकरणे सोडवताना, आपल्याला मिळेल

$$x = \frac{b - 2a}{3}, \; y = \frac{a - 2b}{3}$$

पुन्हा $$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

म्हणून बिंदु $\left(\frac{b-2a}{3}, \frac{a-2b}{3}\right)$ दिलेले फंक्शन किमान आणि किमान मूल्य $-\frac{3a^2 + 3b^2 - 2ab}{9}$ आहे.

उदाहरण 4.95: फंक्शन u चे मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य शोधा, जेथे $u = \frac{xyz}{(x+a)(x+y)(y+z)(z+b)}$

संकेत: दोन्ही बाजूंनी log घेऊन, आपल्याकडे आहे

$$\log u = \log x + \log y + \log z - \log(x+a) - \log(x+y) \; - \log(y+z) - \log(z+b)$$

आता, डिफरन्शियट करून, $\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a\,y-x^2}{x(x+a)(x+y)}$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz-y^2}{y(x+y)(y+z)}$$

आणि $$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{by-z^2}{z(y+z)(z+b)}$$

मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्यांसाठी

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$\Rightarrow$ $\qquad x^2=ay,\, y^2=zx,\, z^2=by$

$\Rightarrow$ $\qquad a, x, y; x, y, z$ आणि y, z, b सर्व गुणोत्तरात आहेत

$\therefore$ $\qquad a, x, y, z, b$ गुणोत्तर क्रमात आहेत.

समजा r हे सामान्य गुणोत्तर (Common ratio) आहे.

तर $\qquad b=ar^4,\, x=a\,r,\, y=a\,r^2,\, z=ar^3$

A, B, C, D, F, G, H हे जाणून घेण्यासाठी आपण ही मूल्य ठेवतो

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}=-ve,\, A<0,\, AB-H^2>0$$

म्हणून: u मॅक्सिमम आहे आणि त्याचे मॅक्सिमम मूल्य $u=\frac{1}{\left(a^{1/4}+b^{1/4}\right)^4}$ आहे.

उदाहरण 4.96: जर $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, जेथे $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ आणि $lx + my + nz = 0$ असेल, तर ते दाखवा कि u चे स्थिर मूल्य समीकरण $\frac{l^2}{a-u}+\frac{m^2}{b-u}+\frac{n^2}{c-u}=0$ चे समाधान करते.

संकेत: आपण म्हणू या $\qquad u=ax^2+by^2+cz^2,\, f=x^2+y^2+z^2-1,\, g=lx+my+nz$

$\Rightarrow$ $$\frac{\partial u}{\partial x}=2ax,\frac{\partial u}{\partial y}=2by,\frac{\partial u}{\partial z}=2cz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y,\frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

आणि $$\frac{\partial g}{\partial x}=l,\frac{\partial g}{\partial y}=m,\frac{\partial g}{\partial z}=n$$

मग, लॅगरेंजच्या गुणक पद्धतीनुसार, आपल्याकडे आहे

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial x}=0$$

$\Rightarrow$ $$2ax+2x\lambda_1+\lambda_2 l=0 \qquad \ldots(1)$$

त्याचप्रमाणे, $$2by+2y\lambda_1+\lambda_2 m=0 \qquad \ldots(2)$$

आणि $$2cz+2z\lambda_1+\lambda_2 n=0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1), (2), (3) ला अनुक्रमे x, y आणि z गुणाकार करून आणि बेरीज करून आपल्याला मिळते.

$$\lambda_1=-u$$

समीकरण (1), (2) आणि (3) मधे λ_1 गृहीत धरून, आपल्याला मिळते

$$x=-\frac{\lambda_2 l}{2(a-u)},\ y=-\frac{\lambda_2 m}{2(b-u)}\ \text{ आणि }\ z=-\frac{\lambda_2 n}{2(c-u)}$$

x, y, z ही मूल्ये $lx+my+nz=0$ मध्ये ठेवत, आपल्याला मिळते.

$$-\frac{\lambda_2 l^2}{2(a-u)}-\frac{\lambda_2 m^2}{2(b-u)}-\frac{\lambda_2 n^2}{2(c-u)}=0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{l^2}{a-u}+\frac{m^2}{b-u}+\frac{n^2}{c-u}=0$$

उदाहरण 4.97: $z^2=xy+1$ या पृष्ठभागावरील आरंभ बिंदूच्या जवळचे बिन्दु शोधा .

संकेत: समजा (x, y, z) आरंभ बिंदूजवळ एक बिंदु आहे आणि $z^2=xy+1$ ...(1)

या बिंदूचे अंतर आरंभ बिंदूपासून $s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ आहे.

$\Rightarrow$ $$f(x, y, z)=s^2=x^2+y^2+z^2$$

तर $$f(x, y, z)=x^2+y^2+xy+1 \qquad \text{समीकरण (1) वरुण}$$

आता $$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y,\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+x,\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

आणि $$s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$$

मॅक्सिमम किंवा मिनिमम साठी

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\ \text{ आणि }\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad \ldots(2)$$

$\Rightarrow$ $$2x+y=0\ \text{ आणि }\ 2y+x=0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) आणि (3) सोडउन $x=0$, $y=0$ प्राप्त होते.

येथे $r\,t - s^2 = 3\ (+\,ve)$ आणि r सुद्धा धनात्मक आहे.

$\therefore f(x, y)$, $(0, 0)$ या बिन्दुवर मिनिमम आहे. $x = 0, y = 0$ हे समीकरण (1) मध्ये ठेउन आपल्याला मिळते. $z = \pm 1$.

म्हणून, $z^2 - xy - 1 = 0$ या पृष्ठभागावरील आरंभ बिंदूच्या सर्वात जवळचे $(0, 0, \pm 1)$ हे बिंदु आहेत.

उदाहरण 4.98: अटी $ax^2 + by^2 + 2hxy = 1$ विचारात घेऊन $x^2 + y^2$ चे मॅक्सिमम आणि मिनिमम शोधून काढा.

संकेत: आपल्याकड़े आहे $\quad u = x^2 + y^2 \qquad \ldots(1)$

जेथे x, y खालील पदाशी संबंधित आहेत

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = 1 \qquad \ldots(2)$$

u च्या मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्यासाठी, $du = 0$

$$\Rightarrow \quad 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,dx + y\,dy = 0 \qquad \ldots(3)$$

आणि
$$(ax + hy)\,dx + (hx + by)\,dy = 0 \qquad \ldots(4)$$

मग, लॅगरेंजच्या गुणक पद्धतीनुसार, आपल्याकडे आहे

$$x + \lambda(ax + hy) = 0 \qquad \ldots(5)$$

आणि
$$y + \lambda(hx + by) = 0 \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (5) ला x ने आणि (6) ला y ने गुणाकार करून, आपल्याला मिळेल

$$x^2 + y^2 + \left\{\lambda\left(ax^2 + 2hxy + by^2\right)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -u$$

समीकरण (5) वरुण,
$$x - u(ax + hy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(1 - au) - huy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(a - \frac{1}{u}\right)x + hy = 0 \qquad \ldots(7)$$

आणि
$$hx + \left(b - \frac{1}{u}\right)y = 0 \qquad \ldots(8)$$

समीकरण (7) आणि (8) मधून x आणि y विलोपन करतो, तेव्हा आपल्याला मिळते

$$\begin{vmatrix} a - \frac{1}{u} & h \\ h & b - \frac{1}{u} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(a - \frac{1}{u}\right)\left(b - \frac{1}{u}\right) = h^2 \qquad \ldots(9)$$

म्हणून: $u = x^2 + y^2$ इच्छित कमाल किंवा किमान मूल्य (9) हे त्याचे मूळ आहे.

अभ्यास 4.8

1. $\left(\frac{a}{x}\right)+\left(\frac{b}{y}\right)+\left(\frac{c}{z}\right)=1$ या अटीच्या अधीन राहून, $x + y + z$ चे मिनिमम मूल्य शोधा.
2. जर $F=\frac{5xyz}{x+2y+4z}$ दिलेले आहे. x, y, z ची अशी मुल्ये शोधा की ज्यासाठी $xyz = 8$ ही अट विचारात घेऊन F, मॅक्सिमम असेल.
3. $ax + by + cz = d$ ही अट विचारात घेऊन फंक्शन $x^2 + y^2 + z^2$ चे मिनिमम मूल्य शोधा.
4. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ आणि $lx + my+ nz = 0$ या अटी विचारात घेऊन फंक्शन $u = x^2 + y^2 + z^2$ चे स्थिर मूल्य शोधा.
5. सह गुणकांची पद्धत वापरुन x, y आणि z या संख्यांचा मॅक्सिमम गुणाकार शोधा जेंव्हा $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ असते.
6. बिंदु $(1, 2, -1)$ पासून गोल $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ पर्यन्त मॅक्सिमम आणि मिनिमम अंतर शोधा.
7. खालील अटीच्या अधीन राहून $x^2 + y^2 + z^2$ च्या मॅक्सिमम आणि मिनिमम वर चर्चा करा.
   i. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$
   ii. $yz + zx + xy = 3a^2$
   iii. $x + y + z = 3a$
   iv. $xyz = a^3$
8. जर त्रिकोनाची परिमिति स्थिर असेल तर सिद्ध करा की जेंव्हा तो समभुज त्रिकोण असतो तेंव्हा त्याचे क्षेत्रफळ सर्वात जास्त असते.
9. अटी $x + y + z = 1$, $xyz = -1$ च्या अधीन राहून $x^2 + y^2 + z^2$ चे मिनिमम मूल्य शोधण्यासाठी लैग्रेंज च्या सहगुनकांची पद्धत वापरा.
10. आरंभ बिंदूपासून $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ या वक्रा पर्यंत लहान आणि सर्वात मोठे अंतर शोधा.
11. अटी $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$ च्या अधीन राहून $x^2 + y^2 + z^2$ चे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य शोधा.
12. जर $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n^2}=1$, जेथे $a_1^2 > a_2^2 > \ldots > a_n^2$, तर सिद्ध करा कि $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ चे स्थिर मूल्य $a_1^2\ a_2^2 \ldots a_n^2$ हे आहे, यांच्या पैकी सिद्ध करा की फक्त a_1^2 मॅक्सिमम आहे आणि a_n^2 मिनिमम आहे.
13. अटी $x + y + z = l$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ च्या अधीन राहून $x^a y^b z^c$ चे मॅक्सिमम मूल्य शोधा, जेथे a, b, c धन अचल आहेत.
14. दिलेल्या पाया आणि उंचीचा त्रिकोणी पिरॅमिड शोधा ज्याचा पृष्ठभाग सर्वात कमी आहे.

उत्तरे

1. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$
2. $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$ वर मॅक्सिमम

3. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ वर मिनिमम; $\frac{d}{a^2+b^2+c^2}$

4. स्थिर मूल्य $\frac{l^2}{au-1}+\frac{m^2}{bu-1}+\frac{n^2}{cu-1}=0$ आहे.

5. $3\sqrt{3}$

6. मिनिमम अंतर = $\sqrt{6}$ आणि मॅक्सिमम अंतर = $3\sqrt{6}$.

7. i. मॅक्सिमम आणि मिनिमम $\left(\frac{1}{a}-u\right)\left(\frac{1}{b}-u\right)\left(\frac{1}{c}-u\right)=0$ ची मुळे आहेत.
   ii. बिन्दु (a, a, a) वर मिनिमम मूल्य = $3a^3$
   iii. बिन्दु (a, a, a) वर मिनिमम मूल्य = $3a^3$
   iv. बिन्दु (a, a, a) वर मिनिमम मूल्य = $3a^3$

9. मिनिमम मूल्य = 3

10. लहान (Shortest) अंतर = 1, सर्वात मोठे (Lagest) अंतर = 4

11. u चे मॅक्सिमम किंवा मिनिमम मूल्य $\begin{vmatrix} a-u^{-1} & h & g \\ h & b-u^{-1} & f \\ g & f & c-u^{-1} \end{vmatrix}=0$ द्वारे दिले जाते.

12. स्थिर बिंदु द्वारे दिलेले मूल्य $\begin{vmatrix} 0 & c & b & \frac{2u}{n} \\ c & 0 & a & \frac{2u}{n} \\ b & a & 0 & \frac{2u}{n} \\ 1 & 1 & 1 & n \end{vmatrix}$, सर्वात जास्त आहे.

13. $a^a b^b c^c \left(\frac{\lambda}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$

14. अल्टीट्युड चा पायथा हा पायाचा केंद्रबिंदू आहे आणि त्रिकोणी पिरॅमिडचा किमान पृष्ठभाग (बेस वगळता) $(p^2 s^2 + \Delta^2)^{1/2}$ आहे जेथे p उंची आहे, s पायाची अर्ध-परिमिती आहे आणि D क्षेत्रफळ आहे.

मनोरंजक तथ्य

- अर्थशास्त्रात, लँगरांजे गुणक λचा विशिष्ट अर्थ आहे. जर मर्यादित संसाधनासाठी तुम्ही जास्तीत जास्त नफ्याचा विषय करत असाल, λ हे संसाधनाचे किरकोळ मूल्य आहे ज्याला सहसा संसाधनाची "छायांकित किंमत"(Shadow price) म्हणून संबोधले जाते.
- शीतपेयांच्या कंपन्यांचे अनेक डिझायनर्स ॲल्युमिनियम कमी करण्यासाठी ही संकल्पना वापरतात, तर त्यात पेयाची विशिष्ट मात्रा आहे याची खात्री करून घेतात.

दैनंदिन जीवनातील उदाहरणे

- हे फंक्शनची स्थानिक मॅक्सिमा किंवा मिनिमा शोधण्यासाठी वापरले जाते.
- अर्थशास्त्रात, या संकल्पनेचा वापर निविष्ठांच्या मूल्यातील वाढीचा विचार करून जास्तीत जास्त उत्पादन वाढवण्यासाठी केला जातो.
- हे तंत्र काही ऑप्टिमायझेशन समस्या सोडवण्यासाठी वापरले जाते: ज्यांना एक किंवा अनेक मर्यादा समानता आहेत.
- हे तंत्र SVM (सपोर्ट वेक्टर मशीन्स) मध्ये देखील वापरले जाते.
- विज्ञान, अर्थशास्त्र आणि अभियांत्रिकीमधील काही एक्सट्रीम व्हॅल्यू प्रोब्लेम्स सोडवण्यासाठी देखील याचा वापर केला जातो.
- अनेक संगणकीय प्रोग्रामिंग पद्धती, जसे की बॅरियर अँड इंटेरिअर पॉईंट पद्धत (barrier and interior point method).पेनालायझिंग अँड ऑगमेंटेड लाग्रांजें पद्धत (penalizing and augmented Lagrange method), इत्यादी, ते मूलभूत लाग्रांजें गुणक पद्धतीच्या नियमांवर विकसित केले गेले आहे.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत- NPTEL)

Lagrange Multipliers

4.10 सदिश

प्रस्तावना

हा विषय 3 डी-स्पेसमधील वेक्टर आणि वेक्टर फंक्शन्सशी संबंधित आहे आणि डिफरेंशियल कॅल्क्युलसला वेक्टर फंक्शन फोर्सेस, वेग पर्यंत विस्तारित करतो आणि इतर विविध परिमाण हे वेक्टर आहेत. यामुळे या वेक्टर फंक्शन्सचे बीजगणित आणि कॅल्क्युलस इंजिनिअर आणि भौतिकशास्त्रज्ञांसाठी यांत्रिकी, द्रव प्रवाह, उष्णता प्रवाह, इलेक्ट्रोस्टॅटिक्स इत्यादी मधील नैसर्गिक साधने बनतात. सिस्टम किंवा रोबोट्सच्या डिझाइन आणि बांधकामाचा आधार म्हणून अभियंत्याने ही क्षेत्रे समजून घेतली पाहिजेत. तीन डायमेंशनमध्ये, भौमितिक कल्पना प्रभावशाली बनतात, सिद्धांत समृद्ध करतात आणि अनेक भौमितीय परिमाण (उदाहरणार्थ, स्पर्शिका आणि नॉर्मल्स) वेक्टरद्वारे दिले जाऊ शकतात.

आपण प्रथम 3D-स्पेस मधील वैक्टरसह मूलभूत बीजगणित क्रिया स्पष्ट करुया. वेक्टर फंक्शन्सच्या चर्चेच्या पुढे वेक्टर डिफरंशिअल कॅल्क्युलस सुरू होते, जे वेक्टर फील्डचे प्रतिनिधित्व करतात आणि विविध भौतिक आणि भौमितिक अनुप्रयोग असतात. मग डिफरंशिअल कॅल्क्युलसच्या मूलभूत संकल्पना वेक्टर फंक्शन पर्यंत साध्या आणि नैसर्गिक पद्धतीने वाढवल्या जातात. वेक्टर फंक्शन्स वक्र आणि त्यांच्या मेकॅनिक्समध्ये मार्ग किंवा चल वस्तू यांच्या अनुप्रयोगाच्या अभ्यासात उपयुक्त आहेत. आपण अखेरीस स्केलर आणि वेक्टर फील्डशी संबंधित तीन भौतिक आणि भौमितिकदृष्ट्या महत्त्वाच्या संकल्पनांवर चर्चा करुया जसे की ग्रेडियंट, डायव्हर्जन्स आणि कर्ल.

4.10.1 अदिश आणि सदिश राशि

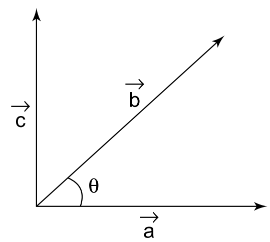
ज्या राशिमध्ये परिमाण तसेच दिशा असते त्याला सदिश म्हणतात आणि ज्या राशिमध्ये फक्त परिमाण असते आणि दिशा नसते त्याला स्केलर म्हणतात. वेक्टर अक्षराने दर्शविला जातो ज्यावर बाण आहे जसे की $\vec{a}$ आणि त्याचे परिमाण म्हणून $|\vec{a}|$ असे दर्शविले जाते. या प्रकरणत, आपण सदिशांच्या कार्याचे ज्ञान देतो.

यातील काहींचा विज्ञान आणि अभियांत्रिकी क्षेत्रात व्यापक उपयोग आहे.

4.10.2 अदिश आणि सदिश गुणाकार, कोणीय वेग (Angular Velocity)

a. **अदिश गुणाकार:** जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ दोन सदिश आहेत आणि $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन θ आहे, तर या सदिशांचा अदिश गुणाकार असा परिभाषित केला जातो

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



आकृती 4.1

b. **सदिश गुणाकार किंवा क्रॉस गुणाकार:** जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ हे दोन सदिश आहेत आणि त्यांच्यामधील कोन θ आहे

तर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ यांच्या क्रॉस प्रॉडक्ट चे परिमाण $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

असे परिभाषित केले जाते आणि त्याची दिशा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ यांना लंब असते आणि राइट हँडेड सिस्टीम बनवते.

जर $\hat{n}$ हा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ या दोन्हीला लंब असलेला एकक सदिश आहे आणि

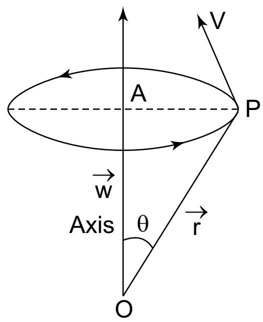
$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

c. **कोणीय वेग** (Angular Velocity)

समजा ध्रुढ वस्तु कोनीय वेग $\vec{\omega}$ ने जो एक वेक्टर आहे अक्ष OA च्या भोवती फिरत आहे.

समजा ध्रुढ वस्तुवर कोणताही बिंदु P असा आहे की,

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $AOP = \theta$ आणि $AP \perp OA$.



आकृती 4.2

समजा V हा P चा वेग आहे आणि $\hat{n}$, $\vec{\omega}$ आणि $\vec{r}$ ला लंब असलेला एक एकक सदिश आहे, तर

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = (\omega r\sin\theta)\hat{n} = (\omega\, AP)\,\hat{n}$$

= (P ची चाल) $\hat{n}$ = P चा वेग $\perp$ $\vec{\omega}$ आणि $\vec{r}$

$$\therefore\ \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

4.10.3 सदिशांचे डिफरंशिएशन

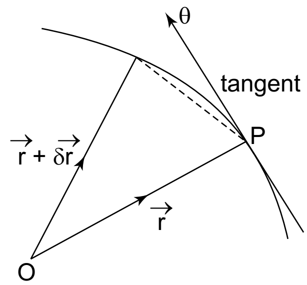
समजा O हा आरंभ बिंदु आहे आणि P ही 't' या वेळी चल कणाची स्थिती आहे.

समजा $\qquad \overrightarrow{OP} = \vec{r}$

समजा Q ही t + δt या वेळी कणाची स्थिती अशी आहे की

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{r} + \delta\vec{r}$$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\vec{r} + \delta\vec{r}\right) - \vec{r} = \delta\vec{r}$$



आकृती 4.3

$\dfrac{\delta\vec{r}}{\delta t}$ हा एक सदिश आहे. जेंव्हा $\delta t \to 0$ तेंव्हा Q हा P च्या जवळ जातो आणि जीवा PQ, P वर स्पर्शिका बनते.

आपण $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lim\limits_{\delta t \to 0} \dfrac{\delta\vec{r}}{\delta t}$ असे परिभाषित करुया, तर $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ हा P वरील स्पर्शिकेच्या दिशेने सदिश आहे. $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ला $\vec{r}$ चा t च्या

सबंधित डिफरन्शियल सह गुणक सुद्धा म्हणतात.

4.10.4 डिफरंशिएशनची सूत्रे

i. $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \dfrac{d\vec{F}}{dt} + \dfrac{d\vec{G}}{dt}$

ii. $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{F}\,\phi\right) = \dfrac{d\vec{F}}{dt}\phi + \vec{F}\,\dfrac{d\phi}{dt}$

iii. $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{F}.\vec{G}\right) = \vec{F}\,\dfrac{d\vec{G}}{dt} + \dfrac{d\vec{F}}{dt}.\vec{G}$

iv. $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{F}\times\dfrac{d\vec{G}}{dt} + \dfrac{d\vec{F}}{dt}\times\vec{G}$

4.10.5 अदिश आणि सदिश बिंदु फंक्शन (Scalar and Vector Point Functions)

i. **क्षेत्र (Field):** जर स्पेस मधील कोणत्याही क्षेत्राच्या प्रत्येक बिंदु साठी फंक्शन परिभाषित होत असेल तर, तर त्या क्षेत्राला फील्ड म्हणून ओळखले जाते.

ii. **अदिश बिंदु फंक्शन (Scalar point function):** एक फंक्शन $\phi(x, y, z)$ ला अदिश बिंदु फंक्शन असे म्हणतात जर ते एका स्केलरला अंतराळातील प्रत्येक बिंदूशी जोडते. गरम वस्तुमधील तापमान वितरण, वस्तुची घनता, वस्तुची गती ही स्केलर पॉईंट फंक्शन्सची काही उदाहरणे आहेत.

iii. **सदिश बिंदु फंक्शन (Vector point function):** जर F (x, y, z) फंक्शन एखाद्या प्रदेशातील प्रत्येक बिंदूवर वेक्टर परिभाषित करते, तर $F\,(x, y, z)$ ला वेक्टर पॉइंट फंक्शन म्हणतात. गतिमान द्रवपदार्थाचा वेग, गुरुत्वाकर्षण शक्ती ही काही वेक्टर पॉइंट फंक्शनची उदाहरणे आहेत.

4.11 सदिश डिफरन्शियल ऑपरेटर डेल म्हणजेच ∇

ऑपरेटर ∇ ला खालीलप्रमाणे परिभाषित केले जाते.

$$\nabla = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

4.11.1 ग्रेडिएन्ट (Gradient)

स्केलर पॉइंट फंक्शन ϕ चे ग्रेडियंट $\nabla\phi$ द्वारे दर्शविले जाते, आणि ग्रेडियंट ϕ असे लिहिले जाते आणि असा परिभाषित केला जातो,

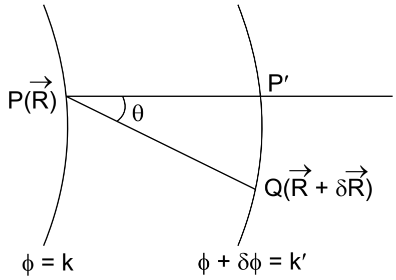
$$grad\,\phi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\phi$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)$$

हे दर्शवते की ग्रेडियंट ϕ एक वेक्टर राशी आहे.

ग्रेडियंटची भौमितिक व्याख्या

आपल्याला माहीत आहे की, $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)$



आकृती 4.4

एक लेव्हल पृष्ठभाग (ज्या पृष्ठभागावर फंक्शनचे मूल्य सारखेच राहते) $\phi(x, y, z) = k$ एक बिंदू 'P' मधून जातो ज्याच्या पोजीशन वेक्टर $\overline{R}$ आहे.

समजा दुसरा लेव्हल पृष्ठभाग $\phi + \delta\phi = k$ शेजारी पृष्ठभाग आहे जे Q मधून जाते ज्याचे पोजीशन वेक्टर $\vec{R} + \delta\vec{R}$ आहे.

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \delta\vec{R}$$

आता आपल्या कडे आहे, $\nabla\phi\,.\,\delta\vec{R} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\delta x\,\hat{i} + \delta y\,\hat{j} + \delta z\,\hat{k}\right) \qquad \left[\because \vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right]$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z$$

$$\nabla\phi\,.\,\delta\vec{R} = \delta\phi$$

आता येथे दोन स्थिति आहेत:

स्थिति I: जर Q हा त्या पृष्ठभागावर ज्यावर P आहे, तर $\delta\phi = 0 \;\Rightarrow\; \nabla\phi\,.\,\delta\vec{R} = 0$

$\therefore$ $\nabla\phi$ हा पृष्ठभागावरील प्रत्येक $\delta\vec{R}$ ला लंब आहे.

$\nabla\phi$, हा पृष्ठभागाला P वर नॉर्मल आहे.

समजा $\hat{n}$, हा पृष्ठभागाला बिन्दु P वर यूनिट नॉर्मल आहे, $\Rightarrow \; \nabla\phi = |\nabla\phi|\hat{n}$

म्हणून, $\nabla\phi$ हा एक सदिश आहे जो पृष्ठभागाला P वर नॉर्मल आहे आणि त्याचे परिमाण $|\nabla\phi|$ आहे.

स्थिति II: जर P आणि Q हे दोन वेग वेगळ्या पृष्ठभागावर आहेत.

तर, $$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \lim_{\delta n \to 0}\frac{\delta\phi}{\delta n} = \lim_{\delta n \to 0}\frac{\nabla\phi\,.\,\delta\vec{R}}{\delta n} = |\nabla\phi| \lim_{\delta n \to 0}\frac{|\delta\vec{R}|\cos\theta}{\delta n}$$

आता, $$|\delta\vec{R}|\cos\theta = PQ\cos\theta = \delta n$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = |\nabla\phi| \lim_{\delta n \to 0} \frac{|\delta\vec{R}| \cos\theta}{\delta n} = \lim_{\delta n \to 0} |\nabla\phi| \frac{\delta n}{\delta n} = |\nabla\phi|$$

म्हणून, $\nabla\phi$ परिमाण म्हणजे पृष्ठभागाच्या नॉर्मल च्या दिशेने ϕ च्या बदलाचा दर आहे.

4.11.2 ϕ चा $\overrightarrow{PQ}$ च्या दिशेने डायरेक्षणल डेरीवेटीव्ह

जर $PQ = |\delta\vec{R}|$, δr आणि $\hat{n}$ PQ च्या दिशेने यूनिट नॉर्मल वेक्टर आहेत, तर जेव्हा $\delta r \to 0$ तेंव्हा $\frac{\delta\phi}{\delta r}$ याच्या लिमीटिंग मूल्याला P वर ϕ चा PQ च्या दिशेने डायरेक्शल डेरीवेटीव्ह म्हणतात.

म्हणून $$\delta r = \frac{\delta n}{\cos\theta} = \frac{\delta n}{\hat{n}.\hat{n}'} \text{ आणि } \delta n = PP'$$

आता $$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \lim_{\delta r \to 0} \frac{\delta\phi}{\delta r} = \lim_{\delta r \to 0} \frac{\nabla\phi \,.\, \delta\vec{R}}{\delta r}$$

$$= \lim_{\delta r \to 0} \frac{|\nabla\phi|\,|\delta\vec{R}| \cos\theta}{\delta r} = \lim_{\delta r \to 0} \frac{|\nabla\phi|\, \delta r \cos\theta}{\delta r}$$

$$= \lim_{\delta r \to 0} |\nabla\phi| \cos\theta \qquad \left[\because\ \delta r = |\delta\vec{R}|\right]$$

$$= \lim_{\delta r \to 0} |\nabla\phi|\, \hat{n}.\hat{n}' = \nabla\phi.\, \hat{n}'$$

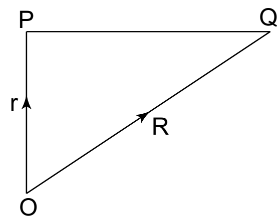
जो $\hat{n}$ च्या दिशेने ϕ चा डायरेक्शल डेरीवेटीव्ह आहे. अशा प्रकारे $\hat{n}$ च्या दिशेने ϕ चा डायरेक्शल डेरीवेटीव्ह, $\hat{n}$ च्या दिशेने $\nabla\phi$ चा उकल केलेला भाग आहे.

म्हणून $$\nabla\phi.\, \hat{n}' = |\nabla\phi| \cos\theta \le |\nabla\phi|$$

अशा प्रकारे $|\nabla\phi|$ हा $\nabla\phi$ च्या दिशेने मॅक्सिमम असतो.

4.11.3 स्पर्शिका प्रतल आणि नॉर्मल रेषा

i. **स्पर्शिका प्रतलचे समीकरण शोधण्यासाठी:** समजा स्पर्शिका प्रतल आणि दिलेला पृष्ठभाग यांचा संपर्क बिंदु P आहे. समजा Q हा स्पर्शिका प्रतलावरील कोणताही बिंदु आहे.



आकृती 4.5

समजा $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ हा P चा पोजीशन वेक्टर आहे आणि $\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ हा Q चा पोजीशन वेक्टर आहे.

तर $\overrightarrow{PQ} = \vec{R} - \vec{r} = (X-x)\hat{i} + (Y-y)\hat{j} + (Z-z)\hat{k}$ हा स्पर्शिका प्रतलावर स्थित आहे.

आता, जसे आपल्याला माहीत आहे की $grad\, f$ हा स्पर्शिका प्रतलाच्या नॉर्मल च्या दिशेने असतो.

म्हणून $\vec{R}-\vec{r}$ हा grad f ला लंब होतो.

($\because$ जर कोणती रेषा प्रतलाला लंब असेल तर प्रतलतील प्रत्येक बिंदुला लंब असते)

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ}.\nabla f = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[(X-x)\hat{i}+(Y-y)\hat{j}+(Z-z)\hat{k}\right].\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right\}=0$$

$$\Rightarrow \quad (X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

जे स्पर्शिका प्रतलाचे समीकरण P वर आहे.

ii. नॉर्मल लाइन चे समीकरण शोधन्यासाठी: समजा P हा नॉर्मल लाइन वरील कोणताही एक बिन्दु आहे ज्याचे पोजीशन वेक्टर $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ आहे.

समजा $\vec{R}=X\hat{i}+Y\hat{j}+Z\hat{k}$ पृष्ठभागाच्या नॉर्मलवरील दूसरा कोणताही बिन्दु Q चा पोजीशन वेक्टर आहे.

तर , $\overrightarrow{PQ}=\vec{R}-\vec{r}=(X-x)\hat{i}+(Y-y)\hat{j}+(Z-z)\hat{k}$ हा देखील पृष्ठभागाच्या नॉर्मलवर स्थित आहे, कारण की grad f हा पृष्ठभागाला लंब असतो.

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ}\parallel \nabla f$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ}\times\nabla f=\vec{0}$$

$$\therefore \quad (\vec{R}-\vec{r})\times\nabla f=\vec{0}$$

$$\therefore \quad \left[(X-x)\hat{i}+(Y-y)\hat{j}+(Z-z)\hat{k}\right]\times\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right\}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{i}\left[(Y-y)\frac{\partial f}{\partial z}-(Z-z)\frac{\partial f}{\partial y}\right]-\hat{j}\left[(X-x)\frac{\partial f}{\partial z}-(Z-z)\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\hat{k}\left[(X-x)\frac{\partial f}{\partial y}-(Y-y)\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\vec{0}$$

L.H.S आणि R.H.S च्या घटकांची तुलना करून, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}},\ \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} \text{ आणि } \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$\therefore$ बिन्दु P वरील नॉर्मल चे समीकरण $\dfrac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\dfrac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\dfrac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.99: $\phi(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2$ साठी $\nabla\phi$ चे मूल्य बिन्दु $(1, 1, 1)$ वर शोधा.

उकल: येथे

$$\phi = x^2y + y^2x + z^2$$

$\therefore$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + y^2, \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2xy, \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z$$

आता
$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

$\therefore$
$$\nabla\phi = (2xy + y^2)\hat{i} + (x^2 + 2xy)\hat{j} + (2z)\hat{k}$$

बिन्दु $(1, 1, 1)$ वर,
$$\nabla\phi = (2+1)\hat{i} + (1+2)\hat{j} + 2\hat{k} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

उदाहरण 4.100: जर $\phi = \log|\vec{r}|$ तर दाखवा कि $\text{grad}\phi = \frac{\vec{r}}{r^2}$

उकल: समजा

$$|\vec{r}| = r, \text{ तर } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$\Rightarrow$
$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \text{ किंवा } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

अशा प्रकारे,
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

आता
$$\text{grad}\{\log|\vec{r}|\} = grad(\log r)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(\log r) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(\log r) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(\log r)$$

$$= \hat{i}\left(\frac{1}{r}\frac{x}{r}\right) + \hat{j}\left(\frac{1}{r}\frac{y}{r}\right) + \hat{k}\left(\frac{1}{r}\frac{z}{r}\right)$$

$$= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

उदाहरण 4.101: सिद्ध करा $\nabla r^n = n r^{n/2}\vec{r}$, जेथे $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

उकल : समजा

$$r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$$

तर
$$\nabla r^n = \Sigma\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$$

$$= \sum \hat{i}\, \frac{n}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \times 2x$$

$$= \sum n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\hat{i}\, x\right) \quad = \sum n\, r^{n-2} \left(\hat{i}\, x\right)$$

$$= n\, r^{n-2} \sum \hat{i}\, x = n\, r^{n-2}\, \vec{r}$$

उदाहरण 4.102: बिंदु $(1, -2, -1)$ वर $2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$ च्या दिशेने $f = x^2yz + 4xz^2$ चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह शोधा.

उकल : $2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$ च्या दिशेने यूनिट वेक्टर आहे. $\hat{n} = \dfrac{2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}}{3}$

$$\nabla f = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz+4xz^2\right) + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz+4xz^2\right) + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2yz+4xz^2\right)$$

$$= \hat{i}\left(2xyz+4z^2\right) + \hat{j}\left(x^2z\right) + \hat{k}\left(x^2y+8xz\right)$$

म्हणून $2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$ च्या दिशेने $f = x^2yz + 4xz^2$ चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह,

$$\nabla f \,.\, \hat{n} = \frac{1}{3}\left[2\left(2xyz+4z^2\right) + \left(-x^2z\right) - 2x^2y - 16xz\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4xyz + 8z^2 - x^2z - 2x^2y - 16xz\right]$$

$$= \frac{1}{3}[8+8+1+4+16] = \frac{1}{3}[37] = \frac{37}{3}$$

उदाहरण 4.103: स्पेस मधील कोणत्याही बिंदुवरील तापमान $T = xy + yz + zx$ द्वारे दिले जाते. बिंदु $(1, 1, 1)$ वर वेक्टर $3\hat{i}-4\hat{k}$ च्या दिशेने T चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह निश्छित करा.

उकल : दिलेले आहे

$$T = xy + yz + zx$$

अशा प्रकारे
$$\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)T$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(xy+yz+zx)$$

$$= \hat{i}\,(y+z) + \hat{j}\,(z+x) + \hat{k}\,(x+y)$$

बिन्दु $(1, 1, 1)$ वर
$$\nabla T = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$3\hat{i}-4\hat{k}$ च्या दिशेने T चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह बिन्दु $(1, 1, 1)$ वर,

$$= \left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right) . \frac{3\hat{i}-4\hat{k}}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}(6-8) = -\frac{2}{5}$$

उदाहरण 4.104: वक्र $x = e^t$, $y = 2\sin t + 1$ आणि $z = t - \cos t$ च्या स्पर्शिकेच्या दिशेने बिंदु $(1, 1, -1)$ वर $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह $t = 0$ साठी शोधा.

उकल : दिलेले आहे $$f(x, y, z) = x^2y^2z^2$$

$$\therefore \quad \nabla f = 2xy^2z^2\,\hat{i} + 2x^2yz^2\,\hat{j} + 2x^2y^2z\,\hat{k}$$

$t = 0$ साठी, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0 - 1 = -1$, म्हणजेच $(1, 1, -1)$ साठी

$$\nabla f = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

पृष्ठभाग $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ चा नॉर्मल वेक्टर बिन्दु $(1, 1, -1)$ वर $2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ आहे.

आता $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = e^t\,\hat{i} + (2\sin t + 1)\,\hat{j} + (t - \cos t)\,\hat{k}$$

स्पर्शिका $$= \frac{d\vec{r}}{dt} = e^t\,\hat{i} + 2\cos t\,\hat{j} + (1 + \sin t)\,\hat{k}$$

$(1, 1, -1)$ वर स्पर्शिका म्हणजेच $t = 0$ वर $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ आहे.

स्पर्शिकेच्या दिशेने डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह आहे,

$$= \left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}\right).\frac{\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$= \frac{2+4-2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

उदाहरण 4.105: स्थिरांक a आणि b असे शोधा की बिन्दु $(1, -1, 2)$ वर पृष्ठभाग $ax^2 - byz = (a + 2)x$ हा $4x^2y + z^3 = 4$ या पृष्ठभागाला लंब असेल.

उकल: समजा

$$\phi_1 = ax^2 - byz - (a + 2)x = 0$$

आणि $$\phi_2 = 4x^2y + z^3 - 4$$

समजा n_1, n_2 पृष्ठभाग $\phi_1 = 0$ आणि $\phi_2 = 0$ याला नॉर्मल वेक्टर आहेत.

$$\vec{n_1} = \nabla\phi_1 = \hat{i}\left[2ax - (a+2)\right] + \hat{j}\left[-bz\right] + \hat{k}\left[-by\right]$$

आणि $$\vec{n_2} = \nabla\phi_2 = \hat{i}\left[8xy\right] + \hat{j}\left[4x^2\right] + \hat{k}\left[3z^2\right]$$

दिलेले पृष्ठभाग बिन्दु $(1, -1, 2)$ वर एकमेकांना लंब आहेत, म्हणून नॉर्मल $\vec{n_1}$ आणि $\vec{n_2}$ मधील कोन $90°$ आहे.

म्हणून $$\vec{n_1} \,.\, \vec{n_2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[(a-2)\hat{i} - 2b\,\hat{j} + b\hat{k}\right].\left[-8\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}\right] = 0$$

$$-8(a-2) - 2b \times 4 + 12b = 0$$

$$-8a+16+4b=0$$

$$2a-b=4 \qquad \ldots(1)$$

बिंदु $(1, -1, 2)$ पृष्ठभाग $ax^2 - byz = (a+2)x$ वर स्थित असल्यामुळे, आपल्याला मिळेल

$$a+2b=a+2 \;\Rightarrow\; b=1$$

समीकरण (1) मध्ये $b = 1$ ठेवून, आपल्याला मिळेल,

$$2a-1=4 \;\Rightarrow\; 2a=5 \;\Rightarrow\; a=5/2$$

म्हणून $\qquad a=2.5$ आणि $b=1$

उदाहरण 4.106: बिंदु $(1, -1, 3)$ वर $u = x^2 + yz^2$ सर्वात मोठा वाढीचा दर काय असेल.

उकल: दिलेले आहे

$$u = x^2 + yz^2$$

तर $\qquad \nabla u = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+yz^2\right)+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+yz^2\right)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+yz^2\right)$

$$= 2x\hat{i} + z^2\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

$= 2\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k}$, बिन्दु $(1,-1,3)$ वर

म्हणून बिन्दु $(1, -1, 3)$ वर u चा सर्वात मोठा वाढीचा दर $=|\nabla u|$

$$=\left|2\hat{i}+9\hat{j}-6\hat{k}\right| = \sqrt{4+81+36} = 11$$

उदाहरण 4.107: पृष्ठभाग $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ च्या बिंदु $(1, -1, 2)$ वर स्पर्शिका प्रतल आणि नॉर्मल चे समीकरण शोधा.

उकल : पृष्ठभागाचे समीकरण आहे

$$f(x, y, z) = 2xz^2 - 3xy - 4x - 7$$

तर $\qquad \nabla f = \left(2z^2-3y-4\right)\hat{i} - 3x\hat{j} + 4xz\hat{k}$

$= 7\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k}$, बिन्दु $(1, -1, 2)$ वर

$\therefore \qquad 7\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k}$ बिंदु $(1, -1, 2)$ वर पृष्ठभागाला नॉर्मल वेक्टर आहे.

बिंदु $(1, -1, 2)$ चा पोजीशन वेक्टर $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ आहे.

जर $\vec{R} = X\hat{i}+Y\hat{j}+Z\hat{k}$ बिन्दु $(1, -1, 2)$ वर स्पर्शिका प्रतलावरील कोणत्याही वर्तमान बिंदु (X, Y, Z) चा पोजीशन वेक्टर आहे, तर वेक्टर $\vec{R}-\vec{r}$, वेक्टर ∇f ला पर लंब आहे.

$\therefore$ स्पर्शिका प्रतलाचे समीकरण $\left(\vec{R}-\vec{r}\right).\nabla f = 0$

म्हणजेच $\qquad \left\{\left(X\hat{i}+Y\hat{j}+Z\hat{k}\right)-\left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)\right\}\left(7\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k}\right)=0$

म्हणजेच $\{(X-1)i+(Y+1)j+(Z-2)k\}(7\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k})=0$

म्हणजेच $7(X-1)-3(Y+1)+8(Z-2)=0$

बिंदु $(1, -1, 2)$ वर पृष्ठभागाच्या नॉर्मलचे समीकरण

$$\frac{X-1}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y+1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-2}{\frac{\partial f}{\partial z}} \text{ म्हणजेच } \frac{X-1}{7}=\frac{Y+1}{-3}=\frac{Z-2}{8}$$

उदाहरण 4.108: पृष्ठभाग $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ चा बिंदु $(4, 0, 3)$ वर स्पर्शिका प्रतल आणि नॉर्मलचे समीकरण शोधा.

उकल: समजा

$$f=x^2+y^2+z^2-25$$

तर $$\text{grad}f=\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=2x\hat{i}+2y\hat{j}+2z\hat{k}$$

$$=8\hat{i}+0\hat{j}+6\hat{k}=8\hat{i}+6\hat{k}$$, बिन्दु $(4, 0, 3)$ वर

तसेच $\vec{R}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k},\ \vec{r}=4\hat{i}+0\hat{j}+3\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{R}-\vec{r}=(x-4)\hat{i}+y\hat{j}+(z-3)\hat{k}$

स्पर्शिका प्रतलाचे समीकरण $(\vec{R}-\vec{r}).\text{grad}f=0$

$\Rightarrow$ $\left[(x-4)\hat{i}+y\hat{j}+(z-3)\hat{k}\right].\left[8\hat{i}+6\hat{k}\right]=0$

$\Rightarrow$ $8(x-4)+6(z-3)=0 \Rightarrow 4x+3z=25$

नॉर्मलचे समीकरण $(\vec{R}-\vec{r})\times\text{grad}\,f=\vec{0}$

$$\left[(x-4)\hat{i}+y\hat{j}+(z-3)\hat{k}\right]\times\left[8\hat{i}+6\hat{k}\right]=\vec{0} \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x-4 & y & z-3 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ $3y\hat{i}+\left[4(z-3)-3(x-4)\right]\hat{j}+(-4y)\hat{k}=0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}$

दोन्ही बाजूमधील $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ च्या सहगुनकांची तुलना, आपल्याला मिळेल

$$3y=0,\ 4(z-3)-3(x-4)=0,\ -4y=0$$

$\Rightarrow$ $y=0, \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{z-3}{3}$

नॉर्मल चे आवश्यक समीकरण आहे $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-3}{3}$

मनोरंजक तथ्य

स्पर्शिका आणि नॉर्मल यांच्यामधील संबंध हा आहे की ते एकमेकांचे ऋणात्मक व्यस्त आहेत.

