गणित – I

लेखक:
दीपक सिंग

अनुवादक:
प्रा. दिलीप बद्रीनारायण सोनी

पुनरावलोकनकर्ता:
प्रा. मोहिनी आर. मेहता

KHANNA BOOK PUBLISHING CO. (P) LTD.
PUBLISHER OF ENGINEERING AND COMPUTER BOOKS
4C/4344, Ansari Road, Darya Ganj, New Delhi-110002
Phone: 011-23244447-48 **Mobile:** +91-99109 09320
E-mail: contact@khannabooks.com
Website: www.khannabooks.com

ISBN: 978-93-5538-045-6
Book Code: DIP164MA

Mathematics-I
by Deepak Singh

[Marathi Edition]

Published by:

Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
Visit us at: **www.khannabooks.com**
Write us at: **contact@khannabooks.com**
CIN: U22110DL1998PTC095547

To view complete list of books,
Please scan the QR Code:

KPH

Printed in India.

प्रो. अनिल डी. सहस्रबुद्धे
अध्यक्ष
Prof. Anil D. Sahasrabudhe
Chairman

सत्यमेव जयते

अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्
(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)
(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)
नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली–110070
दूरभाष : 011–26131498
ई–मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION
(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)
(Ministry of Education, Govt. of India)
Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070
Phone : 011-26131498
E-mail : chairman@aicte-india.org

प्रास्ताविक

शतकानुशतके भारतीय समाजाच्या प्रगती आणि विस्तारामध्ये अभियांत्रिकीने अत्यंत महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावली आहे. भारतीय उपखंडात उगम पावलेल्या अभियांत्रिकी संकल्पनांचा जगावर प्रभाव पडला आहे.

ऑल इंडिया कौन्सिल फॉर टेक्निकल एज्युकेशन (एआयसीटीई) 1987 मध्ये स्थापनेपासून तंत्रशास्त्राच्या विद्यार्थ्यांना शक्य त्या सर्व प्रकारे मदत करण्यात नेहमीच आघाडीवर असते. एआयसीटीईचे ध्येय तांत्रिक शिक्षणाला प्रोत्साहन देणे आणि त्याद्वारे उद्योगाला अधिक उंचीवर नेणे आणि शेवटी आपल्या प्रिय मातृभूमी भारताला आधुनिक विकसित राष्ट्र बनण्याचे आहे. येथे हे नमूद करणे योग्य ठरेल की अभियंते आधुनिक समाजाचा कणा आहेत – चांगले अभियंते, म्हणजे चांगले उद्योग आणि चांगले उद्योग म्हणजे चांगला देश.

NEP 2020 मध्ये प्रादेशिक भाषांमध्ये सर्वांना शिक्षणाची कल्पना मांडण्यात आली आहे, ज्यामुळे प्रत्येक विद्यार्थी पुरेसा सक्षम होईल आणि राष्ट्रीय विकासासाठी योगदान देण्याच्या स्थितीत येईल याची खात्री होईल.

एआयसीटीई गेल्या काही वर्षांपासून अविरतपणे काम करत असलेल्या क्षेत्रांपैकी एक म्हणजे सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांना विविध प्रादेशिक भाषांमध्ये तयार केलेल्या आंतरराष्ट्रीय दर्जाची पुस्तके माफक किमतीमध्ये उपलब्ध करून देणे. ही पुस्तके सोप्या भाषेत, वास्तविक जीवनातील उदाहरणे, समृद्ध सामग्री आणि बदलत्या जगाच्या उद्योगाच्या गरजा लक्षात घेऊनच तयार केलेली आहेत. ही पुस्तके अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञानासाठी एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रम – 2018 नुसार आहेत.

संपूर्ण भारतातील प्रख्यात, उत्तम ज्ञान आणि अनुभव संपन्न प्राध्यापकांनी शैक्षणिक क्षेत्राच्या सोईसाठी ही पुस्तके लिहिली आहेत. एआयसीटीईला विश्वास आहे की ही पुस्तके त्यांच्या समृद्ध सामग्रीसह तांत्रिक विद्यार्थ्यांना अधिक सहजतेने आणि गुणवत्तेसह विषयांवर प्रभुत्व मिळविण्यात मदत करतील.

या अभियांत्रिकी विषयांना अधिक सुबक बनविण्याच्या प्रयत्नांसाठी एआयसीटीई मूळ लेखक, समन्वयक आणि अनुवादकांच्या मेहनतीचे कौतुक करते.

(Anil D. Sahasrabudhe)

ऋणनिर्देश

पदविका अभियांत्रिकी (Diploma) विद्यार्थ्यांसाठी तांत्रिक पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी लेखक(ले) AICTE चे त्यांचे सूक्ष्म नियोजन आणि अंमलबजावणीसाठी आभारी आहेत.

पुस्तकाचे समीक्षक डॉ. प्रदिप नंदलाल जोशी यांनी पुस्तकाला विद्यार्थ्यांसाठी अनुकूल बनवण्यामध्ये आणि कलात्मक पद्धतीने अधिक चांगला आकार देण्यासाठी दिलेल्या अमूल्य योगदानाची आम्ही मनापासून प्रशंसा करतो.

हे पुस्तक AICTE मॉडेल अभ्यासक्रमाशी आणि राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण (NEP)-2020 च्या मार्गदर्शक तत्त्वांनुसार संरेखित आहे हे देखील आम्ही मोठ्या सन्मानाने सांगतो. प्रादेशिक भाषांमधील शिक्षणाला चालना देण्यासाठी, या पुस्तकाचे अनुसूचित भारतीय प्रादेशिक भाषांमध्ये भाषांतर केले जात आहे.

मराठी भाषेतील अनुवादात योगदान दिल्याबद्दल प्रा. दिलीप बद्रीनारायण सोनी आणि समीक्षा केल्याबद्दल प्रा. मोहिनी आर. मेहता यांचेही आम्ही आभार मानू इच्छितो.

श्री. बुद्धा चंद्रशेखर, CCO NEAT AICTE ज्यांचे AI आधारित अनुवादक साधन भाषांतराच्या उद्देशाने वापरले गेले यांना आम्ही विनम्र अभिवादन करू इच्छितो.

शेवटी, एक अद्भुत अनुभव देण्याकरिता आम्ही प्रकाशन गृह, M/s खन्ना बुक पब्लिशिंग कंपनी प्रायव्हेट लिमिटेड, नवी दिल्ली, चे मनापासून आभार व्यक्त करू इच्छितो, ज्यांची संपूर्ण टीम प्रकाशनाच्या सर्व पैलूंवर सहकार्य करण्यास सदैव तत्पर होती.

- दीपक सिंग

प्रस्तावना

“गणित-I” हे पुस्तक अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांना गणित शिकवण्याचे माध्यम आहे. हे पुस्तक लिहिण्याची सुरुवात ही पदविका अभियांत्रिकीच्या विद्यार्थ्यांसाठी गणिताच्या मूलभूत संकल्पनांना गणिताच्या मूलभूत तत्त्वांपर्यंत पोहोचवणे तसेच त्यांना विषयाची अंतर्दृष्टी मिळवणे, सक्षम करणे आहे. विस्तृत कव्हरेज आणि आवश्यक पूरक माहिती प्रदान करण्याचा हेतू लक्षात घेऊन, लेखकाने संपूर्ण पुस्तकात AICTE ने शिफारस केलेल्या विषयांचा समावेश अतिशय व्यवस्थित आणि तार्किक पद्धतीने केला. विषयातील मूलभूत संकल्पना सोप्या शक्य मार्गाने समजावून सांगण्याचा प्रयत्न करण्यात आला आहे.

मुद्रणप्रत (manuscript) तयार करण्याच्या प्रक्रियेदरम्यान, मी विविध मानक पाठ्यपुस्तकांचा विचार केला आहे आणि त्यानुसार जिज्ञासा निर्माण करणे, सोडवणे आणि पूरक समस्या इत्यादी विभाग विकसित केले आहेत. विविध विभाग तयार करताना मूलभूत तत्त्वांच्या जलद पुनरावृत्तीसाठी सूत्रांच्या व्यापक सारांशांवरही भर देण्यात आला आहे. विद्यार्थ्यांच्या आवडीच्या क्षेत्रांमध्ये टॅप करण्याव्यतिरिक्त, लेखक उदाहरणे आणि समृद्ध व्यायामांचा पुरेसा पुरवठा करतो. प्रत्येक युनिटमध्ये आढळलेले, यथार्थवादी अनुप्रयोग विद्यार्थ्यांना सामग्रीचे सामान्यीकरण करण्यास आणि नवीन आणि नवीन परिस्थितींमध्ये लागू करण्यास मदत करण्यासाठी शिस्तीकडे आकर्षित करतात. विद्यार्थ्यांच्या आवडीला अधिक चालना देण्यासाठी, संपूर्ण मजकुरामध्ये काळजीपूर्वक काढलेले आलेख आणि चित्र दिसतात.

याव्यतिरिक्त, “अधिक जाणून घ्या” या शीर्षकाखाली वाचकांकरिता काही आवश्यक माहिती व्यतिरिक्त लेखकाने पुढील वाचनांसाठी काही आवश्यक मूलभूत माहिती स्पष्ट केली आहे.

जोपर्यंत सध्याच्या पुस्तकाचा संबंध आहे, “गणित-I” हे विषय समाविष्ट केलेल्या विषयांवर संपूर्ण ग्राउंडिंग प्रदान करण्यासाठी आहे. गणित-1 चा हा भाग विद्यार्थ्यांना संबंधित प्रश्न विचारण्यासाठी त्रिकोणमिती (Trigonometry), कलन (Calculus) आणि बीजगणित यांचे ज्ञान लागू करण्यास तयार करेल. विषय रचनात्मक पद्धतीने सादर केले आहेत.

लेखक प्रामाणिकपणे आशा करतो की हे पुस्तक विद्यार्थ्यांना त्रिकोणमिती, कॅल्क्युलस आणि बीजगणित या मूलभूत तत्त्वांमागील कल्पना शिकण्यासाठी आणि विषयावर ठोस आधार विकसित करण्यासाठी चर्चा करण्यास प्रेरित करेल. मी सर्व फायदेशीर टिप्पण्या आणि सूचनांचा आभारी आहे जे पुस्तकाच्या भविष्यातील आवृत्ती सुधारण्यासाठी योगदान देतील. हे पुस्तक शिक्षक आणि विद्यार्थ्यांच्या हातात देताना मला खूप आनंद मिळतो आहे. पुस्तकातील विविध पैलूंवर काम करून खरोखरच एक मोठा आनंद होता.

- दीपक सिंग

फलित आधारित शिक्षण

निष्पत्तिवर आधारित शिक्षणाच्या अंमलबजावणीसाठी पहिली आवश्यकता म्हणजे निकाल-आधारित अभ्यासक्रम विकसित करणे आणि शिक्षण-प्रणालीमध्ये परिणाम-आधारित मूल्यांकन समाविष्ट करणे. निकालावर आधारित मूल्यांकनांमधून जाताना विद्यार्थ्यांनी नमूद केलेले मानक, विशिष्ट आणि मोजण्यायोग्य परिणाम साध्य केले आहेत का याचे मूल्यमापन करण्यास मुल्यमापक सक्षम होतील. निकालावर आधारित शिक्षणाचा योग्य समावेश केल्याने कोणत्याही स्तरावर हार न मानता सर्व विद्यार्थ्यांसाठी किमान मानक साध्य करण्याची निश्चित वचनबद्धता असेल. निकालावर आधारित शिक्षणाच्या सहाय्याने चालणाऱ्या कार्यक्रमाच्या शेवटी, विद्यार्थी खालील निकालांवर पोहोचण्यास सक्षम असेल:

PO-1: **मूलभूत आणि शिस्तबद्ध विशिष्ट ज्ञान:** अभियांत्रिकी प्रश्नांचे निराकरण करण्यासाठी मूलभूत गणित, विज्ञान आणि अभियांत्रिकी मूलभूत आणि अभियांत्रिकी विशेषज्ञतेचे ज्ञान लागू करणे.

PO-2: **समस्येचे विश्लेषण:** संहिताबद्ध (codified) स्टँडर्ड पद्धती वापरून चांगल्या प्रकारे परिभाषित अभियांत्रिकी समस्या ओळखणे आणि विश्लेषण करणे.

PO-3: **निराकरणाची रचना आणि विकास:** सु-परिभाषित तांत्रिक समस्यांसाठी उपायांची रचना आणि प्रणालीतील घटक (components of system) रचना किंवा निर्दिष्ट गरजा पूर्ण करण्याची प्रक्रिया मध्ये मदत करणे.

PO-4: **अभियांत्रिकी साधने, प्रयोग आणि चाचणी:** मानक चाचण्या आणि मोजमाप करण्यासाठी आधुनिक अभियांत्रिकी साधने आणि योग्य तंत्र वापरणे.

PO-5: **समाज, शाश्वतता आणि पर्यावरणासाठी अभियांत्रिकी पद्धती:** समाज, समदर्शी, पर्यावरण आणि नैतिक पद्धतींच्या संदर्भात योग्य तंत्रज्ञान लागू करणे.

PO-6: **प्रकल्प व्यवस्थापन:** अभियांत्रिकी व्यवस्थापन तत्त्वे वैयक्तिकरित्या वापरणे, एक टीम सदस्य किंवा एक नेता म्हणून प्रकल्प व्यवस्थापित करणे आणि प्रभावीपणे सुसंस्कृत अभियांत्रिकी क्रियाकलापांबद्दल संवाद साधणे.

PO-7: **आयुष्यभर शिक्षण घेण्याची प्रवृत्ती प्रस्थापित करणे:** वैयक्तिक गरजांचे विश्लेषण करण्याची आणि तांत्रिक बदलांच्या संदर्भात अद्ययावत करण्याची क्षमता विकसित करणे.

अभ्यासक्रमाचे परिणाम

अभ्यासक्रम पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी हे करू शकतील:

CO-1: तांत्रिक समस्या सोडवण्यासाठी त्रिकोणमिती आणि संबंधित मूलभूत संकल्पना लागू करणे.

CO-2: त्रिकोणमितीमध्ये वापरल्या जाणाऱ्या मूलभूत कार्यांचे बीजगणित विश्लेषण करण्याची क्षमता दाखवणे.

CO-3: अभियांत्रिकीशी संबंधित समस्या सोडवण्यासाठी विकलन (Differential Calculus) च्या मूलभूत संकल्पना वापरणे.

CO-4: आलेख, संख्यात्मक आणि विश्लेषणात्मकदृष्ट्या फलच्या व्युत्पत्तीचा अर्थ लावणे.

CO-5: फल (function) वापरून वास्तविक जीवन परिस्थितीचे मॉडेल करण्याची क्षमता दाखवणे.

CO-6: विद्यार्थी, समवयस्क आणि इतरांना गणिताचा विचार सुसंगतपणे आणि स्पष्टपणे सांगणे.

CO-7: बीजगणित संकल्पनांवर आधारित अभियांत्रिकी संबंधित समस्या सोडवणे.

कोर्स आउटकॉम्स	**कार्यक्रमाच्या परिणामांसह अपेक्षित मॅपिंग** (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)						
	PO-1	**PO-2**	**PO-3**	**PO-4**	**PO-5**	**PO-6**	**PO-7**
CO-1	3	2	1	-	-	-	1
CO-2	3	2	-	-	-	-	1
CO-3	3	2	1	-	-	-	1
CO-4	2	2	-	-	-	-	1
CO-5	2	2	1	-	-	-	-
CO-6	2	2	1	-	-	-	2
CO-7	2	2	-	-	-	-	-

संक्षिप्तरूपे आणि चिन्हे

संक्षेपांची यादी

लघुरुपे	पूर्ण रुपे
CO	अभ्यासक्रमाचे निकाल
cm	सेंटीमीटर
PO	कार्यक्रमाचे परिणाम
T-गुणोत्तर	त्रिकोणमितीय गुणोत्तर
UO	घटक परिणाम
UV	अतिनील (Ultra Voilet)
AllSTC All S T C	 सर्व त्रिकोणमितीय T-गुणोत्तर सकारात्मक आहेत sine आणि cosec T-गुणोत्तर सकारात्मक आहेत tan आणि cot T-गुणोत्तर सकारात्मक आहेत cos आणि sec T-गुणोत्तर सकारात्मक आहेत

चिन्हांची यादी

चिन्हे	वर्णन
1_R	1 रेडियन
1^G	1 श्रेणी
1^D	1 अंश
1°	1 अंश
1’	1 मिनिट
1”	1 सेकंद
π	पाय
D_f	f फलचे अधिक्षेत्र
R_f	f फलची व्याप्ती
$x \rightarrow a$	x ने a कडे जाणे
$\cup$	संयोग
$\cap$	छेदनबिंदू
$\subset$	उपसंच
$\in$	चा घटक असणे
$[a,b]$ or $]a,b[$	संवृत अंतराल
(a,b) or $)a,b($	विवृत अंतराल
$[a,b)$ or $]a,b)$	संवृत - विवृत मध्यांतर
$(a,b]$ or $(a,b[$	विवृत - संवृत मध्यांतर
ϕ	रिक्त संच
[x]	सर्वात मोठा पूर्णांक
$\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$	x च्या संदर्भात व्युत्पन्न
i	iota
$\bar{z}$	Z चे संयुग्म
$\lvert z \rvert$	Z चे मापांक
$\mathrm{Re}l(z)$	Z चा वास्तविक भाग
Im(z)	Z चा काल्पनिक भाग
arg(z)	Z चा कोनांक
amp(z)	Z चे मोठेपणा
cisθ	cos θ + i sin θ
n!	n फॅक्टोरियल किंवा फॅक्टोरियल n
${}^nP_r$	एका वेळी r ने घेतलेल्या वेगवेगळ्या वस्तूंच्या क्रमपरिवर्तनांची संख्या
${}^nC_r$	एका वेळी r घेतलेल्या वेगवेगळ्या वस्तूंच्या संयोगाची संख्या

आकृत्यांची यादी

तक्त्यांची यादी

शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

आउटकम बेस्ड एज्युकेशन (OBE) लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांचे ज्ञान स्तर आणि कौशल्य संच वाढवले पाहिजे. OBE च्या योग्य अंमलबजावणीसाठी शिक्षकांनी मोठी जबाबदारी स्वीकारली पाहिजे. OBE प्रणालीतील शिक्षकांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे असू शकतात:

- वाजवी मर्यादेत, त्यांनी त्यांचा वेळ सर्व विद्यार्थ्यांच्या फायद्यासाठी वापरला पाहिजे.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांच्या क्षमतेचे मूल्यांकन केवळ परिभाषित निकषावर आणि कोणत्याही पक्षपात आणि भेदभावाशिवाय केले पाहिजे.
- त्यांनी हे सुनिश्चित करण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे की सर्व विद्यार्थ्यांना त्यांचे शिक्षण पूर्ण झाल्यानंतर पुरेसे दर्जेदार ज्ञान तसेच त्यांच्या मुख्य शिस्तीशी जुळणारी क्षमता प्राप्त होईल.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांना त्यांची अंतिम कामगिरी क्षमता विकसित करण्यासाठी नेहमी प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी नवीन दृष्टीकोन एकत्रित करण्यासाठी गट कार्य आणि सांघिक कार्य सुलभ केले पाहिजे आणि प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी मूल्यांकनाच्या प्रत्येक भागात ब्लूम वर्गीकरण पाळावे.