दैनंदिन जीवनातील उदाहरणे

- तुमच्या लहानपणीचे दिवस आठवा. तुम्ही मेरी-गो-राउंड झुल्यावर आहात आणि बाहेरच्या दिशेने तुम्ही एका बलाचा अनुभव करत आहात. प्रत्येक बिंदूवर जी दिशा तुम्हाला बाहेर ढकलते ती या संकल्पनेद्वारे मोजली जाते.
- तुमच्याकडे एका दोरीने जोडलेला एक दगड आहे आणि तुम्ही तो आकाशात गोलाकार गतीने फिरवत आहात. विचार करा कि दोरी मध्येच तुटली, दगड बाहेरच्या दिशेने ढकलला गेला आहे आणि त्याची दिशा त्या वर्तुळाच्या स्पर्शिकेच्या बाजूने आहे.
- जर आपण एका कारमध्ये एका कोपऱ्यावरून प्रवास करत आहोत आणि रस्त्यावर काहीतरी निसरडे (जसे तेल, बर्फ, पाणी किंवा सैल रेव) आहे आणि आपली कार घसरू लागते, तर ती वक्र दिशेने स्पर्शिकेच्या दिशेने चालू राहते, जो स्पर्शिकांचा अनुप्रयोग आहे.
- जेव्हा तुम्ही कारमध्ये गोलाकार ट्रॅकभोवती वेगाने जात असाल, तेव्हा तुम्हाला जे बल बाहेरच्या दिशेने ढकलते आहे असे वाटते ते रस्त्याच्या वक्रावर नॉर्मल असते. मनोरंजक गोष्ट म्हणजे, ते बल जे तुम्हाला त्या कोपऱ्यावरून फिरवते प्रत्यक्षात वर्तुळाच्या मध्यभागाच्या दिशेने निर्देशित केले जाते, जे वर्तुळाला नॉर्मल असते, जो नॉर्मल चा अनुप्रयोग आहे.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत-NPTEL)

Tangent Planes and Normal Lines

4.11.4 डाइवर्जन्स (Divergence)

समजा $\vec{F} = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}$ हा एक वेक्टर फील्ड परिभाषित करतो तर वेक्टर फील्डचा डाइवर्जन्स $\text{div}\vec{F}$ द्वारे दर्शविले जाते आणि अशा प्रकारे परिभाषित केले जाते.

$$\text{div}\vec{F} = \nabla.\vec{F} = \hat{i}\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}$$

जर $$\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$$

तर $$\text{div}\vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

4.11.5 कर्ल (Curl)

वेक्टर पॉइंट फंक्शन $\vec{F}$ चा कर्ल (Curl) अशा प्रकारे परिभाषित केला जातो,

$$\text{curl}\,\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}\right)$$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

टिप:

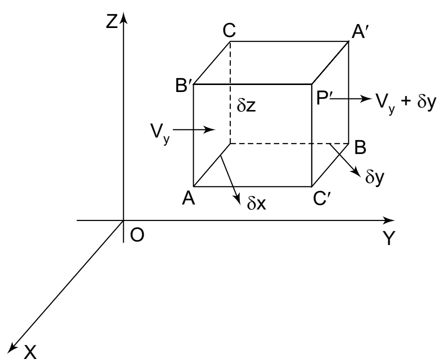
$curl\vec{F}$ ला असे देखील लिहिले जाऊ शकते.

$$\text{curl}\,\vec{F} = \sum\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i}$$

डाइवर्जन्स ची भौतिक व्याख्या

एक बिंदु P(x, y, z) वर $\vec{V} = V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k}$ वेग असलेल्या द्रवपदार्थाची गती विचारात घ्या.

P वर एक कोना असलेल्या द्रवपदार्थाच्या वस्तुमानात कडा $\delta x, \delta y, \delta z$ अक्षांना समांतर असलेल्या इष्टिकाचितीचा विचार करा.



आकृती 4.6

आता एकक वेळेमध्ये बाजू PB′ मध्ये प्रवेश करणाऱ्या द्रवाची मात्रा $= V_y\delta z\,\delta x$

आणि एकक वेळेमध्ये बाजू P′B मधून निघणाऱ्या द्रवाची मात्रा $= V_{y+\delta y}\delta z\,\delta x$.

परंतु $$V_{y+\delta y} = \left[V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}\delta y\right]$$ जवळजवळ.

बाजू मधून निघणाऱ्या द्रवाची मात्रा एकक वेळेमध्ये

$$P'B = \left[V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}\delta y\right]\delta z\,\delta x$$

या दोन बाजूमधून प्रवाहामुळे द्रवपदार्थातील शुद्ध घट $= \frac{\partial V_y}{\partial y}\delta x\delta y\,\delta z$

त्यामुळे एकक वेळेत इष्टिकाचितीच्या च्या आत द्रवपदार्थांची एकूण घट $=\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\delta x\delta y\,\delta z$

अशा प्रकारे द्रव प्रति एकक घनफळ घट होण्याचा दर

$$=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{V}$$

अशा प्रकारे $div\,\vec{V}$ अशा प्रकारचा द्रवाचा दर, एका बिंदु वर उत्पन्न प्रति एकक घनफळ असतो.

अशा प्रकारे जर $\vec{V}$ एक विद्युत प्रवाह चे प्रतिनिधित्व करतो, तर div $\vec{V}$ ती प्रवाहाची मात्रा आहे जी एकक वेळेमध्ये प्रति एकक घनफळ मध्ये विचलित करतो. जर $\vec{V}$ उष्णता प्रवाह दर्शवितो, तर $\operatorname{div}\vec{V}$ हा दर ज्या दराने उष्णता बिंदू प्रति एकक घनफळमधून जारी होतो. सर्वसाधारणपणे, जर $\vec{V}$ भौतिक राशी दर्शवते, तर दिलेल्या प्रत्येक बिंदूवर $\operatorname{div}\vec{V}$ प्रति युनिट घनफळ दर सांगते ज्यावर भौतिक राशी सोडली जात आहे. हे वेक्टर पॉइंट फंक्शनच्या नावाच्या डायव्हर्जन्सचे तर्क स्पष्ट करते.

टिप्पणी:

जर प्रत्येक ठिकाणी $\operatorname{div}\vec{V}=0$ असेल, तर अशा पॉइंट फंक्शन V ला सोलेनोइडल (solenoidal) वेक्टर म्हटले जाते.

कर्ल ची भौतिक व्याख्या

बिन्दु O द्वारे एका निश्चित अक्षाबद्दल कडक वस्तुच्या रोटेशनचा विचार करा. जर त्याचा कोनीय वेग ω असेल, तर वस्तुचा कोणताही कण $P\left(\vec{R}\right)$ चा वेग $\vec{V}$ द्वारे दिला जातो.

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{R}$$

जर $$\vec{\omega}=\omega_1\hat{i}+\omega_2\hat{j}+\omega_3\hat{k}$$

आणि $$\vec{R}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

तर $$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{R}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left(\omega_2 z-\omega_3 y\right)+\hat{j}\left(\omega_3 x-\omega_1 z\right)+\hat{k}\left(\omega_1 y-\omega_2 x\right)$$

तसेच $$\operatorname{curl}\vec{V}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_2 z-\omega_3 x & \omega_3 x-\omega_1 z & \omega_1 y-\omega_2 x\end{vmatrix}$$

$$=i\left(\omega_1+\omega_1\right)+j\left(\omega_2+\omega_2\right)+k\left(\omega_3+\omega_3\right)=2\vec{\omega}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{curl}\vec{V}$$

मग कोणत्याही बिंदूवर रोटेशनचा कोनीय वेग त्याच्या वेग वेक्टर पॉइंट फंक्शनच्या अर्ध्या कर्लच्या बरोबरीचा असतो. सर्वसाधारणपणे, कोणत्याही वेक्टर पॉइंट फंक्शनचे कर्ल वेक्टर फील्डच्या कोणत्याही बिंदूवर कोनीय वेग मोजते.

टिप्पणी:

गतीमध्ये असल्यास, वेग वेक्टर बिंदू फंक्शन $\vec{V}$ चे कर्ल शून्य आहे म्हणजे कर्ल $\vec{V}=0$ तर इरोटेशनल असे म्हटले जाते अन्यथा रोटेशनल म्हटले जाते.

4.12 ∇ द्वारे पुनरावृत्ती ऑपरेशन्स:

ग्रॅड f आणि कर्ल $\vec{F}$ वेक्टर पॉईंट फंक्शन असल्याने, आपण त्यांचे विचलन आणि कर्ल शोधू शकता, तर $div\vec{F}$ स्केलर पॉईंट फंक्शन असल्याने, आपण फक्त त्याचे ग्रेडियंट शोधू शकता.

अशा प्रकारे आपल्याकड़े खालील आयडेंटिटी आहेत.

i. $divgradf = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

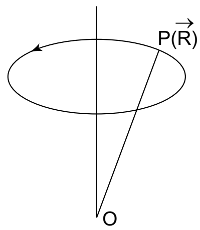
ii. $cur\lg radf = \nabla \times \nabla f = 0$

iii. $divcurl\vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$

iv. $curlcurl\vec{F} = graddiv\vec{F} - \nabla^2 \vec{F} i.e. \nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F}$

v. $graddiv\vec{F} = curlcurl\vec{F} + \nabla^2 \vec{F}$

$i.e. \nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) + \nabla^2 \vec{F}$



आकृती 4.7

प्रमान:

i. $div\ \text{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

आता $\nabla \cdot \nabla f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f \quad = \nabla^2 f$$

ii. $curl\ \text{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \sum \hat{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = 0$$

iii. $div\ \text{curl}\ \vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{F}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}\times\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j}\times\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k}\times\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right)$$

$$= \sum \hat{i}\cdot\left(\hat{i}\times\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2}\right) + \hat{i}\cdot\left(\hat{j}\times\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y}\right) + \hat{i}\cdot\left(\hat{k}\times\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z}\right)$$

$$= \sum\left[\hat{i}\times\hat{i}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \hat{i}\times\hat{j}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} + \hat{i}\times\hat{k}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z}\right]$$

$$= \sum\left(\hat{k}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} - \hat{j}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z}\right) = 0$$

iv. $curl\ curl\vec{F} = \nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)$

$$= \sum \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\times\left[\left(\hat{i}\times\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j}\times\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k}\times\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \sum \hat{i}\cdot\left(\hat{i}\times\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2}\right) + \hat{i}\cdot\left(\hat{j}\times\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y}\right) + \hat{i}\cdot\left(\hat{k}\times\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z}\right)$$

$$= \sum\left[\left(\hat{i}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\hat{i} - (\hat{i}.\hat{i})\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(\hat{i}.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)\hat{j} - (\hat{i}.\hat{j})\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\hat{i}.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\hat{k} - (\hat{i}.\hat{k})\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right]$$

$$= \sum \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{i}\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right] - \sum\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$= \sum \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{i}\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right] - \nabla^2\vec{F}$$

$$= \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F} = grad\left(div\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F}$$

v. मागील प्रश्नात, आपण सिद्ध केले

$$curlcurl\vec{F} = \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F}$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\nabla.\vec{F}\right) = curlcurl\vec{F} + \nabla^2\vec{F}$$

$$= \nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) + \nabla^2\vec{F}$$

4.13 डायव्हर्जन्स आणि कर्लची गुणधर्म

i. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

ii. $\nabla\cdot\left(f\vec{G}\right) = \nabla f\cdot\vec{G} + f\nabla\cdot\vec{G}$

iii. $\nabla\times\left(f\vec{G}\right) = \nabla f\times\vec{G} + f\nabla\times\vec{G}$

iv. $\nabla\left[\vec{F}\cdot\vec{G}\right] = \left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G} + \left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F} + \vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)$

v. $\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right)$

vi. $\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right) - \vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) + \vec{G}\cdot\nabla\vec{F} - \vec{F}.\nabla\vec{G}$

सिद्धता:

i. $$\nabla(fg) = \sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(fg)$$

$$= \sum\hat{i}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}\right\}$$

$$= \sum\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}g + \sum\hat{i}f\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$= g\sum\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} = g\nabla f + f\nabla g$$

ii. $$\nabla\cdot\left(f\vec{G}\right) = \sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(f\vec{G}\right) = \sum\hat{i}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{G} + \frac{\partial\vec{G}}{\partial x}f\right]$$

$$= \sum\left(\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{G} + \sum f\left(\sum\hat{i}\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right)$$

$$= \vec{G}\cdot\nabla f + f\nabla\cdot\vec{G}$$

iii. $$\nabla\times\left(f\vec{G}\right) = \sum\hat{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(f\vec{G}\right)$$

$$= \sum\hat{i}\times\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{G} + f\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right)$$

$$= \sum\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}\times\vec{G} + \sum i\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}f$$

$$= \nabla f\times G + f\nabla\times\vec{G}$$

iv. $$\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \sum\hat{i}\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\cdot\vec{G} + \sum\hat{i}\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}$$

असे समजू कि

$$\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)=\vec{F}\times\sum i\frac{\partial}{\partial x}\times\vec{G}$$

$$=\vec{F}\times\sum i\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}$$

$$=\sum\vec{F}\times\hat{i}\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}$$

$$=\sum\left[\left(\vec{F}.\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right)\hat{i}-\left(\vec{F}.\hat{i}\right)\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right]$$

$$\sum\hat{i}\vec{F}.\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}=\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\sum\left(\vec{F}.\hat{i}\right)\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}$$

त्याचप्रमाणे,

$$\sum\hat{i}\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}.\vec{G}=\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\sum\left(\vec{G}.\hat{i}\right)\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}$$

$$\nabla\left(\vec{F}.\vec{G}\right)=\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\sum\left(\vec{F}.\hat{i}\right)\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}+\sum\left(\vec{G}.\hat{i}\right)\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}$$

$$=\vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}$$

v. $\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\vec{G}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\vec{F}\left(\nabla\times\vec{G}\right)$

$$\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$$

$$=\sum i\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\times\vec{G}\right)+\sum i\left(\vec{F}\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right)$$

$$=\sum i\left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\times\vec{G}\right)-\sum i\left(\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\times\vec{F}\right)$$

$$=\sum\left(\hat{i}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\right)\cdot\vec{G}-\sum\left(\vec{i}\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right)\vec{F}$$

$$=\vec{G}.\left(\nabla\times\vec{F}\right)-\vec{F}.\left(\nabla\times\vec{G}\right)$$

vi. $\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\sum\hat{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$

$$=\sum\hat{i}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\times\vec{G}+\sum\hat{i}\times\vec{F}\times\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}$$

$$= \sum\left(\hat{i}.\vec{G}\right)\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} - \left(\hat{i}.\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\right)\vec{G} + \left(\hat{i}\frac{\partial \vec{G}}{\partial x}\right)\vec{F} - \left(i.\vec{F}\right)\frac{\partial \vec{G}}{\partial x}$$

$$= \nabla\vec{F}\cdot\vec{G} - \left(\nabla\cdot\vec{F}\right)\vec{G} + \left(\nabla\cdot\vec{G}\right)\vec{F} - \nabla\vec{G}\cdot\vec{F}$$

$$= \vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right) - \vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) + \vec{G}.\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\nabla.\vec{G}\right)$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 4.109: जर $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ आणि $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

तर सिद्ध करा $i.\ \nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2\vec{R}}{r^4}$ $ii.\ div\left(r^n\vec{R}\right) = (3+n)r^n$

$iii.\ \nabla\left(\frac{\nabla.\vec{R}}{r}\right) = \frac{-3}{r^3}\vec{R}$

उकल:

i. $$\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = \sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \sum\hat{i}\frac{-2}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$= -2\sum\hat{i}\frac{1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -2\sum\hat{i}\frac{1}{r^3}\frac{x}{r} = -2\sum\hat{i}\frac{x}{r^4}$$

$$= \frac{-2}{r^4}\sum(ix) = \frac{-2}{r^4}\vec{R}$$

ii. $$div\left(r^n\vec{R}\right) = r^n\nabla.\vec{R} + \nabla r^n.\vec{R}$$

$$= r^n\sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + \nabla r^n.\vec{R}$$

$$= r^n\sum i.i + \nabla r^n\vec{R}$$

$$= r^n\sum 1 + \left(\nabla r^n\right)\vec{R}$$

$$= 3r^n + \left(\nabla r^n\right).\vec{R}$$

आता $\nabla r^n = \sum\hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(r^n\right)$

$$= inr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \sum \hat{i} nr^{n-1}.\frac{x}{r}$$

$$= \sum nr^{n-2}\hat{i}x$$

$$= nr^{n-2}\sum \hat{i}x$$

$$= nr^{n-2}\vec{R}$$

$$div\left(r^n\vec{R}\right) = 3r^n + nr^{n-2}\vec{R}.\vec{R}$$

$$= 3r^n + nr^{n-2}\times r^2$$

$$= (3+n)r^n$$

iii. $$\nabla\left(\frac{\nabla.R}{r}\right) = \nabla\left[\frac{\sum \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)}{r}\right]$$

$$= \nabla\left[\frac{3}{r}\right] = 3\nabla\left[\frac{1}{r}\right] = 3\left[\sum \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$= 3\sum \hat{i}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \frac{-3}{r^2}\sum\frac{\hat{i}x}{r} = \frac{-3}{r^3}\sum \hat{i}x$$

$$= \frac{-3}{r^3}\vec{R}$$

उदाहरण 4.110: जर $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ आणि $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ दाखवा की $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$.

उकल : येथे, आपल्याकडे आहे

$$\nabla^2 f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left[f(r)\right]\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= f'(r)\frac{x}{r} = \frac{f'(r)}{r}.x$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f'(r).x}{r}\right]$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + x.\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + x.\frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2}.\frac{x}{r}$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r^3}\left[rf''(r) - f'(r)\right]$$

त्याचप्रमाणे $$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} = \frac{f'(r)}{r} + \frac{y^2}{r^3}\left[rf''(r) - f'(r)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{f'(r)}{r} + \frac{z^2}{r^3}\left[rf''(r) - f'(r)\right]$$

अशा प्रकारे

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{3f'(r)}{r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}\left[rf''(r) - f'(r)\right]$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + \frac{1}{r}\left[rf''(r) - f'(r)\right]$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + f''(r) - \frac{f'(r)}{r}$$

$$= f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$$

उदाहरण 4.111: div (grad r^n) $= n(n+1)r^{n-2}$ सिद्ध करा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$\text{grad}\, r^n = \nabla r^n = nr^{n-2}\vec{R}$$

$$\text{div (grad } r^n) = div(gradr^n) = \nabla.(nr^{n-2}\vec{R})$$

$$= n\left[(\nabla r^{n-2}).\vec{R} + r^{n-2}\nabla.\vec{R}\right]$$

$$= n\left[(n-2)\left(r^{n-4}\right)\vec{R}.\vec{R} + r^{n-2}\nabla.\vec{R}\right]$$

$$= n(n-2)\left(r^{n-4}.r^2\right) + nr^{n-2}.3$$

$$= nr^{n-2}(n-2+3) = n(n+1)r^{n-2}$$

उदाहरण 4.112: सिद्ध करा $\vec{A}.\nabla\vec{B}.\nabla\frac{1}{r} = \frac{3\left(\vec{A}.\vec{R}\right)\left(\vec{B}.\vec{R}\right)}{r^3} - \frac{\vec{A}.\vec{B}}{r^3}$, जेथे $\vec{A}$ आणि $\vec{B}$

स्थिर वेक्टर आणि $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ आहेत

उकल: आपल्याकडे

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^3}\vec{R} \quad \text{आहे}$$

$$\vec{B}.\nabla\frac{1}{r}=\frac{-\vec{B}.\vec{R}}{r^3}$$

$$\nabla\left(\vec{B}.\nabla\frac{1}{r}\right)=-\nabla\left[\frac{1}{r^3}\left(\vec{B}.\vec{R}\right)\right]$$

$$=-\left[\sum\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\vec{B}.\vec{R}\right)\right]$$

$$=-\sum\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3}\vec{B}.\vec{R}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{B}.\vec{R}\right)\right]$$

$$=\sum\hat{i}\left[\left(\frac{-3}{r^4}.\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\vec{B}.\vec{R}\right)+\frac{1}{r^3}\left(\vec{B}.\vec{i}\right)\right]$$

$$\left[\because\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{B}.\vec{R}\right)=\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\vec{R}=\vec{B}\frac{\partial\vec{R}}{\partial x}=\vec{B}\hat{i}\right]$$ ($\vec{B}$ स्थिर वेक्टर)

$$=-\sum\hat{i}\left[\frac{x}{r}\left(\frac{-3}{r^4}\right)\left(\vec{B}.\vec{R}\right)+\frac{1}{r^3}\left(\vec{B}.\hat{i}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{r^5}\sum\hat{i}x(\vec{B}.\vec{R})-\frac{1}{r^3}\sum\left(\vec{B}.\hat{i}\right)\vec{i}$$

$$=\frac{3}{r^5}\vec{R}\left(\vec{B}.\vec{R}\right)-\frac{1}{r^3}\vec{B}$$

$$\vec{A}\left[\nabla.\left(\vec{B}.\frac{1}{r}\right)\right]=\frac{3}{r^5}(\vec{A}.\vec{R})(\vec{B}.\vec{R})-\frac{\vec{A}.\vec{B}}{r^3}$$

उदाहरण 4.113: जर r हे ओरिजिन आणि बिंदू (x, y, z) पासून चे अंतर असेल तर सिद्ध करा कि

$$\text{curl}\left[k\times grad\frac{1}{r}\right]+grad\left[\hat{k}.grad\frac{1}{r}\right]=0$$ येथे k हे z-अक्ष च्या दिशेने एक युनिट वेक्टर आहे.

उकल: ज्या अर्थी r हे ओरिजिन आणि बिंदू (x, y, z) पासून चे अंतर आहे $r^2=x^2+y^2+z^2$

$$\text{grad}\ \frac{1}{r}=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=\sum\hat{i}\left(\frac{-1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$=\sum\hat{i}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r}=-\sum\hat{i}\frac{x}{r^3}=\frac{-\vec{R}}{r^3}$$

$$k \times grad\,\frac{1}{r} = \frac{-\hat{k} \times \vec{R}}{r^3} = -\frac{\hat{k} \times \left[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right]}{r^3}$$

$$= -\left[\frac{x\hat{j} - y\hat{i}}{r^3}\right] = \frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{r^3}$$

$$\text{curl}\left[k \times grad\,\frac{1}{r}\right] = \nabla \times \left[\frac{\hat{i}y - \hat{j}x}{r^3}\right]$$

$$= \nabla \times \left[\frac{1}{r^3}\left(\hat{i}y - \hat{j}x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^3}(\nabla \times \left(y\hat{i} - x\hat{j}\right)) + \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \left(y\hat{i} - x\hat{j}\right)$$

परंतु $$\nabla \times (yi - xj) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i(0+0) + j(0+0) + k(-1-1)$$

$$= -2\hat{k}$$

$$= -\frac{2\hat{k}}{r^3} + \left(\frac{-3}{r^5}\vec{R}\right) \times (y\hat{i} - x\hat{j})$$

$$= -\frac{2k}{r^3} - \frac{-3}{r^5}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (y\hat{i} - x\hat{j})$$

$$= \frac{-2k}{r^3} - \frac{-3}{r^5}(-x^2\hat{k} - y^2\hat{k} + yz\hat{j} + xz\hat{i})$$

$$= \left[\frac{-2k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 3\hat{k}x^2 + 3\hat{k}y^2 - 3yz\hat{j} - 3xz\hat{i}}{r^5}\right]$$

$$= \left[\frac{\hat{k}x^2 + \hat{k}y^2 - 2z^2\hat{k} - 3yz\hat{j} - 3xz\hat{i}}{r^5}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2\hat{k} + y^2\hat{k} - 2z^2\hat{k} - 3yz\hat{j} - 3xz\hat{i}}{r^5}\right]$$

किंवा $$grad\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{-1\vec{R}}{r^3}\right)$$

$$k.grad\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{k.\vec{R}}{r^3} = \frac{-k\left[x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right]}{r^3} = \frac{-z}{r^3}$$

$$grad\left[k.grad\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \nabla\left(\frac{-z}{r^3}\right) = -\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)z = -\frac{1}{r^3}\nabla z$$

$$= \frac{3}{r^5}\vec{R}z - \frac{1}{r^3}[\nabla z]$$

$$= \frac{3}{r^5}\left[x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right]z - \frac{1}{r^3}\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right]$$

$$= \frac{3}{r^5}\left[xz\hat{i}+yz\hat{j}+z^2\hat{k}\right] - \frac{\hat{k}}{r^3}$$

$$= \frac{3xz\hat{i}}{r^5} + \frac{3yz\hat{j}}{r^5} + \frac{3z^2}{r^5}\hat{k} - \frac{\hat{k}\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}$$

$$= -\left[\frac{\hat{k}x^2+\hat{k}y^2-2\hat{k}z^2-3xz\hat{i}-3zy\hat{j}}{r^5}\right] \qquad \text{...(ii)}$$

$$grad\left(\hat{k}.grad\frac{1}{r}\right) + curl\left[\hat{k}\times grad\frac{1}{r}\right] = 0 \qquad \text{[i आणि ii वरून]}$$

अभ्यास 4.9

1. जर $f = 3x^2y - y^3z^2$ तर बिंदू (1, -2, -1) वर *grad f* शोधा.
2. जर $\phi = \left(3r^2 - 4\sqrt{r} + 6r^{-1/3}\right)$ तर $\nabla\phi$ शोधा.
3. जर $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ तर *grad r* शोधा
4. e^{r^2} चे मूल्य शोधा जेथे $r^2 = x^2+y^2+z^2$
5. $f = xy^2 + yz^3$ चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह (2, −1, 1) या बिंदूवर $x\log z - y^2 = -4$ या पृष्ठभागाच्या (−1, 2, 1) या बिंदूवर लंबाच्या दिशेने काय असेल?
6. $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह (1, 2, 3) या बिंदूवर PQ या रेषेच्या दिशेने शोधा जेथे Q हा (5, 0, 4) बिंदू आहे.
7. $\phi = 3e^{2x-y+z}$ चा डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह A(1, 1, −1) या बिंदूवर $\overline{AB}$ च्या दिशेने शोधा जेथे B हा (-3, 5, 6) बिंदू आहे.
8. जर $\phi = ax^2y + by^2z + cz^2x$ याच्या डायरेक्शनल डेरीवेटीव्हचे (1, 1, 1) या बिंदूवर $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ या रेषेच्या समांतर दिशेने कमाल परिमाण 15 असेल तर, a, b आणि c चे मूल्य शोधा.

9. (1, 2, 2) या बिंदूवर $xyz = 4$ या पृष्ठभागाला प्रतल स्पर्शिका आणि नॉर्मलचे समीकरण शोधा.

10. (2, 1, -3) या बिंदूवर $2x^2 + y^2 + 2z = 3$ या पृष्ठभागाला प्रतल स्पर्शिका आणि नॉर्मल रेषेचे समीकरण शोधा.

11. खालील व्हेक्टर्सचे डायव्हर्जन्स आणि कर्ल शोधा.

    i. $\vec{V} = (xyz)\hat{i} + (3x^2 y)\hat{j} + (xz^2 + y^2 z)\hat{k}$

    ii. $\vec{R} = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$

12. $curl\ \vec{F}$ शोधा जेथे $\vec{F} = grad(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ आहे.

13. खालील प्रत्येक व्हेक्टर्स हे सोलेनॉइडल आहेत हे दाखवा.

    i. $(x+3y)\hat{i} + (y-3z)\hat{j} + (x-2z)\hat{k}$

    ii. $3y^4 z^2 \hat{i} + 4x^2 z^2 \hat{j} + 3x^2 y^2 \hat{k}$

14. जर $\vec{A}$ हा कॉन्स्टन्ट वेक्टर आणि $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ आहे तर दाखवा कि

    i. $grad\left(\vec{A}.\vec{R}\right) = \vec{A}$ ii. $curl\left(\vec{A} \times \vec{R}\right) = 2\vec{A}$

15. सिद्ध करा

    i. $\nabla \vec{A}^2 = 2\left(\vec{A} \cdot \vec{V}\right) = 2\vec{A} \times \left(\vec{V} \times \vec{A}\right)$

    ii. $curl\left\{\left(\vec{A} \cdot \vec{R}\right)\vec{R}\right\} = \vec{A} \times \vec{R}$, जेथे $\vec{A}$ एक स्थिर वेक्टर असेल.

16. जर 'r' आणि R यांना त्यांचे नेहमीचे अर्थ असतील आणि $\vec{A}$ एक स्थिर वेक्टर असेल, तर ते सिद्ध करा.

$$\nabla \times \frac{\left(\vec{A} \times \vec{R}\right)}{r^n} = \frac{2-n}{r^n}\vec{A} + \frac{n\left(\vec{A}.\vec{R}\right)}{r^{n+2}}\vec{R}$$

17. जर V_1 आणि V_2 हे या $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ दोन बिंदूंना जोडणारे व्हेक्टर्स आहेत तर सिद्ध करा कि

    i. $div(V_1 \times V_2) = 0$ ii. $grad(V_1 \cdot V_2) = V_1 + V_2$

    iii. $curl(V_1 \times V_2) = 2(V_1 - V_2)$

18. जर $u\vec{F} = \nabla v$ जेथे u,v हे स्केलर फिल्ड्स आणि $\vec{F}$ हा वेक्टर फिल्ड आहेत तर दाखवा कि $\vec{F} curl \vec{F} = 0$

उत्तरे

1. $-12\hat{i} - 9\hat{j} - 16\hat{k}$

2. $2\left(3 - r^{3/2} - r^{7/3}\right)r$

3. $\frac{\vec{r}}{r}$

4. $2e^{r^2}\vec{r}$

5. $\dfrac{15}{\sqrt{17}}$

6. $\dfrac{28}{\sqrt{21}}$

7. $\dfrac{-5}{3}$

8. $a = 4k; b = -11k; c = 10k;$ जेथे $k = \pm\dfrac{5}{9}$

9. $2x + y + z - 6 = 0;\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{1}$

10. $4x + y + z - 6 = 0;\ \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{1}$

11. i. $div = yz + 3x^2 + 2xz + y^2$ ii. $div = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$

$curl = 2yz\hat{i} + \left(xy - z^2\right)\hat{j} + x(6y - z)\hat{k}$ curl = 0

12. $\vec{0}$

मनोरंजक तथ्ये

- टॉयलेट पॉटचे अगदी सोपे उदाहरण विचारात घ्या. वाहणारे पाणी, ज्याचे परिमाण आहे आणि दिशा आपल्याला तीनही शिकवू शकते. डायव्हर्जन्स म्हणजे पाणी कोणत्या दिशेने वाहते आहे आणि त्याचे प्रमाण किती आहे. ग्रेडियंट म्हणजे "भांडयाच्या या भागावर, पाणी किती वेगाने फिरत आहे" किंवा "या ठिकाणी पाण्याचा दाब काय आहे" आणि कर्ल म्हणजे "भांडयाच्या या भागात पाणी किती फिरत आहे".
- ग्रेडियंटचे आणखी एक वास्तविक उदाहरण म्हणजे आपण बेडवर फिरत आहात. काही भागावर बेडशीट खडबडीत होते. ते किती बदलते हे ग्रेडियंट आहे.

वास्तविक जीवनतील उदाहरणे

- आइन्स्टाईन गुरुत्वाकर्षणाचा नियम हे एक डायव्हर्जन्स समीकरण आहे.
- ते जेट इंजिन आणि पाइपलाइनच्या द्रव प्रवाहात देखील मूलभूत आहेत.

व्हिडिओ संदर्भ (स्रोत-NPTEL)

Review of Vector Calculus

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलले प्रश्न (हॉट्स)

उदाहरण 1: एक संख्या n तीन भाग x, y, z मध्ये अशी विभाजित करा कि $u = ayz + bzx + cxy$ कमाल असेल किंवा किमान आणि ते काय आहे ते ठरवा.

उकल. समजा n हे x, y, z या तीन भागांमध्ये विभागले गेले आहे.

$$x + y + z = n \qquad ...(1)$$

आणि $$u = ayz + bzx + cxy \qquad ...(2)$$

u कमाल किंवा किमान होण्यासाठी $du = 0$

$$\Rightarrow (bz+cy)\,dx + (cx+az)dy + (ay+bx)dz = 0 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) वरून, डिफरंशिइट करून, $dx + dy + dz = 0$ ...(4)

समीकरण (3) आणि (4) ला अनुक्रमे '1' आणि 'λ' ने गुणाकार करून, बेरीज करून आणि dx, dy, dz यांचा गुणांक शुन्याबरोबर घेऊन, आपल्याला मिळेल

$$bz + cy + \lambda = 0 \qquad ...(5)$$

$$cx + az + \lambda = 0 \qquad ...(6)$$

$$ay + bx + \lambda = 0 \qquad ...(7)$$

(5) ला x ने, (6) ला y ने (7) ला z ने गुणाकार करून आणि बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$2u + n\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2u}{n}$$

आता समीकरण (5),(6),(7) वरून, आपल्याकडे आहे

$$0.x + cy + bz - \frac{2u}{n} = 0 \qquad ...(8)$$

$$cx + 0.y + az - \frac{2u}{n} = 0 \qquad ...(9)$$

आणि $$bx + ay + 0.z - \frac{2u}{n} = 0 \qquad ...(10)$$

समीकरण (1) वरून $$x + y + z - n = 0 \qquad ...(11)$$

समीकरण (8), (9), (10) आणि (11) मधून x, y, z काढून टाकून, आपल्याला मिळेल

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b & \frac{2u}{n} \\ c & 0 & a & \frac{2u}{n} \\ b & a & 0 & \frac{2u}{n} \\ 1 & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \qquad ...(12)$$

जे u ची कमाल किंवा किमान मूल्ये देते. आता (1) वरून कमाल किंवा किमान चर्चा करण्यासाठी, समजा z हे x आणि y चे फंक्शन आहे असे गृहीत धरून, आपल्याला मिळेल

$$\therefore \quad 1+\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

तसेच $$\frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

आता $$\frac{\partial u}{\partial x}=bz+cy+(bx+ay)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=bz+cy-(bx+ay)$$

$$\therefore \quad r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=b\frac{\partial z}{\partial x}-b=-2b$$

$$s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=b\frac{\partial z}{\partial x}+c-a=-b+c-a \text{ **किंवा** } =c-a-b$$

आणि $$t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2a$$

आपल्याकडे आहे $$rt-s^2=(-2b)(-2a)-(c-a-b)^2$$

$$=2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2$$

$$=a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)$$

समजा आपण असे गृहीत धरू की a, b, c त्रिकोणाच्या तीन बाजू बनवतात, तर

$b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ हे धन पूर्णांक आहेत.

$$\therefore \quad rt-s^2=+ve$$

आणि $$r=-2b=-ve$$

म्हणून (12) द्वारे दिलेली u ची मूल्ये त्रिकोणाच्या बाजूंच्या अंतर्गत कमाल आहेत.

उदाहरण 2: फंक्शन $u=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ लॅप्लास समीकरणाचे समाधान करते हे दाखवा, म्हणजेच $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

उकल: येथे

$$u=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) ला x सोबत पार्शलि डिफरन्शिएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

किंवा $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) ला y सोबत पार्शलि डिफरन्शिएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2} \quad ...(3)$$

पुन्हा $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=-\left[\frac{\left(x^2+y^2\right).0-y.(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad ...(4)$$

आणि $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\left[\frac{\left(x^2+y^2\right).0-x.(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad ...(5)$$

समीकरण (4) आणि (5) ची बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ **(सिद्ध केले)**

उदाहरण 3: सिद्ध करा $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

जेथे $x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha$, $y=\xi\sin a+\eta\cos\alpha$

उकल: येथे

$$x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha \quad ...(1)$$

$$y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha \quad ...(2)$$

समीकरण (1) आणि (2) वरून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\cos\alpha \text{ आणि } \frac{\partial x}{\partial \eta}=-\sin\alpha$$

आणि $$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin\alpha \text{ आणि } \frac{\partial y}{\partial \eta} = \cos\alpha$$

u हे x आणि y चे फंक्शन आहे आणि x,y हे ξ आणि η चे फंक्शन आहेत म्हणून,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

किंवा $$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \cos\alpha.\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y} \qquad ...(3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

किंवा $$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y} \qquad ...(4)$$

समीकरण (3) आणि (4) वरून, आपल्याकडे ऑपरेटर आहेत,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \cos\alpha.\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

∴ $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \left(\cos\alpha.\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right).\left(\cos\alpha.\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\alpha.\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\alpha.\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

म्हणजेच $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \cos^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad ...(5)$$

तसेच $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \sin^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \cos^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad ...(6)$$

समीकरण (5) आणि (6) ची बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ **(सिद्ध केले)**

टीप:

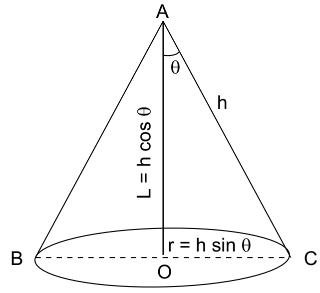
दिलेल्या संबंधांमधून (1) आणि (2) आपण ξ आणि η ला x आणि y च्या बाबतीत शोधू शकतो, नंतर तसेच पुढे जाऊन आपण दाखवू शकतो.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

उदाहरण 4: कमाल घनफळ आणि दिलेली तिरकी उंची असलेल्या शंकूचा सेमी व्हर्टिकल कोन शोधा.

उकल: समजा h शंकूची तिरकी उंची आहे आणि θ हा शंकूचा सेमी व्हर्टिकल कोन आहे. मग पायाची त्रिज्या $r = OC = h\sin\theta$ आणि शंकूची उंची $H = OA = h\cos\theta$.

समजा V हे शंकूचे घनफळ आहे तर,



आकृती 4.8

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(h\sin\theta\right)^2\left(h\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^3 \sin^2\theta\cos\theta \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) ला θ सोबत डिफरंशिएट करून, आपल्याला मिळेल

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi}{3}h^3\left[\sin^2\theta(-\sin\theta) + \cos\theta.2\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}h^3\sin\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

पुन्हा
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi}{3}h^3\left[\sin\theta\left(-4\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right) + \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\cos\theta\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}h^3\left[-6\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right]$$

कमाल किंवा किमान मूल्यासाठी,

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

$\Rightarrow \qquad \sin\theta = 0 \qquad$ किंवा $\qquad \tan^2\theta = 2$

$\Rightarrow \qquad \theta = 0 \qquad$ किंवा $\qquad \theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$

जेव्हा $\theta = 0$, घनफळ शून्य होते आणि शंकू एक सरळ रेषा बनते जे शक्य नाही.

जेव्हा $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, आपल्याकडे आहे

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi}{3}h^3\left[-6.\frac{2}{5}.\frac{1}{\sqrt{5}} + 0\right] = -ve$$

म्हणून शंकूचे घनफळ कमाल असते जेव्हा $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, जेव्हा $\theta = -\tan^{-1}\sqrt{2}$ तेव्हा शंकूचे घनफळ ऋण बनते जे निरर्थक आहे, म्हणून तसे शक्य नाही.

उदाहरण 5: एक आयताकृती पेटी, जी वरच्या बाजूने उघडी आहे, त्याचे घनफळ 32 सीसी आहे. तर बॉक्सचे डायमेन्शन्स शोधा जेणेकरून बॉक्स बनविण्यासाठी किमान साहित्याची गरज असेल.

उकल: समजा बॉक्सची लांबी l, रुंदी 'b' आणि h उंची आहे आणि S हे पृष्ठफळ आणि V त्याचे घनफळ आहे.

दिलेले आहे $\qquad V = 32cc$

बॉक्सचे घनफळ $\qquad = l.b.h = 32$

किंवा $$b = \frac{32}{l.h}$$

आणि $$S = 2(l+b)h + lb \qquad ...(1)$$

ची किंमत समीकरण (1) मध्ये ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$S = 2\left(l + \frac{32}{lh}\right)h + l\left(\frac{32}{lh}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = 2lh + \frac{64}{l} + \frac{32}{h} \qquad ...(2)$$

आता समीकरण (2) ला l सोबत पार्शली डिफरंशिएट करून, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{\partial s}{\partial l} = 2h - \frac{64}{l^2} \qquad ...(3)$$

पुन्हा समीकरण (2) ला h सोबत पार्शली डिफरंशिएट करून, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{\partial s}{\partial h} = 2l - \frac{32}{h^2} \qquad ...(4)$$

कमाल किंवा किमान मूल्यासाठी,

$$\frac{\partial s}{\partial l} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2h - \frac{64}{l^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{32}{l^2} \qquad ...(5)$$

आणि $$\frac{\partial s}{\partial h} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2l - \frac{32}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{16}{h^2} \qquad ...(6)$$

समीकरण (5) आणि (6) वरून, $l = 4$, $h = 2$ आणि $b = 4$

पुन्हा, $$r = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{128}{l^2} = \frac{128}{64} = 2,$$

$$s = \frac{\partial^2 s}{\partial l \partial h} = 2,$$

$$t = \frac{\partial^2 s}{\partial h^2} = \frac{64}{h^2} = \frac{64}{8} = 8$$

$$\therefore \quad rt - s^2 = \frac{\partial^2 s}{\partial l^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial h^2} - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial l \partial h}\right)^2$$

$$\therefore \quad 2 \times 8 - (2)^2 = 12$$

म्हणून $r = 2(+ve)$, म्हणून $l = 4$, $b = 4$, $h = 2$ साठी S हे किमान आहे.

उदाहरण 6: एक ट्रक x किमी प्रति तास वेगाने प्रवास करताना डिझेल तेल $\frac{1}{300}\left(\frac{900}{x}+x\right)$ l/km या दराने जाळतो. जर डिझेल तेलाची किंमत 40 पैसे प्रति लिटर आहे आणि ड्रायव्हरला प्रति तास 1.50 रुपये दिले जातात, स्थिर गती शोधा जी एकूण 500 किमीच्या प्रवासाची किंमत कमी करेल.

उकल: ट्रकचा वेग = x किमी/तास

डिझेल तेल जाळण्याचा वेग $=\frac{1}{300}\left(\frac{900}{x}+x\right)$ l/km

डिझेल तेलाची किंमत = 0.40 रु. प्रति लिटर आणि

चालकाचे वेतन 1.50 रु प्रति तास आहे आणि

सहलीचे एकूण अंतर = 500 किमी.

$\therefore$ 500 किमी मध्ये एकूण डिझेल जळते $=\frac{500}{300}\left(\frac{900}{x}+x\right)$ लिटर आणि त्याची किंमत $=\frac{5}{3}\times\left(\frac{900}{x}+x\right)\times 0.40$ रुपये.

500 किमी धावताना लागलेला वेळ $=\frac{900}{x}$ तास.

चालकाचा मोबदला $=\frac{500}{x}\times 1.50=\frac{750}{x}$ रु.

सहलीची एकूण किंमत (c) $=\frac{2}{3}\left(\frac{900}{x}+x\right)+\frac{750}{x}$

किंवा $c=\frac{1350}{x}+\frac{2}{3}x$

$\therefore$ $\frac{dc}{dx}=\frac{-1350}{x^2}+\frac{2}{3}=0$ (कमाल आणि किमान मूल्यासाठी)

$\Rightarrow$ $x^2=2025 \Rightarrow x=45$ किमी/तास.

पुन्हा $\frac{d^2c}{dx^2}=+ve$. म्हणून c किमान असते जेव्हा x = 45 किमी/तास.

सारांश

1. फंक्शन $f(x,y)$ ला $x\to a,\ y\to b$ म्हणून लिमिट l असल्याचे म्हटले जाते, जर कोणत्याही अहेतुकपणे निवडलेल्या धन संख्या $\in>0$ कितीही लहान असले तरी तेथे धन संख्या $\delta>0$ अशी अस्तित्वात असते कि

   $|f(x,y)-l|<\in \forall x,y$, $|x-a|<\delta$ आणि $|y-b|<\delta$ साठी.

2. फंक्शन $f(x,y)$ ला (a,b) या बिंदूवर कंटीनिवस आहे असे म्हटले जाते जर $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=(a,b)$.

3. जर $u=f(x,y)$ हे दोन व्हेरिएबल्सचे फंक्शन आहे, तर त्याचा पहिल्या ऑर्डरचा x सोबत डेरिव्हेटिव्ह या द्वारे दर्शविले

जाते $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x$ आणि पहिल्या ऑर्डरचा y सोबत डेरिव्हेटिव्ह या द्वारे दर्शविले जाते $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y$.

4. x, y या दोन व्हेरिएबल्सचे फंक्शन x आणि y मधील n डिग्री चे होमोजिनिअस फंक्शन असल्याचे म्हटले जाऊ शकते जर ते $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ या स्वरूपात व्यक्त केले जात असेल.

5. जर u हे x आणि y मधील n डिग्रीचे होमोजिनिअस फंक्शन असेल तर यूलरच्या प्रमेयानुसार, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$

6. जर $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ आणि $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ही फक्त 't' चे फंक्शन असेल तर $\frac{du}{dt}$ ला u चा t सोबत टोटल डेरीवेटीव्ह असे म्हणतात आणि $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx_1}.\frac{dx_1}{dt} + \frac{du}{dx_2}.\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{du}{dx_n}.\frac{dx_n}{dt}$.

7. दोन चलांसाठी टेलरचे प्रमेय असे सांगते

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) + ... + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + ...$$

8. जर $u_1, u_2, ..., u_n$ हे स्वतंत्र चल $x_1, x_2, ..., x_n$ यांचे फंक्शन्स आहेत तर $u_1, u_2, ..., u_n$ चा $x_1, x_2, ..., x_n$ सोबत जॅकोबिअन $\frac{\partial(u_1, u_2, ..., u_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$ या चिन्हाद्वारे दर्शविला जातो आणि असा परिभाषित केला जातो

$$\frac{\partial(u_1, u_2, ..., u_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

9. एक्सट्रीम मूल्ये हा शब्द कमाल तसेच किमान मूल्यांसाठी वापरला जातो आणि बिंदू जेथे ही मूल्ये उद्भवतात त्यांना एक्सट्रीम बिंदू म्हणतात.

10. फंक्शन् $f(x)$ ला बिंदू $x = a$ वर स्टेशनरी आहे असे म्हटले जाते जर डेरीवेटीव्ह $f'(x)$, $x = a$ या बिंदूवर नाहीसा होत असेल म्हणजेच $x = a$ वर $f'(x) = 0$.

11. जर $r > 0$ आणि $rt - s^2 > 0$ असेल तर फंक्शन $f(x, y)$ दिलेल्या बिंदूवर किमान असते.
जर $r < 0$ आणि $rt - s^2 > 0$ असेल तर फंक्शन $f(x, y)$ दिलेल्या बिंदूवर कमाल असते.
जर $rt - s^2 < 0$ असेल तर फंक्शन $f(x, y)$ दिलेल्या बिंदूवर कमाल किंवा किमान नसते.