ब्लूम वर्गीकरण

स्तर	शिक्षकांनी तपासावे	विद्यार्थी सक्षम असावा	मूल्यांकनाची संभाव्य पद्धत
निर्माण करणे	विद्यार्थी तयार करण्याची क्षमता	डिझाइन करा किंवा तयार करा	सूक्ष्म प्रकल्प
मूल्यमापन	विद्यार्थ्यांचे औचित्य सिद्ध करण्याची क्षमता	वाद घालणे किंवा बचाव करणे	असाइनमेंट
विश्लेषण करणे	विद्यार्थ्यांमध्ये फरक करण्याची क्षमता	फरक किंवा भेद करा	प्रकल्प/प्रयोगशाळा पद्धती
अर्ज करणे	विद्यार्थ्यांची माहिती वापरण्याची क्षमता	चालवा किंवा प्रात्यक्षिक करा	तांत्रिक सादरीकरण/ प्रात्यक्षिक
समजून घेणे	विद्यार्थ्यांची कल्पना स्पष्ट करण्याची क्षमता	स्पष्ट करा किंवा वर्गीकृत करा	सादरीकरण / परिसंवाद
आठवणे	विद्यार्थ्यांची आठवण करण्याची क्षमता (किंवा लक्षात ठेवणे)	व्याख्या करा किंवा आठवा	प्रश्नमंजुषा

विद्यार्थ्यांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

OBE लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांनी समान जबाबदारी घ्यावी. OBE प्रणालीतील विद्यार्थ्यांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे आहेत:

- प्रत्येक कोर्समध्ये युनिट सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक UO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक CO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक PO ची चांगली माहिती असावी.
- विद्यार्थ्यांनी योग्य चिंतन आणि कृतीसह गंभीर आणि वाजवी विचार केला पाहिजे.
- विद्यार्थ्यांचे शिक्षण व्यावहारिक आणि वास्तविक जीवनातील परिणामांशी जोडलेले आणि समाकलित केले पाहिजे.
- विद्यार्थी OBE च्या प्रत्येक स्तरावर त्यांची क्षमता जाणून घ्या.

अनुक्रमणिका

1 त्रिकोणमिती

घटक वैशिष्ट्ये

सादर घटक खालील विषयांवर सविस्तर चर्चा करते:

- कोनांची संकल्पना;
- अंशांमध्ये कोनांचे मापन;
- श्रेणी आणि रेडियन आणि त्यांचे रूपांतरण;
- संबध्द कोनांचे T-गुणोत्तर (पुराव्याशिवाय)

अधिक उत्सुकता आणि सृजनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी अनुप्रयोग आधारित प्रश्नांवर चर्चा केली आहे. मोठ्या प्रमाणात दिलेले दोन प्रकारात वर्गीकृत बहुपर्यायी प्रश्न तसेच लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न, याव्यतिरिक्त Bloom च्या वर्गीकरणानुसार खालची ते वरची पातळी या क्रमाने अनेक संख्यात्मक प्रश्नांचे स्वाध्याय, संदर्भ आणि सूचित वाचन अधिक सराव करण्यासाठी दिलेले आहेत. याव्यतिरिक्त, "अधिक जाणून घ्या" विभाग जोडला आहे. हा विभाग विचारपूर्वक आखला गेला आहे, जेणेकरून या भागातील पुरवलेली माहिती पुस्तक वापरकर्त्यांसाठी फायदेशीर ठरेल. हा विभाग प्रामुख्याने त्रिकोणमितीतील पुढील शिक्षण अणि अध्यापन शी संबंधित काही मनोरंजक तथ्य, मुख्य निरीक्षणावर आधारित विषयाच्या विकास चा इतिहास, विद्यार्थ्यांना त्रिकोणमिति शिकवण्यासाठी संघर्ष करण्याची संभावित कारणे, त्रिकोणमितीचा आवश्यक अभ्यास, त्रिकोणमिती वापरले जाणारे शिक्षण क्षेत्र हे सर्व त्रिकोणमिती शिकण्याची सर्वात सोपी पद्धत यांवर प्रकाश टाकणारा आहे. दुसरीकडे, सुचवलेले सूक्ष्म प्रकल्प आणि मेंदु-विचारमंथन आधारित प्रश्न या विषयात समाविष्ट असलेल्या विषयांसाठी जिज्ञासा आणि कुतूहल निर्माण करतात.

प्रस्तावना

त्रिकोणमिती मूळत: खगोलशास्त्राशी (astronomy) संबंधित समस्या सोडविण्यासाठी विकसित केली गेली होती, परंतु लवकरच जलपर्यटन (navigation), विज्ञान (science) आणि अभियांत्रिकीशी (engineering) संबंधित इतर क्षेत्रांमध्ये अनुप्रयोग (application) केले गेले. याचे बांधकाम-व्यावसायिक (builder), गृहशिल्पी (architects), सर्वेक्षणकर्ता (surveyor) आणि अभियंता (engineers) यांच्यासाठी खूप व्यावहारिक महत्त्व आहे आणि इतर बरेच अनुप्रयोग (applications) आहेत. स्थापत्य (Civil) आणि यांत्रिक (Mechanical) अभियंते (engineer) आघुर्ण (torque) आणि वस्तूवरील बलची (forces) गणना करण्यासाठी त्रिकोणमिती वापरतात. अभियंते बलचे (force) क्षैतिज (horizontal) आणि अनुलंब (vertical)

घटकांमध्ये (components) विघटन करून विश्लेषण करण्यासाठी त्रिकोणमिती वापरतात. विद्युतप्रवाहची (electrical current) निर्मिती किंवा अशाप्रकारचे कोन (angles), ज्यांना प्रत्यक्षपणे पाहणे अवघड आहे, करिता संगणकाचा (computer) उपयोग त्रिकोणमितीच्या मूलभूत नियमांवर (fundamental rules) अवलंबून असून ते योग्यरित्या कार्य करतात. कोणत्याही प्रश्नात कोन (angles) असल्यास त्रिकोणमितीचा वापर सहसा झाल्याशिवाय राहणार नाही.

पूर्व-आवश्यकता

- पायथागोरस प्रमेयाची ओळख
- त्रिकोणाच्या समरूप (congruence) आणि समानतेचे (similarity) मूलभूत ज्ञान
- त्रिकोण (triangle), चौरस (square) आणि आयतांच्या (rectangle) मूलभूत गुणधर्मांचे (properties) ज्ञान
- सोपी बीजगणित (algebra) आणि समीकरणे (equations) ची सहजता
- गणनयंत्रच्या (Calculator) वापरासह परिचित

घटक निष्पत्ती

या घटकाची निष्पत्ति खालीलप्रमाणे आहे:

U1-O1: दिलेल्या प्रश्नाचे निराकरण करण्यासाठी बेरीज (Sum) आणि घटक (factor) सूत्रांची संकल्पना वापरणे.

U1-O2: संबंधित प्रश्नाचे निराकरण करण्यासाठी विभाजित (sub-multiple) कोनची संकल्पना वापरणे.

U1-O3: दिलेल्या त्रिकोणमिती मूल्यांचा (trigonometric values) वापर करून समीकरणे सोडवणे.

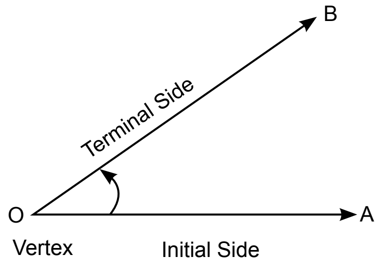
U1-O4: त्रिकोणमितीय फलचे (function) आलेखच्या (graph) समानांतर वास्तविक जीवनातील परिदृश्य-प्रकार (real-life scenarios) ओळखण्याचा अभ्यास करणे.

U1-O5: त्रिकोणमितीय फलचे (function) आलेखवरून भौमितीय (geometric) पध्दतीने अर्थउकल (Interpret) करणे.

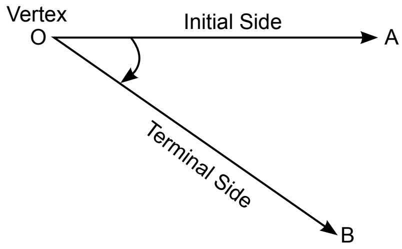
घटक-1 निष्पत्ती (UO)	विषय निष्पत्ती सह संभावित मानचित्रण (1-दुर्बल सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5	CO-6	CO-7
U1-O1	3	3	-	-	1	1	-
U1-O2	3	2	-	-	1	1	-
U1-O3	3	3	-	-	1	1	-
U1-O4	3	3	-	-	1	1	-
U1-O5	3	3	-	-	-	-	-

1.1 परिचय

कोन हा दिलेल्या किरणांच्या (rays) आरंभबिंदूला (vertex) फिरण्याचे (rotation) एक माप (measure) आहे. मूळ किरणला (initial ray) प्रारंभिक बाजू आणि या किरणाच्या फेरीनंतरच्या अंतिम स्थितीला कोनाची टर्मिनल (terminal) किरण म्हणतात. फिरण्याच्या बिंदूला शिरोबिंदू (vertex) म्हणतात.



आकृती 1.1: धन-कोन



आकृती 1.2: ऋण-कोन

मूळ किरणच्या फेरीची दिशा घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने असल्यास धन-कोन (positive angle) आणि फेरीची दिशा घड्याळाच्या दिशेने असल्यास ऋण-कोन (negative angle) असल्याचे म्हटले जाते. त्रिकोणमिती (Trionometry) हा शब्द 'Trigonon' आणि 'metron' या दोन ग्रीक शब्दामुळे बनलेला आहे.'Trigonon' या शब्दाचा अर्थ त्रिकोण आणि 'metron' चा अर्थ एक माप आहे. म्हणून त्रिकोणमिती शब्दाचा अर्थ त्रिकोणाच्या गुणधर्मांचा अभ्यास करणे आहे. यात कोन आणि लांबीचे मापन समाविष्ट आहे.

1.1.1 कोन मोजण्याची प्रणाली

कोन मोजण्यासाठी खालील प्रणाली आहेत:

1. शष्टिमान (Sexagesimal) किंवा इंग्रजी प्रणाली:

   $1 \text{ right angle} = 90 \text{ degree } (=90^\circ)$

   $1^\circ = 60 \text{ minutes } (=60')$

   $1' = 60 \text{ seconds } (=60'')$

2. शताब्दी (Centesimal) किंवा फ्रेंच प्रणाली:

   $1 \text{ right angle} = 100 \text{ grades } \left(=100^G\right)$

   $1 \text{ grade} = 100 \text{ minutes } (=100')$

   $1 \text{ minute} = 100 \text{ seconds } (=100'')$

1.1.2 कोनाच्या मोजमापाचे एकके

त्रिकोणमिती कोनांच्या मोजमापावर आधारित आहे. कोन मोजण्यासाठी तीन एकके (units) आहेत.

1. अंश (degree) 2. श्रेणी (grade) 3. रेडियन (radian)

1.1.2.1 अंश

कोन मोजण्यासाठी वापरला जाणारा एक सामान्य साधन म्हणजे कोनमापक (protractor). सर्वात साध्या कोनमापक मध्ये अर्ध-वर्तुळ चकती वर 0º to 180º पर्यंत अंश चिन्हीत केलेले आहे. Angle tool app केवळ Android वापरकर्त्यांसाठी उपलब्ध आहे.

1.1.2.2 श्रेणी

श्रेणी एक कोन मोजण्याचे एकक आहे. हे काटकोनाचा (right angle) शंभरावा भाग म्हणून परिभाषित केले आहे. म्हणजेच 90° अंशांमध्ये 100 श्रेणीभाग (gradients) आहेत. त्रिकोमितीमध्ये ग्रेडियन (gradian) ला 'gon' असेही म्हणतात.

1.1.2.3 रेडियन

परिघावरील (circumference) एकक लांबीने (unit lenght) एकक वर्तुळाच्या (unit circle) केंद्रस्थानी (centre) बनणाऱ्या आंतरित कोन (subtended angle) ला एक रेडियन म्हणतात. हे 1R द्वारे दर्शवितात.

1.1.3 कोनाच्या मोजमापांच्या तीन प्रणालींमधील संबंध

समजा, D = अंशाची संख्या,

R = रेडियनची संख्या आणि

G = θ कोनाच्या ग्रेडची संख्या असेल, तर $\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$

तक्ता 1.1: अंश - श्रेणी - रेडिअन मधील संबंध

$x^G = \left(\frac{9x}{10}\right)^D$	$x^D = \left(\frac{10x}{9}\right)^G$	$x^R = \left(\frac{180x}{p}\right)^D$
$x^G = \left(\frac{\pi x}{200}\right)^R$	$x^D = \left(\frac{\pi x}{180}\right)^R$	$x^R = \left(\frac{200x}{\pi}\right)^G$

*** लक्षात घेण्यासारखे महत्त्वाचे मुद्दे:**

a. π ची किंमत सुमारे 22/7 किंवा 3.14 आहे. ती 180 नाही. (π रेडिअन अंश)

b. कोनाचे मापन करण्याच्या तीन प्रणालीं दरम्यान हा आवश्यक संबंध आहे.

π radians = 180° ⇒ 1 radian = $\frac{180^\circ}{\pi}$ = 57°17'44.8" ≈ 57°17'45"

उदाहरण 1: कोनाच्या मोजमापाच्या उर्वरित दोन प्रणालींमध्ये (units) रूपांतरित करा.

(i) 30° (ii) 2^G (iii) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^R$

उत्तर:

(i) आपल्या माहितीनुसार $x^D = \left(\frac{10x}{9}\right)^G$

$$\therefore 30^0 = \left(\frac{10\times 30}{9}\right)^G = \left(\frac{300}{9}\right)^G \text{ आणि } 30^0 = \left(\frac{\pi\times 30}{180}\right)^R = \left(\frac{\pi}{6}\right)^R$$

(ii) आपल्या माहितीनुसार, $x^G = \left(\dfrac{9x}{10}\right)^D$

$$\therefore 2^G = \left(\frac{9\times 2}{10}\right)^D = (1.8)^D = 1°48'$$

आणि $x^G = \left(\dfrac{\pi x}{200}\right)^R$

$$\therefore 2^G = \left(\frac{\pi\times 2}{200}\right)^R = \left(\frac{\pi}{100}\right)^R$$

(iii) आपल्या माहितीनुसार, $x^R = \left(\dfrac{200x}{\pi}\right)^G$

$$\therefore \left(\frac{\pi}{3}\right)^R = \left(\frac{200\times\frac{\pi}{3}}{\pi}\right)^G = \left(\frac{200}{3}\right)^G$$

$$\therefore\ x^R = \left(\frac{180x}{\pi}\right)^D$$

$$\therefore \left(\frac{\pi}{3}\right)^R = \left(\frac{180\times\frac{\pi}{3}}{\pi}\right)^D = 60°$$

उदाहरण 2: 40°20' ला रेडियन मध्ये रुपांतरित करा.

उत्तर: आपल्या माहितीनुसार, 180° = π radian.

Hence, $40°20' = 40\frac{1}{3} degree = \frac{\pi}{180}\times\frac{121}{3} radian = \frac{121\pi}{540} radian$

उदाहरण 3: 6 रेडियन ला अंशमध्ये रुपांतरित करा.

उत्तर: आपल्या माहितीनुसार, π radian = 180°

Hence $6 radian = \frac{180}{\pi}\times 6 = \frac{1080\times 7}{22} degree = 343\frac{7}{11} degree = 343 + 7\times\frac{60}{11} minutes$. [as $1° = 60'$]

$$= 343° + 38' + \frac{2}{11} min$$

$$= 343° + 38' + \frac{2}{11}\times 60\, second = 343°38'11''$$ approximately

उदाहरण 4: खालीलपैकी कोणते संबंध बरोबर आहेत?

(a) $\sin 1 < \sin 1°$ (b) $\sin 1 > \sin 1°$ (c) $\sin 1 = \sin 1°$ (d) $\frac{\pi}{180} sin1 = sin1^{o}$

उत्तर:

(b) The true relation is $\sin 1 > \sin 1° as 1 Radian = 57° approximately$

Since value of $\sin\theta$ is increasing $\left[0 \to \frac{\pi}{2}\right]$.

1.2 संबद्ध कोनचे (ALLIED ANGLES) त्रिकोणमिती-गुणोत्तर (T-RATIO)

जेव्हा दोन कोनांची बेरीज किंवा वजाबाकी 0° किंवा 90° चा गुणक (multiple) असते, तेव्हा त्या कोनांना संबद्ध कोन म्हणतात.

तक्ता 1.2: संबद्ध कोनचे त्रिकोणमिती-गुणोत्तर

Allied Angles / Trignometric Ratios	sin θ	cos θ	tan θ
(–θ)	–sin θ	cos θ	–tan θ
$(90° - \theta)$ or $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	cos θ	sin θ	cot θ
$(90° + \theta)$ or $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$	cos θ	–sin θ	–cot θ
$(180° - \theta)$ or $(\pi - \theta)$	sin θ	–cos θ	–tan θ
$(180° + \theta)$ or $(\pi + \theta)$	–sin θ	–cos θ	tan θ
$(270° - \theta)$ or $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$	–cos θ	–sin θ	cot θ
$(270° + \theta)$ or $\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$	–cos θ	sin θ	–cot θ
$(360° - \theta)$ or $(2\pi - \theta)$	–sin θ	cos θ	–tan θ
$(360° + \theta)$ or $(2\pi + \theta)$	sin θ	cos θ	tan θ

तक्ता 1.3: विविध कोनचे त्रिकोणमिती-गुणोत्तर

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	−1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	−1	0	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

1.2.1 $(-\theta)$ चे T-गुणोत्तर

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$ $\qquad$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

1.2.2 $(90^\circ - \theta)$ चे T-गुणोत्तर

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$ $\qquad$ $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

$\sec(90^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}\theta$ $\qquad$ $\mathrm{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$

1.2.3 $(180^\circ - \theta)$ चे T-गुणोत्तर

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta,$ $\qquad$ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta,$ $\qquad$ $\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$

$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta,$ $\qquad$ $\mathrm{cosec}(180^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}\theta$

सर्वसाधारणपणे, संबद्ध कोनच्या T-गुणोत्तर साठी खालील नियम वापरा:

नियम 1: कोन θ लघुकोन (acute angle) असेल किंवा 360° (म्हणजे $2\pi^R$) च्या गुणक ने जास्त किंवा कमी केल्यास कोनाचे T-गुणोत्तर समान राहतील.

नियम 2: $-\theta, \pi \pm \theta, 2\pi \pm \theta, \ldots$ कोनचे T-गुणोत्तर सारखेच राहतील.

नियम 3: $\frac{\pi}{2} \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \pm \theta, \frac{5\pi}{2} \pm \theta \ldots$ कोनाचे T-गुणोत्तर खाली दिल्याप्रमाणे बदलतील.

$\sin \leftrightarrow \cos$ (sin changes to cos and vice versa)

$\tan \leftrightarrow \cot$

$\sec \leftrightarrow \mathrm{cosec}$

नियम 4: उजवी बाजूस (RHS) चिन्ह निश्चितीकरिता वापरा AllSTC.

"All students Take Care"(**AllSTC**)

All – सर्व T-गुणोत्तर धन

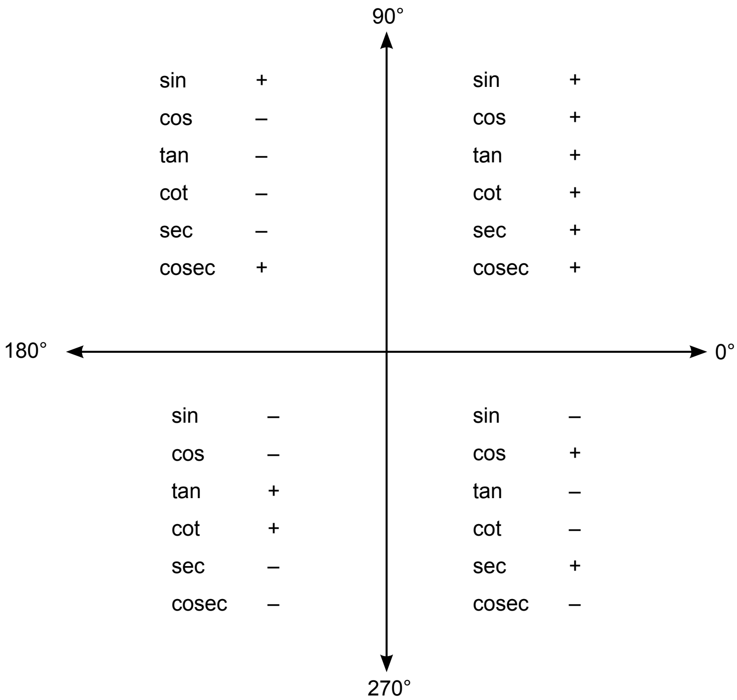
S – फक्त sin आणि cosec धन

T – फक्त tan आणि cot धन

C – फक्त cos आणि sec धन

सूत्र-1: दिलेल्या कोनाचा चरण (quadrant) शोधा.

सूत्र-2: T- Ratio चे चिन्ह धन (positive) किंवा ऋण (negative) असेल ते निश्चित करा.



आकृती 1.3: चिन्ह संकेत

उदाहरण 5: खालील T-Ratio ची किंमत काढा:

(i) $\sin 480^\circ$ (ii) $\tan(\pi + \theta)$ (iii) $sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$

उत्तर:

(i) $\sin(480^\circ) = \sin(450^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ {2^{nd} चरण आणि $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ स्वरूप

(ii) $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$ {3^{rd} चरण आणि $\pi + \theta$ स्वरूप

(iii) $sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$ {3^{rd} चरण आणि $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ स्वरूप

उदाहरण 6: खालील T-Ratio ची किंमत काढा:

(i) $cosec^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (ii) $cot\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

उत्तर:

(i) $cosec^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\left[cosec\frac{7\pi}{6}\right]^2$

$$=\left[cosec\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]^2=\left[-cosec\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^2$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$$

(ii) $cot\left(\frac{5\pi}{6}\right)=cot\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

उदाहरण 7: सिद्ध करा: $2sin^2\frac{3\pi}{4}+2cos^2\frac{\pi}{4}+sec^2\frac{\pi}{3}=6$

उत्तर:

डावी बाजू = $2sin^2\frac{3\pi}{4}+2cos^2\frac{\pi}{4}+sec^2\frac{\pi}{3}$

$$=2\left(sin\frac{3\pi}{4}\right)^2+2\left(cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(sec\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$=2\left(sin\frac{\pi}{4}\right)^2+2\left(cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(sec\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$\therefore sin\frac{3\pi}{4}=sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=sin\frac{\pi}{4}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(2)^2$$

= 1 + 1 + 4 = 6 = उजवी बाजू

उदाहरण 8: सिद्ध करा: $\tan 225^\circ \cot 405^\circ + \tan 1485^\circ \cot 315^\circ = 0$

उत्तर:

$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ)$

$= \tan 45^\circ$ {3^{rd} चरण आणि $\pi + \theta$ स्वरूप

$= 1$

त्याचप्रमाणे, cot 405° = cot (360° + 45°) = cot 45°= 1

tan 1485° = tan (1440° + 45°) (1440° = 4 × 360°)

= tan 45° = 1

cot 315° = cot (270° + 45°)

= − tan 45° = −1

डावी बाजू = tan225° cot405° + tan 1485° cot 315°

= (1) (1) + (1) (−1) = 1 − 1= 0 = उजवी बाजू

उदाहरण 9: सिद्ध करा:

$$\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\pi-\theta)}+\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cot(\pi+\theta)}+\frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sec(2\pi-\theta)}=3$$

उत्तर:

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \qquad \{\therefore \sin(-\theta=sin\,\theta\}$$

$$y=f(x)$$

$$\cos(\pi-\theta)=-cos\theta,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\cot(\pi+\theta)=cot\theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=sec\theta,$$

$$\sec(2\pi-\theta)=sec\theta$$

$$\text{डावी बाजू}=\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\pi-\theta)}+\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cot(\pi+\theta)}+\frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sec(2\pi-\theta)}$$

$$=\frac{-\cos(\theta)}{-\cos(\theta)}+\frac{\cot\theta}{\cot\theta}+\frac{sec\theta}{sec\theta}=1+1+1=3$$ = उजवी बाजू

उदाहरण 10: Δ PQR करिता, सिद्ध करा: sin (Q + R) = sin P

उत्तर: आपल्या माहितीनुसार, Δ PQR करिता,

m ∠ P + m ∠ Q + m ∠ R = 180° = π

∴ डावी बाजू = sin (Q + R)

= sin (π − P) = sin P = उजवी बाजू

1.3 बेरीज आणि वजाबाकी (SUM AND DIFFERENCE) सूत्र आणि त्यांचा अनुप्रयोग

1.3.1 बेरीज आणि वजाबाकी सूत्र

बेरीज सूत्र हा कोनांच्या बेरीजच्या T-ratio सोडविण्यास मदत करतो. त्रिकोणमितीमध्ये अडचण म्हणजे प्रश्नाचे सुलभ स्वरूपात रूपांतर करणे जे निराकरण करणे सोपे आहे. या परिस्थितीचे निराकरण करण्यासाठी योग आणि फरक सूत्रे महत्त्वपूर्ण भूमिका निभावतात.

1.3.2 त्रिकोणमितीमध्ये दोन कोनांचे बेरीज आणि वजाबाकी सूत्र

(1) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(2) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(3) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(4) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

(5) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(6) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

(7) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

(8) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(9) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$

(10) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

1.3.3 बेरीज आणि वजाबाकी सूत्राचे अनुप्रयोग

उदाहरण 11: किंमत काढा: *sin* 75°

उत्तर: आपल्या माहितीनुसार, sin (A + B) = sin A . cos B – cos A . sin B

$$\therefore sin75^\circ = sin\left(45^\circ+30^\circ\right)$$

$$=\sin 45^\circ.\cos 30^\circ+\cos 45^\circ.\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ {परिमेयन

उदाहरण 12: किंमत काढा: tan 15°

उत्तर: $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - tanB}{1 + tanAtanB}$

$\therefore$ tan 15° = tan (45° – 30°)

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

उदाहरण 13: सिद्ध करा: $\tan 57^\circ = \dfrac{cos12^\circ + sin12^\circ}{cos12^\circ - sin12^\circ}$

उत्तर: डावी बाजू = tan 57° = tan (45° + 12°)

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 12^\circ}{1 - \tan 45^\circ . \tan 12^\circ}$$

$$= \frac{1 + \tan 12^\circ}{1 - \tan 12^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}}{1 - \frac{\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}}$$

$$= \frac{\cos 12^\circ + \sin 12^\circ}{\cos 12^\circ - \sin 12^\circ}$$ = उजवी बाजू

उदाहरण 14: सिद्ध करा: tan 50° = tan 40° + 2 tan 10°

उत्तर: tan 50° = tan (40° + 10°)

$\therefore$ tan 50° – tan 50° tan 40° tan 10° = tan 40° + tan 10°

$\therefore$ tan 50° – cot 40° tan 40° tan 10° = tan 40° + tan 10°

$$\left\{\because \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \text{ and } \tan\theta\cdot\cot\theta=1\right.$$

$\therefore$ tan 50° – tan 10° = tan 40° – tan 10° ($\therefore$ tan θ + cot θ = 1)

$\therefore$ tan 50° = tan 40° + 2tan 10°

उदाहरण 15: किंमत काढा: $cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

उत्तर: $cos^2 A - sin^2 B = cos\left(A+B\right).cos\left(A-B\right)$

$$\therefore cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=cos\left[\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x\right].cos\left[\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+x\right]$$

$$= cos\left[\frac{2\pi}{4}\right].\cos\left[2x\right]$$

$$=0.cos2x \;=0$$

1.3.4 गुणन सूत्रांचे (product formulae) अनुप्रयोग

त्रिकोणमितीय राशीतील बेरीजचे गुणनमध्ये बदल हे बेरीज-गुणनसूत्रांद्वारे (sum to product formulae) खूप सहाय्यक ठरू शकते.

1.3.4.1 बेरीज किंवा फरकचे गुणनमध्ये (sum to product formulae) रूपांतरणाची सूत्रे

तक्ता 1.4: बेरीज आणि वजाबाकी चे गुणन सुत्रांमध्ये रूपांतर

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$	$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$	$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}p$ or $\cos C-\cos D=2\sin\frac{D+C}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

उदाहरण 16: सिद्ध करा: $\sin 65°+\cos 65°=\sqrt{2}\cos 20°$

उत्तर: डावी बाजू = $\sin 65°+\cos 65°$

$$=\sin 65°+\cos 25° \quad \left[\therefore \cos 65°=\cos\left(90°-25°\right)=\sin 25°\right]$$

$$= 2sin\left(\frac{65° + 25°}{2}\right).cos\left(\frac{65° - 25°}{2}\right)$$

$$= 2\sin 45°.cos20°$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2}.}\cos 20°$$

$= \sqrt{2}\cos 20°$ = उजवी बाजू

उदाहरण 17: सिद्ध करा $\cot 2\theta + tan\theta = cosec\,2\theta$

उत्तर: डावी बाजू = $\cot 2\theta + tan\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos 2\theta.\cos\theta + \sin 2\theta.sin\theta}{\sin 2\theta.cos\theta}$$

$$= \frac{cos(2\theta - \theta)}{\sin 2\theta.cos\theta} \quad [\because \cos A.\cos B + \sin A.\sin B = \cos(A - B)]$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin 2\theta.\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin 2\theta}$$

$= cosec2\theta$ = उजवी बाजू

उदाहरण 18: सिद्ध करा $\frac{sin(A-B)}{cosA.cosB} + \frac{sin(B-C)}{cos\,Bcos\,C} + \frac{sin(C-A)}{cos\,C\,cos\,A} = 0$

उत्तर: डाव्या बाजूतील पहिले पद

$$\frac{sin(A-B)}{cosA.cosB} = \frac{sin\,Acos\,B - cos\,A\,sinB}{cos\,A\,cos\,B}$$

$$= \frac{sin\,A\,cos\,B}{cos\,A\,cos\,B} - \frac{cos\,A\,sin\,B}{cos\,A\,cos\,B}$$

$$= tan\,A - tan\,B$$

त्याचप्रमाणे, $\frac{sin(B-C)}{cos\,Bcos\,C} = tan\,B - tan\,A$

आणि $\frac{sin(C-A)}{cos\,C\,cos\,A} = tanC - tan\,A$

आता, डावी बाजू = $\frac{sin(A-B)}{cosA.cosB} + \frac{sin(B-C)}{cos\,Bcos\,C} + \frac{sin(C-A)}{cos\,C\,cos\,A}$

$= tan\,A - tan\,B + tan\,B - tan\,A + tanC - tan\,A = 0$ = उजवी बाजू

उदाहरण 19: सोडवा: $sin\frac{7\pi}{12}.cos\frac{\pi}{4}-cos\frac{7\pi}{12}.sin\frac{\pi}{4}$

उत्तर: $sin\frac{7\pi}{12}.cos\frac{\pi}{4}-cos\frac{7\pi}{12}.sin\frac{\pi}{4}=sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\left[\sin A\cos B-\cos B.\sin A=\sin\left(A-B\right)\right]$$

$$=sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

उदाहरण 20: जर $3\cot A\cot B=1$, सिद्ध करा: $\cos(A-B)+2\cos\left(A+B\right)=0$

उत्तर: दिलेल्या माहितीनुसार

$$3\cot A\cot B=1,$$

$$\frac{3cos\,A.\cos B}{\sin A.\sin B}=1$$

$$=\frac{cos\,A.\cos B}{\sin A.\sin B}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\frac{cos\,A.\cos B+\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B-\sin A.\sin B}=\frac{1+3}{1-3}$$

$$=\frac{\cos(A-B)}{\cos\left(A+B\right)}=\frac{4}{-2}=-2$$

$$\therefore\cos(A-B)=-2\cos\left(A+B\right)$$

$$\therefore\cos(A-B)+2\cos\left(A+B\right)=0$$

1.3.4.2 गुणनची बेरीज किंवा फरकमध्ये (product to sum or difference) रूपांतरणाची सूत्रे

त्रिकोणमितीय राशीतील गुणनचे बेरीज किंवा फरकामध्ये बदल हे गुणन-बेरीज किंवा फरक सूत्रांद्वारे (product to sum formulae) खूप सहाय्यक असू शकते.

- $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$
- $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
- $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$
- $-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$ OR

  $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

वरील सूत्र लक्षात ठेवण्यासाठी शॉर्टकट,

तक्ता 1.5: गुणनची बेरीज किंवा फरकमध्ये रूपांतरणाची सूत्रे लक्षात ठेवण्यासाठी शॉर्टकट

2SC = S + S	2CC = C + C
2CS = S – S	–2SS = C – C

उदाहरण 21: सिद्ध करा: $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

उत्तर: डावी बाजू $= \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

$$= \frac{1}{2}(\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (2\sin 50^\circ \sin 10^\circ) \times \sin 70^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\left[cos(50^\circ - 10^\circ) - cos(50^\circ + 10^\circ)\right] \times \sin 70^\circ \qquad \left[2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[\cos 40^\circ - \cos 60^\circ\right] \times \sin 70^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[\cos 40^\circ - \frac{1}{2}\right] \times \sin 70^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \frac{1}{2}\sin 70^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{2}(2\sin 70^\circ . \cos 40^\circ) - \frac{1}{2}\sin 70^\circ\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left[\sin(70^\circ + 40^\circ) + \sin(70^\circ - 40^\circ)\right] - \frac{1}{2}\sin 70^\circ\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\{\sin 110^\circ + \sin 30^\circ - \sin 70^\circ\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\sin 70^\circ + \frac{1}{2} - \sin 70^\circ\right\} \qquad \{\because \sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ\}$$

$= \frac{1}{16} =$ उजवी बाजू

उदाहरण 22: सिद्ध करा: $2cos\frac{5\pi}{12}.cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$

उत्तर: डावी बाजू $= 2cos\frac{5\pi}{12}.cos\frac{\pi}{12}$

$$= cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) \qquad \{\because 2CC = C + C$$

$= cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} =$ उजवी बाजू

1.4 गुणित आणि विभाजित कोनचे T-गुणोत्तर

$$\left(2A, 3A, \frac{A}{2}\right)$$

आम्हाला माहित आहे की जेव्हा गुणित आणि विभाजित कोन ऐवजी एकच कोन असतो तेव्हा गणना करणे सोपे होते. गुणित आणि विभाजित कोनांसाठी विविध नित्यसमीकरण (identities) सूत्रे आहेत. ही नित्यसमीकरण गुंतागुंतीच्या त्रिकोणमितीय समीकरणांच्या निराकरणात उपयुक्त आहे. हे नकारात्मक कोनांचे T-ratio शोधण्यासाठी देखील उपयुक्त आहेत. या भागात आम्ही गुणित आणि विभाजित -कोनात t-ratio समजणार आहोत.