12. IR^3 वर $f(x, y, z)$ च्या वास्तविक मूल्य फंक्शन साठी, ग्रेडियंट $\nabla f(x, y, z)$, IR^3 वर वेक्टर-मूल्य फंक्शन आहे, त्याचे मूल्य या (x, y, z) बिंदूवर वेक्टर आहे

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

13. वेक्टर फील्डचे डायव्हर्जन्स हे डेल ऑपरेटर आणि वेक्टर फील्ड यांचा डॉट प्रॉडक्ट असतो म्हणजेच,

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

जेथे $\vec{F} = f_1(x, y, z)\hat{i} + f_2(x, y, z)\hat{j} + f_3(x, y, z)\hat{k}$

14. वेक्टर फील्डचे हे कर्ल डेल ऑपरेटर आणि वेक्टर फील्डचे क्रॉस-प्रॉडक्ट म्हणून परिभाषित केले जाते, म्हणजेच

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

15. समजा $F(x, y, z)$ हे एक पृष्ठभाग परिभाषित करते जे या (x_0, y_0, z_0) बिंदूवर डिफरेंशीएबल आहे, मग $F(x, y, z)$ फंक्शनला (x_0, y_0, z_0) या बिंदूवर प्रतल स्पर्शिका हे नॉर्मल वेक्टर $F(x_0, y_0, z_0)$ सह प्रतल असते जे या (x_0, y_0, z_0) बिंदूमधून जाते. विशेषतः, प्रतल स्पर्शिकाचे समीकरण आहे

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

16. समजा $F(x, y, z)$ हे एक पृष्ठभाग परिभाषित करते जे या (x_0, y_0, z_0) बिंदूवर डिफरन्शि एबल आहे, मग $F(x, y, z)$ फंक्शनला (x_0, y_0, z_0) या बिंदूवर नॉर्मल रेषा हि नॉर्मल वेक्टर $F(x_0, y_0, z_0)$ सह रेषा असते जे या (x_0, y_0, z_0) बिंदूमधून जाते. विशेषतः, नॉर्मल रेषेचे समीकरण आहे

$$x(t) = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t$$

$$y(t) = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t$$

$$z(t) = x_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. गणना करा $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^7x^{98} - x^{97}y^8 + x^{105}}{xy^7 + x^8}$.

   a. अस्तित्वात नाही. b. 0

   c. 1 d. ∞

2. टोटल डेरीवेटीव्ह हा फंक्शनच्या डेरीवेटीव्ह सारखाच आहे.

   a. बरोबर b. चूक

3. जर $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ तर

a. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ अस्तित्वात आहे आणि नॉन झिरो आहे.

b. $\lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x,y)$ अस्तित्वात आहे आणि शून्य आहे.

c. $\lim_{(x,y=x^2)\to(0,0)} f(x,y)$ अस्तित्वात आहे आणि नॉन झिरो आहे.

d. $\lim_{(x,y=2x^2)\to(0,0)} f(x,y)$ अस्तित्वात आहे आणि नॉन झिरो आहे.

4. पहिल्या ऑर्डरच्या पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्जचे अस्तित्व हे कंटीन्यूविटी दर्शवते.

a. बरोबर | b. चूक

5. जर $f(x,y)=\sin(xy)+x^2\log y$ तर $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ या बिंदूवर f_{yx} शोधा.

a. 33 | b. 0
c. 3 | d. 1

6. $t=1$ या बिंदूवर $\frac{df}{dt}$ ची गणना करा जेव्हा दिलेले असेल $f(x,y)=x^3+y^3; x=t^2+t^3; y=t^3+t^9$

a. 0 | b. 1
c. −1 | d. 164

7. $f(x,y)=x\log y+x^2y^2$ या फंक्शनचा (−1, 1) या बिंदूवर मॅक्सिमम डायरेक्शनल डेरीवेटीव्ह शोधा.

a. $-2i+j$ | b. $15(-2i+j)$
c. 1 | d. 5

8. सॅडल बिंदू काय आहे?

a. बिंदू जिथे फंक्शनचे कमाल मूल्य आहे.
b. बिंदू जिथे फंक्शनचे किमान मूल्य आहे.
c. बिंदू जिथे फंक्शनचे मूल्य शून्य आहे.
d. बिंदू जिथे फंक्शनला कमाल मूल्य किंवा किमान मूल्य नाही.

9. दिलेल्या $xy+a^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ फंक्शनचे किमान मूल्य आहे.

a. $3a^2$ | b. a^2
c. a | d. 1

10. लाग्रेंजच्या मॅक्सिमा आणि मिनिमाच्या पद्धतीचा दोष आहे?

a. मॅक्सिमा आणि मिनिमा निश्चित नाहीत.
b. स्टेशनरी बिंदूंचे स्वरूप माहित नसते.
c. अचूकता चांगली नाही
d. स्टेशनरी बिंदूंचे स्वरूप ज्ञात आहे, परंतु मॅक्सिमा किंवा मिनिमा देऊ शकत नाही.

11. एक मर्यादा असणाऱ्या साध्या लाग्रेंजच्या गुणक सेट अप मध्ये, नेहमी मर्यादाचे डायमेंशन ऑब्जेक्टिव्ह फंक्शनपेक्षा एक ने कमी असणे आवश्यक आहे.

a. बरोबर b. चूक

12. दिलेल्या वेक्टर फील्डसाठी कर्लची गणना करा $\vec{F} = x^3 y^2 \hat{i} + x^2 y^3 z^4 \hat{j} + x^2 z^2 \hat{k}$.

a. $curl\vec{F} = 0$

b. $curl\vec{F} = \left(4x^2 y^3 z^3\right)\hat{i} + \left(2xz^2\right)\hat{j} + \left(-2xy^3 z^4 + 2x^3 y\right)\hat{k}$

c. $curl\vec{F} = \left(2x^2 z^3\right)\hat{i} - \left(2yz^2\right)\hat{j} - \left(-2x^3 y\right)\hat{k}$

d. $curl\vec{F} = \left(-4x^2 y^3 z^3\right)\hat{i} + \left(-2xz^2\right)\hat{j} + \left(2xy^3 z^4 - 2x^3 y\right)\hat{k}$

13. वेक्टर फील्डचे डायव्हर्जन्स आणि कर्ल आहेत.

a. स्केलर आणि स्केलर b. स्केलर आणि वेक्टर

c. वेक्टर आणि वेक्टर d. वेक्टर आणि स्केलर

14. वेक्टरच्या कर्लचे कर्ल देते

a. स्केलर b. वेक्टर

c. शून्य मूल्य d. काहीही सांगता येणार नाही

15. $\nabla \times \nabla \times P =$?, जेथे P हा वेक्टर आहे.

a. $P \times \nabla \times P - \nabla^2 P$ b. $\nabla^2 P + \nabla(\nabla \times P)$

c. $\nabla^2 P + \nabla \times P$ d. $\nabla(\nabla \cdot P) - \nabla^2 P$

16. गोलाकार पृष्ठभागासाठी $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ या बिंदूवर एकक नॉर्मल वेक्टर आहे.

a. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} j\right)$ b. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} j\right)$

c. $\hat{k}$ d. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

17. वेक्टर A ची दिशा आरंभबिंदूपासून बाहेरच्या बाजूला, $|A| = kr^n$, जेथे $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ आणि k हा स्थिर आहे. n चे मूल्य ज्यासाठी $\nabla \cdot A$ आहे

a. −2 b. 2

c. 1 d. 0

18. प्रवाह फिल्डचा वेग वेक्टर दिला आहे . $\vec{V} = 2xy\hat{i} - x^2 z\hat{j}$ तर (1,1,1,) या बिंदूवर $curl\vec{V}$ आहे

a. $4\hat{i} - \hat{j}$ b. $4\hat{i} - \hat{k}$

c. $\hat{i}-4\hat{j}$ d. $\hat{i}-4\hat{k}$

19. तीन डायमेन्शनल रॅडिअल वेक्टर फिल्ड $\vec{r}$ चा डायव्हर्जन्स आहे.

a. 3 b. $\dfrac{1}{r}$

c. $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ d. $3\,(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

20. जर $\sin^2 y+\cos xy=\pi$ तर $\dfrac{dy}{dx}$ च्या बरोबर असेल

a. $\dfrac{y\sin xy}{\sin 2y-x\sin xy}$ b. $\dfrac{x\sin xy}{\sin 2y-x\sin xy}$

c. $\dfrac{y\cos xy}{\cos 2y-x\sin xy}$ d. $\dfrac{x\cos xy}{\sin 2y+x\cos xy}$

उत्तरे

1. b	2. a	3. b	4. b	5. d	6. d	7. d	8. d	9. a	10. b
11. b	12. d	13. b	14. b	15. d	16. a	17. a	18. d	19. a	20. a

व्यक्तिनिष्ठ न सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

1. विश्लेषण करा, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$ अस्तित्वात आहे कि नाही. $y=mx$ या रेषेच्या दिशेने मार्ग घ्या.

2. $y=-sinx$ या रेषेच्या दिशेने लिमिट घेऊन $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x+y}$ हे अस्तित्वात येत नाही हे दाखवा.

3. $\tan^{-1}\left(\dfrac{xy^2}{x+y}\right)$ फंक्शन कंटीनिवस आहे का ते तपासा?

4. जर $x+y=2e^{\theta}\cos\phi$, $x-y=2e^{\theta}\sin\phi$ तर $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=4xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ हे दाखवा.

5. दिलेल्या $f(x, y)$ साठी कंटीन्यूईटी धारणा सांगा. तसेच हे देखील दाखवा $x^2 f_{11}+xyf_{12}+xyf_{21}+y^2 f_{22}=n(n-1)f$ जेथे $f(x,y)$ हे n डिग्री चे होमोजिनिअस फंक्शन आहे.
येथे 'f च्या सबस्क्रिप्ट म्हणजे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज खालीलप्रमाणे आहेत:

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x},\ f_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ f_{21}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$f_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_2=\frac{\partial f}{\partial y},\ f_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial f^2}$$

6. $(ax+by+cz)e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)}$ चे कमाल मूल्य $\frac{1}{2e}\left[\left(\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}\right)\right]^{1/2}$ आहे.

   आपल्या उत्तराचे विश्लेषण करा आणि सत्यापित करा.
7. ABCD हा एक चौकोन आहे ज्यामध्ये पुन्हा प्रवेश न करणारा कोन आहे आणि P त्याच्या प्रतलातील एक बिंदू आहे. P ची स्थिती शोधा ज्यासाठी शिरोबिंदूंपासून अंतरांची बेरीज किमान आहे.
8. दिले आहे $a^x b^y c^z = A$. $(x+1)(y+1)(z+1)$ चे कमाल मूल्य काढा. निष्पत्तीचा अर्थ लावा.
9. वेक्टर फील्ड $\vec{F} = 2x\hat{i} + 4y\hat{j} + 8z\hat{k}$ इरोटेशनल आहे हे दाखवा आणि त्याचे स्केलर फील्ड φ शोधा जेणेकरून $\vec{F} = \nabla\varphi$.
10. जर $\vec{F}$ हे सोलेनॉइडल वेक्टर फील्ड असेल तर दाखवा कि $curl$ curl curl curl $\vec{F} = \nabla^4 \vec{F}$.
11. λ चे मूल्य शोधा ज्यासाठी वेक्टर $\vec{u} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+\lambda z)\hat{k}$ एक सोलेनोइडल वेक्टर आहे.
12. जर $u = x+y+z$, $\mathrm{v} = \mathrm{x}^2 + y^2 + z^2$, $\mathrm{w} = \mathrm{xy+yz+zx}$ तर दाखवा की $\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{v}, \nabla \mathrm{w}$ हे एकप्रतलीय वेक्टर आहेत.

उत्तरे

1. लिमिट अस्तित्वात नाही.
3. दिलेले फंक्शन $\left[(x,y)\in R^2; y \neq -x\right]$ वर कंटीनिवस आहे.

   सूचना: दोन फंक्शन्सची रचना म्हणून फंक्शन घ्या.
7. P हा चौकोनाच्या कर्णांचा छेदनबिंदू आहे.
8. $\left[\log(Aabc)\right]^3 / (27\log a \log b \log c)$
11. $\lambda = -2$
12. सूचना: दाखवा $\nabla u \cdot (\nabla v \times \nabla w) = 0$

प्रकल्प/क्रियाकलाप/प्रात्यक्षिक

MATLAB वापरून खालील समस्यांचे मॉडेल तयार करा.

1. विविध पृष्ठभाग काढा आणि दिलेल्या बिंदूंच्या दृष्टिकोनाप्रमाणे लिमिट अस्तित्वात आहे की नाही यावर चर्चा करा. अस्तित्वात असल्यास लिमिट शोधा.

   i. $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ at x = 5   ii. $\frac{x^2+5}{x+1}$ at x = 6

2. दिलेल्या बिंदूवर वेगवेगळ्या पृष्ठभागावर प्रतल स्पर्शिका काढा, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

3. फंक्शन्ससाठी सापेक्ष आणि अबसोल्यूट एक्सट्रीमाचे बिंदू शोधा, $f(x,y) = 3x^2 y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

4. $f(x,y) = xy - \frac{x^3}{3}$ साठी ग्रेडियंट वेक्टर फील्ड आणि लेव्हल वक्र प्लॉट करा.

क्रियाकलाप

कागदाचा आलेख वापरून आलेख प्लॉट करून स्थानिक मॅक्सिमा, स्थानिक मिनिमा आणि आपल्या आवडीच्या फंक्शनच्या विचलनाचे बिंदू ओळखा.

अधिक जाणून घ्या

1. गणना करा $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{x}$

   a. 1   b. 0

   c. ∞ d. अस्तित्वात नाही

2. जर $f(x,y,z,t) = xy + zt + x^2 yzt; x = k^3; y = k^2; z = k; t = \sqrt{k}$ तर $k = 1$ वर $\frac{df}{dt}$ शोधा.

   a. 34   b. 16

   c. 32   d. 61

3. समजा एका सपाट प्लेटमधील बिंदू (x, y) चे तापमान $T(x,y) = 3x^2 + 2xy$ या फंक्शनद्वारे दिले आहे. मार्गारीनचा एक टब (3, -6) येथे ठेवला आहे. सर्वात जलद थंड करण्यासाठी कोणत्या दिशेने हलवावे याचे विश्लेषण करा.

   a. $6i + 6j$ b. $i + j$

   c. $-i - j$ d. $6i - 12j$

4. फंक्शनचे क्रिटिकल बिंदू शोधा.

$$f(x,y) = \frac{\sin^{-1}(y^2).\left(y^2 + 3y\right).\left(\sin\left(y^6 + 7y\right)\right)}{\left(y^9 + y^{10}\right)} + 10x$$

   a. (0, 0)   b. (0, -90)

   c. (90, 0)   d. अस्तित्वात नाही.

5. $x + y + z = 9$ प्रतलावरील बिंदू शोधा, जे आरंभबिंदूच्या सर्वात जवळ आहेत.

   a. (3, 3, 3)   b. (2, 1, 3)

   c. (2, 2, 2)   d. (3, 4, 1)

6. एस्ट्रोइडचा कालावधी x आणि y दोन्ही अक्षांसह समान प्रमाणात वाढविला जातो. तर एस्ट्रोइड सोबत $z = x + y$ चे कमाल मूल्य आहे.

a. वाढते.
b. कमी होते.
c. अपरिवर्तनीय.
d. एस्ट्रोइडचे स्केलिंग असंबद्ध आहे.

सूचना: अस्ट्रोइड $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ चे सामान्य रूप घ्या, नंतर ग्रेडियंटची गणना करा आणि त्याची लाग्रेंजच्या अटींशी तुलना करा.

7. पोटेन्शिअल फंक्शन ϕ, $\phi=x^2-y^2$ द्वारे दिले जाते. $x=y=0$ वर $\phi=0$ या स्थितीसह स्ट्रीम फंक्शन काय असेल?

a. $2xy$
b. x^2+y^2
c. x^2-y^2
d. $2x^2y^2$

8. वेक्टर फील्ड $3xz\hat{i}+2xy\hat{j}-yz^2\hat{k}$ चे या $(1, 1, 1)$ बिंदूवर डायव्हर्जन्स च्या बरोबर आहे

a. 7
b. 4
c. 3
d. 0

9. स्केलर फील्ड $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ साठी, बिंदू $(1, 3)$ वरील ग्रेडियंटचे परिमाण (मॅग्नीट्युड) हे आहे.

a. $\sqrt{\frac{13}{9}}$
b. $\sqrt{\frac{9}{2}}$
c. $\sqrt{5}$
d. $\frac{9}{2}$

उत्तरे

1. d 2. c 3. a 4. d 5. a 6. a 7. a 8. c 9. c

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Bary, N.K. (1964). A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press.
2. Courant R. (1988). Differential and Integral Calculus, Wiley, New York.
3. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
4. Fleming, W.H. (1965). Functions of Several Variables, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
5. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P)Ltd.
6. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947) Theory of Functions, Dover, New York.
9. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. New York.

10. Piskunov, N. (1969). Differential and Integral Calculus, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). Theory of Functions, Oxford University Press, London.

5 मॅट्रिक्स

युनिट निर्दिष्टे

या युनिटमध्ये मॅट्रिक्स, रँक-नलिटी थिओरम, लिनियर समीकरणांची प्रणाली, सीमेट्रिक , स्क्यू सीमेट्रिक आणि ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स, डिटर्मिनंट, एजेन मूल्ये आणि एजेन वेक्टर्स, मॅट्रिक्सचे डायगोनलायजेशन, कॅली-हॅमिल्टन थिओरेम, ऑर्थोगॉनल ट्रांसफ़ोरमेशन या संकल्पनांचा समावेश आहे. मनोरंजक तथ्ये, व्हिडिओ संसाधने, आयसीटीचे वापर, वास्तविक जीवनातील अनुप्रयोग ही विस्तृत क्षेत्रे आहेत जे विषयाला विद्यार्थीस्नेही आणि सोपे करण्यासाठी समाविष्ट आहेत.

तर्कशास्त्र

बीजगणितीय लिनियर समीकरणे, लिनियर डिफेरेंशीअल समीकरणे आणि नॉनलिनियर डिफेरेंशीअल समीकरणे यांच्या प्रणालीचे निराकरण शोधण्यासाठी मॅट्रिक्सचा सर्वाधिक वापर केला जातो. मॅट्रिक्स, रोटेशन आणि प्रतिबिंब यांसारख्या अनेक शारीरिक क्रियादेखील मॅट्रिक्सच्या मदतीने गणितीय पद्धतीने दर्शवल्या जाऊ शकतात. हे लोकांची वैशिष्ट्ये, लोकसंख्या, सवयी इत्यादी वास्तविक जगातील डेटाचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी देखील वापरले जातात. वयासंबंधित समस्या, वेग, वेळ आणि इतर अनेक क्षेत्रांमध्ये समीकरणांची लिनियर प्रणाली वापरली जाते. पुलाची नैसर्गिक वारंवारता म्हणजे पुलाचे मॉडेल असलेल्या सर्वात लहान परिमाण असलेल्या प्रणालीचे आयजेन मूल्य आहे. अभियंते त्यांच्या बांधकामांचे स्थैर्य सुनिश्चित करण्यासाठी या ज्ञानाचा शोध घेतात. इजेन मूल्ये आणि इजेन वेक्टरआपल्याला साध्या समस्यांमध्ये लिनियर ऑपरेशन कमी करण्यास अनुमती देतात. डायगोनलयज़ेशन वापरुन; आपण कंपनांची नैसर्गिक वारंवारता निश्चित करू शकतो. ऑर्थोगॉनल ट्रान्सफ़ोर्मेशनांचा वापर गुंतागुंतीच्या टेबलांची गणना करण्यासाठी सोप्या टेबलांमध्ये केला जातो.

पूर्वतयारी

1. विविध प्रकारच्या मॅट्रिक्स बद्दल जाणीव.
2. मॅट्रिक्सच्या बीजगणिताचे मूलभूत ज्ञान.
3. ॲडजॉइन्ट, व्यस्त आणि डिटरमिनंट या संकल्पनांची त्यांच्या गुणधर्मांसहित ओळख करून घेणे.
4. लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीतून मॅट्रिक्सच्या निर्मितीची कल्पना जाणून घ्या.

यूनिट आउटकम

हे युनिट पूर्ण झाल्यानंतर, विद्यार्थी खालील गोष्टी करू शकतील:

U5-O1: लिनियर समीकरणांच्या सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक प्रणाली ओळखणे; रो इचीलॉन फॉर्म वापरून उकलची गणना करणे; गॉस एलिमिनेशन, गॉस जॉर्डन पद्धती लागू करून मॅट्रिक्स चा व्यस्त शोधणे.

U5-O2: लिनियर समीकरणांची होमोजिनिअस आणि नॉन होमोजिनिअस प्रणाली सोडवा; जटिल समस्या सोडवण्यासाठी रँक-नलिटी प्रमेय लागू करने .

U5-O3: मॅट्रिक्सचे आईजेन मूल्ये आणि आईजेन वेक्टर शोधणे; कॅले ह्यॅमिल्टन प्रमेयाबद्दल जाणून घ्या आणि स्क्वेअर मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्यासाठी त्याचा वापर करा.

U5-O4: डायगोनलायझेशन ची संकल्पना परिचित करा आणि लागू करा; मोडल मॅट्रिक्स शोधा; क्वाड्राटिक फॉर्म ला कॅनॉनिकल फॉर्मच्या स्वरूपात रूपांतर करण्याबद्दल जाणून घ्या.

कोर्स आऊटकम आणि युनिट आऊटकमचा परस्पर संबध

युनिट-5 आउटकम	**कोर्स आऊटकमसह अपेक्षित मॅपिंग** *(1- कमकुवत परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- मजबूत परस्परसंबंध)*				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U5-O1	–	1	–	1	3
U5-O2	2	–	1	–	3
U5-O3	2	–	–	1	3
U5-O4	–	2	1	1	3

इतिहास

— ऑगस्टीन लुई कॉची

ऐतिहासिकदृष्ट्या, मॅट्रिक्स हा शब्द 19 व्या शतकात इंग्रज गणितज्ञ जेम्स सिल्वेस्टर यांनी प्रथम प्रस्तुत केला, पण त्याचा मित्र आर्थर कॅले याने मॅट्रायसेसचे बीजगणितीय पैलू 1850 च्या दोन पेपर मध्ये विकसित केले. कॅले यांनी त्याचा प्रथम लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीचा अभ्यास करण्यासाठी उपयोग केला, जे अजूनही खूप उपयुक्त आहेत. ते यासाठी देखील महत्वाचे आहेत कारण, कॅलेने ओळखल्याप्रमाणे, बीजगणित प्रणाली मधील मॅट्रिक्सचे काही संच ज्यात अनेक अंकगणिताचे सामान्य नियम (उदा., असोसीएटीव्ह आणि डिस्ट्रीब्यूटिव्ह नियम) वैध आहेत पण ज्यात इतर नियम (उदा., कम्युटेटिव्ह नियम) वैध नाहीत. आईजेन वेक्टर हळूहळू 18 व्या शतकात डिफरन्शियल समीकरणे सोडवन्यासाठी दिसू लागले. हे थोडेसे चमत्कारिक वाटेल पण आईजेन वेक्टर (आईजेन फंक्शन्स) लिनियर बीजगणित आणि "वेक्टर" हा शब्द सामान्यपणे वापरात येण्यापूर्वी विविध नावांनी दिसून येत असे. त्यांनी लघु दोलनाच्या सिद्धांतामध्ये मध्यवर्ती भूमिका बजावली आहे. कॉचीने रेसिन कॅरेक्टेरिस्टिक हा शब्द देखील तयार केला (कॅरेक्टेरिस्टिक रूट), ज्याला आता आईजेन मूल्य म्हणतात; त्याची संज्ञा कॅरेक्टेरिस्टिक समीकरणात टिकून आहे. हिल्बर्ट-कोरंटच्या 1920 च्या दशकातील पुस्तकाच्या पहिल्या आवृत्तीच्या प्रभावातुन "आईजेन वेक्टर" ही संज्ञा जर्मनमधून आली आहे.

प्रस्तावना

मॅट्राइसेस हा शब्द मॅट्रिक्स या शब्दाचे बहुवचन आहे. आर्थर केली १८६० मध्ये मॅट्राइसेस ची संकल्पना व्यक्त करणारी पहिली व्यक्ती होती.

मॅट्राइसेस च्या अभ्यासाचा उगम विविध लिनियर समस्यांच्या कल्पनेतून झाला. अनेक अभियांत्रिकी प्रक्रियेत घडणाऱ्या लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीशी त्याचे विशेष संबंध आहेत.हे लिनियर बीजगणिताच्या अभ्यसात आणि विकासात एक महत्त्वाची यादी प्रदान करते. अप्लाइड इंजिनिअरिंग आणि कंट्रोल सिस्टममध्ये लिनियर प्रणाली स्वरूपाच्या सादरीकरणात मॅट्राइसेस देखील उपस्थित आहेत. गणित, विज्ञान आणि अभियांत्रिकी या प्रत्येक शाखेच्या अभ्यासात मॅट्राइसेस चा मोठ्या प्रमाणावर वापर केला जातो.

5.1 व्याख्या

mn संख्याचा एक संच (वास्तविक किंवा कॉम्प्लेक्स) आयताकृती ॲरेच्या स्वरूपात मांडला आहे ज्यात m रांगा आहेत (आडव्या रेषा) आणि n स्तंभांना (उभ्या रेषा) म्हणतात ज्याला m x n मॅट्रिक्स (m बाय n मॅट्रिक्स' किंवा 'मॅट्रिक्स' म्हणून वाचले जाते ज्याची ऑर्डर m बाय n ' किंवा 'मॅट्रिक्स ऑफ टाइप m बाय n.

मॅट्रिक्स सामान्यत: चिन्ह $\left[a_{ij}\right]$ किंवा $\left(a_{ij}\right)$ किंवा $\left\|a_{ij}\right\|$ याने दर्शविला जाते.

मॅट्रिक्स सहसा A, B, C इत्यादी एकाच मोठ्या अक्षराद्वारे अवलोकन केले जाते.

म्हणून, एक $m \times n$ मॅट्रिक्स 'A' खालील प्रमाणे लिहता येते.

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \text{ किंवा } A=\left[a_{ij}\right]$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ जेथे } i = 1, 2, \ldots m \text{ आणि } j = 1, 2, \ldots n$$

प्रत्येक $m \times n$ मॅट्रिक्समध्ये $m.n$ घटकांची संख्या आहे.

नोट: मॅट्रिक्समधील प्रत्येक प्रवेशाला मॅट्रिक्सचा घटक म्हणतात.

उदाहरणार्थ: आपण एक एकसामायिक समीकरणांच्या प्रणालीच्या संचाचा विचार करू.

$$2x+3y+3z+2t=0$$
$$3x+2y+5z+3t=0$$
$$4x+5y+6z+7t=0$$
$$2x+3y+4z+5t=0$$

आता, आपण वरील समीकरणांचे x, y, z आणि t चे गुणांक लिहितो आणि त्यांना कंसात टाकतो आणि मग, आपल्याला मिळते

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

वरील संख्याप्रणालीची रांगा आणि स्तंभांच्या कंसांने बांधलेल्या आयताकृती टेबलमध्ये मांडणी केली जाते त्याला मॅट्रिक्स म्हणतात.

यात 4 रांगा आणि 4 स्तंभ आहेत आणि सर्व $4 \times 4 = 16$ घटक आहेत. याला 4×4 मॅट्रिक्स म्हणतात.

एका घटकाच्या दुहेरी उपलिपीमध्ये (Dobule subscript), पहिली उपलिपी (first subscript) रांग निश्चित करते आणि दुसरी उपलिपी (second subscript) स्तंभ निश्चित करते जसे a_{ij} मधे i रांग आणि j स्तंभात स्थित आहे.

5.1.1 वेगवेगळ्या प्रकारचे मॅट्रिक्स

1. **वास्तविक मॅट्रिक्स:** मॅट्रिक्सचे सर्व घटक वास्तविक असतील तर त्याला वास्तविक मॅट्रिक्स म्हणतात.

   उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$ एक वास्तविक मॅट्रिक्स आहे.

2. **कॉम्प्लेक्स मॅट्रिक्स:** ज्या मॅट्रिक्समध्ये कॉम्प्लेक्स संख्या आहे त्याला कॉम्प्लेक्स मॅट्रिक्स म्हणतात.

   उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ एक कॉम्प्लेक्स मॅट्रिक्स आहेत.

3. **रो मॅट्रिक्स:** केवळ एकच रांग आणि कितीही स्तंभ असलेल्या मॅट्रिक्सला रो मॅट्रिक्स म्हणतात.

   उदाहरणार्थ : $A = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]_{1\times4}$ एक रो मॅट्रिक्स आहे.

4. **कॉलम मॅट्रिक्स:** एक मॅट्रिक्स ज्यात फक्त एकच स्तंभ असतो आणि कितीही रांगा असलेल्या मॅट्रिक्सला कॉलम मॅट्रिक्स म्हणतात

   उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times1}$ एक कॉलम मॅट्रिक्स आहे.

5. **नल मॅट्रिक्स किंवा झिरो मॅट्रिक्स:** ज्या मॅट्रिक्सचे सर्व घटक शून्य आहेत त्याला नल मॅट्रिक्स किंवा झिरो मॅट्रिक्स म्हणतात.

   उदाहरणार्थ : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ आणि $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ झिरो मॅट्रिक्स आहेत.

6. **स्क्वेअर मॅट्रिक्स:** ऑर्डर $m \times n$ चे मॅट्रिक्स म्हणजे स्क्वेअर मॅट्रिक्स असे म्हटले जाते जर $m = n$. म्हणजे रांगांची संख्या स्तंभांच्या संख्येच्या बरोबरीने आहे

   उदाहरणार्थ : $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$ एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे.

7. **आयताकृती मॅट्रिक्स:** ऑर्डर $m \times n$ मॅट्रिक्स आयताकृती मॅट्रिक्स असल्याचे म्हटले जाते जर $m \neq n$. म्हणजे रांगांची संख्या स्तंभांच्या संख्येच्या बरोबरीने नाही .

   उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

8. **डायगोनल मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्सला डायगोनल मॅट्रिक्स म्हणतात जर त्याचे सर्व अविकर्णी (non-diagonal) घटक शून्य असतील.

समजा $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ आणि जर $i\neq j$ ऐवजी $a_{ij}=0$ नंतर 'A' $n\times n$ ऑर्डरचा डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.

डायगोनल मॅट्रिक्सला $diag\left[a_{11},\, a_{22},\ldots\quad a_{nn}\right]$ लिहिले जाते.

उदाहरणार्थ: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}_{3\times3}$ डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.

9. **युनिट मॅट्रिक्स किंवा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्सला युनिट मॅट्रिक्स किंवा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स म्हणतात जर डायगोनल घटक 1 आहे आणि अविकर्णी (non-diagonal) घटक शून्य आहे.

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_{2\times2}$ आणि $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}$ युनिट मॅट्रिक्स आहे.

ऑर्डर n च्या युनिट मॅट्रिक्सला I_n असेही लिहिले जाते.

10. **सिंग्यूलर आणि नॉन सिंग्यूलर मॅट्रिक्स :** स्क्वेअर मॅट्रिक्स 'A' ला सिंग्यूलर मॅट्रिक्स म्हणतात जर $|A|=0$ म्हणजे जर 'A' त्यातून तयार झालेला निर्धारक (डीटरमीनन्ट्) शून्य आहे.

उदाहरणार्थ: मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}2&3\\2&3\end{bmatrix}$ जर $|A|=0$ (सिंग्यूलर मॅट्रिक्स)

जर $|A|\neq 0$, (निर्धारक शून्याच्या बरोबरीचे नाही) तर मॅट्रिक्स 'A' नॉन सिंग्यूलर मॅट्रिक्स असं म्हणतात.

उदाहरणार्थ: मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1&4\\3&2\end{bmatrix}$ जर $|A|=-10\neq 0$ (नॉन सिंग्यूलर मॅट्रिक्स)

11. **सममित (सिमेट्रिक) मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A=\left[a_{ij}\right]$ सममित मॅट्रिक्स म्हणतात जर $a_{ij}=a_{ji},\forall i,\, j$ किंवा $A=A'$ ($A'=A$ चा ट्रान्सपोज)

उदाहरणार्थ: $A=\begin{bmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{bmatrix}_{3\times3}, \begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ सममित मॅट्रिक्स.

12. **विषम-सममित (स्कीयू- सिमेट्रिक) मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A=[a_{ij}]$ विषम -सममित मॅट्रिक्स म्हटले जाते जर

a. $a_{ij}=-a_{ji}$, $\forall\ i$ आणि j किंवा $A=-A'$

b. सर्व विकर्ण (डायगोनल) घटक शून्य आहे .

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix}0&-h&-g\\h&0&-f\\g&f&0\end{bmatrix}_{3\times3}$ स्किव सीमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे

13. **मॅट्रिक्सचे ट्रान्स्फ़ोर्मेशन (ट्रान्सपोज):** समजा $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, जर त्याच्या रांगांचे स्तंभांमध्ये रूपांतर केले गेले आणि त्याच्या स्तंभांचे रांगेत रूपांतर केले गेले तर A पासून $n\times$ m मॅट्रिक्स मिळतों आणि जे नवीन मॅट्रिक्स बनवले गेले त्याला A चा ट्रान्स्फ़ोर्मेशन (ट्रान्सपोज) म्हणतात आणि त्याला A' किंवा A^T ने दाखवले आहे.

    उदाहरणार्थ: समजा $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\\6&5\end{bmatrix}_{3\times 2}$, तेव्हा $A^T=A'=\begin{bmatrix}1&2&6\\3&4&5\end{bmatrix}$

    जर $B=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}_{1\times 3}$ तर $B'=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{3\times 1}$

    मॅट्रिक्सच्या ट्रान्सपोजचे गुणधर्म: जर A'आणि B' अनुक्रमे A आणि B चे ट्रान्सपोज मॅट्रिक्स असल्यास,

    a. $(A')'=A$

    b. $(A+B)'=A'+B'$

    c. $(kA)'=kA'$, k एक संख्या आहे.

    d. $(AB)'=B'A'$

    e. $(ABC)'=C'B'A'$

14. **ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स**: स्क्वेअर मॅट्रिक्स 'A' ला ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स म्हणतात जर मॅट्रिक्स 'A' चा आणि त्याच्या ट्रान्सपोज मॅट्रिक्स A' चा गुणाकार युनिट मॅट्रिक्स असेल. म्हणजे $A\cdot A'=I$ येथे I एक युनिट मॅट्रिक्स आहे.

    उदाहरणार्थ: $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&2&-1\end{bmatrix}$, तेव्हा $A'=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$

    $AA'=I$ [विद्यार्थी स्वत: याची पडताळणी करू शकतात]

    म्हणून A एक ऑर्थोगॉनल मॅट्रिक्स आहे.

15. **ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स:** एक स्क्वेअर मॅट्रिक्सला ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात जर प्रमुख डायगोनल वरील किंवा त्याखालील सर्व घटक शून्य आहेत.

    ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्सचे दोन प्रकार आहेत.

    a. **अप्पर ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्स A मुख्य डायगोनल खालील सर्व घटक शून्य आहेत, तर त्याला अप्पर ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात.

    उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ प्रिन्सिपल डायगोनल

    एक अप्पर ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स आहे

    b. **लोवर ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स:** स्क्वेअर मॅट्रिक्स A मुख्य डायगोनल वरिल सर्व घटक शून्य आहेत,तर त्याला लोवर ट्रायन्ग्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरण: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ← प्रिन्सिपल डायगोनल

एक लोवर ट्रायन्युलर मॅट्रिक्स आहे.

16. मॅट्रिक्स चा कॉन्ज्युगेट:

आपण म्हणू या $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix}$

मॅट्रिक्स A चा कॉन्ज्युगेट $\overline{A}$ ने दर्शविला जातो.

$\therefore \; \overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$

टिप्पणी:

मैट्रिक्स A च्या कॉन्ज्युगेटचा ट्रान्सपोज A^{θ} ने दर्शविला जातो.

समजा $$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\overline{A}\right)' = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{\theta} = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

17. युनिटरी मॅट्रिक्स: स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ला युनिटरी मॅट्रिक्स म्हटले जाते जर $A^{\theta}A = 1$

उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$, आणि $A^{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

$AA^{\theta} = I$

18. हर्मिटियन मॅट्रिक्स: एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ ला हर्मिटियन मॅट्रिक्स म्हटले जाते जर, A चा प्रत्येक $(ij)^{\text{th}}$ घटक हा A च्या कॉन्ज्युगेटच्या $(ji)^{\text{th}}$ घटका समान असतो.

दुस-या शब्दांत सांगायचं तर आपण असं म्हणू शकतो, $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$

उदाहरणार्थ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+i \\ 2-3i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}$

मॅट्रिक्स A हा हर्मिटियन होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट म्हणजे $A=A^{\theta}$ म्हणजेच A चा कॉन्जुगेट ट्रांसपोज आहे.किंवा $A=\left(\overline{A}\right)'$.

19. **विषम-हर्मिटियन मॅट्रिक्स:** एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A=\left[a_{ij}\right]$ ला विषम -हर्मिटियन मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल जर, A चा प्रत्येक $(ij)^{\text{th}}$ घटक A च्या $(ji)^{\text{th}}$ घटकाच्या कॉम्प्लेक्स कॉन्जुगेट च्या ऋण मुल्याबरोबर असेल. दुस-या शब्दांत सांगायचं तर आपण असं म्हणू शकतो $a_{ij}=-\overline{a}_{ji}$

मुख्य विकर्ण सर्व घटक खालीलप्रमाणे असतील

$a_{ii}=-\overline{a}_{ii}$ किंवा $a_{ii}+\overline{a}_{ii}=0$

जर $a_{ii}=a+ib$ तर $\overline{a}_{ii}=a-ib$

$\Rightarrow \quad (a+ib)+(a-ib)=0$ किंवा $2a=0$ किंवा $a=0$

म्हणून a_{ii} निव्वळ काल्पनिक आहे की $a_{ii}=0$

म्हणून एक विषम -हर्मिटियन मॅट्रिक्सचे सर्व डायगोनल घटक एकतर शून्य किंवा पूर्णपणे काल्पनिक असतील.

उदाहरणार्थ: $\begin{bmatrix} i & 2-3i & 4+5i \\ -(2+3i) & 0 & 2i \\ -(4-5i) & 2i & -3i \end{bmatrix}$

मॅट्रिक्स A हा विषम -हर्मिटियन होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट अशी आहे कि,

$A^{\theta}=-A$

$\Rightarrow \quad \left(\overline{A}\right)'=-A$

20. **इडेमपोटेंट मॅट्रिक्स:** मॅट्रिक्स A ला इडेमपोटेंट मॅट्रिक्स म्हटले जाईल जर $A^2=A$

उदाहरणार्थ: जर $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

तर $A^2=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}=A$

21. **आवर्त मॅट्रिक्स:** एक मॅट्रिक्स A ला आवर्त मॅट्रिक्स म्हटले जाईल जर,

$A^{k+1}=A$

जेथे 'k' एक धन पूर्णांक आहे. जर K एक किमान मूल्य असलेला धन पूर्णांक असेल, ज्यासाठी $A^{k+1}=A$ आहे, तर

k ला A चा आवर्त म्हणतात. जर आपण $k = 1$ घेऊ, तर आपल्याला $A^2 = A$ मिळेल आणि आपण त्याला इडेमपोटेंट मॅट्रिक्स म्हणतो.

22. **नीलपोटेंट मॅट्रिक्स:** मॅट्रिक्स A ला नीलपोटेंट मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल, जर, $A^k = 0$ (शून्य मॅट्रिक्स), जेथे k धन पूर्णांक आहे; जर, तरीही k न्यूनतम धन पूर्णांक आहे ज्यासाठी $A^k = 0$ आहे, त्यावेळी k ला नीलपोटेंट मॅट्रिक्सचा निर्देशांक म्हणतात.

    उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$, तर $A^2 = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

    म्हणून मॅट्रिक्स A ला नीलपोटेंट मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल आणि त्याचा निर्देशांक 2 असेल.

23. **इन्व्होल्यूटरी मॅट्रिक्स:** मॅट्रिक्स 'A' ला इन्व्होल्यूटरी मॅट्रिक्स असे म्हटले जाईल, जर $A^2 = I$, जेथे I युनिट मॅट्रिक्स आहे.

    कारण $I^2 = I$ (नेहमी युनिट मॅट्रिक्स असेल)

    $\therefore$ युनिट मॅट्रिक्स इन्व्होल्यूटरी मॅट्रिक्स आहे.

24. **मॅट्रिक्सचा ट्रेस:** समजा A, ऑर्डर n चा एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे. तर मुख्य विकर्ण ज्या घटकांशी संबंधित आहेत त्याची बेरीज $\text{Tr}(A)$ ने दर्शविली जाते.

    म्हणून जर $A = [a_{ii}]_{n\times n}$, तर

    $$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

    आपण म्हणू या $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

    तर $trace(A) = tr(A) = 1 + (-3) + 5 = 3$

    मॅट्रिक्सच्या ट्रेस चे गुणधर्म: समजा A आणि B दोन स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत ज्यांची ऑर्डर n आणि λ एक स्केलर आहे, तेव्हा

    a. $tr(\lambda A) = \lambda\, tr\, A$ b. $tr(A+B) = tr\, A + tr\, B$ c. $tr(AB) = tr(BA)$

एक लाइट बल्बमधे स्क्रू करण्यासाठी किती मॅट्रिक्स लागतात?

फक्त $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, पण तुम्हाला त्याची पुन्हा पुन्हा अंमलबजावणी करावी लागेल.

आकृति 5.1

5.1.2 मॅट्रिक्सवरील ऑपरेशन

5.1.2.1 मॅट्रिक्सची बेरीज

दोन मॅट्रिक्सची 'बेरीज' तेव्हा केली जाते जेव्हा ते एकाच ऑर्डर चे असतात. समजा A आणि B एकाच ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर या दोन मॅट्रिक्सची बेरीज A आणि B संबंधित घटक यांची बेरिज करुन प्राप्त केले जाते.

याला $A + B$ असे दर्शविले जाते.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$, तर

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 1+1 \\ 1+1 & 2+1 & 3+1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

समान्यत: जर $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ आणि $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, तर

$$A+B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$$

5.1.2.2 मॅट्रिक्सच्या बेरजेचे गुणधर्म

एकाच ऑर्डरचे मॅट्रिक्स यांची बेरीज करता येते किंवा वजाबाकी करता येते.

a. **कम्युटेटिव्ह नियम :** एकाच ऑर्डरच्या दोन मॅट्रिक्स ची बेरीज कोणत्याही क्रमाने केली जाऊ शकते म्हणजेच कम्युटेटिव्ह नियम हा मॅट्रिक्सच्या बेरजेसाठी लागू होतो.

   जर 'A' आणि 'B' हे दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर

   $A + B = B + A$

   (विद्यार्थी एकाच ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स घेऊन त्याची पडताळणी करू शकतात)

b. **असोसिएटिव्ह नियम:** जर आपल्याकडे एकाच ऑर्डरचे तीन मॅट्रिक्स आहेत 'A', 'B' आणि 'C' , तर असोसिएटिव्हिटी नियम हा मॅट्रिक्सच्या बेरजेसाठी लागू होतो, म्हणजे.

   $A + (B + C) = (A + B) + C$ (विद्यार्थी त्याची पडताळणी करू शकतात)

5.1.2.3 मॅट्रिक्सची वजाबाकी

दोन मॅट्रिक्स वर 'वजाबाकी' हे ऑपरेशन केले जाऊ शकते, जर ते समान ऑर्डर चे असतील.

समजा 'A' आणि 'B' एकाच ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर दोन मॅट्रिक्स ची वजाबाकी हि पहिल्या मॅट्रिक्स मधील प्रत्येक घटक हा दुसऱ्या मॅट्रिक्समधील संबंधित घटकांमधून वजा करून प्राप्त झाला आहे.

याला $A - B$ असे दर्शविले जाते.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$, तर

$$A-B = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1-2 & 2-2 \\ 2-3 & 3-1 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

हा दोन मॅट्रिक्स 'A' आणि 'B' मधील फरक आहे.

5.1.2.4 मॅट्रिक्सचा स्केलर गुणाकार

जर एक मॅट्रिक्स ला स्केलर राशि k ने गुणाकार केला, तर त्याच्या प्रत्येक घटकाला k ने गुणाकार केला जातो.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$, तर

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

5.1.2.5 मॅट्रिक्सचा गुणाकार

दोन मॅट्रिक्स 'A' आणि 'B' चा गुणाकार तरच शक्य आहे जर 'A' च्या स्तंभांची संख्या 'B' च्या रांगांच्या संख्ये बरोबर असते.

समजा $A = [a_{ij}]_{p\times q}$ आणि $B = [b_{jk}]_{q\times r}$, तर गुणाकार AB असा परिभाषित केला जातो कि,

$$C = [c_{ik}]_{p\times r}$$

जेथे

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

आणि आपण लिहू शकतो, $C = AB$

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$ तर

$$AB = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1c_1 & R_1c_2 & R_1c_3 \\ R_2c_1 & R_2c_2 & R_2c_3 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

5.1.2.6 मॅट्रिक्स गुणाकाराचे गुणधर्म

a. मॅट्रिक्सचा गुणाकार अनुक्रमिक नाही. उदा. जर 'A' आणि 'B' दोन मॅट्रिक्स आहेत, तर

$AB \neq BA$ (समान असणे आवश्यक नाही)

b. मॅट्रिक्स गुणाकार हा असोसिएटिव्ह आहे, तीन मॅट्रिक्स 'A', 'B' आणि 'C', जर आपल्याकडे असतील तर

$$A(BC) = (AB)C$$

c. मॅट्रिक्सचा गुणाकार बेरजेच्या संदर्भात वितरक (डीस्ट्रिब्युटिव्ह) आहे. तीन मॅट्रिक्स A, B आणि C, जर आपल्याकडे असतील तर

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

d. मॅट्रिक्स 'A' आणि युनिट मॅट्रिक्स 'I' यांचा गुणाकार हा स्वत: मॅट्रिक्स 'A' असतो. उदा.

$$AI = IA = A$$

e. जर मॅट्रिक्स 'A' चा गुणाकार व्यस्त अस्तित्वात असेल तर $|A| \neq 0$ म्हणजे.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times2}$

तर गुणाकार AB मिळवा आणि BA का परिभाषित होत नाही हे स्पष्ट करा?