1.4.1 2A चे T-गुणोत्तर

$$sin2A = 2sinA.cosA = \frac{2tan\,A}{1+tan^2 A}$$

$$\cos 2A = cos^2 A - sin^2 A = 2cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2sin^2 A = \frac{2tan\,A}{1+tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}, where A \neq (2n+1)\frac{\pi}{4}$$

1.4.2 3A चे T-गुणोत्तर

$$sin3A = 3sin\,A - 4sin^3 A$$

$$cos3A = 4cos^3 A - 3cos\,A$$

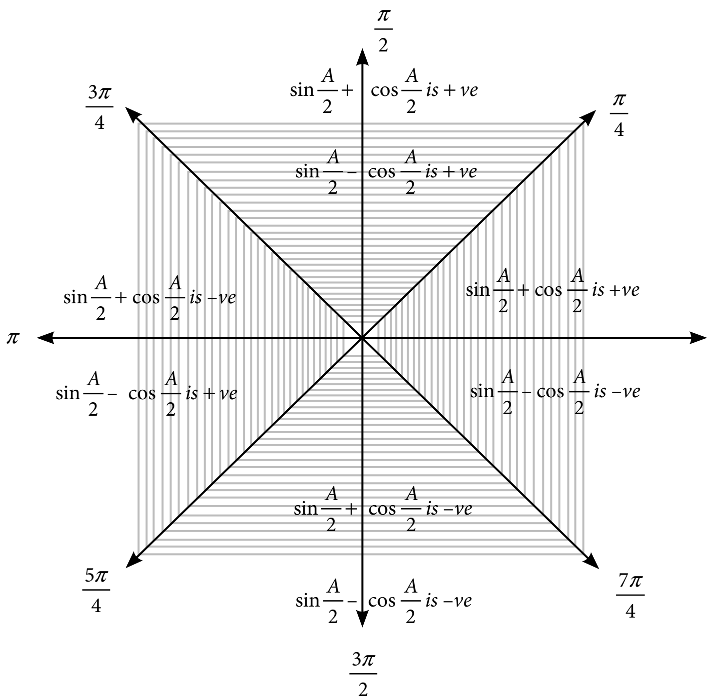
$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}, \text{ where } A \neq (2n+1)\frac{\pi}{6}$$

1.4.3 (A/2) चे T-गुणोत्तर

तक्ता 1.6: (A/2) चे T-गुणोत्तर

$sinA = 2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2} = \frac{2tan\frac{A}{2}}{1+tan^2\frac{A}{2}}$
$cosA = cos^2\frac{A}{2} - sin^2\frac{A}{2} = 2cos^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-tan^2\frac{A}{2}}{1+tan^2\frac{A}{2}}$
$tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$

$tanA = \dfrac{2tan\dfrac{A}{2}}{1-tan^2\dfrac{A}{2}}$
$\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{\tan^2 A+1}-1}{\tan A} = \tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$
$\cot\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$



आकृती 1.4: कोनाच्या त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचे चतुर्थांश $\dfrac{A}{2}$

उदाहरण 23: सिद्ध करा: $\dfrac{sin2\theta}{1+cos\,2\theta} = tan\theta$

उत्तर: डावी बाजू $= \dfrac{sin2\theta}{1+cos\,2\theta} = \dfrac{2sin\,\theta cos\theta}{1+2cos^2\theta-1}$

$$= \frac{2sin\,\theta cos\theta}{2cos^2\theta} = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = tan\theta$$ = उजवी बाजू

उदाहरण 24: सिद्ध करा: $\dfrac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}=tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$

उत्तर: डावी बाजू $=\dfrac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}=\dfrac{1+\dfrac{2tan\theta}{1+tan^2\theta}}{1-\dfrac{2tan\theta}{1+tan^2\theta}}$

$$=\frac{\dfrac{1+tan^2\theta+2tan\theta}{1+tan^2\theta}}{\dfrac{1+tan^2\theta-2tan\theta}{1+tan^2\theta}}=\frac{1+tan^2\theta+2tan\theta}{1+tan^2\theta-2tan\theta}$$

$$=\frac{(1+\tan\theta)^2}{(1-\tan\theta)^2}=\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)^2$$

$$=\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^2=tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$ = उजवी बाजू

उदाहरण 25: सिद्ध करा: $\dfrac{1+\sin 2A-\cos 2A}{1+\sin 2A+\cos 2A}=\tan A$

उत्तर: डावी बाजू $=\dfrac{1+\sin 2A-\cos 2A}{1+\sin 2A+\cos 2A}$

$$=\frac{1+2\sin A cos\,A-\left(1-2sin^2A\right)}{1+2\sin A cosA+\left(2cos^2A-1\right)}$$

$$=\frac{1+2\sin A cos\,A-1+2sin^2A}{1+2\sin A cosA+2cos^2A-1}$$

$$=\frac{2\sin A cos\,A+2sin^2A}{2\sin A cosA+2cos^2A}$$

$$=\frac{2\sin A\left(cos\,A+sinA\right)}{2\cos A\left(cos\,A+sinA\right)}$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$$ = उजवी बाजू

उदाहरण 26: सिद्ध करा: $\dfrac{\sin 3\theta-\sin\theta}{\cos 3\theta+\cos\theta}=\tan\theta$

उत्तर: डावी बाजू $=\dfrac{\sin 3\theta-\sin\theta}{\cos 3\theta+\cos\theta}$

$$= \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta - \sin\theta}{4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta - 4\sin^3\theta}{4\cos^3\theta - 2\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta(1 - 4\sin^2\theta)}{2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos 2\theta}{2\cos\theta\cos 2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$ = उजवी बाजू

उदाहरण 27: सिद्ध करा: $\cos 6A = 32\cos^6 A - 48\cos^4 A + 18\cos^6 A - 1$

उत्तर: डावी बाजू $= \cos 6A$

$$= 2\cos^2 3A - 1 \quad \left[\because \cos 2A = 2\cos^2 A - 1\right]$$

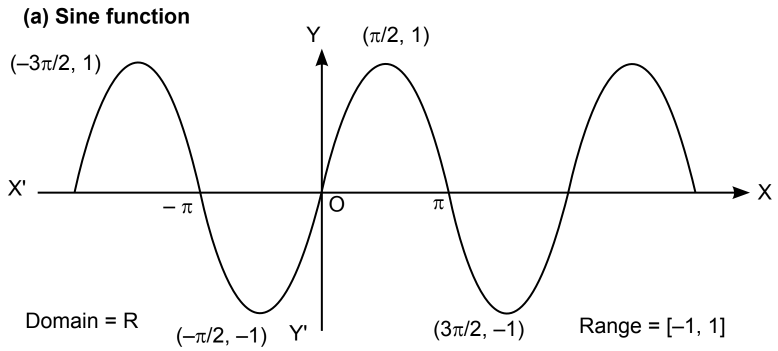
$$= 2\left(4\cos^3 A - 3\cos A\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(16\cos^6 A - 24\cos^4 A + 9\cos^2 A\right) - 13$$

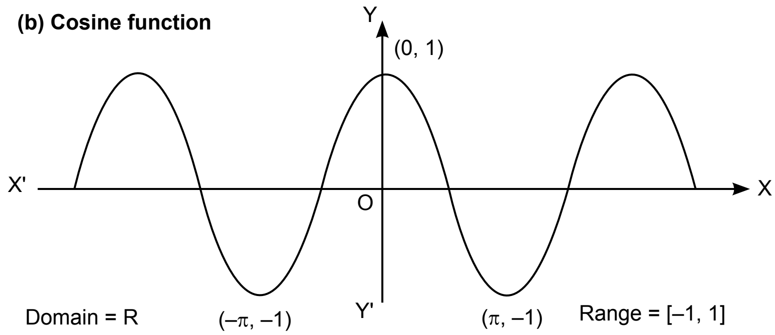
$$= 32\cos^6 A - 48\cos^4 A + 18\cos^2 A - 1$$ = उजवी बाजू

1.5 $\sin x, \cos x, \tan x, e^x$ फलचे आलेख

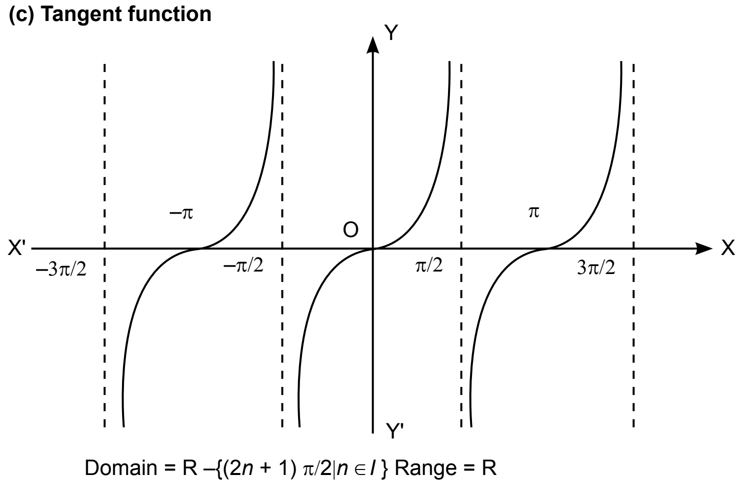
फलचा आलेख हा बहुधा फल (function) चा सहसंबंध सहृश्य बनवण्यासाठी आणि गणितीय राशी (mathematical expression) तील फल (function) हाताळण्यासाठी साठी उपयोगी ठरतो ज्यामुळे फलच्या गुणधर्मांवर (properties) प्रकाश पडतो. फल (function) राशी (expression) म्हणून सादर केल्यास बरीच महत्त्वपूर्ण घटना मॉडेल ठरू शकतात.



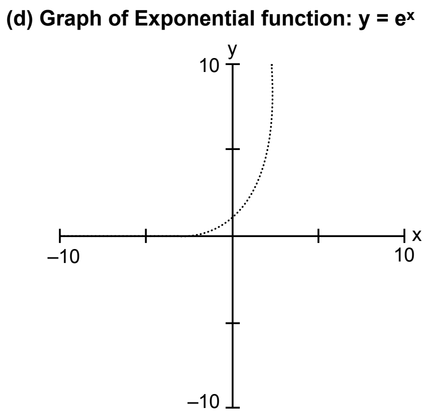
आकृती 1.5: sine फल चा आलेख



आकृती 1.6: cosine फल चा आलेख



आकृती 1.7: tangent फल चा आलेख



आकृती 1.8: घातांक फल e^x चा आलेख

उदाहरण 28: $y = sinx\left(-90° < x < 90°\right)$ चा आलेख काढा.

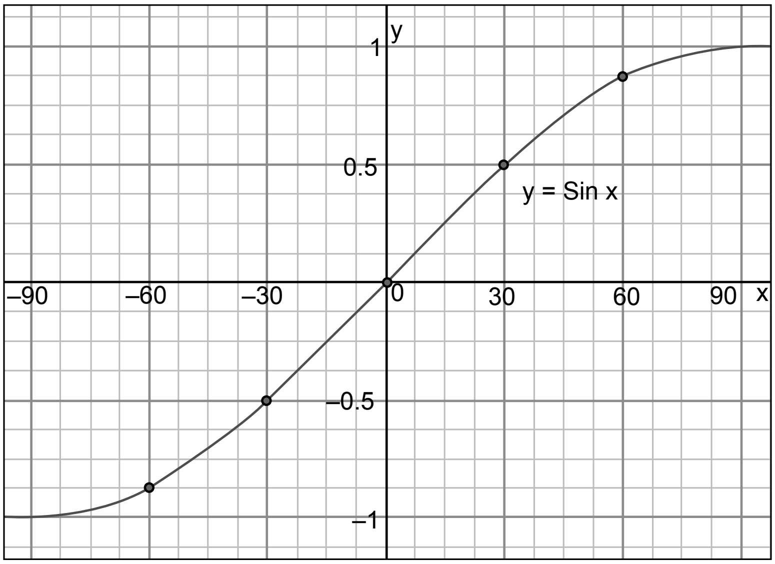
उत्तर: येथे y = sin x आणि – 90° ते 90° वरून x ची मूल्ये निवडावी लागतील.

Let, $x = -60°$ then $y = \sin(-60°) = -\sin(60°)$ $= -0.86$

त्याचप्रमाणे दिलेल्या अंतराने x च्या मूल्यांच्या संदर्भात y ची मूल्ये शोधा.आता खालील तक्ता तयार करा आणि आलेख कागदावर बिंदू plot करा. आता सर्व बिंदूंना मुक्तहस्ताने जोडा. हा आलेख खालीलप्रमाणे आहे.

तक्ता 1.7: (–90° ≤ x ≤ 90°) करिता sin x ची किंमत

X	–60°	–30°	0°	30°	60°
sinx	-0.86	-0.5	0	0.5	0.86



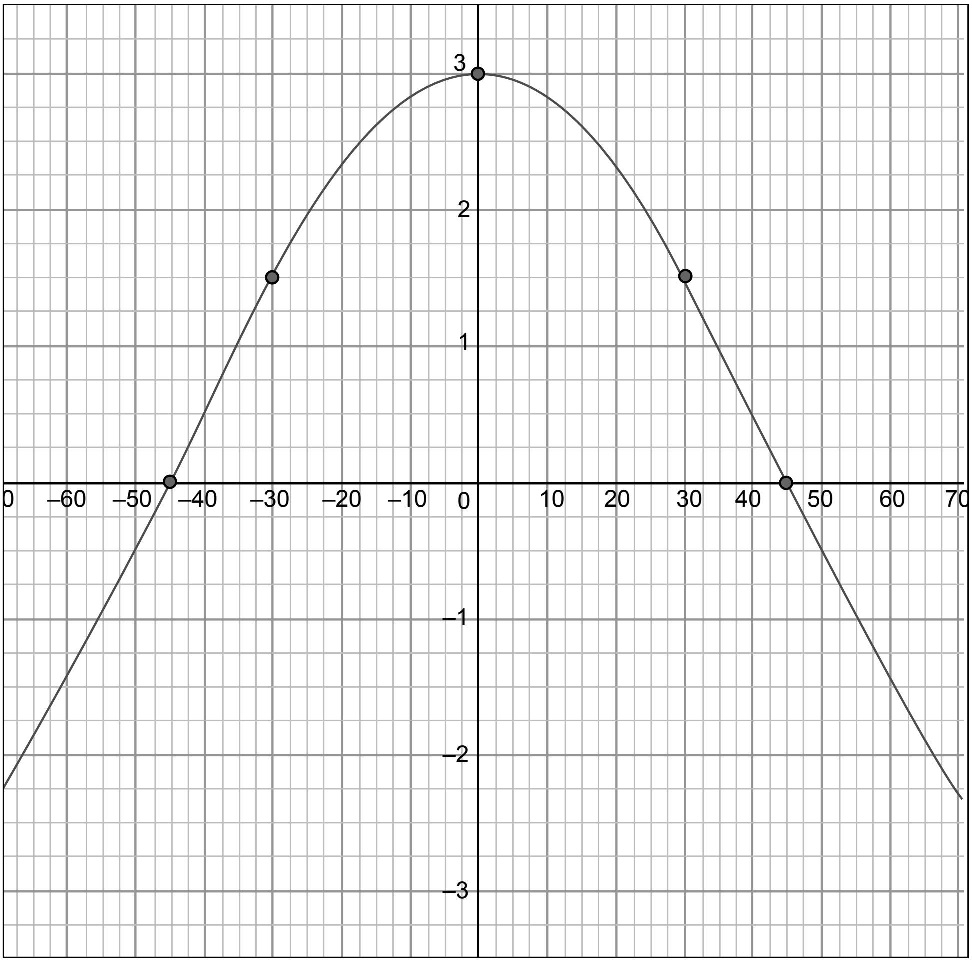
आकृती 1.9: y = sin x चा आलेख $\left(-90° \le x \le 90°\right)$

उदाहरण 29: $y = 3\cos 2x$ $\left(-\pi/4 \le x \le \pi/4\right)$ चा आलेख काढा.

उत्तर:

तक्ता 1.8: (–π/4 ≤ x ≤ π/4) करिता sin x ची किंमत

X	–45°	–30°	0°	30°	45°
Y = 3cos2x	0	-1.5	3	1.5	0



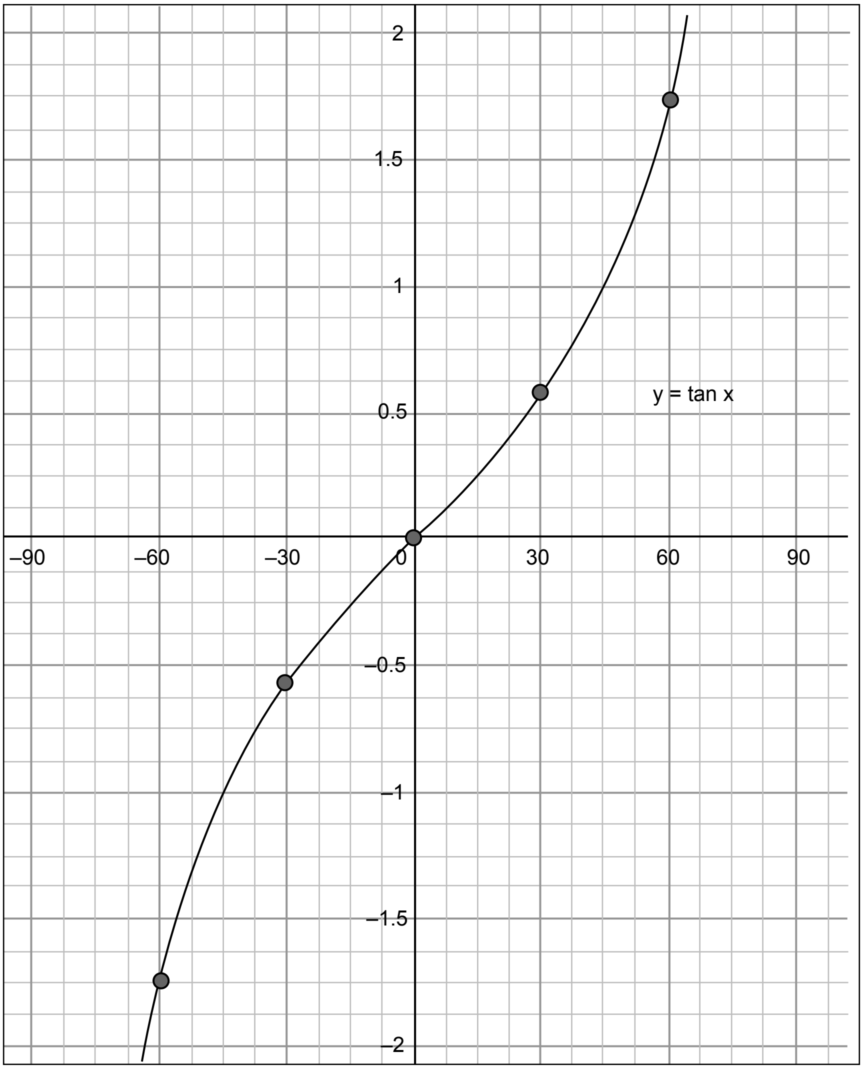
आकृती 1.10: y = 3 cos2x चा आलेख $\left(-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$

उदाहरण 30: $y = \tan x$ चा आलेख काढा.

उत्तर:

तक्ता 1.9: $(-60° \le x \le 60°)$ करिता tan x ची किंमत

X	–60°	–30°	0°	30°	60°
Tan x	–1.73	–0.58	0	0.58	1.73



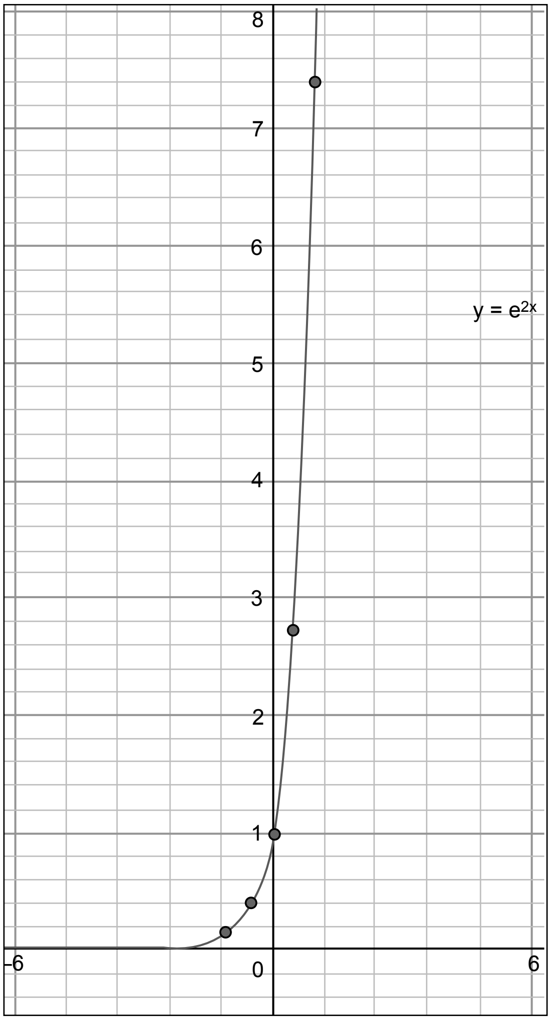
आकृती 1.11: y = tan x चा आलेख

उदाहरण 31: $y = e^{2x}$ चा आलेख काढा.

उत्तर:

तक्ता 1.10: $(-1^\circ \le x \le 1)$ करिता $y = e^{2x}$ ची किंमत

X	–1	–1/2	0	1/2	1
e^{2x}	0.1	0.4	1	2.8	7.4



आकृती 1.12: $y = e^{2x}$ चा आलेख

अनुप्रयोग (APPLICATION) (वास्तविक जीवन/औद्योगिक)

विमानाचा उड्डाण मार्ग

विमानाच्या हालचालीसाठी त्रिकोणमितीचा अनुप्रयोग: असे समजा की, विमान समुद्र पातळीवर (sea level) असलेल्या त्याच्या निर्गमन बिंदूपासून (departure point) सातत्याने 200 अंशच्या अचल-कोनातून (constant angle) समुद्रपातळीपासून 29,580 फूट उंच मार्गक्रमण उच्चतावर (cruise altitude) चढतो.

प्रश्न 1: विमानाच्या निर्गमन बिंदूपासून मार्गक्रमण उच्चतापर्यंतचे अंतर किती आहे?

प्रश्न 2: निर्गमन बिंदूवरून त्याच्या मार्गक्रमण उच्चतावर जाताना विमानाने प्रवास केलेले भू-अंतर (ground distance) किती आहे?

कलते प्रतल (inclined plane)

आपण पौंड वजन उचलण्यासाठी कलते प्रतल (inclined plane) वापरतो. कलते प्रतलचा एक टोक जमिनीवर आणि दुसरा टोक जमिनीपासून 4 फूट उंच पृष्ठभागांवर टेकला आहे.

प्रश्न 3: समजा कललेल्या प्रतलची (inclined plane) लांबी 12 फूट आहे. प्रतलचे जमिनीपासूनचे कोन निश्चित करा?

सर्वेक्षण (Surveying)

स्थापत्य अभियांत्रिकीचे (Civil Engineering) आणखी एक क्षेत्र आहे, सर्वेक्षण. विशेषतः, एखाद्या वन परिक्षेत्रला लागलेल्या आगीचा सामना करण्यास मदत करण्यासाठी त्रिकोणमितीचा उपयोग करता येईल. समजा, हिलटॉप लुकआउटच्या (Hilltop Lookout) अति दक्षिणेस (due South) अग्निरक्षकने (fire guard) आग लागल्याचे पाहिले. हिलटॉप लुकआउट स्थानाच्या अति पूर्वेस (due East) 11 मैलांच्या अंतरावर संरक्षण मनोरा (watch tower) वर दुसरा अग्निरक्षक पहाऱ्यावर (on duty) आहे. हा दुसरा पहारेकरी त्याच आगीला पाहतो आणि उत्तरेकडून 2150 कोन मोजतो.

प्रश्न 4: हिलटॉप लुकआउट स्थानापासून आग किती दूर आहे?

घटक सारांश

या प्रकरण मध्ये पहिला विभाग कोन संकल्पना, विविध मापमधील कोनांचे मोजमाप आणि त्यांचे रूपांतरण शी संबंधित आहे. दुसऱ्या आणि तिसऱ्या विभागात संबध्द कोनांचे T-ratio, बेरीज, फरक सूत्रे आणि त्यांचे अनुप्रयोग, गुणन सूत्र, गुणन सूत्रांचे बदल, गुणन सूत्रांची बेरीज, फरक आणि त्याउलट (vice-versa), गुणित आणि विभाजित कोन (multiple and sub-multiple angles) चे T-ratio आहेत. चतुर्थ विभाग sin x, cos x, tan x आणि e^x चे आलेखशी संबंधित आहे.

प्रत्येक विभागात सुधारित ब्लूमच्या वर्गीकरणानुसार वाढत्या अडचणींच्या पातळीवर उदाहरणे दिली आहेत, सराव करण्यासाठी प्रश्नावली प्रदान करताना समान नमुना अवलंबला आहे. एक मनोरंजक तथ्य म्हणून काही मुक्त प्रश्नांचा (open problems) समावेश केला आहे. कारण तोंडी प्रश्न मुख्य परिभाषा आणि संकल्पनांच्या वैचारिक आकलनाचे मूल्यांकन करण्यास मदत करतात. दुसरीकडे बीजगणित प्रश्नावली विद्यार्थ्यांना बीजगणितीय संकल्पना लागू करण्यास मदत करतात. आलेखीय प्रश्न विद्यार्थ्यांची आलेख समजण्याची किंवा तयार करण्याची क्षमतेचे मूल्यांकन करतात. संख्यात्मक प्रश्नासाठी विद्यार्थ्यांना गणना करणे आवश्यक असते. वास्तविक जागतिक अनुप्रयोग (Real-World Applications) वास्तववादी समस्येची परिस्थिती सादर करतात.

स्वाध्याय

बहुपर्यायी प्रश्न

1. जर x च्या वास्तविक किंमत करिता $x, \cos\theta = x + \dfrac{1}{x}$, तर

(a) θ लघु कोन आहे

(b) θ काटकोन आहे

(c) θ विशालकोन आहे

(d) θ ची किंमत काढू शकत नाही

2. अयोग्य विधान निवडा:

(a) $\sin\theta = -\frac{1}{5}$ (b) $\cos\theta = 1$

(c) $\sec\theta = \frac{1}{2}$ (d) $\tan\theta = 20$

3. $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ हे समीकरण तेव्हाच शक्य आहे, जेव्हा

(a) $x = y$ (b) $x < y$

(c) $x > y$ (d) यां पैकी नाही

4. जर $\sin\theta + \mathrm{cosec}\,\theta = 2$, तर $\sin^{10}\theta + \mathrm{cosec}^{10}\theta$ ची किंमत आहे,

(a) 10 (b) 2^{10}

(c) 2^9 (d) 2

5. जर $\sin\theta = \frac{24}{25}$ आणि θ हा व्दितीय चरणात आहे, तर $\sec\theta + \tan\theta =$

(a) − 3 (b) − 5

(c) − 7 (d) − 9

6. जर θ हा व्दितीय चरणात आहे तर, $\sqrt{\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)}$ ची किंमत आहे,

(a) $2\sec\theta$ (b) $-2\sec\theta$

(c) $2\mathrm{cosec}\,\theta$ (d) यां पैकी नाही

7. जर $\tan\theta + \sec\theta = e^x$, तर $\cos\theta$ बरोबर

(a) $\frac{(e^x + e^{-x})}{2}$ (b) $\frac{2}{(e^x + e^{-x})}$

(c) $\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$ (d) $\frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$

8. $\cos A + \sin(270° + A) - \sin(270° - A) + \cos(180° + A) =$

(a) − 1 (b) 0

(c) 1 (d) यां पैकी नाही

9. जर $x = y\cos\frac{2\pi}{3} = z\cos\frac{4\pi}{3}$, तर $xy + yz + zx =$

(a) − 1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

10. $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ =$

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$

11. $\tan 75^\circ - \cot 75^\circ =$

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $2+\sqrt{3}$

(c) $2-\sqrt{3}$ (d) यां पैकी नाही

12. $\dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} =$

(a) $\tan(A-B)$ (b) $\tan(A+B)$

(c) $\cot(A-B)$ (d) $\cot(A+B)$

13. $\cos 12^\circ + \cos 84^\circ + \cos 156^\circ + \cos 132^\circ$ ची किंमत आहे

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1

(c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{8}$

14. $\cos 52^\circ + \cos 68^\circ + \cos 172^\circ$ ची किंमत आहे

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

15. $\dfrac{\cos 17^\circ + \sin 17^\circ}{\cos 17^\circ - \sin 17^\circ} =$

(a) $\tan 62^\circ$ (b) $\tan 56^\circ$

(c) $\tan 54^\circ$ (d) $\tan 73^\circ$

16. $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15} =$

(a) 1/2 (b) 1/4

(c) 1/8 (d) 1/16

17. $\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{5\pi}{12}$ ची किंमत आहे

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{3+\sqrt{3}}$

18. $\sin\frac{\pi}{16}\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}\sin\frac{7\pi}{16}$ ची किंमत आहे

(a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

(c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

19. $\cos^2 76° + \cos^2 16° - \cos 76° \cos 16° =$

(a) – 1/4 (b) 1/2

(c) 0 (d) 3/4

20. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} =$

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{8}$

21. $\frac{\tan 70° - \tan 20°}{\tan 50°}$ ची किंमत आहे.

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 0

22. $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + 120°) + \cos^2(\alpha - 120°)$ ची किंमत आहे.

(a) 3/2 (b) 1

(c) 1/2 (d) 0

23. $\tan 20° + 2\tan 50° - \tan 70°$ ची किंमत आहे.

(a) 1 (b) 0

(c) tan 50° (d) यां पैकी नाही

24. जर $\cos(A - B) = \frac{3}{5}$ आणि $\tan A \tan B = 2$, तर

(a) $\cos A \cos B = \frac{1}{5}$ (b) $\sin A \sin B = -\frac{2}{5}$

(c) $\cos A \cos B = -\frac{1}{5}$ (d) $\sin A \sin B = -\frac{1}{5}$

25. $\sin 12° \sin 48° \sin 54° =$

(a) 1/16 (b) 1/32

(c) 1/8 (d) 1/4

26. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}=$

(a) 1/16 (b) 0

(c) – 1/8 (d) −1/16

27. $\frac{\cos 12^\circ-\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ+\sin 12^\circ}+\frac{\sin 147^\circ}{\cos 147^\circ}=$

(a) 1 (b) – 1

(c) 0 (d) यां पैकी नाही

28. $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ =$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) $\sqrt{3}/2$

29. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$

(a) 1/2 (b) 1/4

(c) 1/6 (d) 1/8

30. $\sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 108^\circ \sin 144^\circ =$

(a) 1/4 (b) 1/16

(c) 3/4 (d) 5/16

31. जर $\sec\theta=1\frac{1}{4}$, तर $\tan\frac{\theta}{2}=$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{5}{4}$

32. जर $\tan\frac{A}{2}=\frac{3}{2}$, तर $\frac{1+\cos A}{1-\cos A}=$

(a) −5 (b) 5

(c) $\frac{9}{4}$ (d) $\frac{4}{9}$

33. जर $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, तर $\tan 3A=$

(a) 0 (b) 1/2

(c) 1 (d) ∞

34. $\sin 4\theta$ ला असं लिहिता येईल

(a) $4\sin\theta\left(1-2\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (b) $2\sin\theta\cos\theta\sin^2\theta$

(c) $4\sin\theta-6\sin^3\theta$ (d) यां पैकी नाही

35. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\cdot\dfrac{\cos A}{1+\cos A}=$

(a) $\tan\dfrac{A}{2}$ (b) $\cot\dfrac{A}{2}$

(c) $\sec\dfrac{A}{2}$ (d) $\operatorname{cosec}\dfrac{A}{2}$

36. $\dfrac{1}{\tan 3A-\tan A}-\dfrac{1}{\cot 3A-\cot A}=$

(a) $\tan A$ (b) $\tan 2A$

(c) $\cot A$ (d) $\cot 2A$

37. $\operatorname{cosec} A-2\cot 2A\cos A=$

(a) $2\sin A$ (b) $\sec A$

(c) $2\cos A\cot A$ (d) यां पैकी नाही

38. जर $\cos 3\theta=\alpha\cos\theta+\beta\cos^3\theta$, तर $(\alpha,\beta)=$

(a) $(3,4)$ (b) $(4,3)$

(c) $(-3,4)$ (d) $(3,-4)$

39. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=$

(a) $4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ (b) $4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(c) $4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (d) $4\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

40. जर $\tan x=\dfrac{b}{a}$, तर $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}=$

(a) $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (b) $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(c) $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (d) $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$

41. $1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=$

(a) $\cos 2\theta$ (b) $-\cos 2\theta$

(c) $\sin 2\theta$ (d) $-\sin 2\theta$

42. $\frac{\sin 3A-\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{\cos A+\cos(\pi+3A)}=$

(a) $\tan A$ (b) $\cot A$

(c) $\tan 2A$ (d) $\cot 2A$

43. जर $\tan A=\frac{1}{2}$, तर $\tan 3A=$

(a) $\frac{9}{2}$ (b) $\frac{11}{2}$

(c) $\frac{7}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

44. जेव्हा x द्वितीय चरण मध्ये असेल, $\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}=$

(a) $\sin\frac{x}{2}$ (b) $\tan\frac{x}{2}$

(c) $\sec\frac{x}{2}$ (d) $\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$

45. $(\sec 2A+1)\sec^2 A=$

(a) $\sec A$ (b) $2\sec A$

(c) $\sec 2A$ (d) $2\sec 2A$

उत्तरे - बहुपर्यायी प्रश्न									
1.	d	**2.**	c	**3.**	a	**4.**	d	**5.**	c
6.	b	**7.**	b	**8.**	b	**9.**	b	**10.**	b
11.	a	**12.**	b	**13.**	c	**14.**	a	**15.**	a
16.	d	**17.**	a	**18.**	b	**19.**	d	**20.**	d
21.	b	**22.**	a	**23.**	b	**24.**	a	**25.**	c
26.	d	**27.**	c	**28.**	c	**29.**	d	**30.**	d
31.	a	**32.**	d	**33.**	d	**34.**	a	**35.**	a
36.	d	**37.**	a	**38.**	c	**39.**	a	**40.**	b
41.	d	**42.**	d	**43.**	b	**44.**	b	**45.**	d

लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. खालील कोनातून मोजलेल्या उर्वरित दोन युनिटमध्ये रुपांतरित करा:

(i) $60°$ (ii) 3^G

(iii) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^R$

2. खालील कोनांना रेडियन मध्ये रूपांतरित करा:

(i) $660°$ (ii) $-270°$

(iii) $1440°$ (iv) $0°$

3. खालील कोनांना डिग्री मध्ये रूपांतरित करा:

(i) 17π (ii) $\frac{9\pi}{2}$

(iii) $\frac{82\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{3}$

4. T-ratio ची किंमत काढा:

(i) $\sec(-2025°)$ (ii) $\cos(-5\pi+\theta)$

(iii) $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

5. सोडवा: $\tan\frac{\pi}{20}\cdot\tan\frac{3\pi}{20}\cdot\tan\frac{5\pi}{20}\cdot\tan\frac{7\pi}{20}\cdot\tan\frac{9\pi}{20}$

6. चक्रीय चतुर्भुज ABCD मध्ये, सिद्ध करा:
$\cos(180°-A)-\sin(90°+B)+\cos(180°+C)-\sin(90°+D)=0$

7. सिद्ध करा: $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cot(\pi-\theta)}+\frac{\sin(\pi+\theta)}{\sin(2\pi-\theta)}+\frac{\cos(2\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=3$

8. सिद्ध करा: $\tan 660°\cot 1320°+\cot 390°\tan 210°=0$

9. सिद्ध करा: $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

10. किंमत काढा:

(i) $\cot 75^0$ (ii) $\tan\left(\frac{25\pi}{2}\right)$

11. सिद्ध करा: $\cos\theta = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin\theta$

12. सिद्ध करा: $\tan 56^\circ = \frac{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ}{\cos 11^\circ - \sin 11^\circ}$

13. सिद्ध करा: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)} = \cos(\alpha-\gamma)+(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)$

14. सिद्ध करा: $\sin\left[(n+1)x\right]\cdot\sin\left[(n+2)x\right]\cdot\sin\left[(n+3)x\right]\cdot\sin\left[(n+4)x\right] = \cos x$

15. ΔABC मध्ये, सिद्ध करा: $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

16. सिद्ध करा:

(i) $\frac{\sin 5A - \sin 3A}{\cos 5A + \cos 3A} = \frac{1}{\cot A}$ (ii) $\frac{\cos 7A + \cos 5A}{\sin 7A - \sin 5A} = \cot A$

17. सिद्ध करा: $\frac{\sin 8\theta \cos\theta - \cos 3\theta \sin 6\theta}{\cos 2\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$

18. सिद्ध करा: $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

19. सिद्ध करा: $\tan A + \cot A = 2\cos ec 2A$ यावरून सिद्ध करा: $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = 4$

20. किंमत काढा: $\tan\frac{\pi}{8}$

21. सिद्ध करा: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}} = 2\cos\theta$.