उकल: येथे A च्या स्तंभांची संख्या (3×3) = B च्या रांगांची संख्या (3×2), म्हणून गुणाकार AB परिभाषित केला आहे.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

आता, BA साठी, B च्या स्तंभांची संख्या $(3 \times 2) \neq A$ च्या रांगांची संख्या (3×3) म्हणून गुणाकार BA परिभाषित नाही.

टिप्पणी:

1. जर A आणि B अनुक्रमे $m \times n$ आणि $p \times q$ ऑर्डरचे दोन मॅट्रिक्स आहे, तर गुणाकार AB तरच शक्य आहे जर $n = p$ आणि AB चे ऑर्डर $m \times q$ होईल.
2. दोन मॅट्रिक्स 'A' आणि 'B' जर गुणाकार AB अस्तित्वात असेल, तर गुणाकार BA अस्तित्वात असेल किंवा नसेल.

चित्रमय मांडणी

मॅट्रिक्स गुणाकाराच्या टप्प्याटप्प्याने प्रक्षेपण (Visulaization): *http://matrixmultiplication.xyz*

अभ्यास 5.1

1. जर $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ तर खालील मूल्य शोधा.

   a. $2A + 3B$ b. $3A - 4B$

2. दोन मॅट्रिक्स A आणि B अशा प्रकारे आहेत कि $3A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ आणि $-4A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ तर मॅट्रिक्स A आणि B चे मूल्य शोधा.

3. जर $A = diag\,[2, 9, 4]$ आणि $B = diag\,[-3, 7, 6]$ तर खालील मूल्य शोधा.

   a. $A + B$ b. $A - B$ c. $7A + 2B$ d. $9A - 11B$

4. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, तर मॅट्रिक्स X चे मूल्य अशा प्रकारे शोधा कि $2A + 3X = 5B$.

5. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ दिल्यावर खालील मूल्य शोधा.

   a. AB   b. BA

   हे देखील सिद्ध करा कि $AB \neq BA$ आहे.

उत्तरे

1. a. $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 8 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 13 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

3. a. $diag[-1,\ 16,\ 10]$ b. $diag[5,\ 2,\ -2]$

   c. $diag[8,\ 77,\ 40]$ d. $diag[51,\ 4,\ -30]$

4. $X = \begin{bmatrix} 12 & 4/3 \\ 4 & -14/3 \\ 25/3 & 28/3 \end{bmatrix}$

5. a. $\begin{bmatrix} 3 & 12 & 11 \\ 4 & 13 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 11 & 9 & 13 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

5.2 एलेमेंट्री ऑपरेशन्स (रूपांतरण)

मॅट्रिक्सवरील खालील पैकी एका ऑपरेशनला प्रारंभिक रूपांतरण किंवा ई-रूपांतरण म्हणतात.

1. कोणत्याही दोन रांगांची (किंवा स्तंभांची) देवाणघेवाण करणे म्हणजे i^{th} आणि j^{th} रांगा बदलण्यासाठी R_{ij} किंवा $R_i \leftrightarrow R_j$ सूचित केले जाते.

   तसेच, i^{th} आणि j^{th} स्तंभांचे परस्परबदल C_{ij} किंवा $C_i \leftrightarrow C_j$ सूचित केले जाते.

2. कोणत्याही रो (किंवा कॉलम) घटकांचा शून्य नसलेल्या स्केलरने गुणाकार i^{th} रो ला k ने केलेला गुणाकार kR_i द्वारे दर्शविले जाते त्याचप्रमाणे, i कॉलम ला k ने केलेला गुणाकार kC_i द्वारे दर्शवीला जातो.

3. कोणत्याही रो च्या (किंवा कॉलम) घटकांना स्थिरांकाने गुणाकार करून आणि संबंधित इतर कोणत्याही रो चे (किंवा कॉलम) घटक यांची बेरीज.

5.2.1 एलेमेंटरी मॅट्रिक्स

प्राथमिक रूपांतरण लागू करून युनिट मॅट्रिक्समधून मिळवलेल्या मॅट्रिक्सला एलेमेंटरी मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदाहरण: समजा $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3$ लागू करून, आपल्याला मिळेल

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ हा एक एलेमेंटरी मॅट्रिक्स आहे.

5.3 मॅट्रिक्सचा इचीलॉन फॉर्म

5.3.1 मॅट्रिक्सचा रो- इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्स रो- इचीलॉन स्वरूपात आहे असे म्हटले जाते जर

a. सर्व शून्य रो, जर असतील, तर ते मॅट्रिक्सच्या तळाशी असतील.

b. प्रत्येक रो मधील पहिला शून्य नसलेला घटक हा मागील रो मधील पहिल्या शून्य नसलेल्या घटकाच्या उजव्या बाजूला असतो.

टीप: कोणत्याही रो च्या पहिल्या शून्य नसलेल्या घटकास की (key)-घटक किंवा पिव्होट घटक म्हणतात.

5.3.2 मॅट्रिक्सचा रो रिड्युसड इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्सला रो रिड्युसड इचीलॉन फॉर्म असे म्हटले जाते जर

a. तो रो इचीलॉन स्वरूपात आहे.

b. प्रत्येक मुख्य घटक एक (1) आहे

c. प्रत्येक कॉलममधील मुख्य घटकावरील सर्व घटक शून्य आहेत.

5.3.3 मॅट्रिक्सचा कॉलम इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्सला कॉलम इचीलॉन फॉर्म असे म्हटले जाते जर

a. सर्व शून्य कॉलम, जर असतील, तर मॅट्रिक्सच्या अत्यंत उजवीकडे असतील.

b. प्रत्येक कॉलमचा पहिला शून्य नसलेला घटक आधीच्या कॉलम मधील शून्य नसलेल्या घटकाच्या खाली असतो.

टिप्पणी: कोणत्याही कॉलमच्या पहिल्या शून्य नसलेल्या घटकाला की-घटक किंवा पिव्होट घटक म्हणतात.

5.3.4 मॅट्रिक्सचा कॉलम रिड्युसड इचीलॉन फॉर्म

मॅट्रिक्स हा कॉलम रिड्युसड इचीलॉन स्वरूपात आहे असे म्हटले जाते जर

a. तो कॉलम इचीलॉन स्वरूपात आहे.

b. प्रत्येक कि - घटक एक (1) आहे.

c. प्रत्येक रो मधील कि-घटकाच्या डावीकडील घटक सर्व शून्य आहेत.

टिप्पणी: जर A हा रो इचीलॉन फॉर्म मध्ये असेल तर त्याचा ट्रान्सपोज A' हा कॉलम इचीलॉन स्वरूपात असतो.

5.4 डिटरमिनंट्स

डिटरमिनंटचा सिद्धांत लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीच्या अभ्यासातून निर्माण झाला आहे. डिटरमिनंट एक स्केलर मूल्य आहे जे स्क्वेअर मॅट्रिक्सच्या घटकांचे फंक्शन आहे. चौरस मॅट्रिक्स $A=\left[a_{ij}\right]$ चा डिटरमिनंट, det A किंवा det (A) किंवा $|A|$ द्वारे दर्शविले जातो.

1 × 1 ऑर्डर असलेल्या मॅट्रिक्स $A = [a]$ चा डिटरमिनंट, $|A| = a$ म्हणून दर्शविले जाते आणि ऑर्डर एकचा डिटरमिनंट म्हणतात.

2 × 2 च्या मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ चा डिटरमिनंट $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ असे दर्शविले जाते आणि त्याला ऑर्डर दोनचा डिटरमिनंट म्हणतात.

अशा प्रकारे, 3 × 3 चा मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ चा डिटरमिनंट $|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ असे दर्शविले जाते आणि त्याला ऑर्डर तीन चा डिटरमिनंट म्हणतात.

5.4.1 ऑर्डर दोन (किंवा दुसरी ऑर्डर) च्या डिटरमिनंटचे स्पष्टीकरण

दोन अज्ञात x आणि y असलेल्या दोन लिनियर समीकरणांची खालील प्रणाली विचारात घ्या.

$$a_1x+b_1y=0 \qquad \ldots(1)$$

$$a_2x+b_2y=0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) वरून आपल्याला मिळते,

$$\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1} \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) वरून आपल्याला मिळते,

$$\frac{x}{y}=-\frac{b_2}{a_2} \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) आणि (4) वरून, x आणि y काढून टाकून, आपल्याला मिळते

$$-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

$\Rightarrow$ $$a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

$a_1b_2 - b_1a_2$ याला ऑर्डर दोनचा डिटरमिनंट म्हणतात.

$a_1b_2 - b_1a_2$ ही संख्या अधिक सोयीस्करपणे $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ चिन्हाद्वारे दर्शविली जाते.

a_1, a_2, b_1, b_2 या संख्यांना डिटरमिनंटचे घटक म्हणतात.

टिप्पणी:
ऑर्डर 2×2 च्या डिटरमिनंटचा विस्तार करण्यासाठी, आपण क्रॉस-गुणाकाराचा नियम लागू करतो.
डिटरमिनंटची किंमत $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$ असेल.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.1: $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ च्या डिटरमिनंटचे मूल्य शोधा.

उकल: समजा

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 35 + 6 = 41$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.2: x चे मूल्य शोधा, जर $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

उकल: समजा

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2x^2 - 18 = 18 - 18$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$ **(उकल)**

5.4.2 तिसऱ्या ऑर्डरच्या डिटरमिनंटचा विस्तार

तीन अज्ञात x, y आणि z असणाऱ्या तीन लिनियर समीकरणांची खालील प्रणाली विचारात घ्या.

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad ...(5)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad ...(6)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad ...(7)$$

वरील तीन समीकरणांच्या संचातून x, y, z दूर करण्यासाठी, समी (6) आणि समी (7) सोडवून

$$\frac{x}{b_2c_3 - c_2b_3} = \frac{y}{c_2a_3 - a_2c_3} = \frac{z}{a_2b_3 - b_2a_3} = k$$

$$x = k\left(b_2c_3 - c_2b_3\right)$$

$$y = k\left(c_2a_3 - a_2c_3\right)$$

$$z = k\left(a_2b_3 - b_2a_3\right)$$

x, y, z ही मूल्ये समीकरण (5) मध्ये ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$a_1\left(b_2c_3 - c_2b_3\right)k + b_1\left(c_2a_3 - a_2c_3\right)k + c_1\left(a_2b_3 - b_2a_3\right)k = 0$$

$$a_1\left(b_2c_3 - c_2b_3\right) + b_1\left(c_2a_3 - a_2c_3\right) + c_1\left(a_2b_3 - b_2a_3\right) = 0 \quad \ldots(8)$$

(विद्यार्थ्यांनी स्वतः विचार केला पाहिजे की k चे मूल्य शून्य का असू शकत नाही)

समीकरण (8) च्या डाव्या हाताच्या या पदावलीला तिसऱ्या क्रमाचा डिटरमिनंट म्हणतात. प्रतीकात्मकपणे, ते असे लिहिले जाते

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\left(b_2c_3 - c_2b_3\right) + b_1\left(c_2a_3 - a_2c_3\right) + c_1\left(a_2b_3 - b_2a_3\right)$$

किंवा

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

टिपण्णी:

i. डिटरमिनंटचा वरील विस्तार पहिल्या रो च्या दृष्टीने विस्तार म्हणून ओळखला जातो.
   त्याचप्रमाणे, डिटरमिनंट कोणत्याही रो किंवा कोणत्याही कॉलम सह आणि प्रत्येक बाबतीत विस्तारित केलेल्या डिटरमिनंटचे मूल्य समान राहते.

ii. प्रत्येक पदाच्या (term) सुरुवातीला चिन्ह = $(-1)^{i+j}$, जेथे 'i' आणि 'j' रो आणि कॉलम सूचित करतात ज्यात हे घटक असतात.
   हे कोणत्याही ऑर्डरच्या डिटरमिनंटसाठी वैध आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{bmatrix}$ च्या डिटरमिनंटचे मूल्य शोधा.

उकल:

दिले आहे $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{bmatrix}$$

तेव्हा $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 11 & 38 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 31 & 38 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 31 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 1(228-110) - 3(76-310) + 5(22-186)$$

$$= 1(118) - 3(-234) + 5(-164) = 118 + 702 - 820$$

$$= 0$$

(उकल)

उदाहरण 5.4: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, मग दाखवा कि $|3A| = 27|A|$

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

तर $|3A|$ चा डिटरमिनंट $|3A|=\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\0 & 3 & 6\\0 & 0 & 12\end{vmatrix}$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून

$$|3A|=3\begin{vmatrix}3 & 6\\0 & 12\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 6\\0 & 12\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 3\\0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=3(36-0)-(0-0)+3(0-0)$$

$$=108-0+0$$

$$=108 \text{ (L.H.S)}$$

आणि $$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून

$$|A|=1\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 2\\0 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}$$

$$|A|=1(4)-0+1(0)$$

$$=4$$

तेव्हा $27|A|=27\times 4=108$

म्हणून $|3A|=27|A|$ **(सिद्ध केले)**

5.4.3 डिटरमिनंटचे गुणधर्म

गुणधर्म i. सर्व रो कॉलम मध्ये आणि सर्व कॉलम रो मध्ये बदलल्यास डिटरमिनंटचे मूल्य तेच राहते.

उदाहरण 5.5: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल. दिले आहे

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

दुसऱ्या रो च्या बाजूने विस्तार करून

$$\Delta=36$$ (विद्यार्थी स्वतः सोडवू शकतात)

सर्व रो हे कॉलम मध्ये बदलून, आपलल्याला मिळेल.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून

$$\Delta_1 = 36$$ (विद्यार्थी याची पडताळणी करू शकतात)

म्हणून $\Delta = \Delta_1$

गुणधर्म ii. जर डिटरमिनंटच्या कोणत्याही दोन रो किंवा कोणत्याही दोन कॉलमची देवाणघेवाण केली तर डिटरमिनंटचे मूल्य देखील फक्त चिन्हाने बदलते.

उदाहरण 5.6: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिले आहे

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार केल्यानंतर, आपल्याकडे आहे.

$$\Delta = 2$$

गुणधर्म ii वापरून, म्हणजे दुसऱ्या आणि तिसऱ्या रो चे आदान -प्रदान करून, आपल्याला मिळेल.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ (समजा)}$$

पहिल्या रो च्या संदर्भात विस्तार करून, आपल्याला मिळेल.

$$\Delta_1 = \quad -2$$

म्हणून $\Delta = -\Delta_1$

गुणधर्म iii. जर डिटरमिनंटच्या कोणत्याही दोन रो किंवा दोन कॉलम एकसारखे असतील, तर डिटरमिनंटचे मूल्य नेहमी शून्य असते.

उदाहरण 5.7: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिले आहे

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = 0$$ (विद्यार्थी गणना करू शकतात)

म्हणून $\Delta = 0$

गुणधर्म iv. जर डिटरमिनंटच्या रो किंवा कॉलमचा प्रत्येक घटक समान स्थिरांकाने गुणाकार केला असेल तर डिटरमिनंटचे मूल्य देखील त्या घटकाद्वारे गुणाकार केले जाते.

उदाहरण 5.8: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिले आहे

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या संदर्भात विस्तार केल्याने, आपल्यला मिळेल

$$\Delta = -3$$

पहिल्या रो ला 5 ने गुणाकार केल्यास, आपल्याला मिळते

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ (समजा)}$$

$$= -15 = 5(\Delta)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_1 = 5\Delta$$

गुणधर्म v. जर एका रो(किंवा कॉलम) चे घटक अनुक्रमे इतर रो (किंवा कॉलम) च्या संबंधित घटकांच्या कोणत्याही स्थिरांकाने गुणाकार करून त्यांची बेरीज केली तर डिटरमिनंटचे मूल्य बदलत नाही.

उदाहरण 5.9: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिले आहे

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = -2$$

दुसऱ्या कॉलमला 3 ने गुणाकार केल्यावर आणि पहिला कॉलम यांची बेरीज केल्यास, आपल्याला मिळते

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+6 & 2 & 4 \\ 3+3 & 1 & 5 \\ 0+12 & 4 & 6 \end{vmatrix} \text{ (समजा)}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

पहिल्या रो च्या बाजूने विस्तार करून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta_1 = -2$$

$\Rightarrow$ $$\Delta = \Delta_1$$

गुणधर्म vi. जर डिटरमिनंटच्या रो (किंवा कॉलम) मधील प्रत्येक घटक हा दोन किंवा जास्त पदांची बेरीज म्हणून व्यक्त केला असेल तर डिटरमिनंट देखील दोन (किंवा अधिक) डिटरमिनंटची बेरीज म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो.

उदाहरण 5.10: $\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उकल: दिले आहे

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1$$

(विद्यार्थी गणना आणि पडताळणी करू शकतात)

> **टीप:** जर n ऑर्डर असलेला A हा चौरस मॅट्रिक्स असेल तर $|k.A| = k^n |A|$

उदाहरण 5.11: डिटरमिनंट चे गुणधर्म वापरून हे सिद्ध करा कि

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

उकल: समजा

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & b^2-a^2 & ac-bc \\ c-a & c^2-a^2 & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & (b-a)(b+a) & c(a-b) \\ c-a & (c-a)(c+a) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

अनुक्रमे R_2 आणि R_3 मधून (b - a) आणि (c - a) बाहेर काढून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 1 & a+c & -b \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_3 \to R_3 - R_2$, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & c-b & c-b \end{vmatrix}$$

R_3 मधून (c - b) कॉमन काढून, आपल्याला आहे

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

तिसऱ्या रोद्वारे ऑपरेशन करून, आपल्याला मिळेल

$$= \left[(b-a)(c-a)(c-b)\right](-1)\begin{vmatrix} a & bc-a^2 \\ 1 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \left[(b-a)(c-a)(c-b)\right](-1)\left[-ac-a^2-ab-bc+a^2\right]$$

$$= \left[(b-a)(c-a)(c-b)\right](-1)\left[(-1)(ac+ab+bc)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$ **(सिद्ध केले)**

उदाहरण 5.12: दाखवा कि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & abc \\ 1 & b & bca \\ 1 & c & cab \end{vmatrix} = 0$

उकल: समजा

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & abc \\ 1 & b & bca \\ 1 & c & cab \end{vmatrix}$$

c_3 मधून abc कॉमन काढून, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$ [पहिला आणि तिसरा कॉलम सारखा असल्याने] [गुणधर्म (iii) नुसार]

उदाहरण 5.13: डिटरमिनंट चे गुणधर्म वापरून हे सिद्ध करा कि $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$

उकल: दिले आहे

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $c_1 \to c_1 + c_2 + c_3$, आपल्याला मिळेल

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

c_1 मधून $(x + 2)$ कॉमन काढून, आपल्याला मिळेल

$$= (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_2 \to R_2 - R_1; R_3 \to R_3 - R_1$, आपल्याकडे आहे

$$\Delta = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (x-1) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1) \end{vmatrix}$$

अनुक्रमे R_2 आणि R_3 मधून $(x - 1)$ कॉमन काढून, आपल्याकडे आहे

$$\Delta = (x+2)(x-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R_2 च्या संदर्भात विस्तार करून,

$$\Delta = (x+2)(x-1)^2 \cdot (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2 \cdot (1)$$

$$= (x+2)(x-1)^2$$ **(सिद्ध केले)**

अभ्यास 5.2

1. खालील डिटरमिनंटचे मूल्य शोधा:

a. $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{5} \\ \sqrt{20} & \sqrt{24} \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 210 & 117 & 345 \\ 19 & 9 & 34 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

2. दिलेल्या डिटरमिनंटचे मूल्य काढा. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

a. दुसऱ्या ओळीच्या मदतीने

b. तिसऱ्या कॉलमच्या मदतीने

3. दिलेल्या डिटरमिनंटचे मूल्य काढा. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \sec\theta \\ \tan\theta & -\sec\theta & \tan\theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. डिटरमिनंटच्या गुणधर्मांचा वापर करून, खालील सिद्ध करा:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

b. $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

c. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

d. $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

e. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$

5. $x = 2$ हे दिलेल्या $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ समीकरणाचे मूळ आहे हे दाखवा आणि ते पूर्णपणे सोडवा.

6. जर a, b आणि c वास्तविक असतील आणि $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$, तर दाखवा की एकतर

   $a + b + c = 0$ किंवा $a = b = c$.

उत्तरे

1. a. $x^3 - x^2 + 2$ b. 2 c. 2691 d. 40

2. a. 23 b. 23 3. $\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)$

5.4.4 डिटरमिनंटचे अनुप्रयोग

5.4.4.1 डिटरमिनंट वापरून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढणे

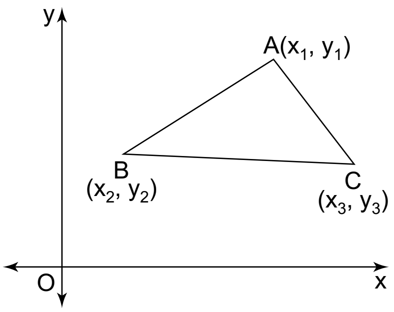
शिरोबिंदू (x_1, y_1), (x_2, y_2) आणि (x_3, y_3) असलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे आहे.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

किंवा
$$= \frac{1}{2}\left[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right]$$

डिटरमिनंटच्या फॉर्म मध्ये हे एक्स्प्रेशन असे लिहिले जाऊ शकते

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ आणि } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$



आकृति 5.2

टिप्पणी:

1. डिटरमिनंट ऋण असू शकते परंतु क्षेत्र नेहमीच धन असते म्हणजे ≥ 0.
2. जर त्रिकोणाचे क्षेत्र दिलेले असेल तर गणनेसाठी धन तसेच ऋण किमती वापरा.
3. तीन पॉइंट्स एकरेषीय असतील जर आणि फक्त जर तीन बिंदूंनी बनलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्र शून्य असेल.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.14: ज्या त्रिकोणाचे शिरोबिंदू (2, 7), (1, 1), (10, 8) आहेत त्या त्रिकोणाचे क्षेत्र शोधा.

उकल. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे दिले आहे

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत}\quad \begin{matrix} (2, & 7), & (1, & 1), & (10, & 8) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{matrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[1(8-10)-1(16-70)+1(2-7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1(-2)-1(-54)+1(-5)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2+54-5\right] = \frac{47}{2}$$

अशा प्रकारे, त्रिकोणाचे अपेक्षित क्षेत्र 47/2 चौरस एकक आहे

उदाहरण 5.15: ज्या त्रिकोणाचे शिरोबिंदू (−2, −3), (3, 2), (−1, −8) आहेत अशा त्रिकोणाचे क्षेत्र शोधा.

उकल:

$$\text{त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत}\quad \begin{matrix} (-2, & -3), & (3, & 2), & (-1, & -8) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{matrix}$$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे दिले आहे

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1(-24+2)-1(16-3)+1(-4+9)\right]$$ [R_1 च्या संदर्भात विस्तारित करून]

$$= \frac{1}{2}\left[-22-13+5\right] = -\frac{30}{2} = -15$$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ नेहमी ऋणात्मक नसल्यामुळे, त्रिकोणाचे अपेक्षित क्षेत्र 15 चौरस युनिट्स आहे.

उदाहरण 5.16: त्रिकोणाचे क्षेत्र 4 चौरस एकके आणि शिरोबिंदू (−2, 0), (0, 4), (0, k) असल्यास k चे मूल्य शोधा.

उकल: त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असे दिले जाते $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

येथे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 4 वर्ग युनिट आहे.

$$\Delta = \pm 4$$

[आपल्याला माहित आहे की क्षेत्रफळ नेहमीच धन असते परंतु डिटरमिनंट हा धन किंवा ऋण असू शकते]

$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 0, y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = k$ ठेऊन

$$\pm 4 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & k \end{vmatrix}$$

$$\pm 4 = \frac{1}{2}[-(-2)(k-4)]$$ [R_2 च्या संदर्भात विस्तार करून]

$$\pm 8 = 2(k-4)$$

$$\pm 4 = k - 4$$

धन चिन्ह घेऊन आणि ऋण चिन्ह घेऊन.

$4 = k - 4$ आणि $-4 = k - 4$

$4 + 4 = k$	$-4 + 4 = k$
$8 = k$	$0 = k$
$\therefore \quad k = 8$	$\therefore \quad k = 0$

त्यामुळे अपेक्षित मूल्य $k = 8, 0$.

उदाहरण 5.17: $(-2, -1), (7, 8), (-3, -2)$ हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उकल: आपल्याला माहित आहे की तीन बिंदू एकाच रेषेवर असल्यास ते एकरेषीय असतात.

$\therefore$ त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 0

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$(x_1, y_1) = (-2, -1), (x_2, y_2) = (7, 8), (x_3, y_3) = (-3, -2)$ ठेवल्यावर

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}[1(-14+24) - 1(4-3) + 1(-16+7)]$$ [R_1 च्या संदर्भात विस्तार करून]

$$= \frac{1}{2}[10 - 1 - 9] = 0$$

$$\Delta = 0$$

म्हणून, दिलेले बिंदू एकरेषीय आहेत.

अभ्यास 5.3

1. खालीलपैकी प्रत्येकात बिंदूसह शिरोबिंदूं दिलेल्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधा.
   a. (1, 0), (6, 0), (4, 3)
   b. (3, 8), (−4, 2), (5, 1)
2. खाली दिलेल्यामध्ये k चे मूल्य शोधा जर
   i. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 4 चौरस एकक आहे आणि शिरोबिंदू $(k, 0)$, (4, 0), (0, 2) आहेत.
   ii. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 35 चौरस एकक आहे आणि शिरोबिंदू (2, −6), (5, 4), $(k, 4)$ आहेत.
3. $A\ (a, b + c), B\ (b, c + a), C\ (a, a + b)$ हे बिंदू एकरेषीय आहेत हे दाखवा.

उत्तरे

1. a. 15/2 b. 61/2 **2.** i. 0, 8 ii. 12, −2

5.4.5 मायनॉर्स आणि कोफॅक्टर्स

5.4.5.1 मायनॉर्स

समजा n ऑर्डर असलेला $A = \left[a_{ij}\right]$ असा मॅट्रिक्स आहे कि $|A| = |a_{ij}|$

तर मॅट्रिक्स A चा डिटरमिनंट जो रो आणि कॉलम ज्यामध्ये घटक आहे तो हटवून प्राप्त केला जातो तो मायनॉर म्हणून परिभाषित केला जातो. मॅट्रिक्स कोफॅक्टर चे मूल्य काढण्यासाठी मायनॉर आवश्यक आहेत.

समजा $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

अशा प्रकारे, a_1, b_1 आणि c_1 चे मायनॉर्स अनुक्रमे हे $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ आहेत.

अशा प्रकारे, a_2 , b_2 आणि c_2 चे मायनॉर्स अनुक्रमे हे $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ आहेत.

अशा प्रकारे, a_3, b_3 आणि c_3 चे मायनॉर्स अनुक्रमे हे $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ आहेत.

5.4.5.2 कोफॅक्टर

रो क्रमांक i आणि कॉलम क्रमांक j च्या कोणत्याही घटकाचा कोफॅक्टर असेल.

$$\text{कोफॅक्टर} = (-1)^{i+j}\ \text{मायनॉर}$$

डिटरमिनंटस आणि चौरस मॅट्रिक्सचा व्यस्त काढण्यासाठी कोफॅक्टर उपयुक्त आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.18: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ मॅट्रिक्सचे सर्व मायनॉर्स आणि कोफॅक्टर शोधा.

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

येथे

$$a_{11} = 1,\ \ a_{12} = 2,\ \ a_{13} = 3$$

$$a_{21} = 4,\ \ a_{22} = 3,\ \ a_{23} = 2$$

$$a_{31} = 7,\ \ a_{32} = 0,\ \ a_{33} = -1$$

$$M_{11} = a_{11} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{12} = a_{12} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 14 = -18$$

$$M_{13} = a_{13} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 21 = -21$$

$$M_{21} = a_{21} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$$

$$M_{22} = a_{22} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 21 = -22$$

$$M_{23} = a_{23} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14$$

$$M_{31} = a_{31} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$M_{32} = a_{32} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$M_{33} = a_{33} \text{ चा मायनॉर } = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$A_{11} = a_{11} \text{ चा कोफॅक्टर } = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (-3) = -3$$

$$A_{12} = a_{12} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (-18) = 18$$

$$A_{13} = a_{13} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 (-21) = -21$$

$$A_{21} = a_{21} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$

$$A_{22} = a_{22} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (-22) = -22$$

$$A_{23} = a_{23} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 (-14) = 14$$

$$A_{31} = a_{31} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 (-5) = -5$$

$$A_{32} = a_{32} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 (-10) = 10$$

$$A_{33} = a_{33} \text{ चा कोफॅकटर} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 (-5) = -5$$

5.4.6 स्क्वेअर मॅट्रिक्सचा अडजॉईन्ट

A च्या प्रत्येक घटकाची जागा त्याच्या $|A|$ मधील कोफॅक्टरद्वारे बदलून आणि मिळालेल्या मॅट्रिक्सचा ट्रान्स्पोज घेऊन स्क्वेअर मॅट्रिक्स A चा अडजॉईन्ट मिळतो

समजा $|A|$ हा स्क्वेअर मॅट्रिक्स A चा डिटरमिनंट आहे.

अशा प्रकारे, जर $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, तर

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$|A|$ मधील घटकांच्या कोफॅकटर द्वारे तयार केलेले मॅट्रिक्स दिला आहे.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

जेथे $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - c_2b_3)$

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - c_1b_3)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - c_2a_3)$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1c_3 - c_1a_3)$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -(a_1c_2 - c_1a_2)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - b_1a_3)$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - b_1a_2)$$

मग, कोफॅक्टर मॅट्रिक्सचा ट्रान्स्पोज आहे $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ ज्याला A मॅट्रिक्सचा अडजॉईन्ट म्हणतात आणि त्याला adj.A असे दर्शविले जाते.

5.4.6.1 अडजॉईन्टचे गुणधर्म

मॅट्रिक्स A आणि त्याचा अडजॉईन्ट यांचा गुणाकार हा A च्या डिटरमिनंट ने गुणाकार केलेल्या युनिट मॅट्रिक्सच्या बरोबर असतो.

प्रतीकात्मकपणे, जर A एक चौरस मॅट्रिक्स असेल तर

$$adj.(A).\, A = A.(adj\ A) = |A|.I$$

जेथे I, हा युनिट मॅट्रिक्स आहे

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.19: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ चा अडजॉईन्ट शोधा.

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

येथे $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{21} = 3, a_{22} = 5$

a_{11}, a_{12}, a_{21} आणि a_{22} चे कोफॅक्टर दिले आहेत

$A_{11} = a_{11}$ चा अडजॉईन्ट $= (-1)^{1+1}\, 5 = 5$

$A_{12} = a_{12}$ चा अडजॉईन्ट $= (-1)^{1+2}\,(3) = -3$

$A_{21} = a_{21}$ चा अडजॉईन्ट $= (-1)^{2+1}\,(3) = -3$

$$A_{22} = a_{22} \text{ चा अडजॉईन्ट } = (-1)^{2+2}(2) = 2$$

म्हणून $$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.20: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ अडजॉईन्ट शोधा.

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

येथे $$a_{11} = 1, \ a_{12} = 2, \ a_{13} = 4$$

$$a_{21} = 2, \ a_{22} = 3, \ a_{23} = 2$$

$$a_{31} = 3, \ a_{32} = 3, \ a_{33} = 4$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ चे कोफॅक्टर आधी चर्चा केल्याप्रमाणे मोजले जातात.

$$A_{11} = 6, \ A_{12} = -2, \ A_{13} = -3$$

$$A_{21} = 4, \ A_{22} = -8, \ A_{23} = 3$$

$$A_{31} = -8, \ A_{32} = 6, \ A_{33} = -1$$

म्हणून $$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$adj.(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -8 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

5.4.6.2 मॅट्रिक्सचा व्यस्त

जर A आणि B हे सारख्या ऑर्डर चे मॅट्रिक्स असे असतील कि $AB = BA = I$, तर B ला A चा व्यस्त म्हणतात म्हणजेच $B = A^{-1}$ आणि A हा B चा व्यस्त आहे.

टिपण्णी

1. चौरस मॅट्रिक्स 'A' ला व्यस्त असण्याची अट म्हणजे मॅट्रिक्स 'A' हा नॉन सिंग्युलर असावा म्हणजेच $|A| \neq 0$.
2. कोणताही स्क्वेअर मॅट्रिक्स ज्याला व्यस्त आहे त्याला इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स म्हणतात.
3. जर कोणत्याही स्क्वेअर मॅट्रिक्सला व्यस्त असेल तर तो नेहमीच अद्वितीय असते.

मॅट्रिक्स 'A' चा व्यस्त त्याच्या अडजॉईन्ट मॅट्रिक्सच्या मदतीने शोधण्यासाठी, आपल्याकडे आहे

$$A^{-1} = \frac{adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}(Adj.A)$$

(विद्यार्थी आधी नमूद केलेल्या अडजॉईन्टच्या गुणधर्माच्या मदतीने हि निष्पत्ती शोधू शकतात.)

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.21: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त शोधा

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $|A| = 10 - 9 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ $|A| \neq 0$, म्हणून 'A' हा नॉन सिंग्युलर आहे आणि A^{-1} अस्तित्वात आहे.

म्हणून, आपल्याला कोफॅक्टर शोधण्याची आवश्यकता आहे.

$A_{11} = a_{11}$ चा कोफॅक्टर$= 5$

$A_{12} = a_{12}$ चा कोफॅक्टर$= -3$

$A_{21} = a_{21}$ चा कोफॅक्टर$= -3$

$A_{22} = a_{22}$ चा कोफॅक्टर$= 2$

$\Rightarrow$ $\text{Adj. }(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

आता $A^{-1} = \frac{Adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.22: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त शोधा आणि हे देखील पडताळणी करा की $A A^{-1} = A^{-1} A = I$

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

म्हणून आपल्याजवळ आहे,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

अशा प्रकारे $|A| \neq 0$ म्हणजे 'A' नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे आणि म्हणून A^{-1} अस्तित्वात आहे,

A^{-1} शोधण्यासाठी, आपल्याला A चे अडजॉईन्ट शोधावे लागतील, यासाठी आपल्याला A चे कोफॅक्टर शोधावे लागतील.

आपल्याकडे आहे, $A_{11} = -9, \; A_{12} = -8, \; A_{13} = -2$

$$A_{21} = 8, \quad A_{22} = 7, \quad A_{23} = 2$$

$$A_{31} = -5, \; A_{32} = -4, \; A_{33} = -1$$

$\therefore$

$$adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

म्हणून,

$$A^{-1} = \frac{Adj.(A)}{|A|}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

पडताळणीसाठी $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (विद्यार्थी स्वतः प्रयत्न करू शकतात.)

अभ्यास 5.4

दिलेल्या मॅट्रिक्ससाठी अडजॉईन्ट वापरून मायनॉर्स, कोफॅक्टर, अडजॉईन्ट आणि व्यस्त यावर आधारित प्रश्न.

1. दिलेल्या डिटरमिनंटसाठी प्रत्येक घटकाचे सर्व मायनॉर्स आणि कोफॅक्टर शोधा. तसेच दिलेला डिटरमिनंट

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$ सोडवा.

2. दिलेल्या मॅट्रिक्सचा अडजॉईन्ट शोधा:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

3. दिलेल्या मॅट्रिक्सचा अडजॉईन्ट शोधा: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. खालील मॅट्रिक्सचे व्यस्त शोधा:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

5. दिलेल्या मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधा: $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. मॅट्रिक्स दिला आहे $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$. जेथे कोणताच d_1, d_2, d_3 आणि d_4 शून्य नाही. D^{-1} शोधा.

उत्तरे

1. $M_{11} = (ab^2 - ac^2)$, $M_{12} = (ab - ac)$, $M_{13} = (c - b)$

$M_{21} = (a^2b - bc^2)$, $M_{22} = (ab - bc)$, $M_{23} = (c - a)$

$M_{31} = (ca^2 - cb^2)$, $M_{32} = (ca - bc)$, $M_{33} = (b - a)$

$A_{11} = (ab^2 - ac^2)$, $A_{12} = (ac - ab)$, $A_{13} = (c - b)$

$A_{21} = (bc^2 - a^2b)$, $A_{22} = (ab - bc)$, $A_{23} = (a - c)$

$A_{31} = (ca^2 - cb^2)$, $A_{32} = (bc - ca)$, $A_{33} = (b - a)$, $|A| = (a - b)(b - c)(c - a)$

2. a. $\begin{bmatrix} 15 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

4. a. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -15 \\ 3 & 1 & -9 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ b. $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -20 \\ 2 & 3 & -15 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_4 \end{bmatrix}$

मनोरंजक माहिती

- विविध इमारतींची रचना किंवा डिझाइन मॅट्रिक्सच्या मदतीने बदलता येते. आपण "बुर्ज खलिफा" चे उदाहरण घेऊ शकतो. ते डिझाइन इतके साधे नाही ते मॅट्रिक्स चा वापर करून बनवले गेले आहे.
- इटरेटेड फंक्शन सिस्टीम सारख्या काही खास रचलेल्या फंक्शन्स काढणे खरोखर मजेदार आहे आणि मॅट्रिक्स चा वापर करून त्याची मोजणी केली जाते.
- आयटी आणि माहिती सुरक्षा (विशेषतः एन्क्रिप्शन) च्या क्षेत्रात, अनेक आयटी कंपन्या डेटा संरचना म्हणून मॅट्रिक्सचा शोध प्रश्न, वापरकर्त्याच्या माहितीचा माग काढण्यासाठी आणि डेटाबेस व्यवस्थापित करण्यासाठी देखील वापरतात.
- हे अनेक ठिकाणी देखील वापरले जाऊ शकते, जसे कि कार रेसिंग गेम खेळताना मॅट्रिक्स फिरवत असल्यासारख्या; फेस बुक, ट्विटर, इन्स्टाग्रामवर नेटवर्कचे क्लस्टर तयार करणे; किंवा अगदी वॉल स्ट्रीटमध्ये वापर करतात.

दैनंदिन जीवनामध्ये उपयोग

- आपल्या पर्सनल कॉम्प्युटरवरील ॲडोब फोटोशॉप सारख्या विविध ग्राफिक सॉफ्टवेअर मध्ये प्रतिमा प्रस्तुत करताना लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशनांवर प्रक्रिया करण्यासाठी मॅट्रिक्स वापरतात.
- चौरस मॅट्रिक्स भौमितिक ऑब्जेक्टचे लिनियर रूपांतर दर्शवू शकते, उदाहरणार्थ, मॅट्रिक्स कार्टेशियन x-y प्रतलामध्ये x किंवा y- अक्ष मधील ऑब्जेक्ट प्रतिबिंबित करते.
- गेमिंग उद्योग आणि इमेज प्रोसेसिंग डोमेनच्या क्षेत्रामध्ये त्याचा उपयोग आहे, जेथे तलाव, नद्या आणि इतर उलटी प्रतिमांमध्ये प्रतिबिंब दिसतात.
- कॉम्प्युटर ग्राफिक्समध्ये देखील मॅट्रिक्स महत्वाची भूमिका बजावतात, जसे की जेव्हा लोक कोणत्याही ऑब्जेक्टवर इच्छित मॅट्रिक्स ट्रान्स्फ़ोर्मेशन वापरतात, उदाहरणार्थ कार्टून कॅरॅक्टर.
- प्लॉट सर्वेक्षणांची आखणी करण्यात, लोकांची लोकसंख्या, बालमृत्यू दर यांसारख्या वास्तविक जगाच्या आकडेवारीचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी ते महत्त्वाची भूमिका बजावतात.

- अर्थशास्त्रातही, अवलंबित व्हेरिएबल्सचे भविष्य सांगणारे मॉडेल तयार करणे, शेअर्सचे विश्लेषण करणे, व्यवसायाच्या ट्रेंडचा अभ्यास मॅट्रिक्सद्वारे केला जाऊ शकतो.
- भौतिकशास्त्रात, बॅटरी पॉवर आउटपुटची मोजणी करताना, किरचॉप्सचा नियम सोडवण्यासाठी आणि क्वांटम फिजिक्स च्या क्षेत्रात, मॅट्रिक्स महत्वाची भूमिका बजावते.
- तसेच भूगर्भशास्त्रात, भूकंपीय सर्वेक्षण करताना ते महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावतात.
- रोबोटिक्समध्ये, रोबोटिक हालचाली मेट्रिक्सच्या आधारे परिभाषित केल्या जातात.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत -NPTEL)

Basic Matrix Concepts

Introduction to Matrix Algebra - I

Matrix Analysis with Applications

Determinant of a Matrix

Elementary Row Operations

5.5 मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्यासाठी गॉस एलिमिनेशन पद्धत

समजा A हा ऑर्डर तीन असलेला एक नॉन सिंगुलर चौरस मॅट्रिक्स आहे. मग मॅट्रिक्स A चा व्यस्त X असा आहे कि $AX = I$ समीकरनाचे उकल करतो, जेथे I हा ऑर्डर तीन चा युनिट मॅट्रिक्स आहे. आता, आपल्याला व्यस्त मॅट्रिक्स X चे घटक शोधावे लागतील.

समजा
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

समीकरण बनते $AX = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

हे मॅट्रिक्स तीन समीकरणांच्या बरोबरीचे आहे, जे समीकरणांच्या तीन प्रणालींच्या बरोबरीचे आहेत.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots(2)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots(3)$$

(1), (2) आणि (3) समीकरनांची प्रणाली मधे. (1)-(3) गॉस-निर्मूलन प्रक्रियेद्वारे सोडवता येते.

प्रत्येक प्रणाली (1), (2) आणि (3) समीकरणांचे उकल संच हे व्यस्त मॅट्रिक्स X चे संबंधित स्तंभ असतील.

गुणांक मॅट्रिक्स सर्व (1), (2) आणि (3), समीकरणांमध्ये समान असल्याने सर्व एकसामायिक निश्चित प्रणाली तयार करून सोडवता येतात.

$$[A/I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.23 गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. चे व्यस्त शोधा.

उकल: अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:I]$ खालील प्रमाणे आहे

$$[A:I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

अवयव, घटक $a_{11} = 0$असल्याने, आपण पहिल्या आणि दुसऱ्या पंक्तिची अदलाबदल करू, ंतर रूपांतरित प्रणाली असेल

$$[A:I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + (-3)R_1,\ [A:I]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + 7R_2,\quad [A:I]\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \qquad \left.\begin{aligned} x_{11}+2x_{21}&=0 \\ x_{21}+x_{31}&=1 \\ 3x_{31}&=7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{31}=\frac{7}{3}, x_{21}=\frac{-4}{3}, x_{11}=\frac{8}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{12} + 2x_{22} &= 1 \\ x_{22} + x_{32} &= 0 \\ 3x_{32} &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{32} = -1, x_{22} = 1, x_{12} = -1$$

$$\left.\begin{aligned} x_{13} + 2x_{23} &= 0 \\ x_{23} + x_{33} &= 0 \\ 3x_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{33} = \frac{1}{3}, x_{23} = \frac{-1}{3}, x_{13} = \frac{2}{3}$$

म्हणून
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8/3 & -1 & 2/3 \\ -4/3 & 1 & -1/3 \\ 7/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

उदाहरण 5.24: गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ चा व्यस्त शोधा.

उकल:

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 + 5R_1, R_3 \to R_3 - \frac{5}{3}R_1, \qquad [A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & -5/3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + \frac{1}{3}R_2, \qquad [A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

आता ही प्रणाली तीन सिस्टिमच्या बरोबरीची आहे.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

आणि $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} 3x_{11} - x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{21} &= 5 \\ \frac{1}{3}x_{31} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{31} &= 0 \\ x_{21} &= 5 \\ x_{11} &= 2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_{12} - x_{22} + x_{32} &= 0 \\ x_{22} &= 1 \\ \frac{1}{3}x_{32} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{32} &= 1 \\ x_{22} &= 1 \\ x_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_{13} - x_{23} + x_{33} &= 0 \\ x_{23} &= 0 \\ \frac{1}{3}x_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{33} &= 3 \\ x_{23} &= 0 \\ x_{13} &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

अभ्यास 5.5

1. गॉस एलिमिनेशन पद्धतीद्वारे खालील मॅट्रायसेसचे व्यस्त शोधा:

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$

उत्तरे

1. i. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ iii. $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5.6 गॉस-जॉर्डन पद्धतीद्वारे मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधणे

जर A हा ऑर्डर तीन असलेला चौरस मॅट्रिक्स आहे आणि $|A| \neq 0$ तर मॅट्रिक्स A चा व्यस्त X असा आहे जो $AX = I$ समीकरण पूर्ण करतो, जेथे I हा ऑर्डर तीन चा युनिट मॅट्रिक्स आहे. आता, आपल्याला व्यस्त मॅट्रिक्स X चे घटक शोधावे लागतील.

समजा
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

आणि
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

मग,
$$AX = I$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

हे समीकरण तीन समीकरणांच्या बरोबरीचे आहे, जे समीकरणांच्या तीन प्रणालींच्या बरोबरीचे आहेत. गॉस-जॉर्डन पद्धतीने प्रत्येक प्रणालीचे निराकरण करा. प्रत्येक प्रणालीचा उकल संच व्यस्त मॅट्रिक्सचा संबंधित स्तंभ असेल. येथे देखील आम्ही वर्धित प्रणाली तयार करून एकाच वेळी सर्व प्रणाली सोडवू शकतो.

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.25: गॉस-जॉर्डन पद्धतीने $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ चे व्यस्त शोधा.