22. सिद्ध करा: $\sin A \sin(60^\circ + A)\sin(60^\circ - A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

23. सिद्ध करा: $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$

24. सिद्ध करा: $\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \pm\sin\theta$

25. जर $\tan\theta = \frac{1}{3}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ सिद्ध करा: $10\sin\theta + 15\cos\theta - 18 = 0$

26. सिद्ध करा: $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$

27. आलेख काढा:

(i) $y = \sin x \left(0 \le x \le 2\pi\right)$ (ii) $y = 2\cos x \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

28. आलेख काढा. $y = 3\sin\frac{x}{2}\left(-2\pi < x < 2\pi\right)$

29. आलेख काढा. $y = \tan 2x$

30. आलेख काढा. $y = e^{2x}$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. (i) $66.666...G, \left(\frac{\pi}{3}\right)^R$ (ii) $(2.7)^0, \left(\frac{3\pi}{200}\right)^R$ (iii) $30°, 33.333...G$

2. (i) $\frac{11\pi}{3}$ (ii) $-\frac{3\pi}{2}$ (iii) 8π (iv) 0

3. (i) 3060° (ii) 810° (iii) 2460° (iv) 60°

4. (i) $-\sqrt{2}$ (ii) $-\cos\theta$ (iii) $-\sqrt{3}$

5. 1

10. (i) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

20. $\sqrt{2}-1$

अधिक जाणून घ्या

- त्रिकोणमिती विषयी स्वारस्यपूर्ण तथ्ये.
- विद्यार्थ्यांना त्रिकोणमिती शिकविण्याची संभाव्य कारणे.
- विद्यार्थ्यांना त्रिकोणमितीचा अभ्यास करण्यास का आवडेल?
- त्रिकोणमिति अभ्यासण्याची आवश्यकता का आहे?
- शिक्षण क्षेत्र ज्यामध्ये त्रिकोणमिती वापरली जाते.
- कलन (calculus) मध्ये त्रिकोणमितीचा अनुप्रयोग.
- विद्यार्थ्यांसाठी वर्ग अधिक मनोरंजक बनविणे.
- त्रिकोणमिती शिकण्याचा सोपा मार्ग.

More on Indian Maths

- त्रिकोणमितीचा शोध का लावला गेला?
- अंतर्ज्ञानाने त्रिकोणमिती शिकणे.
- त्रिकोणमिती सोपी बनवणे.

लघु प्रकल्प

1. गुणित (multiple) आणि विभाजित (sub-multiple) त्रिकोणमितीय फलचे (function) सूत्र दर्शविणारे तक्ता तयार करा.
2. दिलेल्या फल (function) करिता सीमा (limit) च्या अस्तित्वासाठी (existance) आलेखीय आराखडा (graphical representation) तयार करा.

चौकसपणा आणि जिज्ञासासाठी प्रश्न

1. 25 फूट उंच असलेल्या इमारतीच्या शिखराला 40 फूट लांब तिरपी शिडी (leaning ladder) लावलेली आहे. क्षैतिजसह (horizontal) शिडीने बनणारा कोन निश्चित करा. शिडीच्या पायथ्यापासून इमारतीपर्यंतचे अंतर देखील निर्धारित करा.
2. एक सरळ पायवाट (straight trail) पासून मयूर हॉटेल 7,000 फूट उंचीवर आहे. तिथून पायवाटच्या 13,100 फूट लांबीवर निसर्गरम्य स्थळ (scenic overlook) 10,100 फूट उंचीवर आहे. नति (उतार) कोन (angle of inclination) α चे मूल्य अंशांमध्ये काय आहे? रेडियनमध्ये α चे मूल्य काय आहे?
3. एक प्रकाश किरण (ray of light) 1.100 अपवर्तक सूचकांक (index of refraction) असलेल्या एक माध्यमातून (media) 1.270 अपवर्तक सूचकांक असलेल्या दुसऱ्या माध्यमकडे जाते. जिथे दोन माध्यमांचे आंतरपृष्ठ (interface of two medium) छेदतात, तो किरणांचा आपतीत कोन (angle of incidence) 140° आहे. परिस्थितीची भूमिती रेखाटा आणि अपवर्तन कोनाचे (angle of refraction) मूल्य निश्चित करा.
4. वर्क टेबलवर उचलयान (pick-up) आणि भाग (parts) ठेवण्यासाठी एक बाजू जोडलेला प्रतलीय-यंत्रमानवचा (one-link planar robot) वापर केला जाऊ शकतो. या यंत्रमानवचा एक बाजू (arm) टेबलवर एका टोकाला जोडलेला आहे. कामाच्या जागेवर फिरण्यासाठी दुसरी बाजू मोकळी (free) आहे. $L = 4$ सेमी असल्यास, यंत्रमानवचे स्थान रेखाटा आणि θ च्या पुढील मूल्यांसाठी बिंदू $P(x, y)$ चे निर्देशांक (x, y) निश्चित करा:

   (i) $\theta = 40°$, (ii) $2\pi/3$ rad,

   (iii) $\theta = -10°$, (iv) $\theta = -3\pi/4$ rad

वरील प्रश्नांव्यतिरिक्त, त्रिकोणमितीचा उपयोग घराच्या छतासाठी, वैयक्तिक बंगल्यांच्या छताला कल (inclined roof) देण्यासाठी आणि इमारतींमध्ये छताची उंची काढणे इत्यादींसाठी वापरला जाऊ शकतो. नौदल (naval) आणि विमानचालन (aviation) उद्योग, नकाशा-रेखन (cartography) तसेच उपग्रह प्रणालींमध्ये त्रिकोणमितीचे अनुप्रयोग आहेत.

संदर्भ आणि सूचित वाचन

1. E. Krezig, Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition, Wiley, 2015.
2. H. K. Das, Advanced Engineering Mathematics, S. Chand & Co, New Delhi, 2007.
3. B. S. Grewal, *Higher Engineering Mathematics,* Khanna Publication, New Delhi ,2015.
4. S. S. Sastry, *Engineering Mathematics, Volume 1*, PHI Learning, New Delhi, 2009.
5. Alan Jeffrey, Advanced *Engineering Mathematics,* Harcourt/Academic Press, 2002, USA.
6. M.P. Trivedi and P.Y. Trivedi, Consider Dimension and Replace Pi, Notion Press, 2018.
7. www.scilab.org/ -SCI Lab
8. www.easycalculation.com
9. https://grafeq.en.downloadastro.com/- Graph Eq^n 2.13
10. https://www.geogebra.org- Geo Gebra

2 फल आणि सीमा

घटक वैशिष्ट्ये

सादर घटक खालील विषयांवर सविस्तर चर्चा करते:

- फलची व्याख्या;
- फलचा आलेख;
- फलची संकल्पना;
- चार मानक फल.

अधिक उत्सुकता आणि सृजनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी अनुप्रयोग आधारित प्रश्नांवर चर्चा केली आहे.

मोठ्या प्रमाणात दिलेले दोन प्रकारात वर्गीकृत बहुपर्यायी प्रश्न तसेच लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न, याव्यतिरिक्त Bloom च्या वर्गीकरणानुसार खालची ते वरची पातळी या क्रमाने अनेक संख्यात्मक प्रश्नांचे स्वाध्याय, संदर्भ आणि सूचित वाचन अधिक सराव करण्यासाठी दिलेले आहेत.

याव्यतिरिक्त, "अधिक जाणून घ्या" विभाग जोडला आहे. हा विभाग विचारपूर्वक आखला गेला आहे, जेणेकरून या भागातील पुरवलेली माहिती पुस्तक वापरकर्त्यांसाठी फायदेशीर ठरेल.

हा विभाग प्रामुख्याने फल आणि सीमा तील पुढील शिक्षण अणि अध्यापन शी संबंधित काही मनोरंजक तथ्य, मुख्य निरीक्षणावर आधारित विषयाच्या विकास चा इतिहास, कलनचा ऐतिहासिक मार्ग, सीमा आणि आलेखांची भूमिका, कलनमध्ये कोणत्या सीमा वापरल्या जातात?, फल आणि सीमा जाणून घेण्याचा सर्वात सोपा मार्ग, कलनचा शोध का लावला गेला?, सीमा कमी क्लिष्ट बनवणे, विवेचनात्मक विचार शिकवणे यांवर प्रकाश टाकणारा आहे.

दुसरीकडे, सुचवलेले लघु प्रकल्प आणि मेंदु-विचारमंथन आधारित प्रश्न या विषयात समाविष्ट असलेल्या विषयांसाठी जिज्ञासा आणि कुतूहल निर्माण करतात.

प्रस्तावना

गणिताच्या बाबतीत वास्तविक जगाचे वर्णन करण्यासाठी फल (functions) ही प्रमुख साधने आहेत. एका बिंदूवरील वक्र उतार (slope of curve at a point), बदलाचा दर (rates of change), वक्र अंतर्गत क्षेत्र (area under curve), संख्यांचे संचय (accumulations of quantities), फलचे वर्तन दर्शविण्याचे साधन म्हणून व्युत्पन्नचा (derivative) वापर

होतो. फलची संकल्पना स्पष्टपणे समजणे आणि फल-चिन्हसह (function notations) परिचित असणे कलन (calculus) अभ्यासासाठी महत्वाचे आहे. फल (function) आणि आलेख हा संबंध बारकाईने समजण्यासाठी, बिंदू रचून तयार केलेले आलेख आणि नमुन्यांचा अभ्यास करू शकतो. एक आलेखीय गणनयंत्र (graphing calculator) वेगाने आलेख तयार करू शकतो.
वास्तविक संख्या प्रणाली (real number system) आणि त्यातील वैशिष्ट्ये समजण्यासाठी सीमा (limit) संकल्पना आवश्यक आहे. एका अर्थाने वास्तविक संख्या (real numbers) ही परिमेय संख्येच्या (rational numbers) अभिसरण क्रमांची (converging sequence) सीमा म्हणून परिभाषित केली जाऊ शकते. अनंत (infinity) वर सीमा एखाद्या फलच्या शेवटच्या वर्तनाचे वर्णन (end behaviour of function) करण्यासाठी उपयुक्त आहेत.
सीमा व्युत्पन्न (derivative) मोजण्यासाठी उपयुक्त आहेत. व्युत्पन्नची गणना प्रवाह किंवा बदलाचा दर (rate of flow or change) या संकल्पनांच्या (concepts) आधारे केली जाऊ शकते. संकलक (integrals) किंवा क्षेत्रफळ च्या राशी (expressions of areas) मोजण्यासाठी देखील सीमा चा वापर होतो. संकलक मध्ये (integrals) प्रदेशाच्या संपूर्ण भागातील (entire area of a region) लहान-लहान तुकड्यांची बेरीज करून त्यांची गणना करते. सीमा (limit) देखील पुनरावृत्ती (iterative) प्रक्रियेचा एक भाग आहे. काही यशस्वी पुनरावृत्ती सैद्धांतिकदृष्ट्या (theoretically) नेमक्या (exact) मूल्याजवळ येऊ शकतात.

पूर्व-आवश्यकता

घातांकीय (exponential) व लॉगॅरिदमीक (logarithmic) फल यांचे ज्ञान.

- गणनयंत्रच्या (calculator) वापरासह परिचित
- प्राथमिक संच सिद्धांताची (elementary set theory) ओळख.
- बीजगणित तंत्राची ओळख.
- बीजगणितीय राशी (algebraic expression) आणि बीजगणितीय अपूर्णांक (algebraic fraction) सोडविण्यासाठी मूलभूत कौशल्ये.
- कंस (brackets) विस्तार.
- रेषीय (linear) आणि वर्गरूपीय (quadratic) राशी (expression) चे घटक बनवणे (factorizing).
- रेखीय समीकरणे आणि असमानता (linear equations and inqualities) सोडवणे.
- वर्गरूपीय समीकरणांचे निराकरणसाठी घटकीकरण (factoring), वर्ग पूर्ण (completing square) करणे, आणि द्विघाती सूत्र (quadratic formula) वापरणे.
- अनेकवर्णी रेषीय समीकरणे (simultaneous linear equations) सोडवणे.
- प्रतिस्थापन (substitution).

घटक निष्पत्ती

U2-O1: संगतता (correpondence) फल (function) आहे की नाही ते ठरवणे.

U2-O2: दिलेली फल (functions) चे आलेख (graph) काढणे आणि भूमितीय वर्तनाचा (geometrical behaviour) अर्थ लावणे.

U2-O3: स्वतंत्र चल (independant variable) काही मर्यादित मूल्य (finite value) किंवा अनंत (infinity) कडे जात असल्यास फलची सीमा (limit) मोजणे.

U2-O4: सीमा (limit) च्या माहितीद्वारे फल आणि त्यांचे आलेखचे विश्लेषण करणे.

U2-O5: दिलेल्या विशिष्ट फल (standard form) ची गणना करण्यासाठी सीमा (limit) ची संकल्पना वापरणे.

घटक-2 निष्पत्ती (UO)	विषय निष्पत्ती सह संभावित मानचित्रण (1-दुर्बल सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5	CO-6	CO-7
U2-O1	-	-	1	2	2	1	-
U2-O2	-	-	1	2	3	1	-
U2-O3	-	-	2	3	1	1	-
U2-O4	-	-	3	1	2	1	-
U2-O5	-	-	3	2	-	1	-

2.1 फल

2.1.1 फल ची व्याख्या

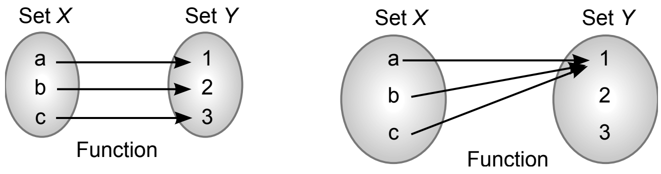
फलची कल्पना ही गणितातील सर्वात महत्वाची संकल्पना आहे. सरळ भाषेत, फल हा दोन संच (sets) मधील संगततेचा (correpondence) एक विशेष प्रकार आहे. प्रतिचित्रण (mapping) च्या संकल्पनेच्या मदतीने फल सहजपणे परिभाषित केले जाऊ शकते. X आणि Y हे दोन रिक्त संच आहेत. “X ते Y पर्यंतचे फल म्हणजे संच X च्या प्रत्येक घटकाकरिता संच Y चा एक आणि फक्त एकच घटक असणे हा नियम (rule) किंवा संगतता (correpondence) आहे.” संगतता (correpondence) ‘f’ असेल मग गणितात आपण लिहितो

$f: X \rightarrow Y$ जेथे $y = f(x), x \in X$ आणि $y \in Y$. आणि असे म्हणतो की करिता, ‘y’ ही ‘x’ ची प्रतिमा (image) आहे, किंवा x ही y ची पूर्व प्रतिमा (pre-image) आहे.

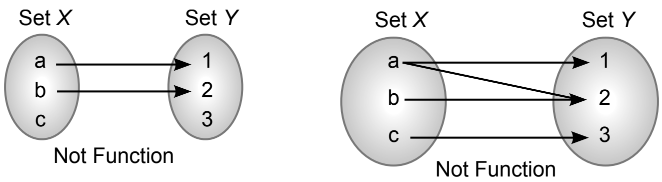
दोन गोष्टी नेहमी लक्षात घेतल्या पाहिजेत:

(i) संच X मधील प्रत्येक घटक (element) करिता संच Y मध्ये प्रतिमा घटक (image element) आहे तर अशा प्रतिचित्रण (mapping) फल असल्याचे म्हटले जाते तसेच जर संच Y मध्ये काही घटक (element) आहेत जे संच X मधील कोणत्याही घटकाची (element) प्रतिमा (image) नसतील तरीसुद्धा प्रतिचित्रणला (mapping) फल (function) असल्याचे म्हटले जाते.

(ii) संच X मधील प्रत्येक घटकाची एक आणि फक्त एकच प्रतिमा असावी. याचा अर्थ असा आहे की संच X मधील विशिष्ट घटकासाठी एकापेक्षा जास्त प्रतिमा असणे अशक्य आहे. फल बहुमूल्य (multi-valued) असू शकत नाहीत. बहुमूल्य (multi-valued) प्रतिचित्रणला (mapping) X आणि Y मधील संबंध (relation) म्हणतात.



आकृती 2.1: फल



आकृती 2.2: फल नाही

उदाहरण 1: खाली दिलेली प्रत्येक संबंधची (relation) तपासणी करा आणि प्रत्येक प्रकारात ते फल (function) आहेत की नाही हे सकारण स्पष्ट करा.

(i) R = {(2,1), (3,1), (4,2)},

(ii) R = {(2,2), (2,4), (3,3), (4,4)}

(iii) R = {(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7)}

उत्तर:

(i) 2, 3, 4 हे R चे घटक (element) आहेत ज्यांचे एकमेव प्रतिमा (unique images) आहेत, म्हणून R हे संबंध एक फल (function) आहे.

(ii) 2 हा पहिला घटक (element) दोन भिन्न प्रतिमा 2 आणि 4 शी संबंधित असल्याने, हे संबंध (relation) फल (function) नाही.

(iii) प्रत्येक घटकाची एक आणि एकच प्रतिमा असते, म्हणून हे संबंध फल (function) आहे.

उदाहरण 2: समजा हा नैसर्गिक संख्येचा संच असेल. हे f(x) = 2x + 1 ने परिभाषित केलेले वास्तविक मूल्य फल (real valued function) आहे. या परिभाषेवरून ची किंमत काढा.