उकल: वर्धित प्रणाली $[A/I]$ आहे.

$$[A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to \frac{R_1}{3} \qquad [A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$, $\quad [A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_2 \to (-1)R_2$, $\quad [A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_1 \to R_1 + R_2$ आणि $R_3 \to R_3 + R_2$, $[A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$R_3 \to (-3)\, R_3$ $\quad [A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right]$

$R_2 \to R_2 + \frac{4}{3}R_3$, $\quad [A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right]$

$\therefore \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ उकल

अभ्यास 5.6

1. गॉस-जॉर्डन पद्धतीद्वारे खालील मॅट्रिक्सचे व्यस्त शोधा:

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ v. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

उत्तरे

1. i. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ iii. $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

iv. $\begin{bmatrix} -4/3 & 2 & 7/3 \\ 5/3 & -2 & -8/3 \\ 7/3 & -3 & -10/3 \end{bmatrix}$ v. $\begin{bmatrix} 8/3 & -1 & 2/3 \\ -4/3 & 1 & -1/3 \\ 7/3 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}$

मनोरंजक माहिती

- पर्यावरण शास्त्रांच्या क्षेत्रात त्याचा एक अनोखा अनुप्रयोग आहे, जसे की, विशिष्ट माशांचे सरासरी उष्मांक मूल्य ठरवणे, जंगलाची वाढ आणि त्याचे प्रकार इत्यादी. उदाहरणार्थ, जर जंगलात 5 वेगवेगळ्या प्रकारची झाडे असतील तर आपण तयार करू शकतो त्यांचे वय मोजण्यासाठी एक लिनियर समीकरण. त्याचप्रमाणे, सागरी जीवनातील कार्बोहायड्रेट्सचा आहार त्यांच्या आहारावर आधारित शोधण्यासाठी आपण लिनियर समीकरणे तयार करू शकतो आणि अशी अनेक उदाहरणे आहेत.
- वास्तविक जगात, आम्ही हे ट्रॉफिक कंट्रोल मॅनेजमेंटमध्ये गॉस जॉर्डन पद्धतीचा वापर करून ट्रॅफिक जामच्या समस्येचा सामना करण्यासाठी लागू करू शकतो, ज्यामध्ये मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्याचे तंत्र समाविष्ट आहे, न्यूट्रोसोफिक लिनियर समीकरणे तयार करून (जे अवास्तव डेटासेटभोवती फिरते आणि निर्धारीत आणि/ किंवा अनिश्चित माहिती) आणि MATLAB प्रोग्रामिंग लागू करणे.

वास्तविक जीवनामध्ये वापर

- अज्ञात परिमाणांची मूल्ये शोधणे; ते वय, खर्च किंवा इतर कोणतीही गोष्ट असू द्या
- विमानतळांवर, जिथे उड्डाणे, प्रवासी इत्यादींची माहिती मोजण्यासाठी आणि एन्कोड करण्यासाठी हाय-एंड संगणकांचा वापर केला जातो.
- सर्किट विश्लेषणामध्ये, गॉस जॉर्डन प्रक्रिया जाळीने जोडलेल्या प्रोसेसरवर वापरली जाते.
- हे शेड्यूलिंग अल्गोरिदम मध्ये वापरले जाते.
- फिंगरप्रिंट प्रतिमा संवर्धनासाठी उपयुक्त, ज्यात गौसियन एलिमिनेशन पद्धतीचा वापर समाविष्ट आहे.

5.7 सिमेट्रिक आणि स्क्यू -सिमेट्रिक (अँटी-सिमेट्रिक) मॅट्रिक्सवर आधारित सिद्धांत

आपण याआधीच सिमेट्रिक आणि स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्सच्या व्याख्येवर चर्चा केली आहे.

येथे आपण त्यांच्यावर आधारित काही प्रमेयांवर चर्चा करू:

प्रमेय 1: मॅट्रिक्स A सिमेट्रिक होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट म्हणजे $A = A'$.

सिध्दता: अट आवश्यक आहे.

समजा $A = \left[a_{ij}\right]$ हा एक n-रो असलेला स्क्वेअर सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे

याचा अर्थ $a_{ij} = a_{ji}$ आणि A' म्हणजे A चा ट्रान्स्पोज देखील n-रो असलेला स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे.

आता A' चा $(i, j)^{th}$ घटक.

$= A$ चा $(j, i)^{th}$ घटक

$\because$ A हा सिमेट्रिक आहे $\Rightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$

$= A$ चा $(i, j)^{th}$ घटक

$\therefore$ $A = A'$

अट पुरेशी आहे.

येथे $A = A'$

सिद्ध करण्यासाठी: A हा सिमेट्रिक आहे.

जर $A = A'$, तर A हा n-रो असलेला स्क्वेअर मॅट्रिक्स असणे आवश्यक आहे.

तसेच, A चा $(i, j)^{th}$ घटक = A' चा $(i, j)^{th}$ घटक $[\because A = A']$

= A चा $(j, i)^{th}$ घटक

$\therefore$ A हा सिमेट्रिक आहे

प्रमेय 2: मॅट्रिक्स A हा स्क्यू -सिमेट्रिक होण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट म्हणजे $A' = -A$.

सिध्दता: समजा $A = \left[a_{ij}\right]$ हा n-रो असलेला स्क्वेअर स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे. तर

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

'A' हा n-रो असलेला स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे, म्हणून A', $-A$ देखील n-रो असलेले स्क्वेअर मॅट्रायसेस आहेत.

आता A' चा $(i, j)^{th}$ घटक = $(-A)$ चा $(j, i)^{th}$ घटक.

'A' हा स्क्यू -सिमेट्रिक असल्याने $\Rightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$,

= $(-A)$ चा $(i, j)^{th}$ घटक

$\Rightarrow$ $A' = -A$

या उलट; जर $A' = -A$, तर A हा एक चौरस मॅट्रिक्स असणे आवश्यक आहे.

तसेच, A चा $(i, j)^{th}$ घटक = - A' चा $(i, j)^{th}$ घटक $[\because -A' = A]$

= -A चा $(i, j)^{th}$ घटक

म्हणून A हा एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

प्रमेय 3: जर A हा एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल आणि X हा एक कॉलम मॅट्रिक्स असेल, तर दाखवा की $X'AX$ हा एक नल मॅट्रिक्स आहे.

सिध्दता: A हा एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असल्याने, $A' = -A$

समजा A हा n ऑर्डर असलेला स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे आणि X हा $n \times 1$ ऑर्डरचा कॉलम मॅट्रिक्स आहे. आता X' हा $1 \times n$ ऑर्डरचा रो मॅट्रिक्स आहे. म्हणून $X'AX$ हा 1×1 ऑर्डरचा मॅट्रिक्स आहे.

समजा $X'AX = B$

B हा 1×1 ऑर्डरचा असल्याने, $B' = B$, आणि म्हणूनच B सिमेट्रिक आहे.

आता विचार करा $(X'AX)' = B'$

$\therefore$ $X'A'(X')' = B' \Rightarrow X'A'X'' = B'$

परंतु $X'' = X, A' = -A$ आणि $B' = B$

$\therefore$ आपल्याकडे आहे $X'(-A)X = B$

$\Rightarrow$ $-(X'AX) = B$

$\Rightarrow \qquad -B = B$

$\Rightarrow \qquad 2B = 0$

$\therefore \qquad B = 0$

$\Rightarrow \qquad X'AX$ हा एक नल मॅट्रिक्स आहे.

प्रमेय 4: प्रत्येक स्क्वेअर मॅट्रिक्स हा दोन मॅट्रिक्स, एक सिमेट्रिक आणि एक अँटी-सिमेट्रिक यांची बेरीज म्हणून अद्वितीयपणे व्यक्त केला जाऊ शकतो हे दाखवा.

सिध्दता: समजा A हा दिलेला चौरस मॅट्रिक्स आहे तर मग 'A' असे लिहिले जाऊ शकते

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

$$= P + Q \text{ (म्हणा)}$$

जेथे $$P = \frac{1}{2}(A + A'), Q = \frac{1}{2}(A - A')$$

आता आपण दाखवू की P हा एक सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे आणि Q हा एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

यासाठी, समजा $$P' = \frac{1}{2}(A + A')' = \frac{1}{2}[(A') + (A')']$$

$$= \frac{1}{2}(A' + A)$$

$$= \frac{1}{2}(A + A') = P$$

$\therefore$ P हा सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

तसेच $$Q' = \frac{1}{2}[A - A']'$$

$$= \frac{1}{2}[A' - (A')']$$

$$= \frac{1}{2}(A' - A) = -\frac{1}{2}[A - A']$$

$$= -Q$$

$\therefore$ Q हा एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

अशाप्रकारे, आपण 'A' हा सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून व्यक्त केला.

अद्वितीयपणा सिद्ध करण्यासाठी:

समजा A = R + S, जेथे R हा सिमेट्रिक आहे आणि S हा स्क्यू-सिमेट्रिक आहे, A ची पर्यायी मांडणी आहे.

आता $$A' = (R + S)' = R' + S'$$

$$= R - S \qquad [\because R' = R, S' = S]$$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(A+A') = \frac{1}{2}[(R+S)+(R-S)] = R$

$\therefore \quad R = P$

आणि $\quad \frac{1}{2}(A-A') = \frac{1}{2}[(R+S)-(R-S)] = S$

$\therefore \quad S = Q$

म्हणून $\quad A = P + Q$ ची मांडणी अद्वितीय आहे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.26: जर A = $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, तर त्याला $A = B + C$ म्हणून दर्शवा, जेथे B सिमेट्रिक आहे आणि C स्क्यु सिमेट्रिक आहे.

उकल: आपल्याजवळ आहे,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ट्रान्सपोज घेऊन आपल्याला मिळेल, $A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

A आणि A' ची बेरीज करून, आपल्याला मिळेल

$$A + A' = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

A मधून A' वजा करून, आपल्याला मिळेल

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad ...(2)$$

(1) आणि (2) ची बेरीज केल्यावर, आपल्याकडे आहे

$$2A = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

किंवा
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9/2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & -2 \\ -5/2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

= सिमेट्रिक + स्क्यु सिमेट्रिक

उदाहरण 5.27: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून व्यक्त करा.

उकल: समजा
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

ट्रान्सपोज घेऊन आपल्याला मिळेल,
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A आणि A' ची बेरीज करून,
$$A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix} \qquad ...(1)$$

A मधून A' वजा करून, आपल्याला मिळेल
$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad ...(2)$$

(1) आणि (2) ची बेरीज केल्यावर, आपल्याकडे आहे
$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

किंवा
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 5/2 \\ 5/2 & 7 & 5 \\ 5/2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 & -4 \\ 5/2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

= सिमेट्रिक + स्क्यु सिमेट्रिक

उदाहरण 5.28: जर 'A' हा विषम किंवा सम ऑर्डरचा स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल, तर एक उदाहरण घेऊन सिद्ध करा की 'A' चा डिटरमिनंट नेहमी अनुक्रमे '0' किंवा वास्तविक संख्या असतो.

उकल: (1) समजा,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$, 'A' हा विषम ऑर्डरचा स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, तर

$$|A| = 0(0+16) - 2(0+12) + 3(8+0)$$

$$= 0 - 24 + 24 = 0$$

(2) जर $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ म्हणजे, 'A' हा सम ऑर्डरचा स्क्यू- सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, तर

$|A| = 0 + 1 = 1$ म्हणजेच वास्तविक संख्या आहे.

5.8 ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स

$AA' = A'A = I$ असल्यास वास्तविक चौरस मॅट्रिक्स A ला ऑर्थोगोनल म्हणतात.

5.8.1 ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे गुणधर्म

a. जर A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर $|A| = \pm 1$.

सिद्धता: रो आणि कॉलमच्या अदलाबदलाने डिटरमिनंट बदलत नसल्यामुळे, $|A'| = |A|$.
पुढे व्याख्येनुसार, जर A हा ऑर्थोगोनल असेल तर $AA' = I$.

$\therefore \quad |AA'| = |I|$

$\Rightarrow \quad |A||A'| = |I|$

$\Rightarrow \quad |A|^2 = |I|$

$\Rightarrow \quad |A| = \pm 1$

टिप्पणी: जर A हा ऑर्डर n चा ऑर्थोगोनल स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे, म्हणून $|A| = \pm 1$, तर A ची रँक = n.

b. जर A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर A^{-1} अस्तित्वात असतो आणि A' च्या बरोबर असतो.

सिद्धता: आपल्याला माहित आहे की जर A आणि B हे दोन मॅट्रिक्स असे आहेत की $AB = BA = I$, तर B ला A चा व्यस्त असे म्हणतात आणि A ला व्यस्त असण्यासाठी आवश्यक आणि पुरेशी अट आहे $|A| \neq 0$.

(a) मध्ये पाहिल्याप्रमाणे जर A ऑर्थोगोनल असेल तर $|A| = \pm 1 \neq 0$, $\therefore$ A^{-1} अस्तित्वात आहे.

पुढे, $\quad AA' = I, \quad \therefore \; A^{-1}(AA') = A^{-1}I$

$\therefore \quad (A^{-1}A)A' = A^{-1}$

$$IA' = A^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A' = A^{-1}$$

c. जर A आणि B हे ऑर्डर n चे दोन ऑर्थोगोनल स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत, तर AB आणि BA देखील ऑर्थोगोनल आहेत.

सिद्धता: A आणि B हे ऑर्डर n चे चौरस मॅट्रिक्स असल्याने AB आणि BA परिभाषित होतात आणि ते n ऑर्डरचे चौरस मॅट्राईसेस आहेत.

A, B ऑर्थोगोनल असल्याने,

$$|A| \neq 0, |B| \neq 0 \,(= \pm 1) \text{ आणि } A^{-1}, B^{-1} \text{ अस्तित्वात आहेत}$$

पुढे, $$|AB| = |A||B| \neq 0$$

$$\therefore \quad (AB)^{-1} \text{ अस्तित्वात आहे}$$

आता, $$(AB)' = B'A'$$

पुढे, $$(AB)'(AB) = B'A'AB$$

$$= B'(AA')B$$

$$= B'IB = B'B = I$$

म्हणून $(AB)'$ हे AB चे व्यस्त आहे.

म्हणून AB हा ऑर्थोगोनल आहे.

टीप: जर A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर $|A| = \pm 1$

जर $|A| = 1$, तर A ला प्रॉपर ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स म्हणतात.

टिप्पणी: संख्यात्मक लिनियर बीजगणित साठी संख्यात्मक विश्लेषण ऑर्थोगोनल मॅट्रायसेसच्या अनेक गुणधर्मांचा लाभ घेते. उदाहरणार्थ, इनर प्रॉडक्ट स्पेस साठी किंवा बेसिस च्या ऑर्थोगोनल बदलासाठी ऑर्थोनॉर्मल बेसिस ची गणना करणे अनेकदा इष्ट असते; दोघेही ऑर्थोगोनल मॅट्राईसेस चे रूप धारण करतात.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.29: $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहे याची पडताळणी करा.

उकल: येथे, $$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

आणि
$$AA' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

म्हणून 'A' हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे.

उदाहरण 5.30: $\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल असताना α, β, γ ची मूल्ये निश्चित करा.

उकल. समजा,
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$$

A चा ट्रांसपोज घेतल्यावर, आपल्याकडे आहे
$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

जर A ऑर्थोगोनल असेल तर
$$AA' = I$$

$\therefore$
$$AA' = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+4\beta^2+\gamma^2 & 0+2\beta^2-\gamma^2 & 0-2\beta^2+\gamma^2 \\ 0+2\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 \\ 0-2\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\quad 4\beta^2 + \gamma^2 = 1$ ...(1)

आणि $\quad -2\beta^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2}$ ...(2)

(1) $\Rightarrow$ $\quad 4\frac{\gamma^2}{2} + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\beta^2 = \frac{\gamma^2}{2}$ ठेवून)

किंवा $\quad \beta^2 = \frac{1}{6}$ ((2) वरून) $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

तसेच, आपल्याकडे आहे

$$\alpha^2 = 1-\beta^2-\gamma^2 \qquad \therefore \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\right)$$

$$= 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$$

$$\alpha^2 = \frac{6-1-2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

उदाहरण 5.31: जर $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, तर सिद्ध करा की $A^{-1} = A'$, A' हा A चा ट्रांसपोज आहे.

उकल: आपल्याकडे आहे,

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \text{ आणि } A' = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \text{ तर}$$

$$AA' = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16 \\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32+28 \\ -8-8+16 & 4-32+28 & 64+1+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad AA' = I \;\Rightarrow\; A' = A^{-1}$$

उदाहरण 5.32. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहे का?

उकल. A चा ट्रांसपोज

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ आहे.}$$

लक्षात घ्या
$$AA' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4+16+9 & -6+12+-3 & 2+4-27 \\ -6+12-3 & 9+9+1 & -3+3+9 \\ 2+4-27 & -3+3+9 & 1+1+81 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 29 & 3 & -21 \\ 3 & 19 & 9 \\ -21 & 9 & 83 \end{bmatrix} \neq I$$

म्हणून, मॅट्रिक्स A हा ऑर्थोगोनल नाही.

उदाहरण 5.33: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल आहे का?

उकल: A चा ट्रांसपोज
$$A' = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$ आहे.

म्हणून,
$$A'A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+0+\sin^2\theta & 0+0+0 & \cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ \cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta & 0+0+0 & \sin^2\theta+0+\cos^2\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

म्हणून दिलेला मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे.

अभ्यास 5.7

1. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, तर $(AB)'$ शोधा. म्हणून $(AB)' = B'A$ ची पडताळणी करा.

2. जर $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तर दाखवा की AA' आणि $A'A$ दोन्ही सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहेत.

3. जर A आणि B हे सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहेत, तर दाखवा की AB-BA एक स्क्यू -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

4. सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून खाली दिलेले मॅट्रिक्स 'A' व्यक्त करा $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 5 & 3\\ -1 & 6 & 3\end{bmatrix}$

5. खालील मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे हे सिद्ध करा आणि म्हणून A^{-1} शोधा $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$

6. $A=\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & a\\ 2/3 & 1/3 & b\\ 2/3 & -2/3 & c\end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल असल्यास, a, b आणि c शोधा

7. दिलेले मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे की नाही ते तपासा? $A=\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$

8. खालील मॅट्रिक्स ऑर्थोगोनल आहे का? $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$

9. खालील मॅट्रायसेस ऑर्थोगोनल आहेत हे सिद्ध करा आणि म्हणून A^{-1} देखील शोधा.

i. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$ ii. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 2 & 1 & -1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ iii. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

10. जर $3A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$ आणि जर A ऑर्थोगोनल असेल तर a, b, c शोधा.

11. मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 6\\ 2 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}$ सिमेट्रिक आणि स्क्यू सिमेट्रिक मॅट्रिक्सची बेरीज म्हणून व्यक्त करा.

12. खालील मॅट्रासेस प्रॉपर ऑर्थोगोनल आहेत की ईम्प्रॉपर ऑर्थोगोनल आहेत ते तपासा:

i. $\begin{bmatrix}3/5 & 4/5\\ 4/5 & -3/5\end{bmatrix}$ *ii.* $\begin{bmatrix}12/13 & 5/13\\ -5/13 & 12/13\end{bmatrix}$ *iii.* $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

उत्तरे

1. $\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5 & 9/2 \\ 3/2 & 9/2 & 3 \end{bmatrix}$; स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ -2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

3. A' हा A चा व्यस्त आहे

6. $a=\pm\frac{2}{3}, b=\pm\frac{2}{3}, c=\pm\frac{1}{3}$

7. नाही

8. नाही

9. *i.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ *ii.* $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ *iii.* $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. $a=2, b=2, c=1$

11. सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 11/2 \\ 0 & 7 & 3/2 \\ 11/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$; स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स $=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ 2 & 0 & -5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$

12. i. इमप्रॉपर ii. प्रॉपर iii. ऑर्थोगोनल नाही

5.9 व्हेक्टर्स

दोन डायमेंशनमधील कोणताही वेक्टर $X=(x_1, x_2)$ आणि तीन डायमेंशन मधील वेक्टर $X=(x_1, x_2, x_3)$ असा दर्शवला जातो. त्याचप्रमाणे, आपण चौथ्या डायमेंशनमधील वेक्टर $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ असा दर्शवु शकतो आणि याच पध्दतीने बाकीचे वेक्टर दर्शवू शकतो.

n डायमेंशन स्पेस मधील वेक्टर X जो अशा संख्यांद्वारे दर्शविला जाते (ज्याला क्रमित n-टपल संख्या म्हणतात) म्हणजेच, $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ ला n-वेक्टर म्हणतात ज्यामध्ये i = 1, 2, 3, ..., n साठी x_i निश्चित केले जात.

कंसा मधील असलेल्या $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ संख्यांना वेक्टर $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ चे घटक म्हणतात.

वेक्टर एकतर रो किंवा कॉलममध्ये लिहिले जाते जसे की

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ किंवा } X = [x_1, x_2, x_3]$$

शून्य वेक्टरमधील सर्व घटक शून्य असतात आणि हे O द्वारे दर्शविले जाते, म्हणजे $O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$.

जर आपण क्रमित n-टपल्समधील दोन वेक्टर घेतले जसे

$$X = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \text{ आणि } Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

तर वरील दोन वेक्टर समान परिभाषित केले गेले आहेत जर X चा प्रत्येक घटक Y च्या संबंधित घटकाच्या बरोबर असेल.

म्हणजेच $x_i = y_i$ सर्व $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ साठी तर $X = Y$

आणि वरील दोन वेक्टरची बेरीज खालीलप्रमाणे परिभाषित केली जाते.

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n)$$

आणि वेक्टर X चे स्केलर मल्टीपल म्हणून असे परिभाषित केले जाते

$$kX = (kx_1, kx_2, kx_3, \ldots, kx_n)$$

असे की

$$mX + nY = (mx_1 + ny_1, mx_2 + ny_2, mx_3 + ny_3, \ldots, mx_n + ny_n)$$

5.9.1 व्हेक्टर्सचे लिनियर डिपेन्डन्स आणि इनडिपेन्डन्स

समजा $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_r$ ला n-टपलड व्हेक्टर r संख्येत आहेत, वरील r वेक्टरशी संबंधित असल्यास, आपल्याला r स्केलर सापडतील $K_i = (i = 1, 2, 3, 4, \ldots, r)$, ज्यात सर्व शून्य नाहीत (काही शून्य असू शकतात) असे

$$K_1X_1 + K_2X_2 + K_3X_3 + \ldots + K_rX_r = 0$$

तेव्हा वेक्टर्स $X_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ ला डिपेंडंट वेक्टर्स म्हणतात

जर समी (1) चे समाधान अशाप्रकारे असेल कि $K_1 = K_2 = \ldots = K_r = 0$ तेव्हा

वेक्टर्स $X_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ ला इनडिपेंडंट वेक्टर्स म्हणतात

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.34: खालील व्हेक्टर लिनियर डिपेण्डण्ट आहेत का? तसे असल्यास, त्यांच्यातील संबंध शोधा,

$$x_1 = (3, 2, 7), x_2 = (2, 4, 1) \text{ आणि } x_3 = (1, -2, 6).$$

उकल: समजा λ_1, λ_2 आणि λ_3 असे स्केलर्स आहेत कि

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 (3, 2, 7) + \lambda_2 (2, 4, 1) + \lambda_3 (1, -2, 6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \ldots(A)$$

$$2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \qquad \ldots(B)$$

$$7\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \qquad ...(C)$$

समीकरण (A) आणि (B) मधून λ_3 कमी करून आपल्याला मिळेल, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ आणि $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ समीकरण (C) मध्ये ठेवल्यास आपल्याला मिळते,

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$$

तर, समीकरण (1) बनते

$$\lambda_1 (x_1 - x_2 - x_3) = 0 \text{, परंतु } \lambda_1 \neq 0$$

म्हणून, $x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3$ म्हणजेच वेक्टर लिनियर डिपेण्डण्ट आहेत.

उदाहरण 5.35: खालील व्हेक्टर लिनियर डिपेण्डण्ट आहेत का? तसे असल्यास, त्यांच्यातील संबंध शोधा,

$$x_1 = (1,1,2,3), x_2 = (1,2,3,4) \text{ आणि } x_3 = (2,3,4,9).$$

उकल: समजा λ_1, λ_2 आणि λ_3 असे स्केलर्स आहेत कि

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \qquad ...(1)$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 (1,1,2,3) + \lambda_2 (1,2,3,4) + \lambda_3 (2,3,4,9) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \qquad ...(A)$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \qquad ...(B)$$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \qquad ...(C)$$

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \qquad ...(D)$$

आता (B) - (A) वरून, आपल्याला मिळेल $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ...(E)

आणि (C) - (B) पुरवते $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ...(F)

(E) आणि (F) वरून, $\lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = 0$ आणि $\lambda_2 = -\lambda_3$ (B) मध्ये टाकल्यास आपल्याला मिळते,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0 \text{ आणि } \lambda_3 = 0$$

$\Rightarrow$ समीकरण (1) द्वारे दर्शविलेले वेक्टर x_1, x_2 आणि x_3 लिनियर इनडिपेण्डण्ट वेक्टर आहेत (आणि नॉन -डिपेन्डंट वेक्टर)

उदाहरण 5.36: लिनियर डिपेण्डण्टसाठी खालील वेक्टरचे परीक्षण करा आणि अस्तित्वात असल्यास त्यांचा संबंध शोधा.

$$x_1 = (1,2,4),\ x_2 = (2,-1,3),\ x_3 = (0,1,2),\ x_4 = (-3,7,2)$$

उकल: मॅट्रिक्स समीकरण विचारात घ्या

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \qquad ...(1)$$

$\Rightarrow$ $$\lambda_1(1,2,4)+\lambda_2(2,-1,3)+\lambda_3(0,1,2)+\lambda_4(-3,7,2)=0$$

$$\lambda_1+2\lambda_2+0\lambda_3-3\lambda_4=0$$

$$2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+7\lambda_4=0$$

$$4\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3+2\lambda_4=0$$

ही होमोजिनिअस प्रणाली आहे.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 1 & 7\\ 4 & 3 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

किंवा $$A\lambda=0$$

$$R_2\to R_2-2R_1,\, R_3\to R_3-4R_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -5 & 1 & 13\\ 0 & -5 & 2 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$R_3\to R_3-R_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -5 & 1 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_4=0$$

$$-5\lambda_2+\lambda_3+13\lambda_4=0 \qquad \ldots(2)$$

$$\lambda_3+\lambda_4=0$$

समजा $$\lambda_4=t,\lambda_3=-t$$

$$-5\lambda_2-t+13t=0$$

तर, समीकरण (2) वरून

$\Rightarrow$ $$\lambda_2=\frac{12t}{5}$$

पुन्हा, आपल्याकडे आहे, $$\lambda_1+\frac{24t}{5}-3t=0$$

किंवा $$\lambda_1=\frac{-9t}{5}$$

म्हणून दिलेले वेक्टर लिनियर डिपेण्डण्ट आहेत.

समीकरण (1) मध्ये ' λ ' ची किंमत ठेऊन, आपल्याला मिळेल

$$\frac{-9t}{5}x_1 + \frac{12t}{5}x_2 - tx_3 + tx_4 = 0$$

किंवा
$$-\frac{9x_1}{5} + \frac{12x_2}{5} - x_3 + x_4 = 0$$

किंवा
$$9x_1 - 12x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0$$

उदाहरण 5.37: वेक्टरची प्रणाली $x_1 = (2,2,1)^T$, $x_2 = (1,3,1)^T$, $x_3 = (1,2,2)^T$ लिनियर डिपेण्डण्ट आहे का? स्पष्ट करा.

उकल: येथे

$$x_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\ x_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स समीकरण विचारात घ्या

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\lambda_1\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

जे एक होमोजिनिअस समीकरण आहे

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\2 & 3 & 2\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 3 & 2\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 2R_1$
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\\0 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $R_3 \to R_3 + R_2$
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$

अशा प्रकारे, सर्व स्केलर शून्य आहेत. म्हणून सदिशांची दिलेली प्रणाली लिनियरली इंडिपेंडंट (अवलंबून नाही) आहे.

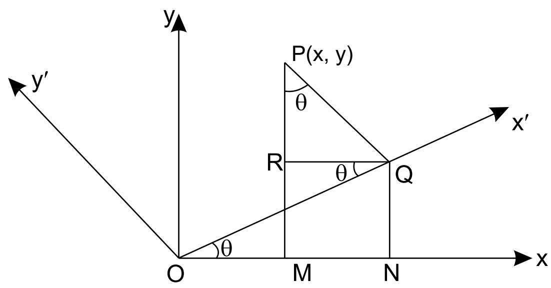
5.9.2 लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन

समजा $P(x, y)$ एक बिंदू X, Y अक्ष परिमाणांमध्ये असू द्या, या अक्षांना θ कोनात फिरवा. ओरिजिन O निश्चित ठेवुन P चे नवीन कॉर्डिनेट्स (x', y') आहे त्यामुळे नवीन अक्ष अनुक्रमे

OX' आणि OY' असतील तर

$OM = x$ आणि $PM = y$

$OQ = x'$ आणि $PQ = y'$



आकृति 5.3

जेणेकरून $\quad OM = ON - MN$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad \ldots(1)$$

आणि $\quad PM = PR + RM = PR + QN$

$$= y'\cos\theta + x'\sin\theta \qquad \ldots(2)$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

(1) आणि (2) वरून आपल्याला लिनियर संबंध खालील फॉर्ममध्ये मिळतो

$$x' = a_1x + b_1y$$

आणि $\quad y' = a_2x + b_2y$

जे खालील फॉर्ममध्ये दर्शविले जाऊ शकते.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow X' = AX \qquad \ldots..(3)$$

हे ट्रान्स्फ़ोर्मेशन (3) दोन परिमाणांमधील लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन आहे

त्याचप्रमाणे, जर आपण खालील समीकरणांचा संबंध घेतला तर

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$z' = a_3x + b_3y + c_3z$$

जे मॅट्रिक्समध्ये दर्शविले जाऊ शकते

$$X' = AX \quad \text{जेथे } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{आणि } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

मग $X' = AX$ तीन डायमेंशन मधील एक लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन दर्शवते

5.9.3 ऑर्थोगोनल ट्रान्स्फ़ोर्मेशन

जर $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ चे रूपांतर $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ मध्ये केल्यास लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन $Y = AX$ ला ऑर्थोगोनल म्हणतात. या ट्रान्स्फ़ोर्मेशनाच्या मॅट्रिक्स A ला ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स म्हणतात.

म्हणजे, जर $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ आणि } X' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

जेणे करून $$X'X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots. + x_n^2$$

आणि त्याचप्रमाणे $$Y'Y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots. + y_n^2$$

जर आपण $Y = AX$ चे रूपांतर ऑर्थोगोनल ट्रान्स्फ़ोर्मेशन मानले तर

$$Y'Y = (AX)'(AX) = (X'A')(AX) = X'A'AX$$

$$= X'(A'A)X = X'IX = X'IX$$ फक्त खरे आहे,

जर $AA' = I \Rightarrow A' = A^{-1}$ ज्याअर्थी $A^{-1}A = I$

म्हणजेच, ऑर्थोगोनल ट्रान्सफॉर्मेशनसाठी $A' = A^{-1}$ म्हणून कोणत्याही स्क्वेअर मॅट्रिक्स A साठी A, ऑर्थोगोनल असे म्हटले जाते

जर $AA' = A'A = I$ येथे $A' = A^{-1}$

तसेच $|A'| = |A|$, $A'A = I \Rightarrow |A'| = |I| = 1$

$\Rightarrow$ $|A||A| = I \quad \Rightarrow \quad |A^2| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A| = \pm 1$

समजा $n \times n$ मॅट्रिक्स $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ आणि कॉलम (स्तंभ) मॅट्रिक्स

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ आणि कॉलम (स्तंभ) मॅट्रिक्स } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ असे की}$$

$$Y = AX \qquad \ldots(1)$$

मग (1) लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन परिभाषित करते, जे कोणत्याही वेक्टर X ला दुसऱ्या वेक्टर Y मध्ये मॅट्रिक्स A वापरुन बदलते, मॅट्रिक्स A ला वेक्टर X पासून वेक्टर Y मध्ये ट्रान्स्फ़ोर्मेशनाचे लिनियर ऑपरेटर असल्याचे म्हटले जाते.

कारण वेक्टर ची लिनियारीटी प्रॉपर्टी पूर्ण करते.

म्हणजेच, जर X_1 आणि X_2 असे दोन वेक्टर आहेत जसे की

$$Y_1 = AX_1 \text{ आणि } Y_2 = AX_2 \quad \Rightarrow \quad aY_1 + bY_2 = A(aX_1 + bX_2)$$

जर $|A| \neq 0$ तर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन मॅट्रिक्स A ला नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स आणि लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन ला रेग्युलर (नॉन सिंग्युलर) आणि जर $|A| = 0$ तर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन मॅट्रिक्स A ला सिंग्युलर मॅट्रिक्स आणि लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन ला सिंग्युलर म्हणतात. जर मॅट्रिक्स A चे ट्रान्स्फ़ोर्मेशन सिंग्युलर (नॉन सिंग्युलर) असेल तर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन त्यानुसार सिंग्युलर (नॉन सिंग्युलर) असे म्हणतात. तसेच $aY = AX$ (नॉन सिंग्युलर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन), $X = A^{-1}Y$ हे व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन आहे.

पुढे, A ने जर वेक्टर $X = (x_1, x_2, x_3)$ ला वेक्टर $Y = (y_1, y_2, y_3)$ मध्ये रूपांतरित केले तर $Y = AX$ आणि दुसर्या ट्रान्स्फ़ोर्मेशन B द्वारे वेक्टर Y हे वेक्टर $Z = (z_1, z_2, z_3)$ मध्ये रूपांतरित होते जेणेकरुन आपल्याकडे $Z = BY$ असेल तर $Z = BY = B\,(AX) = (BA)\,Z.$

या ट्रान्स्फ़ोर्मेशन BA ला (संमिश्र ट्रान्स्फ़ोर्मेशन) कॉम्पोझिट ट्रान्स्फ़ोर्मेशन म्हणतात.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.38: ट्रान्स्फ़ोर्मेशन $y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_1 - 2x_3$ रेग्युलर आहे हे दाखवा. व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन लिहा.

उत्तर: जर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन $Y = AX$ असे घेतले तर $X = A^{-1}Y$,

इथे $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ आणि } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A चा डिटरमिनंट $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ म्हणून ट्रान्स्फ़ोर्मेशन मॅट्रिक्स A हा नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स आणि लिनियर ट्रान्स्फ़ोर्मेशन रेग्युलर आहे .

आता, जर $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ मग } A^{-1} \text{ शोधण्यासाठी}$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ शी संबंधित A चे कोफॅक्टर

$$A_1 = -2, B_1 = 4, C_1 = -1, A_2 = 2, B_2 = -5, C_2 = 1.\ A_3 = 1, B_3 = -3, C_3 = 1$$

आता, आपल्याला माहित आहे

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन

$\therefore$ $$X = A^{-1}Y \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

ज्यातून आपल्याला मिळते

$$x_1 = 2y_1 - 2y_2 - y_3$$

$$x_2 = -4y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

आणि $$x_3 = y_1 - y_2 - y_3$$

जे व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन आहे.

उदाहरण 5.39: ट्रान्स्फ़ोर्मेशन

$$y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$y_2 = 2x_1 + x_3$$

$$y_3 = -x_1 + x_2 + 3x_3$$

नॉन सिंग्युलर दाखवा. व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन शोधा.

उकल: दिलेली प्रणाली खालीलप्रमाणे लिहिली जाऊ शकते

$$Y = AX \text{ इथे } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ आणि } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

आता, $|A| = -4 \neq 0$, मॅट्रिक्स नॉन सिंग्युलर आहे आणि दिलेले ट्रान्स्फ़ोर्मेशन नॉन सिंग्युलर आहे. कोणत्याही योग्य पद्धतीचा वापर करून A चे व्यस्त शोधले जाऊ शकते.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 7/4 & -5/4 & -3/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन $X = A^{-1}Y$ आहे .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 7/4 & -5/4 & -3/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3$$

$$x_2 = \frac{7}{4}y_1 - \frac{5}{4}y_2 - \frac{3}{4}y_3$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3$$

उदाहरण 5.40: ट्रान्स्फ़ोर्मेशनाचा विचार करा.

$$y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

$$y_3 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ चे रूपांतर $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ मधे केले जाऊ शकते का ते सत्यापित (व्हेरिफाय) करा. व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन लिहा

उकल: ट्रान्स्फ़ोर्मेशन ऑर्थोगोनल आहे.

अभ्यास 5.8

1. खालील व्हेक्टर लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहेत का? तसे असल्यास, त्यांच्यातील संबंध शोधा.
   i. $x_1 = (1,2,4)$, $x_2 = (2,-1,3)$, $x_3 = (0,1,2)$ आणि $x_4 = (-3,7,2)$
   ii. $x_1 = (1,3,4,2)$, $x_2 = (3,-5,2,2)$ आणि $x_3 = (2,-1,3,2)$
   iii. $x_1 = (2,-1,3,2)$, $x_2 = (1,3,4,2)$ आणि $x_3 = (3,-5,2,2)$
   iv. $x_1 = (2,3,1,-1)$, $x_2 = (2,3,1,-2)$ आणि $x_3 = (4,6,2,1)$
   v. $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,4)$ आणि $x_3 = (4,5,6)$
2. सिद्ध करा की वेक्टरचा संच $(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)$ लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहे.
3. खालील व्हेक्टर चा संच लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहे की लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट आहे हे ठरवा.
   i. $(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)$
   ii. $(1, 1, 1), (0, 4, 1)$ $(3, 0, 1)$
   iii. $(2, 3, 1), (-1, 4, -2), (1, 18, -4)$
4. सिद्ध करा की चार व्हेक्टर चा संच $V_1 = (1, 0, -1)$, $V_2 = (-1, 0, 0)$, $V_3 = (1, 0, 1)$ आणि $V_4 = (2, 1, 3)$ लिनिअरली डिपेन्डन्ट आहे.
5. व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ लिनिअरली डिपेन्डन्ट असल्यास 'a' शोधा.

6. व्हेक्टर $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ p \\ -3 \end{bmatrix}$ आणि $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ लिनिअरली डिपेन्डन्ट असल्यास ‘ p’ शोधा.

7. ट्रान्स्फ़ोर्मेशन $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_1 - x_2 + 2x_3$, $y_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$ नॉन सिंग्युलर आहे हे दाखवा व्यस्त ट्रान्स्फ़ोर्मेशन शोधा.

8. प्रत्येक ट्रान्स्फ़ोर्मेशन $x_1 = 3y_1 + 2y_2$, $x_2 = -y_1 + 4y_2$, $y_1 = z_1 + 2z_2$ आणि $y_2 = 3z_1$ मॅट्रायसेसचा वापर करून रीप्रेझेन्ट करा आणि (संमिश्र ट्रान्स्फ़ोर्मेशन) कॉम्पोझिट ट्रान्स्फ़ोर्मेशन जे x_1, x_2 ला z_1, z_2 च्या दृष्टीने व्यक्त करते ते शोधा.

उत्तरे

1. i. आहे; $9x_1 - 12x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0$
   ii. आहे; $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
   iii. आहे; $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
   iv. आहे; $5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$
   v. आहे; $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
3. i. लिनिअरली डिपेन्डन्ट
   ii. लिनिअरली इनडिपेन्डन्ट
   iii. लिनिअरली डिपेन्डन्ट
5. $a = 1$
6. $P = 2$

5.10 मॅट्रिक्सची रँक

एक नैसर्गिक संख्या ‘r’ ला मॅट्रिक्स ‘A’ ची रँक असे म्हटले जाते जर

1. शून्य नसलेला ऑर्डर ‘r’ चा कमीत कमी एक मायनॉर (चौरस सबमेट्रिक्स) अस्तित्वात असेल.
2. मॅट्रिक्सचा ‘A’ चा ‘r’ पेक्षा मोठा ऑर्डर असलेला प्रत्येक मायनॉर शून्य असेल. A ची रँक $\rho(A)$ द्वारे दर्शवली जाते.

टिप्पणी:

1. $\rho(A) = 0$, जेव्हा A हा शून्य मॅट्रिक्स असतो.
2. $\rho(A) \geq 1$, जेव्हा $A \neq 0$
3. जर A ‘n’ ऑर्डर असलेला नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर, $\rho(A) = n$.
4. जर ‘A’ हा ‘n’ ऑर्डर असलेला सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर, $\rho(A) < n$.
5. जर मॅट्रिक्स 'A’ ची ऑर्डर $m \times n$ असेल तर $\rho(A) \leq \min(m, n)$.
6. रँक ‘r’ असलेल्या प्रत्येक मॅट्रिक्स ‘A’ च्या संदर्भात, तेथे P आणि Q सारखे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असे अस्तित्वात असतात कि $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

उदाहरणार्थ: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: दिले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तर $|A| = 2\,(1) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ A हा ऑर्डर 3 असलेला नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे.

$\Rightarrow$ $\rho(A) = 3$

5.10.1 मॅट्रिक्सची रँक शोधण्याचा दुसरा मार्ग

मॅट्रिक्सची रँक त्या मॅट्रिक्सच्या एचेलॉन फॉर्ममध्ये शून्य नसलेल्या रोच्या संख्येइतकी असते.

टिप्पणी: शून्य नसलेला रो हा एक रो आहे ज्यात किमान एक घटक शून्य नसतो.

उदा. A मॅट्रिक्सचा विचार करा $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

स्पष्टपणे, दिलेला मॅट्रिक्स 'A' हा एचेलॉन स्वरूपात आहे, ज्यामध्ये दोन शून्य नसलेले रो आहेत.

म्हणून A ची रँक $= 2$ म्हणजेच $\rho(A) = 2$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.41: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + R_1, R_3 \to R_3 - R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_2,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to 4R_3 - R_2,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 3 आहे, म्हणून $\rho(A) = 3$ **(उकल)**

उदाहरण 5.42: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 2 आहे, म्हणून $\rho(A) = 2$ **(उकल)**

उदाहरण 5.43: b च्या कोणत्या मूल्यासाठी मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$ ची रँक 2 असेल.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to 2R_1$, $$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_1$ $$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

जर A ची रँक 2 असेल तर $b - 2$ शून्य असणे आवश्यक आहे

म्हणजेच $b - 2 = 0 \quad \Rightarrow b = 2$ **(उकल)**

उदाहरण 5.44: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - \frac{9}{2}R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \frac{-7}{2} & -7 & \frac{-21}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 7R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 2 आहे, म्हणून $\rho(A) = 2$

उदाहरण 5.45: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & -14 & -10 & -4 \\ 0 & -21 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - 3R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 3 आहे, म्हणून $\rho(A) = 3$

उदाहरण 5.46: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{4}{5}R_2, R_4 \to R_4 - \frac{9}{5}R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 33/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_3 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 4 आहे, म्हणून $\rho(A) = 4$

उदाहरण 5.47: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ची रँक शोधा.

उकल: येथे आपल्याकडे आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - 3R_1, R_4 \to R_4 - 6R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow R_2 \leftrightarrow R_3,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

शून्य नसलेल्या रो ची संख्या 3 आहे, म्हणून

$$\rho(A) = 3$$

5.11 मॅट्रिक्सचा नॉर्मल फॉर्म

ऑर्डर $m \times n$ च्या प्रत्येक मॅट्रिक्सला प्राथमिक रूपांतरणाद्वारे रो आणि कॉलम ऑपरेशनद्वारे खालीलपैकी कोणत्याही स्वरूपात रूपांतरित केले जाऊ शकते, जसे की

i. $\begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

ii. $\begin{bmatrix} I_r \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$

iii. $[I_r \ \vdots \ 0]$

iv. $[I_r]$

जेथे I_r हे ऑर्डर r असलेला इडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे आणि 0 हा कोणत्याही ऑर्डरचा शून्य मॅट्रिक्स दर्शवते ज्याला त्याचे नॉर्मल फॉर्म किंवा कॅनॉनिकल फॉर्म म्हणतात. त्यामुळे प्राप्त झालेल्या क्रमांकाला A ची रँक म्हणतात आणि आपण लिहितो $\rho(A) = r$. फॉर्म

$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ला A चे फर्स्ट कॅनॉनिकल फॉर्म म्हणतात. रो आणि कॉलम दोन्ही ट्रान्स्फ़ोर्मेशन येथे वापरले जाऊ शकत असल्याने, म्हणून प्राप्त केलेल्या पहिल्या रो चा घटक 1 पहिल्या कॉलम मध्ये रूपांतरित केला जाऊ शकतो. मग पहिला रो आणि पहिला कॉलम दोन्ही शून्य नसलेल्या घटकांवर हलवता येतात. त्याचप्रमाणे, दुसऱ्या रोचा घटक 1 दुसऱ्या कॉलम मध्ये हलवता येतो वगैरे.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.48: मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ -2 & -4 & 4 & -7\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ ला त्यांच्या नॉर्मल फॉर्म मध्ये किंवा कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये रूपांतरित करून रँक शोधा.

उकल: समजा

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ -2 & -4 & 4 & -7\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$C_2 \to C_2 - 2C_1, C_3 \to C_3 + C_1, C_4 \to C_4 - 3C_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$C_3 \to C_3 + 2C_4, C_4 \to (-1)C_4$$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$C_2 \leftrightarrow C_4$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}I_2 & \vdots & 0\\ 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

जे आवश्यक नॉर्मल फॉर्म आहे

$\therefore \quad \rho(A) = 2$

उदाहरण 5.49: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म मध्ये रूपांतरित करून A ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \to \left(\frac{1}{9}\right) R_1 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_1(-4) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \to C_3 + C_1\left(\frac{-2}{9}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \to C_4 + C_1\left(\frac{-3}{9}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2(5) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -206/9 & -282/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_3 \to C_3 + C_2(-5) \\ C_4 \to C_4 + C_2(-6) \end{matrix} \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -206/9 & -282/9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3\left(\frac{-9}{206}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 141/103 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \to C_4 + C_3\left(\frac{-141}{103}\right) \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_3, 0]$$

जो नॉर्मल फॉर्म आहे.

$$\therefore \qquad \rho(A) = 3$$

उदाहरण 5.50: मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म $\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ मध्ये रूपांतरित करा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$C_2 \to C_2 + C_1, C_3 \to C_3 - 2C_1, C_4 \to C_4 + 3C_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 5 & -8 & 14\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 4R_1 \qquad A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -8 & 14\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftrightarrow R_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 4\\ 0 & 5 & -8 & 14\end{bmatrix}$$

$$C_4 \to C_4 - 2C_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 5 & -8 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 \to R_3 - 3R_2 \\ R_4 \to R_4 - 5R_2 \end{array} \qquad A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -8 & 4\end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_4 \qquad A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -8\end{bmatrix}$$

$C_3 \to \frac{-1}{2}C_3$

$C_4 \to \frac{-1}{8}C_3$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + 2R_3$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$\therefore \quad \rho(A) = 4$

उदाहरण 5.51: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म मध्ये रूपांतरित करून A ची रँक शोधा.