उत्तर:

$$f(1) = (2 \times 1) + 1 = 3$$

$$f(2) = (2 \times 2) + 1 = 5$$

$$f(1) = (2 \times 3) + 1 = 7$$

उदाहरण 3: जर $f(x) = \begin{cases} x^2; x < 0 \\ x; 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x}; x > 1 \end{cases}$ किंमत काढा $f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(-2), f(2)$

उत्तर: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$f(-2)=(-2)^2=4$

$f(2)=\frac{1}{2}$

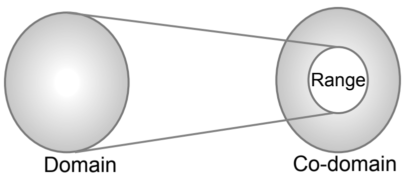
2.1.2 अधिक्षेत्र (Domain), सहप्रांत (co-domain) आणि फल ची व्याप्ती

जर फल 'f' संच A मधून संच B साठी $f:A\to B$ ने परिभाषित केली असेल तर संच A ला फल f चे अधिक्षेत्र (Domain) म्हटले जाते आणि संच B ला फंक्शनचे सहप्रांत (co-domain) म्हणतात. संच A च्या घटकांच्या सर्व f-प्रतिमांच्या संचाला फल ची व्याप्ती (range of function) म्हटले जाते.

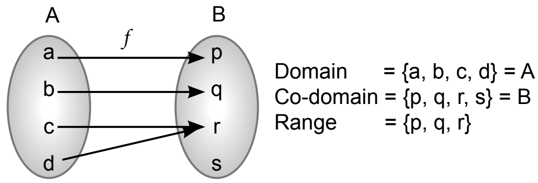
दुसऱ्या शब्दांत, आम्ही म्हणू शकतो.

अधिक्षेत्र (Domain) = x ची सर्व संभाव्य मूल्ये ज्यासाठी f(x)विद्यमान आहेत. (D_f द्वारे दर्शविले)

व्याप्ती (range) = x च्या सर्व मूल्यांसाठी, f(x) ची सर्व संभाव्य मूल्ये. (R_f द्वारे दर्शविले)



आकृती 2.3: अधिक्षेत्र आणि सहप्रांत



आकृती 2.4: अधिक्षेत्र, सहप्रांत आणि व्याप्ति

अधिक्षेत्र (Domain) आणि फल ची व्याप्ती (range of function) शोधण्याच्या पद्धती:

(i) अधिक्षेत्र

(a) सममूळ अंतर्गत राशी (expressions under even root) (म्हणजेच वर्गमूळ, चतुर्थ मूळ, इ.) ≥ 0. भाजक (denominator) $\neq 0$.

जर $y=f(x)$ आणि $y=g(x)$ चे अधिक्षेत्र अनुक्रमे D_1 आणि D_2 हे आहेत तर

$f(x)\pm g(x)$ किंवा $f(x).g(x)$ चे अधिक्षेत्र $D_1\cap D_2$. असतात

तसेच $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ चे अधिक्षेत्र $D_1\cap D_2-\{g(x)=0\}$. आहे.

$\left(\sqrt{f(x)}\right)$ चे अधिक्षेत्र $D_1\cap\{x:f(x)\geq 0\}$ आहे.

(ii) व्याप्ती: y = f (x) चे व्याप्ती ही अधिक्षेत्र (Domain) मधील प्रत्येक वास्तविक संख्येशी संबंधित f(x) मधील सर्व प्रतिमा घटकचा (image element) संग्रह आहे.

(a) अधिक्षेत्र (Domain) मध्ये मर्यादीत बिंदूंचा समावेश असल्यास व्याप्ती (range) ही संबंधित f(x) मधील मूल्यांचा संच आहे.

(b) अधिक्षेत्र मध्ये मर्यादित मध्यांतर असल्यास, एकस्वरीयता (monotonicity) वापरून व्याप्ती (range) साठी कमीतकमी (least) आणि सर्वात मोठे (greatest) मूल्य शोधतात.

उदाहरण 4: Find the domain of the function $f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$

उत्तर: $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$

f हे फल x = 4 आणि x = 1 वगळता सर्व वास्तविक संख्येसाठी परिभाषित केले आहे. f चे अधिक्षेत्र आहे, R – {1, 4}.

उदाहरण 5: $f(x)=\sqrt{(x-1)}$ ने परिभाषित केलेल्या वास्तविक फल f चे अधिक्षेत्र (domain) व व्याप्ती (range) शोधा..

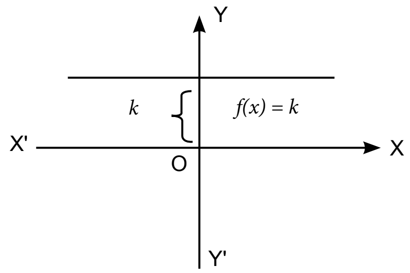
उत्तर: Clearly $f(x)$ is defined when $x-1\geq 0$ or $x\geq 1$ ie Domain of f is $x\in[1,\infty)$ Clearly Range will be $[0,\infty)$.

2.1.3 काही विशिष्ट अधिक्षेत्र (domain), व्याप्ती (range) व आलेख (graph)

अचल फल

More on Function

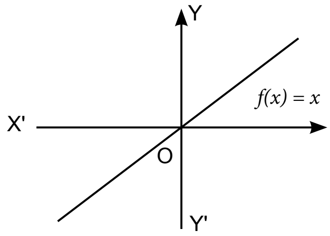
समजा k ही अचल वास्तविक संख्या (constant real number) आहे, तर सर्व $x\in R$ करिता दिलेली फल f(x) = k ला अचल फल म्हणतात. अचल फल f(x) = k चे अधिक्षेत्र म्हणजे वास्तविक संख्यांचा संपूर्ण संच (complete set of real numbers) आणि व्याप्ती (range) एकेरी संच(singleton set) {k} असते. अचल फल चा आलेख आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे x- अक्षाला समांतर सरळ रेषा k च्या धनात्मक किंवा ऋणात्मकतेनुसार x-अक्षाच्या वर किंवा खाली असते. जर k = 0 असेल तर सरळ रेषा x-अक्षासह जुळेल.



आकृती 2.5: अचल फल चा आलेख

अविकारक फल

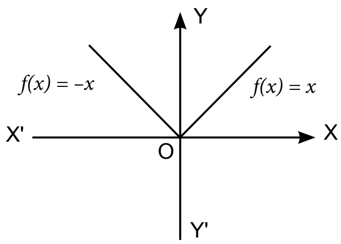
सर्व $x\in R$ करिता f(x) = x ने परिभाषित केलेले फल ला अविकारक फल (identity function) असे म्हणतात. स्पष्टपणे, अविकारक फल चे अधिक्षेत्र व व्याप्ती R आहे. अविकारक फल चा आलेख एक मूळ सरळ रेषा आहे, जी आरंभबिंदू (origin) आणि x-अक्षाच्या सकारात्मक दिशेने 45° मधून जाते.



आकृती 2.6: अविकारक फल चा आलेख

मापांक फल

$f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{when} x \geq 0 \\ -x, \text{when} x < 0 \end{cases}$ ने परिभाषित केलेले फल ला मापांक फल (modulus function) असे म्हणतात. मापांक फल चे अधिक्षेत्र म्हणजे सर्व वास्तविक संख्येचा संच (set of real numbers) R असतो आणि व्याप्ती ही सर्व अ-ऋणात्मक (non-negative) वास्तविक (real) संख्यांचा संच आहे.

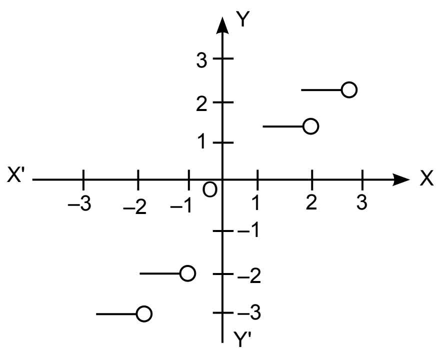


आकृती 2.7: मापांक फंक्शनचा आलेख

सर्वात मोठे पूर्णांक फल

समजा $f(x)=[x]$, जेथे सर्वात मोठे पूर्णांक (greatest integer) x पेक्षा कमी किंवा त्याच्या बरोबरीने दर्शविले आहे. अधिक्षेत्र R आहे आणि व्याप्ती I आहे. उदा. [1.1] = 1, [2.2] = 2, [− 0.9]= −1, [− 2.1]= − 3 इ.

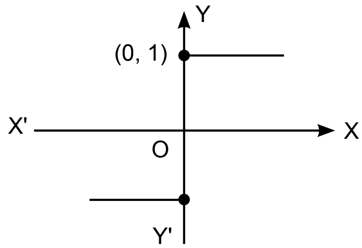
सर्व $x \in R$ साठी $f(x)=[x]$ ने परिभाषित फल f ला सर्वात मोठा पूर्णांक फल (Greatest integer function) असे म्हणतात.



आकृती 2.8: सर्वात मोठ्या पूर्णांक फल चा आलेख

चिन्ह फल

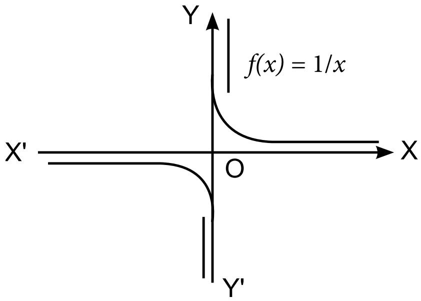
$f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ किंवा $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ फल द्वारे परिभाषित केलेले फल ला चिन्ह फल (Signum function) असे म्हणतात. अधिक्षेत्र R आहे आणि व्याप्ती संच $\{-1, 0, 1\}$ आहे.



आकृती 2.9: चिन्ह फल चा आलेख

परस्पर फल

प्रत्येक शून्येतर वास्तविक (non-zero real) संख्या x ला $\frac{1}{x}$ या परस्परसंबंधात (reciprocal) जोडण्याच्या फल ला परस्पर फल (Reciprocal function) म्हणतात. पारस्परिक फल चे अधिक्षेत्र आणि व्याप्ती दोन्ही $R-\{0\}$ म्हणजेच सर्व शून्येतर वास्तविक संख्यांचा संच आहे. आलेख दाखवल्याप्रमाणे आहे.



आकृती 2.10: परस्पर फल चा आलेख

घातांकीय फल

समजा $a\neq 1$ धनात्मक वास्तविक संख्या आहे. तर $f(x)=a^x$ द्वारे परिभाषित $f:R\to(0,\infty)$ फल ला घातांकीय फल (Exponential function) म्हणतात. त्याचे अधिक्षेत्र R आणि व्याप्ती $(0,\infty)$ आहे.

लॉगॅरिथमिक फल

Logarithmic function: The notation ln x is used to denote the natural logarithm of a real number x, the functions ln and Log is $log_e x$, the logarithm of x to the base e. When working with functions of a complex variable the notation Log z, with z = $re^{i\theta}$ becomes Log z = ln r + iθ.

लॉगॅरिदमचे गुणधर्म

समजा m आणि n कोणत्याही धनात्मक संख्या अशा आहेत की $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$, तर

(1) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

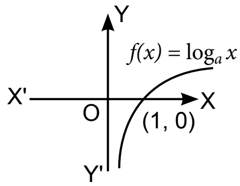
(2) $\log_a b.\log_b a = 1 \Rightarrow. \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

(3) $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

(4) $\log_a \left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(5) $\log_a m^n = n \log_a m$

(6) $a^{\log_a m} = m$



Graph of $f(x) = \log_a x$, when $a > 1$

आकृती 2.11: लॉगरिदम फलचा आलेख

सम फल

जर सर्व $x \in D_f$ करिता $f(-x) = f(x)$ असेल तर फल ‘f’ ला सम फल (Even Function) म्हणतात.

विषम फल

जर सर्व $x \in D_f$ करिता $f(-x) = -f(x)$ असेल तर फल ‘f’ ला विषम फल (Odd Function) म्हणतात.

अंतराल

कोणत्याही दोन वास्तविक संख्यांमधील (real numbers) संख्यांच्या संचाला अंतराल (Interval) म्हणतात.

(a) **संवृत अंतराल:**

$[a,b] = \{x, a \le x \le b\}$

(b) **विवृत अंतराल:**

(a,b) or $]a,b[= \{x, a < x < b\}$

(c) **अर्ध-विवृत किंवा अर्ध-संवृत अंतराल:**

$[a,b[$ or $[a,b) = \{x; a \le x < b\}$

$]a,b]$ or $(a,b] = \{x; a < x \le b\}$

Graph of a Function

2.2 फल ची सीमा

कधीकधी काही फल (function) असे असतात की ज्यामध्ये चल (variable) च्या विशिष्ट मूल्यांशी (particular value) संबंधित निश्चित मूल्य (definite value) नसते.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, f(2) = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

निश्चित (determine) करता येत नाही. अशा स्वरूपाला अनिर्धार्य रूप (indeterminate form) म्हणतात. इतर काही अनिर्धार्य रूप

$$0\times\infty, 0^0, 1^\infty, \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty^0, \frac{0}{0}.$$

समजा y = f(x) हे x चे फल (function) आहे आणि x च्या विशिष्ट मूल्यासाठी (particular value) x = a म्हणायचे झाले तर y चे मूल्य अनिर्धार्य (indeterminate) आहे, आपण फल (function) चे मूल्य 'a' च्या अगदी जवळ असलेले बिंदू (points) विचारात घेऊ. जर x चे मूल्य निश्चित एकमेव संख्या 'a' कडे (definite unique number) जात असेल (एकतर डावीकडून किंवा उजवीकडुन) तर x = a करिता या एकमेव संख्येला f(x) च्या सीमा (limit) म्हणतात आणि आपण म्हणून लिहितो $\lim_{x\to a} f(x) = l$

'x ⟶ a' चा अर्थ:

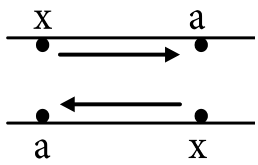
समजा x चल (variable) आणि a अचल (constant) आहे. जर x चे मूल्य 'a' च्या अधिकाधिक जवळ (nearer and nearer) गृहीत धरले तर आपण 'x टेंड्स टू a' (x tends to a) असे म्हणू शकतो आणि आपण 'x ⟶ a' लिहितो.

'x ⟶ a' चा असा अर्थ होतो:

(a) $x \neq a$

(b) x हे 'a' च्या अधिकाधिक जवळील (nearer and nearer) मूल्य गृहित धरते.

(c) x ने a कडे जावे अशी कोणतीही पद्धत आम्ही निर्दिष्ट करत नाही. आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे x हे डावीकडून किंवा उजवीकडून a कडे जाते.



आकृती 2.12: 'x ⟶ a'

2.2.1 डावीकडील आणि उजवीकडील सीमा

जर फल f(x) चे मूल्य निश्चित एकमेव संख्येकडे (definite unique number) असेल तर जेव्हा x डावीकडून 'a' कडे जाते तर या एकमेव संख्येला x = a करिता f(x) ची डावीकडील सीमा (LHL) म्हणतात आणि आपण लिहू शकतो.

$$f(a-0) \text{ किंवा } \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ किंवा } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

मूल्यांकनासाठी,

$$f(a-0) = \lim_{h\to 0} f(a-h)$$

त्याचप्रमाणे आपण x = a करिता f (x) ची उजवीकडील सीमा (RHL) परिभाषित करू शकतो. या प्रकरणात x उजवीकडून 'a' कडे जाते. आपण लिहू शकतो

$$f(a+0) \text{ किंवा } \lim_{h\to a^+} f(x) \text{ किंवा } \lim_{h\to a+0} f(x)$$

मूल्यांकनासाठी,

$$f(a+0) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

डावीकडील आणि उजवीकडील सीमा (Left and Right Limit) शोधण्याच्या पद्धती:

(a) फल च्या उजवीकडील सीमा शोधण्यासाठी आपण x च्या जागी (x + h) लिहितो तर डावीकडील सीमासाठी आपण x च्या जागी (x – h) लिहितो.

(b) आपण प्राप्त केलेल्या फल मध्ये नंतर x ला a ने बदलतो.

(c) अशाप्रकारे आपणास सीमा (limit) मिळते.