उकल: आपल्याला दिलेले आहे
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 4R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1,\ R_4 \to R_4 - R_1$$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \to C_2 - 2C_1,\ C_3 \to C_3 + C_1,\ C_4 \to C_4 - 3C_1$$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$
$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \to C_3 + \frac{6}{7}C_2,\ C_4 \to C_4 - \frac{11}{7}C_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_3 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \to C_4 + 2C_3 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to -\frac{1}{7}R_2,\ R_3 \to -\frac{1}{2}R_3$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad \rho(A) = 3$$

उदाहरण 5.52: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म मध्ये रूपांतरित करून A ची रँक शोधा

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - \frac{9}{2}R_1 \end{array} \qquad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7/2 & -7 & -21/2 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \to C_2 - \frac{3}{2}C_1, \quad C_3 \to C_3 - 2C_1, \quad C_4 \to C_4 - \frac{5}{2}C_1 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7/2 & -7 & -21/2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \to \frac{1}{2}R_1, \quad R_2 \to -2R_2, \quad R_3 \to -R_3, \quad R_4 \to \frac{-2}{7}R_4 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2, \quad R_4 \to R_4 - R_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \to C_3 - 2C_2, \quad C_4 \to C_4 - 3C_2 \qquad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad \rho(A) = 2$$

उदाहरण 5.53: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ ला नॉर्मल फॉर्म मध्ये रूपांतरित करून A ची रँक शोधा

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1, \quad R_3 \to R_3 - R_1, \quad R_4 \to R_4 + R_1 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 + C_1 \\ C_4 \to C_4 - 4C_1 \end{matrix} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$C_3 \leftrightarrow C_2$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_3 \to R_3 - \frac{4}{5}R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to 1/5R_2$
$R_3 \to 5/16R_3$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_2 \to R_2 + \frac{5}{4}R_3 \\ R_4 \to R_4 - R_3 \end{matrix} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C_3 \leftrightarrow C_4$ $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

जो आवश्यक नॉर्मल फॉर्म आहे.

$\therefore \qquad \rho(A) = 3$

5.11.1 P आणि Q चे मूल्य शोधताना जेथे $\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

जर A हा ऑर्डर $m \times n$ चा मॅट्रिक्स असेल तर $A = I_m A\, I_n$ जिथे I_m आणि I_n अनुक्रमे m आणि n ऑर्डरचे एकक मॅट्रिक्स आहेत. A वरील प्राथमिक पंक्ती ऑपरेशन संबंधित प्राथमिक मॅट्रिक्सच्या प्री -गुणाकार द्वारे प्रभावित केले जाऊ शकते अर्थात I_m ला किंवा त्यानंतरच्या चरणांमध्ये I_m कडून मिळवलेल्या मॅट्रिक्सला लागू करणे. त्याचप्रमाणे, A वर प्राथमिक कॉलम ऑपरेशन लागू करणे हे In वर किंवा पुढील चरणांमध्ये मिळवलेल्या मॅट्रिक्सवर लागू करण्याच्या समतुल्य आहे. शेवटी जेव्हा आपल्याला डाव्या बाजूला A च्या जागी $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ मिळते, तेव्हा आपल्याकडे I_m च्या जागी P आणि उजव्या बाजूला In च्या जागी Q असतो.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.54: दोन नॉन सिंग्युलर मॅट्रीक्स P आणि Q असे शोधा कि PAQ नॉर्मल फॉर्म मध्ये असेल जेथे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सची ऑर्डर 2×3 असल्याने मॅट्रिक्स A असे लिहिले जाऊ शकते.

$$[A]_{2\times 3} = I_2 \cdot A \cdot I_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2} R_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + R_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 + 3C_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to \frac{1}{3} C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_2, 0] = PAQ$$

म्हणून $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

उदाहरण 5.55: जर $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ तर दोन नॉन सिंग्युलर मॅट्रीक्स P आणि Q चे मूल्य असे शोधा की $PAQ = I$

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सची ऑर्डर 3×3 असल्याने मॅट्रिक्स A असे लिहिले जाऊ शकते

$$[A]_{3\times 3} = I_3 \cdot A \cdot I_3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to -C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_3 - 3R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 - C_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = PAQ$$

म्हणजेच
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \text{ आणि } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 5.56: नॉन सिंग्युलर मॅट्रीक्स P आणि Q असे शोधा की PAQ नॉर्मल फॉर्म मध्ये असेल जिथे

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

उकल: आपल्याला दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सचा क्रम 3×3 असल्याने मॅट्रिक्स A असे लिहिले जाऊ शकते

$$[A]_{3\times 4} = I_3 \cdot A \cdot I_4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$
$R_3 \to R_3 - 2R_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 4C_1$
$C_3 \to C_3 - 6C_1$
$C_4 \to C_4 - C_1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2(-1/11)$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + 11R_2$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 - C_2, C_4 \to C_4 - \dfrac{4}{11}C_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5/11 \\ 0 & 1 & -1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to \dfrac{-1}{5} R_3$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5/11 \\ 0 & 1 & -1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 + C_3\left(\dfrac{2}{5}\right)$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_3, 0] = PAQ$$

म्हणून
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ आणि } Q = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

पडताळणी:
$$PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

अभ्यास 5.9

खालील मॅट्रिक्सची रँक शोधा:

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$

खालील मॅट्रिक्सला नॉर्मल (फॉर्म) स्वरूपात आणल्यानंतर त्यांची रँक शोधा:

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

दोन नॉन सिंग्युलर मॅट्रायसेस P आणि Q असे शोधा कि मॅट्रिक्स A साठी PAQ नॉर्मल स्वरूपात आहे, जेथे A आहे

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 11 & -19 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तरे

1. 2
2. 2
3. 2
4. 2
5. 2
6. 2
7. 2
8. 2
9. 3
10. 3
11. 3

12. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & -5/3 \\ 1/2 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 4/7 & 9/119 & 9/217 \\ 0 & 1/7 & -1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/31 \end{bmatrix}$

14. $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ जिथे $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

मनोरंजक तथ्ये

- मॅट्रिक्सच्या रँकचा डेटा मायनिंग आणि बायोइन्फॉर्मेटिक्सच्या क्षेत्रातही अनुप्रयोग आहे.
- सामाजिक विज्ञानांमध्ये, देशांसाठी वापरकर्ता प्राधान्ये मॅट्रिसच्या स्वरूपात दर्शविली जातात.
- जैविक विज्ञानांमध्ये, जनुक अभिव्यक्तीची पातळी मॅट्रिक्स वापरून दर्शविली जाते.
- वैद्यकीय क्षेत्रात, मॅट्रिक्सचा वापर त्यांच्या आण्विक डेटावरून कर्करोग आणि त्याचे उपप्रकार शोधण्यासाठी केला जातो.

वास्तविक जीवनाचे अनुप्रयोग

- गणिती आणि संगणक प्रोग्रामिंग मॉडेलिंग तयार करण्यासाठी याचा अत्यंत वापर केला जातो.
- जर काही अज्ञात डेटा मॅट्रिक्स स्वरूपात परत मिळविणे आवश्यक असेल, तर सायबर सुरक्षा क्षेत्रात असे म्हणू या आणि हे माहित आहे की त्याचा दर्जा कमी आहे, तर तो खूप कार्यक्षमतेने आणि सहजपणे परत मिळवला जाऊ शकतो.
- रँक अगदी प्रतिमेच्या परिमाणाबद्दल कल्पना देते. उदाहरणार्थ, थ्रीडी स्पेसचे २ डी विमानात मॅपिंग करण्यासाठी "पूर्ण रँक" नसेल.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Rank of a Matrix

System of Linear Equations-II

System of Linear Equations

5.12 रँक नलिटी प्रमेय (मॅट्रायसेस च्या संदर्भात)

नलिटी = कॉलमची संख्या - मॅट्रिक्सची रँक

विधान: समजा A हा $m \times n$ ऑर्डर असलेला मॅट्रिक्स असून रँक 'r' आणि नलिटी l आहे, तर रँक नलिटी प्रमेयानुसार, रँक (A) + नलिटी $(A) = n$

म्हणजेच $\quad r + l = n$

जेथे $\quad r$ = मॅट्रिक्सची रँक

l = मॅट्रिक्सची नलिटी

n = कॉलमची संख्या

उदाहरणार्थ: दिलेल्या मॅट्रिक्सची नलिटी शोधा $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}$

उकल: आधी चर्चा केलेली कोणतीही पद्धत वापरून, आपण रँक शोधू,

$R_2 \to R_2 - 2R_1$ लागू करून,

आपल्याकडे असेल, $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

आपण पाहू शकतो, $\quad \rho(A) = 2$ (शून्य नसलेल्या पंक्तींची संख्या)

मग प्रमेयानुसार,

रँक + नलिटी = कॉलमची संख्या

म्हणून 2 + नलिटी = 4

$\Rightarrow$ नलिटी = 4 − 2 = 2

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.57: दिलेल्या मॅट्रिक्ससाठी $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ नलिटी शोधा.

उकल: दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_1,\ R_2 \to R_2 - 3R_1$ लागू करून,

आपल्याकडे असेल $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -12 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

तर $R_3 \to R_3 + R_2$ लागू करून,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

आपल्याकडे आहे, मॅट्रिक्सची रँक $= \rho(A) = 2$

म्हणून नलिटी = कॉलमची संख्या − मॅट्रिक्सची रँक

= 4 − 2 = 2

उदाहरण 5.58: दिलेल्या मॅट्रिक्ससाठी $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5}$ नलिटी शोधा.

उकल: दिलेला मॅट्रिक्स इचीलॉन फॉर्म मध्ये असल्यामुळे,

$$\rho(A) = 3$$

म्हणून आपल्याला माहित आहे, रँक (A) + नलिटी (A) = स्तंभांची संख्या

म्हणून, 3 + नलिटी (A) = 5

नलिटी (A) = 2

टीप: सर्वसाधारणपणे, रँक (A) = रँक (A^T)

परंतु, नलिटी $(A) \neq$ नलिटी (A^T)

दिलेल्या उदाहरणात आपण पाहू शकतो,

समजा
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5}$$

तर रँक $(A) = 3$

$A^T = 5\times 4$ (मॅट्रिक्स)

मग रँक (A^T) = 3

(मॅट्रिक्स A ची रँक आणि त्याच्या ट्रान्स्पोज ची रँक समान आहे म्हणून)

परंतु, नलिटी $(A) = 5 - 3 = 2$ (स्तंभां ची संख्या 5 आहे म्हणून)

आणि नलिटी (A^T) $= 4 - 3 = 1$ (स्तंभां ची संख्या 4 आहे म्हणून)

उदाहरण 5.59: दिलेल्या मॅट्रिक्ससाठी $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ नलिटी शोधा.

उकल: दिलेले आहे

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

सुरुवातीला आपण A ची रँक शोधु,

$R_2 \to R_2 + 2R_1$

$R_3 \to R_3 - 7R_1$, लागू करून,

तर
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + \frac{R_2}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \to \frac{R_1}{3}, R_2 \to \frac{R_2}{42}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 29/21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अशा प्रकारे, $\rho(A) = 2$

म्हणून, नलिटी $(A) = 4 - 2 = 2$ (स्तंभां ची संख्या 4 आहे म्हणून)

5.13 समीकरणाची लिनियर प्रणाली

समजा माझ्या शेजारी एक विलक्षण दुकानदार आहे. त्यांचा असा विश्वास आहे की काही भारतीय तांदळापेक्षा जास्त गहू खातात आणि काही भारतीय गव्हापेक्षा जास्त तांदूळ खातात. म्हणून तो फक्त दोन मानक पॅकेट्स ऑफर करतो N नावाच्या पहिल्या पॅकेटमध्ये 5 किलो गहू आणि 2 किलो तांदूळ आहे, तर S नावाच्या दुसऱ्या पॅकेटमध्ये 2 किलो गहू आणि 5 किलो तांदूळ आहे. चला एक शॉर्टहँड शोधूया. जेव्हा आपण (m, n) लिहितो, तेव्हा आमचा अर्थ m किलो गहू आणि n किलो तांदूळ असा होतो. आता मी N ची 3 पॅकेट्स खरेदी केली तर याचा अर्थ मी 15 किलो गहू आणि 6 किलो तांदूळ खरेदी करत आहे, म्हणजे $3N = 3\ (5, 2) = (15, 6)$.

त्याचप्रमाणे, S चे 2 पॅकेट म्हणजे 4 किलो गहू आणि 10 किलो तांदूळ म्हणजे $2S = 2\ (2, 5) = (4, 10)$.

जर मी प्रत्येक पॅकेटपैकी एक विकत घेतले तर मी 7 किलो गहू आणि 7 किलो तांदूळ खरेदी केला असता, म्हणजे

$$N + S = (5, 2) + (2, 5) = (5 + 2, 2 + 5) = (7, 7)$$

अशाप्रकारे मला N ची m पॅकेट्स किंवा S किंवा दोन्हीची पॅकेट्स हवी आहेत, कोणतीही अडचण नाही. समजा मला 19 किलो गहू आणि 16 किलो तांदूळ हवा आहे. मी काय करू? मला N ची x पॅकेट आणि S ची y पॅकेट खरेदी करण्याची गरज आहे जेणेकरून $x(5, 2) + y(2, 5) = (19, 16)$

अर्थात्, $(5x, 2x) + (2y, 5y) = (19, 16)$ किंवा $(5x + 2y, 2x + 5y) = (19, 16)$ अशा प्रकारे मी लिनियर समीकरणांची एक प्रणाली सोडवतो. $5x + 2y = 19$

$$2x + 5y = 16$$

***n*- अज्ञाता मध्ये *n* समीकरणाच्या दृष्टीने स्पष्टीकरण:**

n अज्ञाता मध्ये n समीकरणांची एक लिनियर प्रणाली $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ या फॉर्मच्या समीकरणाचा संच असा आहे की

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad \ldots(1)$$

जेथे a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ ज्ञात गुणांक आहेत, b_i $(1 \le i \le n)$ दिलेल्या संख्या आहेत.

टिप्पणी: जर सर्व b_i's शून्य असतील तर प्रणालीला (एकसंध) होमोजिनिअस म्हणतात.

नाहीतर ते होमोजिनिअस नसल्याचे (नॉन होमोजिनिअस) म्हटले जाते.

मॅट्रिक्स नोटेशनमध्ये, प्रणाली (1) अशा प्रकारे म्हणून लिहिले जाऊ शकते

$$AX = B$$

जिथे
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

प्रणालीचा अगमेंटेड मॅट्रिक्स (augmented Matrix) (1) असा लिहिला जाऊ शकतो:

$$C=[A:B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

समीकरण (1) चे उकल म्हणजे $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ या संख्यांचा संच आहे जो सर्व n समीकरणांचे समाधान करतो.

टिप्पणी

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स: समीकरणांच्या प्रणालीतील एक ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स हे संख्यांचे मॅट्रिक्स आहे ज्यात प्रत्येक पंक्ती एका समीकरणातील स्थिरांक दर्शवते (समान चिन्हाच्या दुसऱ्या बाजूला गुणांक आणि स्थिर दोन्ही) आणि प्रत्येक स्तंभ एकाच व्हेरिएबल साठी सर्व गुणांक दर्शवितो

5.13.1 लिनियर समीकरणांचे प्रकार

A. होमोजिनिअस नसलेली समीकरणे (नॉन होमोजिनिअस)

B. होमोजिनिअस समीकरणे

5.13.1.1 नॉन-होमोजिनिअस (नॉन होमोजिनिअस) प्रणाली

i. **कंसिस्टन्ट (Consistent):** समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्ट असल्याचे म्हटले जाते, जर त्यांच्याकडे एक किंवा अधिक उकल असतील म्हणजेच

$x+2y=4$	$x+2y=4$
$3x+2y=2$	$3x+6y=12$
अद्वितीय उकल	अनंत उकल

ii. **इनकंसिस्टन्ट (Inconsistent):** जर समीकरणाच्या प्रणालीला काही उकल नसेल तर ते इनकंसिस्टन्ट असल्याचे म्हटले जाते.

$$x+2y=4$$
$$3x+6y=5$$

लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीची कंसिस्टन्सी (Consistency):

समजा n समीकरणाची प्रणाली असू द्या

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

मॅट्रिक्स नोटेशनमध्ये, ही समीकरणे खालीलप्रमाणे लिहिली आहेत:

$$AX = B$$

इथे
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स आहे

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

a. कंसिस्टन्ट समीकरण:

जर रँक A = रँक $[A : B]$

i. अद्वितीय उकल: रँक A = रँक [A : B] = n (चलांची संख्या)

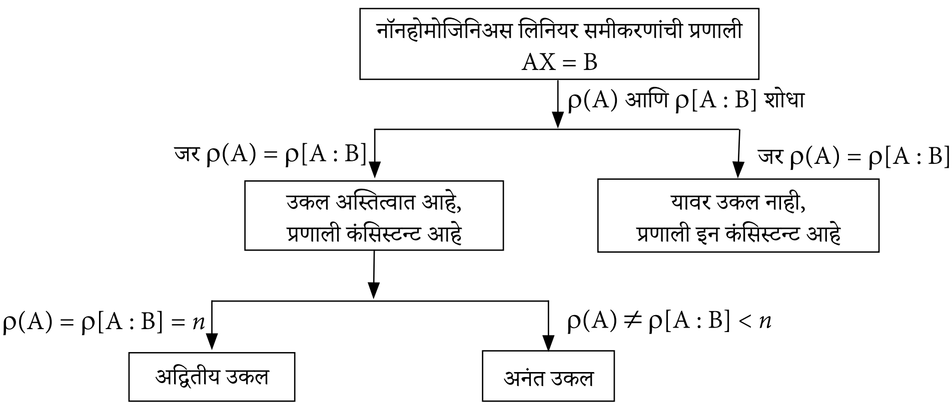
ii. अनंत उकल: रँक A = रँक [A : B] < n (चलांची संख्या)

b. इनकंसिस्टन्ट समीकरण:

जर रँक A ≠ रँक [A : B]

अशा प्रकारे आपण असे म्हणू शकतो की लिनियर समीकरणांची प्रणाली एकतर होमोजिनिअस किंवा नॉन होमोजिनिअस असते. हे b_i वर अवलंबून असते, मग होमोजिनिअस नसलेल्या समीकरणाची प्रणाली एकतर कंसिस्टन्ट किंवा इनकंसिस्टन्ट असते ज्यानुसार प्रणालीमध्ये अनन्य उकल असते किंवा अनंत उकल असतात.

थोडक्यात



- जेथे n = चलांची संख्या

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.60: खालील समीकरणे कंसिस्टंट नाहीत हे दाखवा.

$$2x+6y=-11$$

$$6x+20y-6z=-3$$

$$6y-18z=-1$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची दिलेली प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

येथे
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स आहे

$$C=[A:B]=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 6 & 20 & -6 & : & -3 \\ 0 & 6 & -18 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-3R_1,$
$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 0 & 2 & -6 & : & 30 \\ 0 & 6 & -18 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3-3R_2$
$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 0 & 2 & -6 & : & 30 \\ 0 & 0 & 0 & : & -91 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\rho(A)=2$ आणि $\rho(A:B)=3$

$\Rightarrow$ $\rho(A)\neq\rho(A:B)$

म्हणून, समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टंट नाही.

उदाहरण 5.61: कंसिस्टन्सी तपासा आणि सोडवा.

$$5x+3y+7z=4$$

$$3x+26y+2z=9$$

$$7x+2y+10z=5$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची दिलेली प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

इथे $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $C = [A : B] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & : & 4 \\ 3 & 26 & 2 & : & 9 \\ 7 & 2 & 10 & : & 5 \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1\left(\frac{1}{5}\right)$ $C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 3 & 26 & 2 & : & 9 \\ 7 & 2 & 10 & : & 5 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 3R_1, R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & : & 33/5 \\ 0 & -11/5 & 1/5 & : & -3/5 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \frac{1}{11}R_2$ $C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & : & 33/5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\rho(A) = 2$ आणि $\rho(A : B) = 2$

$\Rightarrow$ $\rho(A) = \rho(A : B)$

म्हणून, दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टंट आहे.

परंतु $\rho(A) = \rho[A{:}\, B] < n$ (चलांची संख्या)

त्यामुळे त्याचे अनंत उकल आहेत.

$\therefore$ $x + \frac{3}{5}y + \frac{7}{5}z = \frac{4}{5}$ ...(1)

$$\frac{121}{5}y - \frac{11}{5}z = \frac{33}{5} \Rightarrow 11y - z = 3$$

$z = k$ घेतल्यावर $11y = 3 + k$

$$y = \frac{3}{11} + \frac{k}{11}$$

y आणि z चे मूल्य समीकरण (1) मध्ये ठेवा

$$x+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{11}+\frac{k}{11}\right)+\frac{7}{5}k=\frac{4}{5}$$

$$x+\frac{9}{55}+\frac{3k}{55}+\frac{7k}{5}=\frac{4}{5}$$

$$x=\frac{4}{5}-\frac{9}{55}-\left(\frac{3k}{55}+\frac{7k}{5}\right)$$

$$x=\frac{7}{11}-\frac{16}{11}k$$

उदाहरण 5.62: खालील समीकरणांच्या प्रणालीच्या कंसिस्टन्सीची चाचणी करा:

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5$$

$$6x_1+7x_2+8x_3+9x_4=10$$

$$11x_1+12x_2+13x_3+14x_4=15$$

$$16x_1+17x_2+18x_3+19x_4=20$$

$$21x_1+22x_2+23x_3+24x_4=25$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स
$$C=[A:B]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9: & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14: & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19: & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24: & 25 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2-6R_1,\ R_3 \to R_3-11R_1,\ R_4 \to R_4-16R_1,\ R_5 \to R_5-21R_1$$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15: & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30: & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45: & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60: & -80 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad C \sim (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15: & 20 \\ 0 & 10 & 20 & 30: & 40 \\ 0 & 15 & 30 & 45: & 60 \\ 0 & 20 & 40 & 60: & 80 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2,\ R_4 \to R_4 - 3R_2,\ R_5 \to R_5 - 4R_2$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4: & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15: & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0: & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0: & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0: & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\rho(A) = 2$ आणि $\rho(A:B) = 2$; $\rho(A) = \rho(A:B)$

म्हणून, दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्ट आहे.

परंतु $\rho(A) = \rho[A:B] < n$

तर, त्याचे उकल अनंत आहेत

उदाहरण 5.63: k च्या कोणत्या मूल्यासाठी प्रणालीकडे उकल आहे.

$$x + y + z = 1$$

$$2x + y + 4z = k$$

$$4x + y + 10z = k^2 \text{ उकल आहे.}$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $\qquad C = [A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1: & 1 \\ 2 & 1 & 4: & k \\ 4 & 1 & 10: & k^2 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 4R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1: & 1 \\ 0 & -1 & 2: & k-2 \\ 0 & -3 & 6: & k^2 - 4 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2 \qquad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1: & 1 \\ 0 & -1 & 2: & k-2 \\ 0 & 0 & 0: & k^2 - 3k + 2 \end{bmatrix}$

जर दिलेल्या प्रणालीला उकल असेल तर

$$\rho(A) = \rho(A:B)$$

आणि $\rho(A:B) = 2$ आहे तर $k^2 - 3k + 2 = 0$

$$k^2 - 2k - k + 2 = 0$$

$$(k-2)(k-1) = 0$$

$$k = 2,\ k = 1$$

स्थिति I: जेव्हा $k = 1$, मग आपल्याकडे आहे

$$x + y + z = 1 \quad \ldots(1)$$

$$-y + 2z = 1 - 2 = -1 \quad \ldots(2)$$

समजा $z = \lambda$

समीकरण (2) मध्ये $z = \lambda$ ची किंमत ठेऊ $y = 2\lambda + 1$

समीकरण (1) मध्ये y आणि z ची किंमत ठेऊन,

$$x + (2\lambda + 1) + \lambda = 1$$

$$x + 3\lambda + 1 = 1$$

$$x = -3\lambda$$

स्थिति II: जेव्हा $k = 2$, मग आपल्याकडे असेल

$$x + y + z = 1 \quad \ldots(3)$$

$$-y + 2z = 2 - 2 = 0 \quad \ldots(4)$$

समजा $z = c$

समीकरण (4) मध्ये z ची किंमत ठेऊन, $-y + 2c = 0$

$$y = 2c$$

समीकरण (3) मध्ये y आणि z ची किंमत ठेऊन,

$$x + 2c + c = 1$$

$$x = 1 - 3c$$

उदाहरण 5.64:λ आणि μ ची किंमत अशा प्रकारे शोधा कि दिलेल्या समीकरणांसाठी.

$$2x + 3y + 5z = 9$$
$$7x + 3y - 2z = 8$$
$$2x + 3y + \lambda z = \mu$$

उकल नाही

समाधानाची अनंत संख्या (*an infinite no. of solution*)

एक अद्वितीय सोल्यूशन (a unique solution)

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $C = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 : 9 \\ 7 & 3 & -2 : 8 \\ 2 & 3 & \lambda : \mu \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - \frac{7}{2}R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & : & 9 \\ 0 & -15/2 & -39/2 & : & -47/2 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & : & \mu - 9 \end{bmatrix}$$

i. उकल नाही: $\rho(A) \neq \rho(A : B)$

$\lambda - 5 = 0$ आणि $\mu - 9 \neq 0$

$\lambda = 5$ आणि $\mu \neq 9$

ii. समाधानाची अनंत संख्या

$\rho(A) = \rho(A : B) < n$

$\lambda - 5 = 0$ आणि $\mu - 9 = 0$

$\lambda = 5$ आणि $\mu = 9$

iii. एक अद्वितीय सोल्यूशन $\rho(A) = \rho(A : B) = n$

$\lambda - 5 \neq 0$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

$\lambda \neq 5$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

उदाहरण 5.65: λ आणि μ ची किंमत अशा प्रकारे शोधा कि दिलेल्या समीकरणांसाठी.

$$x + y + z = 6,\ x + 2y + 3z = 10,\ x + 2y + \lambda z = \mu$$

i. उकल नाही

ii. अद्वितीय सोल्यूशन

iii. समाधानाची अनंत संख्या

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स $C=[A:B]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1: & 6\\ 1 & 2 & 3: & 10\\ 1 & 2 & \lambda: & \mu\end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - R_1,\, R_3 \to R_3 - R_1$

$$C \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & : & 6\\ 0 & 1 & 2 & : & 4\\ 0 & 1 & \lambda-1 & : & \mu-6\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ $\quad C \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & : & 6\\ 0 & 1 & 2 & : & 4\\ 0 & 0 & \lambda-3 & : & \mu-10\end{bmatrix}$

i. उकल नाही $\quad \rho(A) \neq \rho(A:B)$

$\lambda-3=0$ किंवा $\mu-10\neq 0$

$\lambda=3$ किंवा $\mu\neq 10$

ii. अद्वितीय उकल $\quad \rho(A)=\rho(A:B)=n$

$\lambda-3\neq 0$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

$\lambda\neq 3$ आणि μ च्या कोणत्याही किमतीसाठी

iii. अनन्त संख्या उकल:

$\rho(A)=\rho(A:B)<n$

$\lambda-3=0$ किंवा $\mu-10=0$

$\lambda=3$ किंवा $\mu=10$

उदाहरण 5.66: खालील समीकरणाला

$$-2x+y+z=a\,,$$

$$x-2y+z=b\,,$$

$$x+y-2z=c$$

$a+b+c=0$ असल्याशिवाय उकल नाही हे दाखवा. कोणत्या बाबतीत त्यांच्याकडे अनंत उकल आहेत? $a=1,\, b=1$ आणि $c=-2$ असताना हे उकल शोधा.

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

अगमेंटेड मॅट्रिक्स आहे (ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स)

$$C=[A:B]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1: a\\ 1 & -2 & 1: b\\ 1 & 1 & -2: c\end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2,$
$$C\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1: b\\ -2 & 1 & 1: a\\ 1 & 1 & -2: c\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2+2R_1,\ R_3 \to R_3-R_1$
$$C\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1: & b\\ 0 & -3 & 3: & a+2b\\ 0 & 3 & -3: & c-b\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3+R_2$
$$C\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1: & b\\ 0 & -3 & 3: & a+2b\\ 0 & 0 & 0: & a+b+c\end{bmatrix}$$

स्थिति I: जर $a+b+c\neq 0$

$\rho(A)=2,$ आणि $\rho(A:B)=3$

$\therefore \quad \rho(A)\neq\rho(A:B)$

म्हणून, प्रणाली इनकंसिस्टन्ट असल्याने, यावर कोणतेही उकल नाही.

स्थिति II: जर $a+b+c=0$

$\Rightarrow \quad \rho(A)=2$ आणि $\rho(A:B)=2$

$\therefore \quad \rho(A)=\rho(A:B)$

म्हणून, दिलेल्या समीकरणांची प्रणाली कंसिस्टन्ट आहे.

परंतु $\rho(A)=\rho(A:B)<n$

तर, त्याच्याकडे असंख्य उकल आहेत.

स्थिति III: $a=1, b=2, c=-2$ ठेवुन

$$C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1: 1\\ 0 & -3 & 3: 3\\ 0 & 0 & 0: 0\end{bmatrix}$$

$$x-2y+z=1 \qquad \ldots(1)$$

$$-3y+3z=3 \Rightarrow -y+z=1 \qquad \ldots(2)$$

समजा $z=k \quad y=k-1$

y आणि z चे मूल्य (1) मध्ये ठेवा

$$x-2(k-1)+k=1$$
$$x-2k+2+k=1$$
$$x-k+2=1$$
$$x=k-1$$
$$\therefore \quad x=k-1, y=k-1, z=k$$

5.13.1.2 होमोजिनिअस (Homogeneous) समीकरणे

होमोजिनिअस लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीसाठी $AX = 0$.

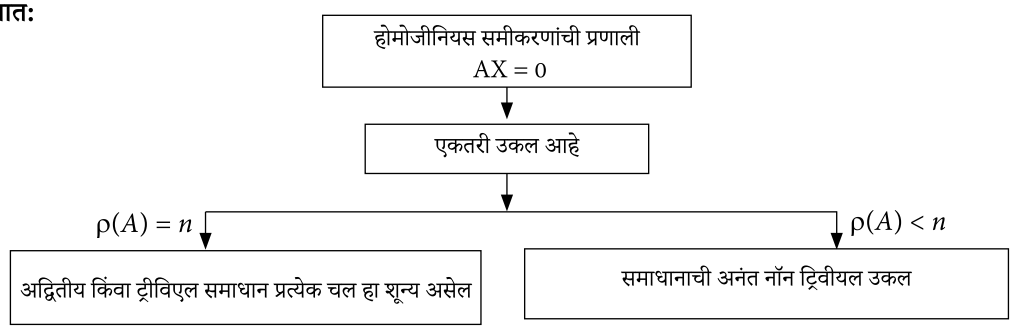
i $X = 0$ हि नेहमीच एक उकल असते. हे उकल ज्यामध्ये प्रत्येक अज्ञात मूल्य शून्य आहे त्याला शून्य उकल (नल सोलुशन) किंवा ट्रिव्हियल उकल म्हणतात. अशा प्रकारे होमोजिनिअस प्रणाली नेहमीच कंसिस्टन्ट असते.

➢ होमोजिनिअस लिनियर समीकरणांच्या प्रणालीमध्ये एकतर ट्रिव्हियल उकल किंवा अनंत संख्येने समाधान असतात.

ii. जर r (A) = चलांची संख्या असेल तर प्रणालीकडे फक्त ट्रिव्हियल उकल असते.

iii. जर r (A) < चलांची संख्या, प्रणालीला अनंत नॉन ट्रिवीयल उकलं असते.

थोडक्यात:



उदाहरण 5.67: b ची किंमत अशी ठरवा जसे की होमोजिनिअस समीकरणांच्या प्रणालीला खालीलप्रमाणे उकल असेल.

$$2x+y+2z=0,\ x+y-3z=0,\ 4x+3y+bz=0$$

i. ट्रिव्हियल उकल आहे.

ii. नॉन ट्रिवीयल उकल आहे. मॅट्रिक्स पद्धत वापरून ट्रिव्हियल उकल शोधा.

उकल:

i. **ट्रिव्हियल उकल साठी:** आपल्याला माहित आहे की $x = 0, y = 0, z = 0$, म्हणून b चे कोणतेही मूल्य असू शकते.

ii. **नॉन ट्रिव्हियल उकल साठी:** मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणांची प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX=0$$

अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे

$$C=[A:B]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2:0\\ 1 & 1 & -3:0\\ 4 & 3 & b:0\end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$, $$C\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -3:0\\ 2 & 1 & 2:0\\ 4 & 3 & b:0\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-2R_1,\ R_3 \to R_3-4R_1$

$$C\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -3:0\\ 0 & -1 & 8:0\\ 0 & -1 & b+12:0\end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3-R_2$ $$C\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -3:0\\ 0 & -1 & 8:0\\ 0 & 0 & b+4:0\end{bmatrix}$$

नॉन ट्रिव्हियल उकल साठी $\rho(A)=\rho(A:B)<n$

$$b+4=0;\ b=-4$$

उदाहरण 5.68: k ची अशी किंमत शोधा कि समीकरणांच्या प्रणालीला नॉन ट्रीविएल समाधान असेल.

$$x+ky+3z=0,\ 4x+3y+kz=0,\ 2x+y+2z=0$$

उकल: मॅट्रिक्स स्वरूपात समीकरणाची दिलेली प्रणाली आहे

$$\begin{bmatrix}1 & k & 3\\ 4 & 3 & k\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$AX=0$$

अगमेंटेड मॅट्रिक्स $[A:B]$ आहे

$$C=[A:B]=\begin{bmatrix}1 & k & 3:0\\ 4 & 3 & k:0\\ 2 & 1 & 2:0\end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$, $$C\sim\begin{bmatrix}2 & 1 & 2:0\\ 4 & 3 & k:0\\ 1 & k & 3:0\end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2-2R_1,\ R_3 \to R_3-\frac{1}{2}R_1,$

$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : & 0 \\ 0 & k-(1/2) & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - \left(k - \frac{1}{2}\right) R_2$,

$$C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2-(k-1/2)(k-4) & : & 0 \end{bmatrix}$$

नॉन ट्रिव्हियल उकल साठी $\rho(A) = \rho(A:B) < n$

$$2-(k-1/2)(k-4) = 0$$

$$2-k^2+4k+\frac{k}{2}-2 = 0$$

$$-k^2+\frac{9}{2}k = 0$$

$$k\left(-k+\frac{9}{2}\right) = 0$$

$$k = 0,\ k = \frac{9}{2}$$

अभ्यास 5.10

खालील समीकरणांच्या प्रणालीची कंसिस्टन्सी तपासा. उकल सेट देखील शोधा:

1. $x+2y-z=3$
   $3x-y+2z=1$
   $2x-2y+3z=2$
   $x-y+z=-1$

2. $x+3y-z=4$
   $2x+y+z=7$
   $2x-4y+4z=6$
   $3x+4y=1$

3. $x_1+2x_2-x_3=6$
   $3x_1-1x_2+2x_3=3$
   $4x_1-3x_2+x_3=9$

4. $x-4y-3z=-16$
   $2x+7y+12z=48$
   $4x-y+6z=16$
   $5x-5y+3z=0$

5. समीकरणाच्या कंसिस्टन्सी वर चर्चा करा.
   $x+2y+3z+4t=0$
   $2x+3y+4z-1=0$

$3x+4y+t=2$

$4x+z+2t=3$ ते कंसिस्टन्ट असल्यास समाधान संच शोधा.

6. λ च्या कोणत्या किमतीसाठी खालील समीकरणाला अद्वितीय समाधान नसेल.

$3x-y+\lambda z=1$

$2x+y+z=2$

$x+2y-\lambda z=-1$

λ च्या या मूल्यासाठी समीकरणाला काही उकल असेल का?

7. खालील समीकरणांची प्रणाली इनकंसिस्टन्ट आहे हे दर्शविण्यासाठी रँक चाचणी वापरा:

$2x-y+z=4$

$3x-y+z=6$

$4x-y+2z=7$

$-x+y-z=9$

8. खालील समीकरणे कंसिस्टन्ट आहेत हे दाखवा आणि त्यांना सोडवा:

$x+2y-5z=-9$

$3x-y+2z=5$

$2x+3y-z=3$

$4x-5y+z=-3$

9. समीकरणांची प्रणाली सोडवा:

$\lambda x+2y-2z=1$

$4x+2\lambda y-z=2$

$6x+6y+\lambda z=3$ विशेषतः जेव्हा $\lambda=2$ तेव्हा विचार करा

10. a आणि b च्या कोणत्या किमतीसाठी समीकरणाला खालील प्रकारचे समाधान असेल.

$x+y+5z=0$

$x+2y+3az=b$

$x+3y+az=1$

i. उकल नाही

ii. अद्वितीय उकल

iii. अनंत प्रकारचे उकल आहेत

खालील समीकरणाची प्रणाली सोडवा:

11. $x-y+z=0$

$-3x+y-4z=0$

12. $x+3y-2z=0$

$2x-y+4z=0$

$7x-3y-9z=0$

$4x-2y+5z=0$

$x-11y+14z=0$

13. $2w+3x-y-z=0$

$4w-6x-2y+2z=0$

$-6w+12x+3y-4z=0$

$8w-24x-4y+8z=0$

14. $3x+4y-z-6w=0$

$2x+3y+2z-3w=0$

$2x+y-14z-9w=0$

$x+3y+13z+3w=0$

15. k चे मूल्य असे शोधा कि खालील समीकरणांच्या प्रणालीमध्ये नॉन ट्रीव्हीएल समाधान असेल.

$(3k-8)x+3y+3z=0$

$3x+(3k-8)y-3z=0$

$3x+3y+(3k-8)z=0$

16. λ च्या एकमेव वास्तविक मूल्यासाठी खालील समीकरणाला शून्य नसलेली संख्या 6 हे समाधान आहे हे दाखवा.

$x+2y+3z=\lambda x$

$3x+y+2z=\lambda y$

$2x+3y+z=\lambda z$

उत्तरे

1. $-1, 4, 4$
2. कंसिस्टेंट नाही
3. $-1, 4, 4$
4. $\frac{17}{5}-\frac{4}{5}k, \frac{1}{5}+\frac{3}{5}k, k$
5. कंसिस्टेंट, $\frac{9}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{-1}{11}$
6. कंसिस्टेंट नाही. $\lambda=-\frac{7}{2}$

8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
9. $x=\frac{1}{2}-k, y=k, z=0$
10. $i. a=1, b\neq\frac{1}{2}$ $\quad$ $ii. a\neq 1, b\in R$ $\quad$ $iii. a=1, b=\frac{1}{2}$

11. $x = y = z = 0$

12. $x = \frac{-10}{7}k,\ y = \frac{8}{7}k,\ z = k$

13. $x = \frac{1}{3}k_1,\ y = k_2,\ z = k_1, w = \frac{1}{2}k_2$

14. $x = 11k_1 + 6k_2,\ y = -8k_1 - 3k_2, z = k_1, w = k_2$

15. $k = 11/3$ किंवा $k = 2/3$ असल्यास ट्रिव्हियल उकल आहे.

5.14 एजेन मूल्ये आणि मॅट्रिक्सचे एजेन वेक्टर

'A' एक चौरस मॅट्रिक्स आहे आणि X हा कॉलम वेक्टर आहे, मग मॅट्रिक्स समीकरण

$$AX = \lambda X$$

हे 'n' समीकरणांच्या समकक्ष आहे.

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + \ldots\ldots\ldots + (a_{mn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots(1)$$

'n' अज्ञातांमध्ये लिनियर होमोजिनिअस समीकरणांच्या वरील प्रणालीमध्ये नेहमीच ट्रिव्हिअल उकल असते.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = x_n = 0$$

नॉन ट्रिव्हिअल उकल शोधण्यासाठी समीकरण (1) चा गुणांकांचे डिटरमिनंट नाहीसे होणे आवश्यक आहे; म्हणजे.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(2)$$

हे स्पष्ट आहे की समीकरण (2) हे λ मधील n डिग्री चे आहे. याला मॅट्रिक्स A चे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण म्हणतात. आपण ते असे लिहू शकतो

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad \ldots(3)$$

विशेषत: $$p_1 = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = -(trace A) \qquad \ldots(4)$$

आणि $$p_n = (-1)^n \left|a_{ij}\right| = (-1)^n \left|A\right| \qquad \ldots(5)$$

(3) समीकरणाच्या डाव्या बाजूच्या समीकरणाला कॅरॅक्टरिस्टिक बहुपदी म्हणतात.

समीकरण (3) ला n मूळे असतील. यांना कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे किंवा मॅट्रिक्स A चा प्रत्येक मुळाशी संबंधित एजेन मूल्ये म्हणतात, प्रत्येक मुळाशी संबंधित, समीकरण (1) ला शून्य नसलेले समाधान असेल.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ज्याला कॅरॅक्टरिस्टिक वेक्टर किंवा एजेन वेक्टर म्हणून ओळखले जाते.

जर A ची एजेन मूल्ये $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n$ असतील, तर आपण कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण खालील प्रमाणे लिहू शकतो.

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0,$$

किंवा $$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n = 0$$

समीकरण (3) शी तुलना करताना आपण ते पाहू शकतो,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n = -p_1 = trace\, A \qquad (4) \text{ वरून}$$

आणि $$\lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n = (-1)^n p_n = \det(A), \qquad (5) \text{ वरुण}$$

टिप्पण्या:

1. ऐजन मूल्यांना कॅरॅक्टरिस्टिक मूल्य, प्रॉपर मूल्य, लाटेन्ट मूल्य किंवा स्पेक्ट्रल मूल्य असेही म्हटले जाते.
2. त्याचप्रमाणे, ऐजन वेक्टरला कॅरॅक्टरिस्टिक वेक्टर, प्रॉपर वेक्टर, लाटेन्ट वेक्टर किंवा स्पेक्ट्रल वेक्टर म्हणूनही म्हटले जाते

5.14.1 एजेन मूल्यांचे गुणधर्म

a. स्क्वेअर मॅट्रिक्स A आणि त्याचा ट्रांसपोज A' यांचे एजेन मूल्य समान असतात.

b. मॅट्रिक्सच्या एजेन मूल्यांची बेरीज प्रिन्सिपल डायगोनलच्या घटकांच्या बेरजेसारखीच आहे.

c. मॅट्रिक्स A च्या एजेन मूल्यांचा गुणाकार हा A च्या डीटरमिनन्ट बरोबर म्हणजेच $|A|$ इतका असतो.

d. जर λ हे नॉन सिंगुलर मॅट्रिक्सचे एजेन मूल्य असेल, तर $\frac{1}{\lambda}$ हे A^{-1} चे एजेन मूल्य आहे.

e. जर λ हे ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे एजेन मूल्य असेल, तर $\frac{1}{\lambda}$ हे देखील त्याचे एजेन मूल्य असते.

f. जर $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\ldots \lambda_n$ ही मॅट्रिक्स A ची एजेन मूल्ये असतील, तर A^m ची एजेन मूल्ये $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n^m$ असतात. (m एक +ve पूर्णांक आहे).

g. इडेमपोटेंट मॅट्रिक्सची एजेन मूल्ये एकतर शून्य किंवा एक असतात.

h. ट्रॅनगुलर मॅट्रिक्स आणि डयगोनल मॅट्रिक्सची एजेन मूल्ये त्या मॅट्रिक्सच्या डायगोनलच्या घटकांसारखीच असतात.

सिद्धता: d. जर X हे A च्या एजेन मूल्य λ शी संबंधित दिलेला एजेन वेक्टर असेल, तर

$$AX = \lambda X$$

दोन्ही बाजूंना A^{-1} ने पूर्व-गुणाकार करा

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X)$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = \lambda A^{-1}X \Rightarrow IX = \lambda A^{-1}X$$

$$\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X \qquad [\because IX = X]$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ हे A^{-1} चे एजेन मूल्य आहे.

सिद्धता: f. जर X हा मॅट्रिक्स A च्या एजेन मूल्य λ शी संबंधित एजेन वेक्टर असेल, तर

$$AX = \lambda X$$

दोन्ही बाजूंना A ने पूर्व-गुणाकार करा

$$A(AX) = A(\lambda X) \Rightarrow (AA)X = \lambda(AX)$$

$$\Rightarrow \quad A^2X = \lambda AX$$

$$\Rightarrow \quad A^2X = \lambda^2 X \qquad (As\ AX = \lambda X)$$

पुन्हा दोन्ही बाजूंना 'A' ने गुणाकार करून, आपल्याला अशाच प्रकारे मिळेल

$$A^3X = \lambda^3 X$$

त्याच पद्धतीने चालू ठेवून, आपल्याकडे असेल

$$A^mX = \lambda^m X$$

जे दर्शविते की λ^m हे A^m चे एजेन मूल्य आहे ($m > 0$)

अशा प्रकारे, आपण असे म्हणू शकतो की जर $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots\ldots \lambda_n$ ही A ची एजेन मूल्ये असतील, तर

$\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n^m$ हि A^m ची एजेन मूल्ये असतील.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.69: मॅट्रिक्स A ची कॅरॅक्टरिस्टिक पॉलिनॉमीयल शोधा, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

उकल: A चे कॅरॅक्टरिस्टिक मॅट्रिक्स खालीलप्रमाणे आहे

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चे कॅरॅक्टरिस्टिक पॉलिनॉमीयल आहे

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 15$$

उदाहरण 5.70: मॅट्रिक्स A ची सर्व एजेन मूल्ये आणि एजेन वेक्टर शोधा $A=\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

उकल: दिलेल्या मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $(8-\lambda)[(7-\lambda)(3-\lambda)-16]+6[-6(3-\lambda)+8]+2[24-2(7-\lambda)]=0$

$\Rightarrow$ $(8-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+5)+6(-10+6\lambda)+2(10+2\lambda)=0$

$\Rightarrow$ $8\lambda^2-80\lambda+40-\lambda^3+10\lambda^2-5\lambda-60+36\lambda+20+4\lambda=0$

$\Rightarrow$ $-\lambda^3+18\lambda^2-45\lambda=0$

$\Rightarrow$ $\lambda^3-18\lambda^2+45\lambda=0$

$\Rightarrow$ $\lambda(\lambda^2-18\lambda+45)=0$

$\Rightarrow$ $\lambda=0, (\lambda^2-18\lambda+45)=0$

$\Rightarrow$ $\lambda^2-15\lambda-3\lambda+45=0$

$\Rightarrow$ $\lambda(\lambda-15)-3(\lambda-15)=0$

$\Rightarrow$ $\lambda-3=0, \lambda-15=0$

$\Rightarrow$ $\lambda=3, \lambda=15, \lambda=0$

एजेन मूल्य $\lambda=0,3,15$

एजेन वेक्टर शोधण्यासाठी: $[A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

$\lambda=0$ साठी $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow$ $8x_1-6x_2+2x_3=0$ ...(1)

$\Rightarrow$ $-6x_1+7x_2-4x_3=0$ ...(2)

$\Rightarrow$ $2x_1-4x_2+3x_3=0$ ...(3)

समीकरण (1) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवल्यानंतर, आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$10x_1 - 5x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10x_1 = 5x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) ला 3 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवल्यानंतर, आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$-5x_2 + 5x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -5x_2 = -5x_3$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_3 \quad \ldots(5)$$

समीकरण (4) आणि (5) वरून, आपल्याला मिळेल

$$2x_1 = x_2 = x_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$$

$\lambda = 0$ शी संबंधित ऐजन वेक्टर $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ आहे.

$\lambda = 3$ साठी $\begin{bmatrix} 8-3 & -6 & 2 \\ -6 & 7-3 & -4 \\ 2 & -4 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \quad \ldots(6)$$

$$\Rightarrow \quad -6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \quad \ldots(7)$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 - 4x_2 - 0x_3 = 0 \quad \ldots(8)$$

(8) वरून, $\quad 2x_1 = 4x_2$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2x_2$$

$x_1 = 2x_2$ समीकरण (7) मध्ये ठेवल्यानंतर, आपल्याला मिळेल

$$\Rightarrow \quad x_3 = -2x_2$$

अशाप्रकारे, $\quad x_1 = 2x_2 = -x_3$

किंवा $\quad \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{1} = \dfrac{x_3}{-2}$

$\lambda = 3$ शी संबंधित ऐजन वेक्टर $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ आहे.

$\lambda = 15$ साठी

$$\begin{bmatrix} 8-15 & -6 & 2 \\ -6 & 7-15 & -4 \\ 2 & -4 & 3-15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \ldots(9)$$

$$-6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \qquad \ldots(10)$$

$$2x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0 \qquad \ldots(11)$$

समीकरण (11) ला 3 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (10) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला मिळेल

$$x_2 = -2x_3$$

समीकरण (9) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (10) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$x_1 = -x_2$$

$$x_1 = -x_2 = 2x_3$$

किंवा
$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1}$$

अशाप्रकारे, $\lambda = 15$ शी संबंधित ऐजन वेक्टर $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ आहे.

उदाहरण 5.71: $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स चे सर्व एजेन मूल्य , एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा.

उकल: समजा

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad (-2-\lambda)(-(1-\lambda)\lambda-12)-2(-2\lambda-6)-3(-4+1-\lambda)=0$

$\Rightarrow \quad (-2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-12)-2(-2\lambda-6)-3(-3-\lambda)=0$

$\Rightarrow \quad \lambda^3+\lambda^2-21\lambda-45=0$

$\Rightarrow \quad (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-5)=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=-3,-3,5$

अशाप्रकारे, एजेन मूल्य -3, -3, 5 आहेत.

एजेन वेक्टर शोधण्यासाठी:

$\lambda=-3$ साठी, ऐजन वेक्टर आहे

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & 0+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow \quad x+2y-3z=0$

$2x+4y-6z=0$

$-x-2y+3z=0$

वरील समीकरणावरून असे लक्षात येते कि, $x+2y-3z=0$ फक्त एक स्वतंत्र समीकरण आहे.

म्हणून, समजा $z=0$ आपल्याला मिळेल

$x+2y=0$

$x=-2y$

$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}, z=0$

म्हणून $\lambda=-3$ साठी $(2,-1,0)$ हा एजेन वेक्टर आहे.

तसेच, $\lambda=-3$ साठी आणखी एक एजेन वेक्टर शोधण्यासाठी.

समजा $y=0$ घेतले तर आपल्याला मिळेल

$x-3z=0$

$\Rightarrow \quad x=3z$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{z}{1}$

$\Rightarrow \quad y=0$

म्हणून $(3,0,1)$ हा $\lambda=-3$ साठी आणखी एक एजेन वेक्टर आहे.

$\lambda=5$ साठी, एजेन वेक्टर आहे.

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2-5 & 2 & -3 \\ 2 & 1-5 & -6 \\ -1 & -2 & 0-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$$

$$-7x+2y-3z=0 \qquad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x-4y-6z=0 \qquad ...(2)$$

$$-x-2y-5z=0 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$-12x-12z=0$$

किंवा $\quad -12x=12z$

$\Rightarrow \quad x=-z$

समीकरण (3) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (2) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$y=-2z$$

म्हणून $\quad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$

म्हणून, $(1,2,-1)$ हा $\lambda=5$ च्या संदर्भात एजेन वेक्टर आहे.

सर्व एजेन वेक्टर लिनिअरली इंडिपेंडंट असल्याने आणि R^3 चा बेसिस तयार करतात.

म्हणून एजेन बेसिस $\{(2,-1,0),(3,0,1),(1,2,-1)\}$ आहे.

उदाहरण 5.72: $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स चे सर्व एजेन मूल्य, एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा.

उकल: समजा $\quad A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

आणि $\quad |A-\lambda I|=0$ (कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण)

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow \quad (6-\lambda)\left((3-\lambda)^2-1\right)+2\left(-2(3-\lambda)+2\right)+2\left(2-2(3-\lambda)\right)=0$

$\Rightarrow \quad (6-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right)+2\left(2\lambda-4\right)+2\left(2\lambda-4\right)=0$

$\Rightarrow \quad -\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda+32=0$

$\Rightarrow \quad \lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-32=0$

$\Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+16)=0$

$\Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-8)=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=2,2,8$

एजेन मूल्य 2, 2, 8 आहेत.

$\lambda=2$ साठी, एजेन वेक्टर आहे.

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -2 & 2 \\ -2 & 3-2 & -1 \\ 2 & -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$4x-2y+2z=0$

$\Rightarrow \quad -2x+y-z=0$

$2x-y+z=0$

येथे $2x-y+z=0$ हे एकमेव स्वतंत्र समीकरण आहे

म्हणून समजा $z=0$,

$\Rightarrow \quad 2x-y=0$

किंवा $2x=y$

अशा प्रकारे $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}, z=0$

म्हणून $(1,2,0)$ हा $\lambda=2$ च्या संदर्भात एजेन वेक्टर आहे.

पुन्हा, $\lambda=2$ साठी आणखी एक एजेन वेक्टर शोधण्यासाठी,

आपण $y=0$ घेऊ

येथे $2x-y+z=0, 2x+z=0$ होईल

$\Rightarrow \quad z=-2x$

किंवा $\dfrac{x}{1}=\dfrac{z}{-2}, y=0$

म्हणून (1, 0, –2) हा एजेन वेक्टर आहे.

$\lambda=8$ साठी एजेन वेक्टर आहे.

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$\begin{bmatrix} 6-8 & -2 & 2 \\ -2 & 3-8 & -1 \\ 2 & -1 & 3-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$-2x-2y+2z=0 \quad ...(1)$$

$\Rightarrow$ $$-2x-5y-z=0 \quad ...(2)$$

$\Rightarrow$ $$2x-y-5z=0 \quad ...(3)$$

समीकरण (2) ला 2 ने गुणा आणि येणारे समीकरण, समीकरण (1) मध्ये मिळवा, तर आपल्याला खालील समीकरण मिळेल

$$-6x-12y=0$$

$\Rightarrow$ $$x=-2y$$

समीकरण (2) व (3) ची बेरीज करून

$$y=-z$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$$

$(2,-1,1)$ हा $\lambda=8$ च्याशी संबंधित ऐजन वेक्टर आहे.

यानंतर सर्व एजेन व्हेक्टर्स लिनिअरली इंडिपेंडंट आहेत. म्हणून R^3 बेसिस बनतो.

म्हणून एजेन बेसिस $\{(1,2,0),(1,0,-2),(2,-1,1)\}$.

उदाहरण 5.73: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ चे सर्व एजेन मूल्ये, एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $$(1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-2]-0-1[2-4+2\lambda]=0$$

किंवा $$[\lambda^2-5\lambda+4-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda-2\lambda+2]=0$$

किंवा $$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$$

किंवा $$(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+6]=0$$

किंवा $$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

एजेन मूल्ये 1, 2, 3 आहेत.

$\lambda = 1$ साठी, एजेन वेक्टर $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

किंवा $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$\Rightarrow$ $$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1), (2) आणि (3) मधे ठेऊन, $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

आणि $$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{0}$$

अशा प्रकारे $\lambda = 1$ साठी $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ एजेन वेक्टर आहे ,

$\lambda = 2$ साठी, एजेन वेक्टर $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & -1 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

किंवा $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 - x_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x_1 = -x_3$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1}, x_3 = -x_1$$

एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\lambda = 3$ साठी, एजेन वेक्टर $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

किंवा $$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 = x_3 \qquad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \qquad \ldots(3)$$

जर $x_1 = 1$ तर $x_2 = -1$

आणि $x_3 = -2(1) = -2$ सामी (1) वरून

एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

कारण सर्व एजेन वेक्टर लिनियरली इंडिपेंड्ट आहेत.

∴ एजेन बेसिस $\{(1, -1, 0), (2, -1, -2), (1, -1, -2)\}$ आहेत.

उदाहरण 5.74: $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ चे सर्व एजेन मूल्ये, एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण

$$|A - \lambda I| = 0$$

म्हणजे $$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 7\lambda + 10 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -6, -1$$

∴ एजेन मूल्ये -6 आणि -1 आहेत.

$\lambda = -1$ साठी, एजेन वेक्टर $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} -5+1 & 2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$-4x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

कारण $2x_1 - x_2$ हे एकमेव स्वतंत्र समीकरण आहे.

आता $$2x_1 - x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 = x_2$$

किंवा $$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2}$$

एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\lambda = -6$ साठी, एजेन वेक्टर $[A - \lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} -5+6 & 2 \\ 2 & -2+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

कारण $x_1 + 2x_2$ हे एकमेव स्वतंत्र समीकरण आहे.

आता $$x_1 + 2x_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x_1 = -2x_2$$

किंवा $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1}$; एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

कारण सर्व एजेन वेक्टर एल.आय. आहेत.

$\therefore$ एजेन बेसिस $\{(1, 2), (2, -1)\}$ आहेत.

उदाहरण 5.75: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ चे सर्व एजेन मूल्ये, एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $$[(3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)-0]-0(1)+4(0)=0$$

किंवा $$(3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)=0$$

$$\lambda = 2, 3, 5$$

एजेन मूल्ये 2, 3, 5 आहेत.

$\lambda = 2$ साठी, एजेन वेक्टर $[A-\lambda I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 4 \\ 0 & 2-2 & 6 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$6x_3 = 0 \quad \ldots(2)$$

$$3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (3), (1) मधे ठेऊन $x_1 + x_2 = 0$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{-x_2}{1}$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1}$$

अशा प्रकारे एजेन वेक्टर $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ आहे ,

$\lambda = 3$ साठी, एजेन वेक्टर $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$0x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-x_2 + 6x_3 = 0$$

$$2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

अशा प्रकारे एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 5$ साठी, एजेन वेक्टर

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 1 & 4 \\ 0 & 2-5 & 6 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$$

$$3x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$$

$$2x_1 - 2x_3 - 4x_3 = 0 \qquad [\, x_2 = 2x_3 \,] \text{ ठेवून}$$

किंवा $\qquad 2x_1 - 6x_3 = 0$

$\Rightarrow \qquad x_1 = 3x_3$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{x_1}{3} = \dfrac{x_3}{1} \qquad ...(1)$

$$x_2 = 2x_3$$

$\therefore \qquad \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_3}{1} \qquad ...(2)$

समी (1) आणि (2) वरून $\dfrac{x_1}{3} = \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_3}{1}$

म्हणून एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

सर्व एजेन वेक्टर लिनियरली इंडिपेड्ंट असल्यामुळे.

$\therefore$ एजेन बेसिस $\{(1, -1, 0), (1, 0, 0), (3, 2, 1)\}$.

उदाहरण 5.76: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ चे सर्व एजेन मूल्ये, एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा.

उकल: कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad (2-\lambda)(-1-\lambda)-10=0$

or $\quad \lambda^2-\lambda-12=0$

$\Rightarrow \quad (\lambda+3)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow \quad (\lambda+3)=0, (\lambda-4)=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=-3, \quad \lambda=4$

$\therefore$ एजेन मूल्ये -3 आणि 4 आहेत.

$\lambda=-3$ साठी, एजेन वेक्टर $[A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix} 2+3 & 2 \\ 5 & -1+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow \quad 5x+2y=0$

$5x+2y=0$

तेथे केवळ 1 स्वतंत्र समीकरण आहे

अशा प्रकारे आपल्याकडे आहे $5x+2y=0$

$\Rightarrow \quad 5x=-2y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{5}$

तर ऐजन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\lambda=4$ च्या साठी, ऐजन वेक्टर आहे

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow \quad -2x+2y=0$

$5x-5y=0$

पुन्हा दोन्ही समी लिनियरली डिपेंडंट आहेत, आपल्याकडे आहे

$x-y=0$

$x=y$

किंवा $\quad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}$

म्हणून एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

म्हणून एजेन वेक्टर लिनियरली इनडिपेंडंट आहे

एजेन बेसिस आहे $\{(-2,5),(1,1)\}$

उदाहरण 5.77: सर्व एजेन मूल्य, एजेन वेक्टर आणि एजेन बेसिस शोधा $A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

उकल: (विद्यार्थी हे वापरून पाहू शकतात) एजेन मूल्ये 1, −2,-2 आहेत. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ एजेन बेसीस नाहीत.

उदाहरण 5.78: सर्व एजेन मूल्य, ऐजन वेक्टर आणि A चे एजेन बेसिस शोधा $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

उकल: एजेन मूल्य 1, 1, 5 आहेत. एजेन वेक्टर आहेत $\begin{bmatrix} -2 \\ 1. \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ एजेन बेसिस आहे $\{(-2,1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$

उदाहरण 5.79: $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ ची सर्व एजेन मूल्ये मिळवा. म्हणूनच A^{25} ची एजेन मूल्ये शोधा आणि $A+2I$.

उकल: $|A-\lambda I|=0$ कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे.

$\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\lambda^2-2\lambda-3=0$

किंवा $(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

$\lambda=-1,3$

A^{25} ची एजेन मूल्ये

म्हणजे, $(-1)^{25}=-1$

आणि $(3)^{25}=3^{25}$

$A+2I$ ची एजेन मूल्ये

च्या साठी $A=3$, A+2I=3+2=5

च्या साठी A=-1, A+2I=-1+2=1

कॉम्प्लेक्स एजेन मूल्य

उदाहरण 5.80: असे दर्शवा की $0<\theta<\pi$ असल्यास, $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ साठी वास्तविक ऐजन मूल्य नाहीत आणि परिणामी ऐजन वेक्टर नाही.

उकल: $|A-\lambda I|=0$ कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे.

$$\begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta=0$$

$$\cos^2\theta-2\lambda\cos\theta+\lambda^2+\sin^2\theta=0$$

$$\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0$$

$$\lambda=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}$$

$$\lambda=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sqrt{1-\cos^2\theta}}{2}$$

$$=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

म्हणूनच मॅट्रिक्स A ची वास्तविक एजेन मूल्य नसतात आणि परिणामी एजेन वेक्टर नसतात.

उदाहरण 5.81: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ साठी. A चे सर्व एजेन मूल्य आणि ऐजन वेक्टर शोधा. A साठी एजेन बेसिस आहेत का?

उकल: येथे

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$|A-\lambda I|=0$ कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे.

$$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)^2=0$$

$$\lambda=1,1$$

ऐजन मूल्य $\lambda=1$ शी संबंधित ऐजन वेक्टर शोधण्यासाठी,

$$AX=\lambda X$$

$$[A-\lambda I]X=0$$

$$[A-I]X=0,\ (\lambda=1)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

[जर $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ संबंधित ऐजन वेक्टर असेल]

$\Rightarrow \qquad y = 0$

$X = 1$ घ्या, तर $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ हे $\lambda = 1$ शी संबंधित एक एजन वेक्टर आहे.

येथे आपण पाहु शकतो की X हा R^2 चा बेसिस बनत नाही, म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्स A साठी आपल्याकडे ऐजन बेसिस नाही.

अभ्यास 5.11

खालील मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे शोधा:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

खालील मॅट्रिक्ससाठी ऐजन मूल्य आणि संबंधित एजेन वेक्टर शोधा:

4. $\begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

उत्तरे

1. $-1, 1, 2$
2. $2, 3, -2$
3. a, b, c
4. $0, (-3, 1, 0); 1, (12, -4, -1); 0, (-3, 1, 0)$
5. $1, (1, 1, -1); 2, (2, 1, 0)$
6. $2; (1, 0, 0)$ **7.** $1; (0, 0, 1)$
8. $-1(-3, -1, 3); 2(0, 1, 0); 3(1, 1, 1)$
9. $2(1, 0, 0); -2(0, 1, 1); -4(0, 1, -1)$

5.15 कॅले हॅमिल्टन सिद्धांत

व्याख्या: प्रत्येक स्क्वेअर मॅट्रिक्स त्याचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण पूर्ण करते अर्थात, जर स्क्वेअर मॅट्रिक्स A च्या n^{th} ऑर्डर चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण $|A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + k_2 \lambda^{n-2} + \ldots.. + k_2 = 0$ …(1) असेल,

तर $$(-1)^n A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \ldots.. + k_2 = 0$$

सामान्य सिद्धता:

समजा $$P = adj\ (A - \lambda I)$$

म्हणून, $|A - \lambda I|$ चे घटक λ मध्ये प्रथम श्रेणीतील सर्वात जास्त आहेत, $P = adj\ (A - \lambda I)$ चे घटक डिग्री (n - 1) किंवा त्यापेक्षा कमी असलेल्या λ मधील बहुपदी आहेत.

म्हणून, आपण P ला अनेक मॅट्रिक्समध्ये विभाजित करू शकतो, ज्या प्रत्येकामध्ये λ चा सामान घातांक आहे.

$$P = P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} + P_{n-1}\lambda + P_n \qquad \ldots.(2)$$

तसेच, आपल्याला माहित आहे की जर M एक चौरस मॅट्रिक्स आहे, तर $M\,(adj\,M) = |M| \times I$

$$\therefore \qquad (A - \lambda I)\,P = |A - \lambda I| \times I$$

समी (1) आणि (2) वरून, आपल्याकडे आहे

$$(A - \lambda I)(P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} + P_3\lambda^{n-3} + \ldots.. + P_n) = [(-1)^n \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + \ldots.. + k_2]I$$

दोन्ही बाजूंच्या सामान घातांक असलेल्या λ च्या सह गुणकांची तुलना केल्यास, आपल्याला मिळते

$$-P_1 = (-1)^n I \qquad (\because IP_1 = P_1)$$

$$AP_1 - P_2 = k_1 I$$

$$AP_2 - P_3 = k_2 I$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$AP_{n-1} - P_n = k_{n-1} I$$

$$AP_n = k_n I$$

हे समीकरण $A^n, A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots\ldots A, I$ ने अनुक्रमे पूर्व-गुणाकार करून आणि बेरीज करून, आपल्याला मिळते

$$0 = (-1)^n A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \ldots.. + k_{n-1} A + k_n I$$

किंवा $$(-1)^n A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \ldots.. + k_{n-1} A + k_n I = 0 \qquad \ldots(3)$$

त्यामुळे सिद्ध झाले.

टीप 1.

A^{-1} ने (3) ला गुणून, आपल्याकडे आहे

$$(-1)^n A^{n-1} + k_1 A^{n-2} + k_2 A^{n-2} + \ldots.. + k_{n-1} I + k_n A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{-1}{k_n}[(-1)^n A^{n-1} + k_1 A^{n-2} + k_2 A^{n-2} + \ldots.. + k_{n-1} I]$$

अशाप्रकारे, कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्यासाठी दुसरी पद्धत देते. ही पद्धत A च्या (n - 1) घातांकाच्या दृष्टीने ऑर्डर n च्या मॅट्रिक्सचा व्यस्त व्यक्त करते म्हणून ती मोठ्या मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधण्यासाठी योग्य आहे.

टीप 2.

जर m एक धन पूर्णांक असेल जसे $m > n$, तर (3) ला A^{m-n} ने गुणाकार केल्यास, आपल्याला मिळेल.

$$(-1)^n A^m + k_1 A^{m-1} + k_2 A^{m-2} + ... + k_{n-1} A^{m-n+1} + k_n A^{m-n} = 0$$

हे दर्शवित आहे की A चा केवळ धन इंटिग्रल घातांक A^n ($m > n$) हा कमी घातांकाच्या दृष्टीने लिनियरपणे व्यक्त करता येते.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.82: कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय वापरून, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त शोधा.

उकल: $|A - \lambda I| = 0$ हे A वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे

गणना करून, $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$= -1 + \lambda^2 - 4$$

$\Rightarrow$ $$\lambda^2 - 5 = 0$$

कॅले -हॅमिल्टन प्रमेयाद्वारे, λ च्या जागी A ठेऊन, वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण देते

$A^2 - 5I = 0$ दर्शविण्यासाठी

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

म्हणून, $$A^2 - 5I = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$A^2 - 5I = 0$$

दोन्ही बाजूंना A^{-1} ने गुणाकार करून

$$A - 5A^{-1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 5[A^{-1}] = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.83: कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय वापरून, $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ चा व्यस्त शोधा.

उकल: स्वतः प्रयत्न करा.

उदाहरण 5.84: जर $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तर $A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2$ ला A च्या लिनियर बहुपदी मध्ये व्यक्त करा.

उकल: समजा

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$ हे A चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे

म्हणजे, $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$$

$$= 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

कॅले -हॅमिल्टन प्रमेयाद्वारे, आपल्याला मिळेल

$$A^2 - 4A + 5I = 0 \qquad \ldots.(1)$$

आता, $$A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2 = A^6 - 4A^5 + 5A^4 + 3A^4 - 12A^3 + 14A^2$$

$$= A^4(A^2 - 4A + 5I) + 3A^4 - 12A^3 + 14A^2$$

$$= 0 + 3A^4 - 12A^3 + 14A^2$$ ((1) वरून)

$$= 3A^4 - 12A^3 + 15A^2 - A^2$$

$$= 3A^2(A^2 - 4A + 5I) - A^2$$

$$= 0 - A^2$$

$$= 5I - 4A$$

म्हणून, $$A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2 = 5I - 4A$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.85: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ साठी कॅले-हॅमिल्टन प्रमेयाची पडताळणी करा. म्हणून, A^{-1} ची गणना करा.

उकल: $|A - \lambda I| = 0$ हे A चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे

म्हणजे,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda) - 1] + 1[(-2+\lambda) + 1] + 1[1 - 2 + \lambda]$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

कॅले-हॅमिल्टन प्रमेयाची पडताळणी करण्यासाठी, आपल्याला हे दाखवावे लागेल की $A^3 - 6A^2 + 9A - 4 = 0$

आता, $$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I \qquad \ldots(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

हे कॅले हॅमिल्टन प्रमेयाची पडताळणी करते.

आता, (1) च्या दोन्ही बाजूंना A^{-1} ने गुणाकार करून

आपल्याकडे आहे, $$A^3A^{-1} - 6A^2A^{-1} + 9AA^{-1} - 4IA^{-1} = 0$$

$$A^2 - 6A + 9I = 4A^{-1}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.86: कॅले -हॅमिल्टन प्रमेय वापरून. जर $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ असल्यास A^8 शोधा.

उकल: $|A-\lambda I|=0$ हे A चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे

म्हणजे, $$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$=-(1-\lambda)(1-\lambda)-4=0$$

$\Rightarrow$ $$\lambda^2-5=0$$

$$\lambda^2=5 \qquad \ldots(1)$$

कॅले -हॅमिल्टन प्रमेयानुसार, A त्याचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण पूर्ण करते

$\therefore$ $$A^2=5I$$

$$A^8=(A^2)^4=(5I)^4$$

$\Rightarrow$ $$A^8=625I^4$$

परंतु $$I^4=I$$

म्हणून, $$A^8=625I$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.87: मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ साठी कॅले -हॅमिल्टन प्रमेय वापरून A^{-1} शोधा

उकल: $|A-\lambda I|=0$ हे A वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे

म्हणजे, $$\begin{vmatrix}4-\lambda & 3 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $$(4-\lambda)[1+\lambda^2-2\lambda+4]-3[2-2\lambda+2]+1[4-1+\lambda]=0$$

किंवा $$(4-\lambda)[\lambda^2-2\lambda+5]+6\lambda-12+\lambda+3=0$$

किंवा $$4\lambda^2-8\lambda+20-\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda+7\lambda-9=0$$

किंवा $$-\lambda^3+6\lambda^2-6\lambda+11=0$$

किंवा $$\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-11=0$$

कॅले -हॅमिल्टन प्रमेयानुसार, A त्याचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण मिळते

$$A^3-6A^2+6A-11=0 \qquad \ldots(1)$$

आता, (1) च्या दोन्ही बाजूंना A^{-1} ने गुणाकार करून

$$A^2-6A+6I-11A^{-1}=0$$

किंवा $$11A^{-1}=A^2-6A+6I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16+6+1 & 12+3+2 & 4-6+1 \\ 8+2-2 & 6+1-4 & 2-2-2 \\ 4+4+1 & 3+2+2 & 1-4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 17 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$11A^{-1} = \begin{bmatrix} 23 & 17 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23-24+6 & 17-18+0 & -1-6+0 \\ 8-12+0 & 3-6+6 & -2+12+0 \\ 9-6+0 & 7-12+0 & -2-6+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -4 & 3 & 10 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -4 & 3 & 10 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

(उकल)

उदाहरण 5.88: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण शोधा आणि म्हणून,

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I.$ द्वारे दर्शविलेला मॅट्रिक्स शोधा.

उकल: $|A - \lambda I| = 0$ हे A वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

किंवा $\quad (2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)+1[\lambda-1]=0$

$$\Rightarrow \quad (2-\lambda)^2(1-\lambda)+(\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$$

कॅले-हॅमिल्टन प्रमेयानुसार,

$$A^3 - 5A^2 + 7A - 3 = 0 \qquad \ldots(1)$$

आता,
$$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I.$$
$$= A^5(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A^2 + A + I.$$
$$= 0 + 0 + A^2 + A + I$$
$$= A^2 + A + I$$
$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$ **(उकल)**

उदाहरण 5.89: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ साठी कॅले-हॅमिल्टन प्रमेयाची पडताळणी करा. म्हणून A^{-1} शोधा

उकल: स्वत: प्रयत्न करा

उकल:
$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 5.90: कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय वापरून, A^6 शोधा, जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

उकल: A चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad [-(2-\lambda)(2+\lambda) - 5] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[-(2^2 - \lambda^2) - 5\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[-4 + \lambda^2 - 5\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^2 = 9 \qquad \text{...(1)}$$

कॅले हॅमिल्टन प्रमेयाने A समीकरण (1) चे समाधान करतो

$$A^2 - 9I = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A^2 = 9I$$

$$\Rightarrow \qquad (A^2)^3 = (9I)^3$$

$$\Rightarrow \qquad A^6 = 729I$$

(उकल)

उदाहरण 5.91: हे दाखवा की मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$ कॅले हॅमिल्टन प्रमेयाचे समाधान करते.

उकल:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

A चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & r & -q \\ -r & 0-\lambda & p \\ q & -p & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -\lambda(\lambda^2 + p^2) - r(r\lambda - pq) - q(rp - q\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -\lambda^3 - \lambda p^2 - r^2\lambda + rpq - rpq - q^2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -\lambda^3 - \lambda p^2 - r^2\lambda - q^2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^3 + \lambda p^2 + r^2\lambda + q^2\lambda = 0 \qquad \text{...(1)}$$

कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय नुसार,

$$A^3 + Ap^2 + r^2 A + q^2 A = 0 \qquad \text{...(2)}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -r^2 - q^2 & qp & rp \\ pq & -r^2 - p^2 & rq \\ pr & qr & -q^2 - p^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -r^2-q^2 & qp & rp \\ pq & -r^2-p^2 & rq \\ pr & qr & -q^2-p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -pqr+pqr & -r^3-rq^2-rp^2 & r^2q+q^3+qp^2 \\ r^3+rp^2+rq^2 & rpq-pqr & -pq^2-r^2p-p^3 \\ -qr^2-q^3-qp^2 & pr^2+pq^2+p^3 & -pqr+pqr \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -r(r^2+q^2+p^2) & q(r^2+q^2+p^2) \\ r(r^2+p^2+q^2) & 0 & -p(r^2+q^2+p^2) \\ -q(r^2+p^2+q^2) & p(r^2+q^2+p^2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (r^2+p^2+q^2)\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(r^2+p^2+q^2)\begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(r^2+p^2+q^2)A$$

सामीकरण (1) वरुण,

$$A^3 + Ap^2 + r^2A + q^2A = -(r^2+p^2+q^2)A + (p^2+r^2+q^2)A$$

$= 0$ म्हणून हे कॅले हॅमिल्टन प्रमेयाचे समाधान करते.

उदाहरण 5.92: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण शोधा आणि त्याचा वापर मॅट्रिक्स $A^5+5A^4-6A^3+2A^2-4A+7I$ शोधण्यासाठी करा. तसेच $A^5-4A^4-7A^3+11A^2-A-10I$ हे A मधील लिनिअर बहुपदी म्हणून व्यक्त करा.

उकल: वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे,

$$|A-\lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-8 = 0$$

किंवा $\quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय नुसार, आपल्याकडे आहे

$$A^2 - 4A - 5I = 0 \qquad \text{...(1)}$$

आता,
$$A^5+5A^4-6A^3+2A^2-4A+7I$$
$$=A^3\left[A^2+5A-6I\right]+2(A^2-2A)+7I$$
$$=A^3\left[4A+5A+5I-6I\right]+2(4A+5I-2A)+7I$$
$$=A^3\left[9A-I\right]+2(2A+5I)+7I$$
$$=A^2\left[9A^2-A\right]+4A+10I+7I$$
$$=(4A+5I)(36A+45I-A)+4A+17I$$
$$=(4A+5I)(35A+45I)+4A+17I$$
$$=5(4A+5I)(7A+9I)+4A+17I$$
$$=5(28A^2+36A+35A+45I)+4A+17I$$
$$=5(28A^2+71A+45I)+4A+17I$$
$$=5(112A+140I+71A+45I)+4A+17I$$
$$=5(183A+185I)+4A+17I$$
$$=919A+942I$$
$$=919\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}+942\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}919 & 3676\\ 1838 & 2757\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}942 & 0\\ 0 & 942\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1861 & 3676\\ 1838 & 3699\end{bmatrix}$$
(उकल)

आता,
$$A^5-4A^4-7A^3+11A^2-A-10I$$
$$=A^5-4A^4-7A^3+11A^2-A-10I$$
$$=A^3\left[A^2-4A-5I\right]-8A^2-10A+11A^2-A-10I$$
$$=0+3A^2-11A-10I$$
$$=12A+15I-11A-10I$$
$$=A+5I$$
(उकल)

उदाहरण 5.93: मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण शोधा आणि दिलेल्या मॅट्रिक्सचा व्यस्त शोधा.

उकल: स्वत: प्रयत्न करा.

उकल:
$$A^{-1}=\frac{1}{35}\begin{bmatrix}-4 & 11 & -5\\ -1 & -6 & 25\\ 6 & 1 & -10\end{bmatrix}$$

अभ्यास 5.12

खालील मॅट्रिक्ससाठी कॅले हॅमिल्टन प्रमेय पडताळून पहा:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

खालील मॅट्रिक्ससाठी कॅले हॅमिल्टन प्रमेय पडताळून पहा म्हणून A^{-1} शोधा:

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ चे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण शोधा आणि A त्या समीकरणाचे समाधान करते हे दाखवा.

6. जर $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I$ हे A मधील लिनिअर बहुपदी म्हणून व्यक्त करण्यासाठी कॅले हॅमिल्टन प्रमेय वापरा.

उत्तरे

3. $\begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\lambda^3 = 0$

6. $138A - 403I$

5.16 मॅट्रिक्सचे डायगोनलायझेशन

समजा, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ हे A स्क्वेयर मॅट्रिक्सचे एजेन वेक्टर आहेत, जे अनुक्रमे $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ या एजेन मूल्यांच्या अनुषंगाने आहेत, मग

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

स्क्वेयर मॅट्रिक्स B द्वारे दर्शवा ज्याचे कॉलम $[x_1, x_2, x_3, ..., x_n]$ आहेत. आपण P ला $P[x_1, x_2, x_3, ..., x_n]$ म्हणून लिहू, तेव्हा

$$AP = A[x_1, x_2, x_3, ..., x_n]$$

$$AP = A[x_1, x_2, x_3, ..., x_n]$$

$$= [Ax_1, Ax_2, Ax_3, ..., Ax_n]$$
$$= [\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ..., \lambda x_n] = PD$$

[P आणि D पूर्ण आणि गुणाकार लिहून याची पडताळणी केली जाऊ शकते]

जेथे,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

हे देते $\qquad P^{-1}AP = D$

A साठी जेव्हा 'n' लिनियर्ली इनडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर अस्तित्वात नसतात तेव्हा ही पद्धत अपयशी ठरते. असे मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल नसतात.

जेव्हा n लिनियर्ली इनडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर अस्तित्वात असतात, तेव्हा P नॉन सिंग्युलर असतो आणि $P^{-1}AP$ हा एक डायगोनल मॅट्रिक्स असतो त्याचे डायगोनल घटक हे एजेन मूल्य म्हणून असतात.

मॅट्रिक्स A ला डायगोनलायझ करण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या या मॅट्रिक्स P ला A चे मोडल मॅट्रिक्स म्हणतात अशा प्रकारे मिळवलेले डायगोनल मॅट्रिक्सला A चे स्पेक्ट्रल मॅट्रिक्स म्हणून ओळखले जातात.

A आणि C हे दोन मॅट्रिक्स सारखे आहेत असे म्हटले जाते जर नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स B असा असेल

$$C = B^{-1}AB$$

स्पष्टपणे, एक डायगोनलायझेबल मॅट्रिक्स A डायगोनल मॅट्रिक्स D सारखेच आहे.

टीप: समान मॅट्रिक्सची एजेन मूल्य हि समान असतात.

मनोरंजक तथ्ये

1. हे काही संगणनाला लक्षणीयरित्या सोपे करते. तथापि, डायगोनलायझेशन चा पहिला वापर मार्कोव्ह प्रक्रिया मध्ये पाहिला जातो, जिथे काही चौरस सारणीची शक्ती मोठ्या प्रमाणात वापरली जाते आणि मार्कोव्ह प्रक्रिया खरोखरच अनुप्रयोगांनी समृद्ध आहेत, जसे की
   - बाजार
   - हवामान अंदाज
   - अनुवांशिकता
   - गॅसचे मिश्रण
   - सर्वात प्रसिद्ध बहुधा गुगलचे पेज रँकिंग अल्गोरिदम आहे.
2. हे मेकॅनिक्समध्ये देखील वापरले जाते उदाहरणार्थ, जडत्वाचे मुख्य अक्ष शोधण्याचा एक मार्ग आहे (जडत्व च्या टेन्सर सह डायगोनलाईज्ड मॅट्रिक्स आहे).
3. ज्यामध्ये गतीज आणि संभाव्य ऊर्जेच्या दोन मॅट्रिक्सचे एकाचवेळी डायगोनलायझेशनची आवश्यकता असते.

वास्तविक जीवनाचे अनुप्रयोग

डायगोनलायझेशनचा एक महत्त्वाचा वापर म्हणजे उच्च घातांक असलेल्या मॅट्रिक्सची कार्यक्षमतेने गणना करणे.

जर $A = M^{-1}DM$ तर $A^n = M^{-1}D^nM$

वरील गुणधर्म A च्या उच्च घातांक असलेल्या मॅट्रिक्सची गणना करणे सोपे करते, कारण संगणकीय D^n हे संगणकीय A च्या तुलनेत खूप सोपे आहे.

व्हिडिओ संदर्भ (स्त्रोत-NPTEL)

Eigenvalues & Eigenvectors

Diagonaliz-ation of Matrices

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.94: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ डायगोनलायझ करा आणि मोडल मॅट्रिक्स मिळवा.

उकल: दिलेल्या मॅट्रिक्सचे कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण आहे $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)\left[-\lambda(2-\lambda)+1\right] - 2[-\lambda+1] - 2[-1+2-\lambda] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)\left[-\lambda^2 - 2\lambda + 1\right] - 2[-\lambda+1] - 2[1-\lambda] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4[1-\lambda] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 4\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1, \pm\sqrt{5}$$

आता, आपण या एजेन मूल्याच्या संदर्भात एजेन व्हेक्टर्स शोधू.

$\lambda = 1$ साठी, समजा $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ एजेन व्हेक्टर असा आहे कि,

$$AX_1 = \lambda X_1$$

$$(A - \lambda I)X_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + y_1 - z_1 = 0$ ...(1)

$x_1 + y_1 + z_1 = 0$ ...(2)

$-x_1 - y_1 - z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0$

$(1)+(2) \Rightarrow \quad 2y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0$

$(2) \Rightarrow \quad -x_1 - z_1 = 0 \Rightarrow -x_1 = z_1$

$z_1 = -1$ घेउन $\Rightarrow \quad x_1 = 1$

$\therefore \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = \sqrt{5}$ साठी, समजा $\quad X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ एजेन वेक्टर असा आहे की,

$\Rightarrow \quad \left[A - \sqrt{5}I\right]X_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2-\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(-1-\sqrt{5})x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0$ ...(3)

$x_2 + (2-\sqrt{5})y_2 + z_2 = 0$ ...(4)

$-x_2 - y_2 - \sqrt{5}z_2 = 0$ ...(5)

$(4)+(5) \quad \left(1-\sqrt{5}\right)y_2 + \left(1-\sqrt{5}\right)z_2 = 0$

$\Rightarrow \quad y_2 = -z_2$

$z_2 = 1$ घेउन, तर $\quad y_2 = -1$

(5) वरुण $\quad -x_2 = y_2 + \sqrt{5}z_2 = -1 + \sqrt{5}$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$\therefore \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -\sqrt{5}$ साठी, समजा $X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$ एजेन वेक्टर असा आहे की,

$\Rightarrow \qquad \left[A - \left(-\sqrt{5}\right) I\right] X_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0+\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left(-1+\sqrt{5}\right) x_3 + 2y_3 - 2z_3 = 0$ ...(6)

$x_3 + \left(2+\sqrt{5}\right) y_3 + z_3 = 0$ ...(7)

$-x_3 - y_3 + \sqrt{5} z_3 = 0$ ...(8)

$(6)+(7) \quad \Rightarrow \qquad \left(1+\sqrt{5}\right) y_3 + \left(1+\sqrt{5}\right) z_3 = 0$

$\Rightarrow \qquad y_3 = -z_3$

$z_3 = 1$ घेउन, $\qquad y_3 = -1$

(8) वरुण $\qquad -x_3 = y_3 - \sqrt{5} z_3 = -1 - \sqrt{5}$

$\therefore \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ मोडल मॅट्रिक्स $\qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|P| = -2\sqrt{5}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\left(-2\sqrt{5}\right)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2\sqrt{5} & 2+\sqrt{5} & -2+\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\left(-2\sqrt{5}\right)} \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 5.95: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ हा C या फिल्ड वर डायगोनलायझेबल नाही हे दाखवा.

उकल: दिले

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

त्याअनुषंगाने कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = 2, 2$$

अशा प्रकारे एकमेव वेगळे एजेन मूल्य 2 आहे.

जर $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ संबंधित एजेन वेक्टर असेल, तर,

$$AX = \lambda X$$

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$\lambda = 2$ साठी $$[A - 2I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0.x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$x = 1, y = 0$ घेउन , $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ हा $\lambda = 2$ शी संबंधित एकमेव ईजेन वेक्टर आहे.

अशा प्रकारे दिलेल्या स्क्वेयर मॅट्रिक्स A मध्ये फक्त एकच लिनियर्ली इनडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर आहे.

तर दिलेले स्क्वेयर मॅट्रिक्स A डायगोनलायझेबल नाहीत.

[दिलेला मॅट्रिक्स A डायगोनलायझेबल होण्यासाठी, त्यात 2 लिनियर्ली इनडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर असणे आवश्यक आहे]

उदाहरण 5.96: हे दाखवा की मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ डायगोनलायझेबल आहे.

उकल: प्रथम आपण जसे केले आहे तसेच ईजन मूल्ये आणि एजेन वेक्टर शोधू

उदाहरणार्थ पृष्ठ क्रमांक 526 वर उदाहरण 5.72.

त्यानंतर, डायगोनलायझेबिलिटी तपासण्यासाठी.

दिलेल्या मॅट्रिक्स A मध्ये 3 लिनियर्ली इनडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर आहेत.

म्हनुन दिलेले मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल आहे.

उदाहरण 5.97: दिलेल्या मॅट्रिक्सची डायगोनलायझेबिलिटी तपासा $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

उकल: पृष्ठ क्रमांक 528 वर उदाहरण 5.73 प्रमाणेच पुढे जात आहे.

त्यानंतर, डायगोनलायझेबिलिटी तपासण्यासाठी.

दिलेल्या मॅट्रिक्स A मध्ये 3 लिनियर्ली इनडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर आहेत. म्हनुन दिलेले मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल आहे.

अभ्यास 5.13

1. खालील मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल आहेत हे दाखवा.

   i. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A=\begin{bmatrix}7 & 0 & -3\\ -9 & -2 & 3\\ 18 & 0 & -8\end{bmatrix}$ हा मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल नाही हे दाखवा.

3. $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स ची डायगोनलायजेबिलिटी तपासा.

4. दिलेला मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$ हा डायगोनलायझेबल आहे किंवा नाही. तुमच्या उत्तराला योग्य कारण द्या.

उत्तरे

3. डायगोनलायझेबल
4. होय, डायगोनलायझेबल, प्रत्येक एजेन मूल्याची A.M.= प्रत्येक एजेन मूल्याची G. M.म्हणून.

5.17 क्वाड्रेटिक फॉर्म

व्याख्या: होमोजिनिअस बहुपदी च्या प्रकारातील

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

जिथे a_{ij} हे फिल्ड F चे घटक आहेत त्याला n चलांमधील $x_1, x_2, ..., x_n$, फिल्ड F वरील क्वाड्रेटिक फॉर्म म्हणतात.

जर a_{ij} वास्तविक असेल तर क्वाड्रेटिक फॉर्मला वास्तविक क्वाड्रेटिक फॉर्म म्हणतात.

उदाहरणार्थ, $x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_2$ हा वास्तविक क्वाड्रेटिक फॉर्म आहे.

प्रमेय 1: n व्हेरिएबल्स $x_1, x_2, ..., x_n$, मधील फील्ड F वर प्रत्येक क्वाड्रेटिक फॉर्म $\{x_1, x_2, ..., x_n\}^T$, $X^T BX$, मध्ये व्यक्त करता येते जिथे B हा ऑर्डर n चा F वरील सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे आणि X हा कॉलम वेक्टर आहे.

सिद्धता: समजा $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

n व्हेरिएबल्स $x_1, x_2, ..., x_n$, मधील फिल्ड F वरील क्वाड्रेटिक फॉर्म आहे. x_i, x_j स्केलार आहेत म्हणून, आपल्याकडे $x_i x_j = x_j x_i$ आहे. म्हणून, x_i x_j चे गुणांक $a_{ij} + a_{ji}$ आहेत, अशा प्रकारे, आम्ही अर्धे गुणांक x_{ij} आणि अर्धे गुणांक x_{ji} नेमून देतात. समजा b_{ij} हा स्केलर्सचा आणखी एक संच असेल, $b_{ii} = a_{ii}$ आणि $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \forall\ i \neq j$ तर

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

जर $b_{ij} = b_{ji}$ मॅट्रिक्स $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ सिमेट्रिक आहे. आपण पुढे लक्षात घेतो की, जर

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

तर

$$X^T BX = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

सिमेट्रिक मॅट्रिक्स B ला क्वाड्रेटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स म्हणतात $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.98: क्वाड्रेटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स शोधा $x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3$

उकल: दिलेला क्वाड्रेटिक फॉर्म असा लिहिला जाऊ शकतो,

$$x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2x_1 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_3x_1$$

म्हणून दिलेल्या क्वाड्रेटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स आहे,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

जर $a_{11} = 1 \qquad a_{12} = \frac{-3}{2} \qquad a_{13} = \frac{1}{2}$

$$a_{21} = \frac{-3}{2} \qquad a_{22} = 1 \qquad a_{23} = 0$$

$$a_{31} = \frac{1}{2} \qquad a_{32} = 0 \qquad a_{33} = 0$$

म्हणून

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ जे सिमेट्रिक आहे.

उदाहरण 5.99: क्वाड्रेटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स लिहा. $x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2x_3$

उकल: $x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2x_3$

x_1^2 चा गुणांक = 1 = a_{11}, x_2^2 चा गुणांक = 2 = a_{22}, x_3^2 चा गुणांक = -7 = a_{33},

$\frac{1}{2}x_1x_2$ चा गुणांक $= \frac{1}{2}(-4) = a_{12}$, $\frac{1}{2}x_1x_3$ चा गुणांक = $\frac{1}{2}(8) = a_{13}$, $\frac{1}{2}x_2x_3$ चा गुणांक = $\frac{1}{2}(5) = a_{23}$

वरिल सामीकरण (1) व्यक्त केले जाऊ शकते = $X^T AX$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} & -7 \end{bmatrix}$$

क्वाड्रेटिक फॉर्म $= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (उकल)

उदाहरण 5.100: मॅट्रिक्सशी संबंधित क्वाड्रेटिक फॉर्म लिहा $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

उकल: फॉर्म = $X^T AX$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 & 2x_1 + 3x_3 & 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 5x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$$ **(उकल)**

5.17.1 चतुर्भुज रूपांचे (क्वाड्रेटिक फॉर्मचे) डायगोनलायझेशन

आपल्याला माहित आहे कि प्रत्येक वास्तविक सिमेट्रिक मॅट्रिक्स A साठी तेथे ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स U अशा प्रकारे अस्तित्वात असतो कि, $U^T AU = diag[\lambda_1 \lambda_2 .... \lambda_n]$

जिथे $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ ही A ची कॅरॅक्टरिस्टिक रूट्स आहेत.

ऑर्थोगॉनल ट्रान्सफॉर्मेशन $X=UY$ क्वाड्राटिक फॉर्म $X^T AX$ ला लागू करून, आपल्याकडे आहे

$$X^T AX = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

जर A ची रँक r असेल, तर n-r कॅरॅक्टरिस्टिक रूट्स शून्य आहेत आणि म्हणून

$$X^T AX = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_r y_r^2$$

जिथे $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ ही नॉन झिरो कॅरॅक्टरिस्टिक रूट्स आहेत.

व्याख्या: फिल्ड F वरील n ऑर्डर चा एक चौरस मॅट्रिक्स B हा फिल्ड F वरील n ऑर्डर असलेल्या दुसऱ्या मॅट्रिक्स शी काँगरुवंट असेल जर तेथे F वरील नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स P असा अस्तित्वात असतो कि

$$B = P^T AP$$

फिल्ड F वरील $n \times n$ ऑर्डर असलेल्या मॅट्रिक्स च्या संचातील मॅट्रिक्स चे काँगरुवन्स रिलेशन हे इक्विव्हॅलंस रिलेशन आहे.

तसेच, A हा सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे आणि समजा B हा A शी काँगरुवंट आहे. म्हणून तेथे नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स P असा अस्तित्वात येतो कि

$B = P^T AP$ तर

$$B^T = \left(P^T AP\right)^T = P^T A^T P$$

$= P^T AP$, सिमेट्रिक आहे म्हणून

$= B.$

म्हणून, सिमेट्रिक मॅट्रिक्सशी काँगरुवंट असलेला प्रत्येक मॅट्रिक्स हा सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असतो.

प्रमेय 1: (सिमेट्रिक मॅट्रिक्स चे काँगरुवंट रिडक्शन). जर फिल्ड F वरील कोणताही n रो आणि रँक r असलेला नॉन झिरो सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल तर तेथे n रो असलेला नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स P असा अस्तित्वात असतो कि,

$$P^T AP = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

जेथे A_r हा F वरील r ऑर्डर असलेला नॉन झिरो सिंग्युलर डायगोनल मॅट्रिक्स आहे आणि प्रत्येक O हा योग्य ऑर्डरचा नल मॅट्रिक्स आहे

कोरोलरी 1: F वरील $X^T AX$ शी संबंधित प्रत्येक क्वाड्रेटिक फॉर्म, तेथे नॉन सिंग्युलर लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $X = PY$ असे अस्तित्वात येते कि $X^T AX$ रूपांतरित करते,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_r y_r^2$$

जिथे $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_r$ F मधील स्केलेर आहेत आणि r मॅट्रिक्स A ची रँक आहे.

व्याख्या: सिमेट्रिक मॅट्रिक्स A च्या रँकला क्वाड्रॅटिक फॉर्म $X^T AX$ ची रँक म्हणतात.

कोरोलरी 2: जर $X^T AX$ हे n चलांमधील रँक r असलेला वास्तविक क्वाड्रेटिक फॉर्म आहे, तर तेथे वास्तविक नॉन सिंग्युलर लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन $X = PY$ जे $X^T AX$ ला रूपांतरित करते,

$$Y^T P^T APY = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_p^2 - y_{p+1}^2 - ..... - y_r^2$$

ज्याला कॅनोनिकल फॉर्म किंवा वास्तविक क्वाड्रेटिक फॉर्मचा नॉर्मल फॉर्म म्हणतात.

$X^T AX$ च्या नॉर्मल फॉर्म मधील धन पदांच्या संख्येला क्वाड्रेटिक फॉर्मचा निर्देशांक म्हणतात, तर $p-(r-p)=2p-r$ ला क्वाड्रेटिक फॉर्मची सिग्नेचर म्हणतात आणि सहसा S ने दर्शविले जाते.

ऑर्डर n च्या नॉन सिंग्युलर मॅट्रिक्स A च्या क्वाड्रेटिक फॉर्म $X^T AX$ ला पॉजिटीव्ह डेफिनेट म्हणतात जर $n = r = p$. म्हणजे जर n = रँक = निर्देशांक. क्वाड्रेटिक फॉर्मला पॉजिटीव्ह सेमी डेफिनेट म्हणतात जर $r < n$ आणि $r = p$. त्याचप्रमाणे जर $r < n$ आणि निर्देशांक शून्य असेल तर त्या क्वाड्रेटिक फॉर्म ला निगेटिव्ह सेमी डेफिनेट म्हणतात.

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.101: कॅनॉनिकल फॉर्ममध्ये रेड्युस करा, $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 8yz$

उकल: दिलेले क्वाड्रॅटिक फॉर्म $X'AX$ म्हणून लिहिले जाऊ शकते जेथे $X' = [x, y, z]$ आणि सिमेट्रिक मॅट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

आपण A ला डायगोनल मॅट्रिक्स मध्ये रीड्यूस करूया. आपल्याला माहित आहे कि $A = I_3 A I_3$

म्हणजे,
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{4}{3}R_1$ ($L.H.S.$ मधील A साठी आणि $R.H.S.$ मधील प्री-फॅक्टरसाठी), आपल्याला मिळेल,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग $C_2 \to C_2 - \frac{2}{3}C_1, C_3 \to C_3 - \frac{4}{3}C_1$ ($L.H.S.$ मधील A साठी आणि $R.H.S.$ मधील पोस्ट-फॅक्टरसाठी),

आपल्याला मिळेल,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग $R_2 \to R_2 + R_3$ आपल्याला मिळेल

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ऑपरेटिंग $C_3 \to C_3 + C_2$ आपल्याला मिळेल

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Diag\left(3, \frac{-4}{3}, -1\right) = P'AP$$

दिलेल्या क्वाड्रॅटिक फॉर्मचा कॅनॉनिकल फॉर्म आहे

$$Y'(P'AP)Y = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 3y_1^2 - y_3^2$$

म्हणून $\rho(A) = 3$, निर्देशांक = 1, सिग्नेचर = 1 − 2 = −1.

उदाहरण 5.102: $6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_3x_1$ क्वाड्रेटिक फॉर्मला वर्गाच्या बेरजेमध्ये लिहा आणि संबंधित लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन शोधा. निर्देशांक आणि सिग्नेचर देखील शोधा.

उकल: दिलेल्या क्वाड्रेटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स Q आहे

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$IAI = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

R. H. S. वर केलेले रो ट्रान्सफॉर्मेशन प्रीफॅक्टर मॅट्रिक्स R वर लागू केले जाईल. *R. H. S.* वर लागू केलेले स्तंभ ट्रान्स्फ़ोर्मेशन पोस्ट-फॅक्टर मॅट्रिक्स S वर लागू केले जाईल.

$$R_2 \to R_2 + \frac{1}{3}R_1, R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$c_3 \to c_2 + \frac{1}{3}c_1, c_3 \to c_3 - \frac{1}{3}c_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + \frac{1}{7}R_2, C_3 \to C_3 + \frac{1}{2}C_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}$$

अशा प्रकारे मॅट्रिक्स A हे डायगोनल फॉर्म B मध्ये बदलले जाते

$$P'AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}, \text{ इथे } P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

कॅनॉनिकल फॉर्म (वर्गांची बेरीज) आहे

$$Q = y'By = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 6y_1^2 + \frac{7}{3}y_2^2 + \frac{16}{7}y_3^2$$

$X = PY$ म्हणजे $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{7}y_3 \ , \ x_2 = y_2 + \frac{1}{7}y_3 \ , \ x_3 = y_3$$

क्वाड्रॅटिक फॉर्मची रँक $(r) = 3$

क्वाड्रॅटिक फॉर्मचा निर्देशांक $(P) = 3$

क्वाड्रॅटिक फॉर्मची सिग्नेचर $r - (r - P) = 3$ **(उकल)**

5.18 क्वाड्रॅटिक फॉर्मला कॅनॉनिकल फॉर्ममध्ये संक्षेप रूप देणे

कोणत्याही संख्येच्या चलांमधील दोन घातांक असलेल्या होमोजिनिअस पदावलीला क्वाड्रेटिक फॉर्म म्हणतात.

उदाहरणार्थ, जर $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ आणि $X' = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ तर

$$X'AX = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \qquad ....(i)$$

जो क्वाड्रॅटिक फॉर्म आहे.

समजा $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ मॅट्रिक्स A चे एजेन मूल्य आहेत आणि

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

त्याच्या संबंधित नॉर्मलायज्ड फॉर्म मधील एजेन व्हेक्टर आहेत (म्हणजे प्रत्येक घटकाला एजेन वेक्टरमधील तीनही घटकांच्या वर्गांच्या बेरजेच्या वर्गमूळाने भाग दिला जातो)

तर, $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{येथे} \quad P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

त्यामुळे क्वाड्रॅटिक फॉर्म (i) ला वर्गांच्या बेरजेच्या संक्षिप्त रूपात लिहिले (म्हणजे कॅनॉनिकल फॉर्म).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$$

आणि P हा रूपांतरणाचा मॅट्रिक्स आहे जो ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे. म्हणूनच वरील संक्षिप्त करण्याच्या पद्धतीला ऑर्थोगोनल ट्रान्सफॉर्मेशन म्हणतात.

स्टेप्स:

1. क्वाड्रॅटिक फॉर्मला मॅट्रिक्स फॉर्ममध्ये रूपांतरित करा.
2. एजेन मूल्य आणि एजेन व्हेक्टर शोधा.
3. मोडल मॅट्रिक्स (P) शोधा.
4. नॉर्मलायज्ड मॅट्रिक्स (N) शोधा.
5. N^T शोधा.
6. D शोधा. ($D = N^T AN$)

काही सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण 5.103: क्वाड्रॅटिक फॉर्म $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx - 2xy$ ला कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये संक्षिप्त करा. तसेच रूपांतरण मॅट्रिक्स निर्दिष्ट करा.

उकल: दिलेल्या क्वाड्रॅटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स आहे $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

त्याचे कॅरेक्टरिस्टिक समीकरण आहे $|A - \lambda I| = 0$ म्हणजे $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

जे $\lambda = 2, 3, 6$ त्याची एजेन मूल्ये देते. म्हणून दिलेल्या क्वाड्रॅटिक फॉर्मचे कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये संक्षिप्त रूप आहे

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 \quad \text{म्हणजेच} \quad 2x^2 + 3y^2 + 6z^2$$

ट्रान्स्फ़ोर्मेशनाचे मॅट्रिक्स शोधण्यासाठी $|A - \lambda I| X = 0$ वरून आपल्याला समीकरणे मिळतात

$$(3-\lambda)x - y + z = 0; \ -x + (5-\lambda)y - z = 0; \ x - y + (3-\lambda)z = 0.$$

आता $\lambda = 2$ शी संबंधित, आपल्याला मिळते

$$x - y + z = 0 \ ; -x + 3y - z = 0 \quad x - y + z = 0$$

म्हणून $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-1}$

$\therefore$ एजेन वेक्टर (1, 0, -1) आहे आणि त्याचे नॉर्मलाइज्ड स्वरूप ($\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$) आहे.

त्याचप्रमाणे $\lambda = 3$ शी संबंधित,एजेन वेक्टर (1, 1, 1) आणि त्याचे नॉर्मलाइज्ड स्वरूप ($\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$)आहे.

शेवटी, $\lambda = 6$ शी संबंधित, एजेन वेक्टर (1, −2, 1) आणि त्याचे नॉर्मलाइज्ड स्वरूप ($\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$)आहे.

म्हणून ट्रान्स्फ़ोर्मेशनाचा मॅट्रिक्स आहे $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

उदाहरण 5.104: ऑर्थोगोनल ट्रान्स्फ़ोर्मेशन द्वारे $8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 12xy + 4xz - 8yz$ ला कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये संक्षिप्त करा.

उकल: दिलेल्या क्वाड्रॅटिक फॉर्मचा मॅट्रिक्स आहे

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

त्याचे कॅरेक्टरिस्टिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ आहे,

म्हणजे $$|A| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

किंवा $\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$

$\therefore$ $\lambda = 0, 3, 15$

त्याचे कॅरेक्टरिस्टिक वेक्टर $\lambda = 0$ साठी $[A - (0)I]X = 0$

म्हणजे
$$8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$$

पहिले दोन समीकरण सोडवून, आपल्याला मिळेल $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$ एजेन वेक्टर देतो. $X_1 = k_1(1,2,2)'$

जेव्हा $\lambda = 3$ त्याचे कॅरेक्टरिस्टिक वेक्टर $[A - 3I]X = 0$ आहे म्हणजे

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 = 0$$

कोणतेही दोन समीकरण सोड्वल्यास आपल्याला मिळेल

$$X_2 = k_2(2,1,-2)'$$

त्याचप्रमाणे $\lambda = 15$ शी संबंधित कॅरेक्टरिस्टिक वेक्टर $X_3 = k_3(2,-2,1)'$ आहे.

आता, X_1, X_2, X_3 हे जोडीनुसार ऑर्थोगोनल आहेत.

म्हणजे $X_1 . X_2 = X_2 . X_3 = X_3 . X_1 = 0$

$\therefore$ नॉर्मलाइज्ड मोडल मॅट्रिक्स आहे

$$B = \left[\frac{X_1}{\|X_1\|}, \frac{X_2}{\|X_2\|}, \frac{X_3}{\|X_3\|}\right] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

आता B हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे आणि $|B| = 1$

म्हणजे $\quad B^{-1} = B^T$

आणि $\quad B^{-1}AB = D = diag(0,3,15)$

म्हणजे
$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$X'AX = Y'(B^{-1}AB)Y = Y'DY$$

$$= [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0y_1^2 + 3y_2^2 + 15y_3^2$$

जो आवश्यक कॅनॉनिकल फॉर्म आहे.

अभ्यास 5.14

1. दिलेल्या क्वाड्रॅटिक फॉर्मसाठी मॅट्रिक्स लिहा
   a. $Q = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
   b. $Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
   c. $Q = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3$
2. क्वाड्रॅटिक फॉर्म $2xy + 2yz + 2zx$ ला कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये संक्षिप्त करा.
3. दिलेल्या क्वाड्रॅटिक फॉर्म $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ ला कॅनॉनिकल फॉर्म मध्ये संक्षिप्त करा.
4. समजा क्वाड्रॅटिक फॉर्म $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + cx_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ ची रँक २ आहे
   a. पॅरामीटर c शोधा;
   b. एक इनव्हर्टेबल ट्रान्सफॉर्म शोधा जे कॅनॉनिकल स्वरूपात बदलले जाऊ शकते;
   c. जर $f(x_1, x_2, x_3) = 1$, असेल तर काय होईल?

उत्तरे

1. a. $A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & -1\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}$ b. $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ c. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$

2. $2x^2-y^2-z^2$

3. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

4. a. $c=9$ b. $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

   c. ते इलेप्टीकल सिलेंडर होईल; $y_2^2+9y_3^2=1$

व्यक्तिनिष्ठ सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

उदाहरण 1: k च्या मूल्यांची संख्या निश्चित करा ज्यासाठी समीकरण प्रणालीला असंख्य उकल आहेत.

$$(k+1)x+8y=4k$$
$$kx+(k+3)y=3k-1$$

असंख्य उकल आहेत.

उकल: लिनियर समीकरणाची दिलेली प्रणाली आहे

$$(k+1)x+8y=4k$$
$$kx+(k+3)y=3k-1$$

हे $AX=B$ असे लिहिले जाऊ शकते,

येथे $$A=\begin{bmatrix}k+1 & 8\\ k & k+3\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4k\\ 3k-1\end{bmatrix}$$

आता $$[A:B]=\begin{bmatrix}k+1 & 8 & \vdots & 4k\\ k & k+3 & \vdots & 3k-1\end{bmatrix}$$

$R_2\to R_2-\dfrac{k}{k+1}R_1$ ऑपरेशन लागू करून,

$$[A:B]\sim\begin{bmatrix}k+1 & 8 & \vdots & 4k\\ 0 & (k+3)-\dfrac{8k}{k+1} & \vdots & (3k-1)-\dfrac{4k^2}{k+1}\end{bmatrix}$$

$$[A:B]\sim\begin{bmatrix}k+1 & 8 & \vdots & 4k\\ 0 & \dfrac{k^2-4k+3}{k+1} & \vdots & \dfrac{-k^2+2k-1}{k+1}\end{bmatrix}$$

हे दिले आहे कि समीकरणांच्या प्रणालीला अनेक असंख्य समाधान आहेत.

$$\rho(A)=\rho(A:B)<n(=2)$$

यासाठी, $$\frac{k^2-4k+3}{k+1}=0 \quad \ldots(1)$$

आणि $$\frac{-k^2+2k-1}{k+1}=0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) वरून,

$$k^2-4k+3=0$$

$$(k-3)(k-1)=0$$

$$k=3,1$$

समीकरण (2) वरून, $$-k^2+2k-1=0$$

$$k^2-2k+1=0$$

$$(k-1)^2=0\,;\ k=1$$

$\therefore$ $k = 1$ हे एकमेव समाधान आहे ज्यासाठी समीकरणांच्या प्रणालीला अनेक असंख्य समाधान आहेत.

उदाहरण 2: जर $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$; $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ आणि $A^{-1}=\frac{1}{6}\left(A^2+cA+dI\right)$ जेथे $c, d \in R$, तर (c, d) चे मूल्य काढ़ा.

उकल: आपल्याकडे आहे

$$|A|=1(4+2)-0+0=6\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

आता $$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & -10 & 14\end{bmatrix}$$

तसेच $$cA=\begin{bmatrix}c & 0 & 0\\ 0 & c & c\\ 0 & -2c & 4c\end{bmatrix}$$

आणि $$dI=\begin{bmatrix}d & 0 & 0\\ 0 & d & 0\\ 0 & 0 & d\end{bmatrix}$$

दिलेले आहे $$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 + cA + dI\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+c+d & 0 & 0 \\ 0 & -1+c+d & 5+c \\ 0 & -10-2c & 14+4c+d \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्सच्या समानतेने, संबंधित घटकांची बरोबरी करून, आपल्याला मिळते

$$6 = 1 + c + d \;\Rightarrow\; 5 = c + d$$

$$-1 = 5 + c \;\Rightarrow\; -6 = c$$

$$5 = -6 + d \;\Rightarrow\; d = 11$$

म्हणून, $(-6, 11)$ अपेक्षित मूल्य आहे.

उदाहरण 3: मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{bmatrix}$ आणि वेक्टर $X = [X_1\ X_2]^T$ यावर विचार करा. k च्या त्या विभिन्न वास्तव किमती काढा, ज्यासाठी $AX = 0$ समीकरणाला अनंत उत्तरे आहेत.

उकल **:** दिलेले आहे की प्रणालीचे अनंत उत्तरे आहेत.

$$|A| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{vmatrix} = 0$$

म्हणजेच $$k^3 - 2k\left(k^2 - k\right) = 0$$

$$k^3 - 2k^3 + 2k^2 = 0$$

$$-k^3 + 2k^2 = 0$$

$$k^2(-k + 2) = 0$$

$$k = 0 \text{ किंवा } k = 2$$

म्हणून, k च्या दोन किमती आहेत ज्या साठी एक लिनियर समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे आहेत.

उदाहरण 4: मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ साठी $det(A) = 100$ आणि $trace(A) = 14$ आहे. $|a - b|$ ची किंमत काढा.

उकल: दिलेले आहे की $trace(A) = 14$

$$a+5+2+b=14$$

$$a+7+b=14$$

$$a+b=7 \qquad \ldots(1)$$

तसेच $\qquad \det .A=100$

R_4 सोबत विस्तार केल्यानंतर आपल्याला मिळेल,

$$b\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=100$$

$$\Rightarrow \qquad b\left[a(10-0)-0+3(0)\right]=100$$

$$\Rightarrow \qquad 10ab=100$$

$$\Rightarrow \qquad ab=10$$

$$b=\frac{10}{a} \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) मधून b ची किंमत (1) मध्ये ठेवल्यावर आपल्याला मिळेल

$$a+\frac{10}{a}=7$$

$$a^2+10=7a$$

$$a^2-7a+10=0$$

$$(a-5)(a-2)=0$$

$$a=5 \text{ or } 2$$

समीकरण (2) वरून $\qquad b=2 \text{ or } 5$

आता $\qquad |a-b|=|5-2| \text{ or } |2-5| = 3$ **(उकल)**

उदाहरण 5: विचारात घ्या 5×5 मॅट्रिक्स $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

हे दिले आहे की A चे फक्त एक वास्तविक एजेन मूल्य आहे, तर A चे ते वास्तविक एजेन मूल्य शोधा.

उकल. कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण असे आहे.

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$ चालवून.

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

आता, बाजूला काढून

$$(15-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(15-\lambda)\,|$ मॅट्रिक्स $| = 0$

$\Rightarrow \quad 15-\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 15$

$\therefore$ 15 हे A चे वास्तविक एजेन मूल्य आहे.

दुसरा दृष्टिकोन

जर सर्व पंक्ती किंवा स्तंभांची बेरीज समान असेल तर ती बेरीज मॅट्रिक्स चे एजेन मूल्य असते.

मॅट्रिक्स A मध्ये, सर्व पंक्तींची बेरीज = 15

$\therefore$ 15 हे A चे वास्तविक एजेन मूल्य आहे.

उदाहरण 6: $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ दिले आहे तर A^3 चे मूल्य काय असेल.

उकल:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ आणि } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ दिले आहे.}$$

कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरण असे आहे.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \qquad (-5-\lambda)(-\lambda)+6=0$

$\Rightarrow \qquad 5\lambda+\lambda^2+6=0$

$\Rightarrow \qquad \lambda^2+5\lambda+6=0$

प्रत्येक मॅट्रिक्स त्याच्या कॅरॅक्टरिस्टिक समीकरणाचे समाधान करते (कॅले हॅमिल्टन प्रमेय) म्हणून.

$\therefore \qquad A^2+5A+6=0$

$\Rightarrow \qquad A^2=-5A-6I \qquad ...(1)$

दोन्ही बाजूला A ने गुणाकार करून आपल्याला मिळेल,

$$A^3=-5A^2-6AI$$

$$A^3=-5(-5A-6I)-6AI \qquad ...((1) \text{ वरून})$$

$$A^3=25A+30I-6AI$$

$$A^3=19A+30I$$

उदाहरण 7:

a. समजा u आणि v हे अनुक्रमे एजेन मूल्ये 1 आणि 3 शी संबंधित A चे एजेन वेक्टर आहेत. $u+v$ हे A चे एजेन वेक्टर नाही हे सिद्ध करा.

b. समजा A आणि B या असे वास्तविक मॅट्रिक्स आहेत की A च्या प्रत्येक पंक्तीची बेरीज 1 आणि B च्या प्रत्येक पंक्तीची बेरीज 2 आहे. तर 2 हे AB चे एजेन मूल्य आहे हे दाखवा.

उकल:

a. u आणि v हे अनुक्रमे एजेन मूल्ये 1 आणि 3 शी संबंधित A चे एजेन वेक्टर (एजेन वेक्टर) आहेत हे दिलेले आहे.

म्हणून $\qquad Au=1u$

$\qquad Av=3v$

आता, $\qquad A(u+v)=Au+Av$

$\qquad =1u+3v$

म्हणून $(u+v)$ हे A चे एजेन वेक्टर नाही.

b. स्वतःप्रयत्न करा.

उदाहरण 8: समजा A हा 3×3 वास्तविक नॉन-डायगोनल मॅट्रिक्स आहे आणि $A^{-1}=A$ तर दाखवा की

$$tra(A)=-\det(A)=\pm 1$$

उकल: दिलेले आहे

$$A^{-1}=A \Rightarrow A^2=I$$

तर, A^2 चे सर्व एजेन मूल्ये 1 आहेत

तसेच, $\qquad A^2-I=0$

किंवा $\qquad (A-I)(A+I)=0$

तर, A चे दोन एजेन मूल्ये $+1$ आणि -1 आहेत.

A^2 चे एजेन मूल्ये A च्या एजेन मूल्यांच्या वर्गाबरोबर असतात म्हणून.

तर, A चे एजेन मूल्ये एकतर $+1$ किंवा -1 होईल.

तर, तिसरे एजेन मुल्य $+1$ किंवा -1 असू शकते.

मॅट्रिक्स चा डिटरमीनंट हा त्याच्या एजेन मूल्यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो.

तर, सारणिक ± 1असू शकतो.

तिसरे एजेन मुल्य + 1 असल्यास, $tr(A)=1,\ \det(A)=-1$

तिसरे एजेन मुल्य – 1 असल्यास, $tr(A)=-1,\ \det(A)=1$

म्हणून, $tra(A)=-\det(A)=\pm 1$

सारांश

1. मैट्रिक्स म्हणजे $(m \times n)$ घटकांचे एक ॲरे प्रतिनिधित्व आहे आणि या प्रकारे लिहितात.

   $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, i=1, 2, \ldots m,\ j=1, 2, \ldots n$
2. **रँक:** इचिलॉन फॉर्ममध्ये असलेल्या मैट्रिक्स मधील शून्येतर रो च्या संख्येला, मैट्रिक्स ची रँक म्हटले जाते.
3. नॉन होमोजीनियस प्रणाली साठी
   a. जेव्हा $\rho(A)=\rho(A:B)$ = अज्ञात ची संख्या, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून एकमेव उकल असते.
   b. जेव्हा $\rho(A)=\rho(A:B)$ < अज्ञात ची संख्या आहे, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून अनंत उत्तरे असतात.
   c. जेव्हा $\rho(A)\neq\rho(A:B)$, तेव्हा प्रणाली इनकंसिस्टन्ट असते.
4. होमोजीनियस प्रणाली साठी
   a.जेव्हा $\rho(A)$ = अज्ञात ची संख्या, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून (ट्रीविएल) एकमेव उकल असते.
   b.जेव्हा $\rho(A)$ < अज्ञात ची संख्या आहे, तेव्हा प्रणाली कंसिस्टन्ट असून अनंत उत्तरे असतात (नॉन ट्रीविएल).
5. जर मॅट्रिक्सचा डिटरमिनंट शून्य नसला तर त्याचे व्यस्त अस्तित्वात असते आणि ते नेहमीच एकमेव (युनिक) असते.
6. समजा n ऑर्डर असलेला स्क्वेयर मॅट्रिक्स फिल्ड F वर असेल आणि जर असा नॉन झिरो कॉलम वेक्टर $X\in F^n$ अस्तित्वात असेल कि $AX=\lambda X$ काही $\lambda\in F$ साठी तर X ला λ शी संबंधित A चा एजेन वेक्टर म्हणतात आणि λ ला X शी संबंधित A चे एजेन मूल्य म्हणतात.
7. एजेन मूल्यांची बेरीज = $Trace(A)$
   एजेन मूल्यांचा गुणाकार = $\det(A)$
8. $n\times n$ ऑर्डर असलेला मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल करण्यायोग्य आहे फक्त जर त्यात n लिनियर इंडिपेन्डन्ट एजेन वेक्टर असतील.
9. **कॅले-हॅमिल्टन प्रमेय:** प्रत्येक चौरस मॅट्रिक्स स्वतःचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरणाचे समाधान करते.

वस्तुनिष्ट प्रश्न

1. जेव्हा $2\begin{bmatrix} x & 9 \\ y & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$, तेव्हा x आणि y ची किंमत आहे

 a. $x = 6, y = 3$ b. $y = 6, x = 3$

 c. $x = 9/2, y = 6$ d. $x = -1, y = -2$

2. जेव्हा $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ आणि $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ तेव्हा मैट्रिक्स X ची किंमत

 a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

 c. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. समजा स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ची ऑर्डर तीन आहे, तर $|kA|$ बरोबर आहे.

 a. $3k\,|A|$ b. $k\,|A|$

 c. $k^2\,|A|$ d. $k^3\,|A|$

4. जेव्हा $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$, तेव्हा x ची किंमत आहे

 a. 3 b. 4 c. 2 d. -1

5. जेव्हा A ऑर्डर 2 चा एक इन्व्हर्टिबल मैट्रिक्स आहे, तेव्हा $det\,(A^{-1})$ बरोबर आहे.

 a. 0 b. det(A)

 c. 1 d. $\dfrac{1}{\det A}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 12 \end{vmatrix}$ ची किंमत आहे

 a. 1 b. -1 c. 0 d. 2

7. जेव्हा $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ x+5 & 4 \end{vmatrix} = 3$ तेव्हा x ची किंमत आहे

 a. 7 b. 8

 c. 12 d. 10

8. जेव्हा एक मैट्रिक्स A सिमेट्रिक आणि विषम- सिमेट्रिक दोन्ही आहे, तो

 a. A एक डायगोनल मैट्रिक्स आहे. b. A एक शून्य मैट्रिक्स आहे.

 c. A एक स्केलार मैट्रिक्स आहे. d. A एक स्क्वेअर मैट्रिक्स आहे.

9. जेव्हा $A=\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$ आणि $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ तेव्हा A^{-1} ची किंमत आहे

a. $\begin{bmatrix} a+ib & -c+id \\ -a+id & a-ib \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} a-ib & c-id \\ -c-id & a+ib \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$

10. मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ ची रँक 3 आहे, आणि a, b, c वास्तविक आहेत, तेव्हा

a. $a = b = c$

b. a, b, c सर्व भिन्न आहेत परंतु $a + b + c = 0$

c. a, b, c यापैकी दोन संख्या समान आहेत परंतु तिसऱ्यापेक्षा भिन्न आहेत

d. a, b, c सर्व भिन्न आहेत आणि $a + b + c \neq 0$

11. P चे मूल्य शोधा ज्यासाठी, दिलेल्या मॅट्रिक्सची रँक 1 आहे $\begin{bmatrix} 3 & p & p \\ p & 3 & p \\ p & p & 3 \end{bmatrix}$

a. 4

b. 2

c. 3

d. 1

12. समजा $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ हा $P + Q$ म्हणून व्यक्त केला आहे, जेथे P सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे आणि Q स्क्यु सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, तर खालील पैकी कोणते बरोबर आहे?

a. $Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

d. $Q=\begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

13. ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे कॉलम खालील पैकी काय तयार करतात?

a. सदिशांचा ऑर्थोगोनल संच

b. ऑर्थोनॉर्मल सदिशांचा संच

c. एक लिनियर इनडिपेन्डन्ट संच

d. वरील सर्व

14. एजेन वेक्टर $(1,-1)^T$ आणि $(2,1)^T$ च्या संदर्भात मॅट्रिक्स M ला एजेन मूल्ये अनुक्रमे 1आणि 4 आहेत तर M हा मॅट्रिक्स खालील प्रमाणे आहे

a. $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. जर $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ तर मोडल मॅट्रिक्स P असा आहे

a. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$

16. जर $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ची कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे λ_1 आणि λ_2 आहेत तर $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ याची कॅरॅक्टरिस्टिक मुळे आहेत

a. $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2$ b. $2\lambda_1$ आणि $2\lambda_2$

c. $\frac{1}{\lambda_1}$ आणि $\frac{1}{\lambda_2}$ d. $\lambda_1 + \lambda_2$ आणि $|\lambda_1 - \lambda_2|$

17. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ आणि $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, खालील पैकी कोणता मॅट्रिक्स शून्य मॅट्रिक्स आहे

a. $A^2 - A - 5I$ b. $A^2 + A - 5I$

c. $A^2 + A - I$ d. $A^2 - 3A + 5I$

18. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ या मॅट्रिक्स चे एजेन मूल्ये आहेत.

a. 1, 4 b. -1, 2

c. 0, 5 d. 2, −5

19. खालील पैकी कोणता मॅट्रिक्सचा एक एजेन वेक्टर आहे $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

a. $[1 \quad -2 \quad 0 \quad 0]^T$ b. $[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$

c. $[1 \quad 0 \quad 0 \quad -2]^T$ d. $[1 \quad -1 \quad 2 \quad 1]^T$

20. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ चे एजेन वेक्टर $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ आणि $\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ या स्वरूपात लिहिलेले आहेत. $a+b$ ची किंमत काय असेल?

a. 0 b. 1/2

c. 1 d. 4

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ एक एजेन वेक्टर आहे

a. $[-1 \;\; 1 \;\; 1]^T$

b. $[1 \;\; 2 \;\; 1]^T$

c. $[1 \;\; -1 \;\; 2]^T$

d. $[2 \;\; 1 \;\; -1]^T$

22. खालील मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{bmatrix}$ विचारात घ्या. A चे एजेन मूल्य 4 आणि 8 असतील तर

a. $x = 4, y = 10$

b. $x = 5, y = 8$

c. $x = -3, y = 9$

d. $x = -4, y = 10$

23. मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ साठी, एजेन मूल्यां पैकी एक 3आहे. इतर दोन एजेन मूल्ये आहेत

a. 2, −5

b. 3, −5

c. 2, 5

d. 3, 5

24. समजा $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ आहे, तर A ची एजेन मूल्ये आहेत

a. 2, 1, 0

b. $2, (1 + i), (1 - i)$

c. 2, −1, −1

d. 1, −1, 0

25. खालील पैकी कोणते मॅट्रिक्स डायगोनलायझेबल नाही?

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तरे

1. b	2. c	3. d	4. c
5. d	6. c	7. d	8. b
9. c	10. d	11. c	12. c
13. d	14. d	15. b	16. c
17. c	18. c	19. b	20. b
21. b	22. d	23. b	24. c
25. c			

सबजेक्टिव्ह न सोडवलेले प्रश्न (हॉट्स)

1. जर A ला झिरो रो असेल तर AB ला सुद्धा झिरो रो असतो हे दाखवा.
2. जर B चा एक कॉलम शून्य असेल, तर AB चा पण एक कॉलम शून्य असतो हे दाखवा.
3. समजा रँक m असलेला A हा $m \times n$ ऑर्डर चा मॅट्रिक्स आहे आणि B हा रँक n आणि ऑर्डर $n \times p$ चा मॅट्रिक्स आहे. तर AB ची रँक ठरवा. आपल्या उत्तराला न्यायसंगत बनवा.
4. जर B हा एक 3×1 चा मॅट्रिक्स आहे आणि C हा 1×3 चा मॅट्रिक्स आहे, तर ऑर्डर 3×3 असलेला मॅट्रिक्स BC ची जास्तीत जास्त रँक 1 असते हे दाखवा. याउलट, जर A हा कोणताही 3×3 ऑर्डर चा मॅट्रिक्स आहे ज्याची रँक 1 आहे, तर तेथे, 3×1 चा मॅट्रिक्स B आणि 1×3 चा मॅट्रिक्स C असे अस्तित्वात असतील कि $A = BC$ हे दाखवा.
5. 2×2 ऑर्डर चे इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स A आणि B असे शोधा की $A + B$ शून्य च्या बरोबर नाही आणि $A + B$ इन्व्हर्टिबल नाही.
6. समजा की $A \in M_{n \times n}(F)$ कोणत्या परिस्थितीत, $det\,(-A) = det\,(A)$ आहे.
7. खालील वाक्याच्या संबंधित एक काऊंटर उदाहरण द्या: जर n अज्ञात मधील m एक लिनियर समीकरण प्रणालीचा गुणांक मॅट्रिक्स ची रँक m आहे, तर त्या प्रणालीला उकल असते.
8. a, b आणि c ची मूल्ये निश्चित करा जेणे करून $(1, 0, -1)$ आणि $(0, 1, -1)$ मॅट्रिक्सचे एजेन वेक्टर आहेत

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 3 & b & c \end{bmatrix}$$

9. *समजा* P, D आणि A हे समान ऑर्डरचे वास्तविक चौरस मॅट्रिक्स असे आहेत कि P हा इन्व्हर्टिबल आहे, D हा डायगोनल आहे आणि $D = PAP^{-1}$. काही $n \in N$ साठी $A^n = 0$ असल्यास, तर $A = 0$ हे दाखवा.
10. समजा A हा एक $n \times n$ ऑर्डर चा आणि n वेग वेगळे एजेन मूल्ये असलेला वास्तविक सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे. सिद्ध करा की तेथे ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स P असा अस्तत्वात आहे कि $AP = PD$, जेथे D हा एक वास्तविक डायगोनल मॅट्रिक्स आहे.
11. संख्या शोधा आणि $\begin{bmatrix} 1/3 & x \\ y & z \end{bmatrix}$ पासून ची सर्व 2×2 ऑर्थोगोनल मॅट्रायसेस प्रदर्शित करा
12. 3×3 ऑर्डरचे ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स P शोधा ज्याच्या पहिल्या दोन ओळी चे गुणक आहेत:

   a. $(1,2,3)$ आणि $(0,-2,3)$ *b.* $(1,3,1)$ आणि $(1,0,-1)$

13. समजा A हा एक वास्तविक स्क्यु -सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, म्हणजेच च $A^T = -A$. तर खालील विधाने सिद्ध करा.
   a. वास्तविक स्क्यू सिमेट्रिक मॅट्रिक्स A चे प्रत्येक एजेन मूल्य एक तर 0 किंवा पूर्णपणे काल्पनिक संख्या असते.
   b. A ची रँक सम असते.
14. हे सिद्ध करा की जर $A \in M_{n\times n}(F)$ मध्ये n वेगवेगळे एजेन मूल्ये असतील, तर A हा डायगोनालायझेबल असतो.
15. सिद्ध करा की समान एजेन मूल्यांशी संबंधित दोन वेगवेगळे एजेन वेक्टर नेहमी लिनिअरली डिपेन्डन्ट असतात.

16. दिलेल्या 2×2 मॅट्रिक्स साठी $\begin{bmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{bmatrix}$

   a. A ची एजेन मूल्ये शोधा:
   b. A च्या प्रत्येक एजेन मूल्यसाठी, एजेन वेक्टर निश्चित करा.
   c. मॅट्रिक्स A ला डायगोनलाईझ करा.
   d. डायगोनलायझेशनचा परिणाम वापरून, प्रत्येक धन पूर्णांक k साठी A^k ची गणना आणि सरलीकरण करा.

प्रकल्प / प्रात्यक्षिक /क्रियाकलाप

प्रकल्प

1. ग्राफ थेरीमध्ये विविध प्रकारचे मॅट्रायसेस आणि त्यांचे अनुप्रयोग दर्शविणारे मॉडेल तयार करा.
2. "डायगोनलायझेशन मुळे A चा पॉवर ठरवण्यास मदत होते, म्हणजे A चा पॉवर n ,जेथे n एक सामान्य पूर्णांक आहे." गणिती तसेच उदाहरणाच्या मदतीने स्पष्ट करा.

प्रात्यक्षिक

1. एक MATLAB फंक्शन लिहा ज्यामध्ये एक मॅट्रिक्स एक रो आणि एक कॉलम घ्यायचा आहे. फंक्शनला पास केलेल्या रो संख्येपासून सुरुवात करून, फंक्शनला दिल्या गेलेल्या कॉलमला खाली स्क्रोल करा आणि ज्या कॉलम मध्ये सर्वात मोठी अबसोल्यूट किंमत आहे त्या रो संख्येला परत करा.
2. MATLAB चा प्रयोग करताना, 3×3 मैट्रिक्स च्या डिटरमिनन्टची किंमत काढा.
3. MATLAB $A \in R_{n\times n}$ मध्ये मॅट्रिक्सच्या एजेन मूल्ये आणि एजेन वेक्टरची गणना करण्यासाठी पॉवर पद्धत (नॉर्मलायझेशनसह) लागू करा.

क्रियाकलाप

1. एक दुकानदार P_1 पॅकेट मध्ये 1 किलो गहू, 1 किलो तांदूळ आणि 1 किलो बाजरी विकतो आणि P_2 मध्ये 1 किलो गहू, 0 किलो तांदूळ आणि 1 किलो बाजरी विकतो आणि P_3 ज्यामध्ये आहे, 0 किलो गहू, 1 किलो तांदूळ आणि 1 किलो बाजरी. फक्त एक किलो बाजरी खरेदी करणे शक्य आहे का याचे परीक्षण करा? जर असेल तर कसे काय?
2. वेगवेगळ्या शहरांच्या विद्यार्थ्यांचा एक समूह बनवा, एक ग्राफ बनवा आणि त्याच्यासाठी एक ऍडजन्सी मॅट्रिक्स बनवा, ज्यामध्ये बिंदूंना शहर आणि बाजूंना एक मालांच्या वाहतुकीचा खर्च असेल.
3. डिफ़ेरेन्शियाल समीकरणांची एकलिनियर प्रणाली $({dx}/{dt}) = X$, जेथे X एक $m \times m$ डायगोनल मॅट्रिक्स आहे ज्यामध्ये कॉन्स्टन्ट एन्ट्रीज असतात, डायगोनलायझेशन संकल्पना वापरून कशी सोडवता येते.

अधिक जाणून घ्या

1. xyz गुणाकाराची मिनिमम किंमत काय असेल ज्यासाठी डीटर्मिनंट $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$ नॉन नेगेटिव आहे,

   a. -8 b. -1

   c. $-2\sqrt{2}$ d. $-16\sqrt{2}$

2. जेव्हा $\alpha,\ \beta \neq 0$ आणि $f(n) = \alpha^n + \beta^n$ आणि $\begin{vmatrix} 3 & 1+f(1) & 1+f(2) \\ 1+f(1) & 1+f(2) & 1+f(3) \\ 1+f(2) & 1+f(3) & 1+f(4) \end{vmatrix} = k(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\alpha-\beta)^2$,

   तेव्हा k ची किंमत असेल...

   a. $\alpha\beta$ b. $1/\alpha\beta$

   c. 1 d. -1

3. मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$ ची रँक काढा.

4. जेव्हा मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ची रँक 3 पेक्षा कमी असेल तेव्हा 'a' ची किंमत काढा .

5. जर A हा $Det(A+I) = 1 + Det(A)$ सह (2×2) चा मॅट्रिक्स असेल तर आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो.

   a. $Det\ (A) = 0$ b. $A = 0$

   c. $Tr\ (A) = 0$ d. A नॉन सिंगुलर आहे

6. जर $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, तर A^9 मोजा.

   a. $511A + 510I$ b. $309A + 104I$

   c. $154A + 155I$ d. exp. $(9A)$

7. जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, तर A^{50} असेल,

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 48 & 1 & 0 \\ 48 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तरे

1. a
2. c
3. $\rho(A)=\begin{cases}3 & \text{जर } x \neq y, y \neq z, z \neq x\\ 2, & \text{जर एकतर } x = y \text{ किंवा } x = z \text{ आणि } y \neq z\\ 1 & \text{जर } x = y = z\end{cases}$
4. 0, 3
5. c
6. a
7. c

संदर्भ/सुचवलेले वाचन

1. Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.
2. Dettman, J.W. (1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.
3. Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics-I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
4. Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers
5. Herstein, I.N. (1993). Topics in Algebra, Wiley Eastern.
6. Hohn, E.Franz (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, New York.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition , Narosa.
8. Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. New York.
9. Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.
10. Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.
11. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). Calculus and Analytic Geometry, Addision-Wesley, Reading, MA.

CO आणि PO अटेन्मेन्ट तक्ता

या कोर्सच्या समाप्तीनंतर कोर्ससाठीचे कोर्स आऊटकम्स (COs) यांचे प्रोग्रॅम आऊटकम्स सोबत मॅपिंग केले जाऊ शकते आणि त्या अनुषंगाने POs च्या अटेन्मेन्टबाबतीत विश्लेषण केले जाऊ शकते. या संपूर्ण विश्लेषणामार्फत POs च्या अटेन्मेन्टमधील तफावतीवर सुधारण्यासाठीच्या आवश्यक उपाययोजना केल्या जाऊ शकतील.

CO आणि PO अटेन्मेन्ट तक्ता

कोर्स आऊटकम्स	प्रोग्रॅम आऊटकम्सचे अटेन्मेन्ट *(1- किमान परस्परसंबंध; 2- मध्यम परस्परसंबंध; 3- घनिष्ट परस्परसंबंध)*											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1												
CO-2												
CO-3												
CO-4												
CO-5												
CO-6												

या तक्त्यातील तपशीलानुसार तफावती सुधारता येतील.

सूची (इंडेक्स)