2.2.2 सीमा चे अस्तित्व

एखाद्या वेळेस फल ची सीमा तेव्हाच अस्तित्वात असते जेव्हा डावीकडील सीमा आणि त्या क्षणी उजवीकडील सीमा अस्तित्वात असते आणि समान असतात.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ exists, } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

जिथे l = फल ची सीमा

उदाहरण 6: जर $f(x) = \begin{cases} x^2+2, x \geq 1 \\ 2x+1, x<1 \end{cases}$, तर $\underset{x\to 1}{Lim}\ f(x)$ बरोबर -

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) अस्तित्वात नाही

उत्तर:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \lim_{h\to 0} = [2(1-h)+1] = 3$$

$$\lim_{x\to 1+} f(0) = \lim_{h\to 0} [(1+h)^2+2] = 3$$

म्हणून LHL = RHL, so $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

उदाहरण 7: किंमत काढा $\lim_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}\right)$

उत्तर:

$$\text{Limit} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1-1}{-1+2} = -2$$

काही विशिष्ट सीमा

(i) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

(iii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \log_e a\, a>0$ (iv) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

उदाहरण 8: जर $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^n-2^n}{x-2}=80$, धनात्मक पूर्णांक (positive integer) संख्या, तर n = ___

उत्तर:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}=n.2^{n-1}\Rightarrow n.2^{n-1}=80\Rightarrow n=5$$

उदाहरण 9: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4}{x-\sqrt{2}}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-\left(\sqrt{2}\right)^4}{x-\sqrt{2}}$$

$$=4\left(\sqrt{2}\right)^{4-1}=4\left(\sqrt{2}\right)^3=4\times\left(2\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$$

उदाहरण 10: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-8}{x-16}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 16}\frac{x^{\frac{3}{4}}-8}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{x^{\frac{3}{4}}-(16)^{\frac{3}{4}}}{x-16}$$

$$=\frac{3}{4}(16)^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}(16)^{\frac{-1}{4}}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

उदाहरण 11: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{17}+1}{x^9+1}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{17}+1}{x^9+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^{17}-(-1)^{17}}{x^9-(-1)^9}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{17}-(-1)^{17}}{x-1}}{\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^9-(-1)^9}{x-1}}=\frac{17(-1)^{16}}{9(-1)^8}$$

$$=\frac{17}{9}$$

उदाहरण 12: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{5x}\times\frac{3}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\quad [\because 3x\to 0\, as\, x\to 0]$$

$$=\frac{3}{5}\times 1=\frac{3}{5}\qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right]$$

उदाहरण 13: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\ \cos x-2\sin x}{7x+5sinx}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x\ \cos x-2\sin x}{7x+5sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5x\ \cos x-2\sin x}{x}}{\frac{7x+5sinx}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5x\ \cos x}{x}-\frac{2sinx}{x}}{\frac{7x}{x}+\frac{5sinx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{5cosx-\frac{2sinx}{x}}{7+\frac{5sinx}{x}}$$

$$=\frac{5\lim\limits_{x\to 0}\cos x-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}7+5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{5(1)-2(1)}{7+5(1)}=\frac{3}{15}=\frac{1}{4}$$

उदाहरण 14: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x.2\sin^2 x}{x^2}=2.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}x=0$$

उदाहरण 15: किंमत काढा $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\cos ec\theta-\cot\theta}{\theta}$

उत्तर:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos ec\theta-\cot\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos\theta)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 16: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec 5x-\sec 3x}{\sec 3x-\sec x}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec 5x-\sec 3x}{\sec 3x-\sec x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\cos x-\cos 3x}\cdot\frac{\cos x}{\cos 5x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{-2\sin 2x\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cos 5x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}\cdot\frac{4x}{4x}\cdot\frac{\cos x}{\cos 5x} = \frac{2\lim\limits_{4x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}{\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 5x}$$

$$= \frac{2(1)}{1}\cdot\frac{1}{1} = 2$$

उदाहरण 17: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x+3}-8}{x}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+3}-8}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\cdot 2^3-2^3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^3(2^x-1)}{x}$$

$$= 8\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{x} = 8\times\log_e 2 = \log_e 256$$

उदाहरण 18: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to e}\frac{1-\log_e x}{e-x}$

उत्तर: समजा $\log_e x = y$

$\therefore x = e^y$ ... (लॉगॅरिदमच्या परिभाषेनुसार) आणि $x\to e \Rightarrow y\to 1$

$$\lim_{x\to e}\frac{1-\log_e x}{e-x} = \lim_{y\to 1}\frac{1-y}{e-e^y} = \lim_{y\to 1}\frac{1}{e}\left(\frac{y-1}{e^{y-1}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{y\to 1}\left(\frac{1}{\frac{e^{y-1}-1}{y-1}}\right)=\frac{1}{e}\left(\frac{\lim\limits_{y\to 1}1}{\lim\limits_{y-1\to 0}\frac{e^{y-1}-1}{y-1}}\right)\left\{\because y\to 1\Rightarrow y-1\to 0\right.$$

$$=\frac{1}{e}\times\frac{1}{1}\left\{\because \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\log_e e=1\right.$$

$$=\frac{1}{e}$$

उदाहरण 19: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$\underset{lim \sin x\to 0}{=}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1 \qquad \left\{\because x\to 0 \text{ then } \sin x\to 0\right.$$

उदाहरण 20: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\times 6}$$

$$=\lim_{3x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{6} \quad \{since\, 3x\to 0\, as\, x\to 0$$

$$=\left[\lim_{3x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{6}$$

$$=e^{6}$$

उदाहरण 21: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{5x}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}\times\frac{10}{3}}$$

$$=\left[\lim_{\frac{2}{3x}\to 0}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}\right]^{\frac{10}{3}} \quad \left\{x\to\infty then\frac{1}{x}\to 0\right. = e^{\frac{10}{3}}$$

उदाहरण 22: किंमत काढा $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\log(x+1)}{1-\cos x}$

उत्तर:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\log\left(x+1\right)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x\log\left(x+1\right)}{x^2}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}\log(x+1)}{\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log(x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\log(x+1)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2\times\dfrac{4}{4}}}=\frac{\log\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\log\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right]^2}=\frac{\log e}{\dfrac{1}{2}(1)}=2$$

अनुप्रयोग (वास्तविक जीवन/औद्योगिक)

चक्रवाढ व्याज:

उदाहरण 1: एक गुंतवणूकदार 3% ने म्युच्युअल फंडमध्ये 20,000 रुपये जमा करतो. चक्रवाढ व्याज a) वार्षिक b) अर्धवार्षिक c) त्रैमासिक ने वाढल्यास, एक वर्षाअखेर गुंतवणूकची रकम किती असेल?

स्केलिंग (scaling) ताण (stress) घटक:

उदाहरण 2: मानसशास्त्रात जीवनातील अनुभवांच्या गटाला संख्यात्मक रेटिंग जोडण्यासाठी एक प्रक्रिया आहे, स्केलिंग. खाली दिलेल्या तक्त्यात, विविध घटनांना 1 ते 10 पर्यंतच्या पातळीवर रेटिंग दिले गेले आहेत.

तक्ता 2.1: घटना आणि परिणामाची मापी

घटना (Event)	**परिणामाची मापी (Scale of Impact)**
जोडीदाराची मृत्यू (Death of spouse)	90
घटस्फोट (Divorce)	63
दोषी ठरवने (Convicted)	53
लग्न (Marriage)	30
बेरोजगारी (Unemployed)	57
गरोदरता (Pregnancy)	40
रु. 10000 पेक्षा जास्त कर्ज (Loan over Rs 10,000)	32
शाळा बदल (Change in schools)	30
रु. 10000 पेक्षा कमी कर्ज (Loan less than Rs 10,000)	20
सण साजरा करणे (Festival Celebration)	12

(a) वरील सारणी फल (function) चे प्रतिनिधित्व करते काय? का किंवा का नाही?

(b) इनपुट काय आहेत? आउटपुट काय आहेत?

मज्जातंतू प्रेरणा गती:

उदाहरण 3: जर मज्जातंतू तंतूमधील आवेग 283 ft/sec आहे म्हणजेच t सेकंदमध्ये D = 283 ft अंतर जाते, तर 5.5 f फूट उंच व्यक्तीच्या मेंदूतून पायाच्या बोटांपर्यंत प्रवास करण्यास किती काळ लागतो?

सोडा, स्नॅक किंवा स्टँप मशीनः

उदाहरण 4: वापरकर्ताने मशीनमध्ये पैसे घालून विशिष्ट बटण दाबल्यावर विशिष्ट वस्तू आउटपुट स्लॉटमध्ये उतरते. जर इथे फल (function) म्हणजे उत्पादनाची किंमत आणि इनपुट म्हणजे निवडलेले बटणसह जमा केलेले पैसे असेल तर वापरकर्त्याने आवश्यक वस्तूंपेक्षा जास्त पैसे प्रविष्ट केले असल्यास आउटपुट स्लॉटमध्ये चिल्लर नाण्यांसह येणारी वस्तू म्हणजे आउटपुट आहे.

बदलाचा दर:

उदाहरण 5: एक ऍथलिट आगामी मॅरेथॉनसाठी सामान्य सराव संध्याकाळी सुरू करतो. संध्याकाळी 6:15 वाजता घराबाहेर निघून तो पळायला लागतो. सायंकाळी 7:45 वाजता, ऍथलिट 6.5 मैल धाव संपवून घरी परत येतो. धावण्याच्या कालावधीत त्याचा सरासरी वेग किती होता?

एकाधिक समीकरणे (multiple equations) असलेले वास्तविक जीवन मॉडेल (real life situation):

उदाहरण 6: सुरुवातीला, A आणि B गाड्या एकमेकांपासून 305 मैल दूर आहेत. ट्रेन A ताशी 40 मैलांच्या वेगाने B च्या दिशेने आणि ट्रेन B ताशी 70 मैलाने A च्या दिशेने जात आहे. दोन्ही गाड्या कोणत्या वेळी भेटतील? यावेळी गाड्या किती अंतरावर धावल्या?

सीमा (limit) उदाहरणे:

उदाहरण 7: थंड पाण्याच्या ग्लास मध्ये ठेवलेल्या गरम रॉडचे तापमान मोजणे सीमा (limit) आहे. इतर उदाहरणे जसे की विद्युत, चुंबकीय किंवा गुरुत्वाकर्षण क्षेत्राची (electric, magnetic or gravitational field) ताकद मोजणे. सीमा (limit) च्या बाबतीत जेव्हा आपण त्यास अनंतने (infinity) संबोधतो तेव्हा याचा अर्थ असा होतो की संख्या मोठी-मोठी होत असताना किंवा मालिकात (sequence) नवनवीन संख्या सतत जोडताना त्याचे वर्तन (behave) कसे असेल.

रासायनिक प्रतिक्रिया:

उदाहरण 8: एक काचपात्रमध्ये (beaker) दोन भिन्न संयुगांची (compounds) रासायनिक क्रिया सुरू होऊन नवीन संयुग तयार होतात. आता जसजशी वेळ अनंत (infinity) जवळ जाते, तसतसे नवीन संयुग तयार होण्याचे प्रमाण म्हणजेच सीमा (limit) आहे.

जेट विमान उड्डाण:

उदाहरण 9: A आणि B शहरादरम्यान सरासरी 830 किमी/तासाने 3000 कि.मी. उड्डाण करण्यासाठी जेट विमानाच्या प्रवासाला किती तास लागतील?

घटक सारांश

या युनिटमध्ये प्रथम विभाग फल ची संकल्पना, फल प्रकार, फल यांचे आलेख आणि त्याशी संबंधित गुणधर्म सादर केले आहे. दुसऱ्या विभागात सीमा ची संकल्पना विविध प्रकारांसह सादर केली गेली आहे. प्रत्येक विभागावर सुधारित ब्लूमच्या वर्गीकरणानुसार वाढत्या अडचणींच्या पातळीवरील उदाहरणे आणि त्यानंतरच्या सरावासाठी प्रश्नावली प्रदान करताना समान पद्धतीचा अवलंब केला आहे. व्युत्पत्तीची (derivatives) मुख्य संकल्पना आणि अनुप्रयोगांची अंमलबजावणी मजबूतपणे करण्यासाठी रचलेली नवीन उदाहरणे, ज्यामुळे विद्यार्थी विश्लेषणात्मक साधन म्हणून व्युत्पत्तीविषयी काही प्रमाणात परिचित असतात, एखाद्या सूत्रानुसार हे लक्षात ठेवले जाऊ शकत नाही. गणिताची समीकरणे अनेक प्रकारच्या अनुप्रयोगांचे मॉडेल्स म्हणून काम करू शकतात. काही मुक्त प्रश्नांचा देखील सल्ला दिला आहे कारण तोंडी प्रश्न मुख्य परिभाषा आणि संकल्पनांच्या वैचारिक आकलनाचे मूल्यांकन करण्यास मदत करतात. दुसरीकडे बीजगणित प्रश्नावली विद्यार्थ्यांना बीजगणितीय संकल्पना लागू करण्यास मदत करतात, आलेखीय प्रश्न विद्यार्थ्यांची आलेख समजण्याची किंवा तयार करण्याची क्षमतेचे मूल्यांकन करतात. संख्यात्मक समस्यांसाठी विद्यार्थ्यांना गणना करणे आवश्यक असते. वास्तविक जागतिक अनुप्रयोग (Real-World Applications) वास्तववादी समस्येची परिस्थिती सादर करतात.

स्वाध्याय

बहुपर्यायी प्रश्न

1. जर $x > 2$ करिता $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}}$, तर $f(11) =$ ....

(a) 7/6 (b) 5/6

(c) 6/7 (d) 5/7

2. फल अधिक्षेत्र (domain of function) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=$ ....

(a) $\left\{x:x\in R,\ x\neq 3\right\}$ (b) $\left\{x:x\in R,\ x\neq 2\right\}$

(c) $\left\{x:x\in R\right\}$ (d) $\left\{x:x\in R,\ x\neq 2, x\neq -3\right\}$

3. अधिक्षेत्र (domain) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$ = ...

(a) $R-\{-1,0,1\}$ (b) R

(c) $R-\{0,1\}$ (d) यां पैकी नाही

4. व्याप्ती (the range of function) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ = ...

(a) $R-\{1\}$ (b) $R^+\cup\{0\}$

(c) $[0, 1]$ (d) यां पैकी नाही

5. जर $f\left(x\right)=x^2-6x+7$ चे अधिक्षेत्र $\left(-\infty,\infty\right)$, तर व्याप्ती (range) आहे

(a) $\left(-\infty,\infty\right)$ (b) $\left[-2,\infty\right)$

(c) $\left(-2,3\right)$ (d) $\left(-\infty,-2\right)$

6. अधिक्षेत्र (domain) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ = ...

(a) R (b) $(-2, \infty)$

(c) $[2, \infty]$ (d) $[0, \infty]$

7. अधिक्षेत्र (domain) $\sqrt{2-x}-\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ = ...

(a) $(-3, 1)$ (b) $[-3, 1]$

(c) $(-3, 2]$ (d) $[-3, 1)$

8. अधिक्षेत्र (domain) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ = ...

(a) $(-1, 1)$ (b) $(-1, 1)-\{0\}$

(c) $[-1, 1]$ (d) $[-1, 1]-\{0\}$

9. अधिक्षेत्र (domain) $f\left(x\right)=\sqrt{x-x^2}+\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}$ i= ....

(a) $[-4, \infty)$ (b) $[-4, 4]$

(c) $[0, 4]$ (d) $[0, 1]$

सीमा आधारित प्रश्न:

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \ldots\ldots\ldots$

(a) 1/2 (b) 2
(c) 1 (d) 0

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - x}{3x - \sin x} = \ldots\ldots\ldots$

(a) 2/3 (b) 1/3
(c) 1/2 (d) 0

12. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+3} = \ldots\ldots\ldots$

(a) 1 (b) e
(c) e^2 (d) e^3

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^{\circ}}{x} = \ldots\ldots\ldots$

(a) 1 (b) π
(c) x (d) π/180

14. जर $f(x) = \begin{cases} x-1, x<0 \\ 1/4, x=0 \\ x^2, x>0 \end{cases}$ तर $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

(a) 0 (b) 1
(c) −1 (d) अस्तित्वात नाही

15. जर $f(x) = \begin{cases} 4x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ 3x^2, & x>0 \end{cases}$, तर $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots\ldots$

(a) 0 (b) 1
(c) 3 (d) अस्तित्वात नाही

16. $\lim\limits_{x\to \infty} \sin x = \ldots\ldots\ldots$

(a) 1 (b) 0
(c) ∞ (d) अस्तित्वात नाही

17. $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$

(a) 0 (b) 1
(c) ∞ (d) अस्तित्वात नाही

18. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = ...$

(a) 1 (b) 0

(c) ∞ (d) अस्तित्वात नाही

19. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x+a} = ...$

(a) $\sqrt{x}$ (b) $\sqrt{a}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}} = ...$

(a) $\dfrac{1}{e}$ (b) e

(c) $e^{\frac{2}{3}}$ (d) $e^{\frac{3}{2}}$

उत्तरे - बहुपर्यायी प्रश्न									
1.	c	**2.**	d	**3.**	a	**4.**	c	**5.**	b
6.	b	**7.**	c	**8.**	d	**9.**	d	**10.**	c
11.	c	**12.**	b	**13.**	d	**14.**	d	**15.**	a
16.	d	**17.**	d	**18.**	b	**19.**	c	**20.**	b

लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. जर $f(x)=\log x$, तर सिद्ध करा:

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \text{ and } f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

2. जर $f(x)=\tan x$ तर सिद्ध करा: $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1-[f(x)]^2}$

3. सोडवा:

(i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$

(iii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{2a-x}-\sqrt{x}}{a-x}$

4. सोडवा:

(i) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ (ii) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{9+x}-4}{\sqrt{8-x}-1}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+5}{4x^2-5x-9}$

5. सोडवा:

(i) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3}$ (ii) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{a}}$

(iii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^7-128}{x^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}$

6. जर $\lim_{x\to 3} \frac{x^n-3^n}{x-3}=27$ तर n ची किंमत काढा

7. किंमत काढा:

(i) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(a\theta)}{\sin(b\theta)}$ (ii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2-\sec^2 x}{1-\tan x}$

(iii) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta}{\theta}$

8. सोडवा:

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{5^{3x}-3^{2x}}{x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{12^x-4^x-3^x+1}{x^2}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sin x-1}{x}$

9. सोडवा:

(i) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{\frac{6}{x}}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{4x}{7}\right)^{\frac{3}{2x}}$

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$

10. सोडवा:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x-2^x-1}{x^2}$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न
3. (i) 3 (ii) $-\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{a}}$
4. (i) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{1}{2}$
5. (i) 27 (ii) $\frac{7}{3}(a)^{\frac{4}{21}}$ (iii) $896\sqrt{2}$
6. 3
7. (i) $\frac{a}{b}$ (ii) 2 (iii) $\frac{1}{2}$
8. (i) $\log\left(\frac{125}{9}\right)$ (ii) $\log 3.\log 4$ (iii) 0
9. (i) $e^{\frac{9}{2}}$ (ii) $e^{\frac{6}{7}}$ (iii) e
10. (i) $-\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (iii) $\log 3\cdot\log 2$

अधिक जाणून घ्या

- कलन (calculus) चा ऐतिहासिक मार्ग.
- सीमा आणि आलेख (Limit and its graphs).
- सीमा आणि घटक विभाजन (Limit and factoring).
- कलन (calculus) मध्ये कोणत्या सीमा वापरल्या जातात?
- शिकवणे आणि शिकणे, फल (function).

- ऑनलाईन अध्यापनाकडे वळणे.
- फल आणि सीमा शिकण्याचा सर्वात सोपा मार्ग.
- कलन (calculus) चा शोध का लागला?
- अंतर्ज्ञानाने कलन (calculus) शिकणे.
- सीमाची (limit) संकल्पना कमी क्लिष्ट करणे.
- शिक्षकांसाठी ऑनलाइन शिक्षण साधने.
- विवेचनात्मक विचार (critical thinking) शिकवणे.
- STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) शिक्षण.

लघु प्रकल्प

1. अभियांत्रिकी अनुप्रयोग दर्शविणाऱ्या फलचा आलेख आखण्यासाठी आलेखीय गणनयंत्र (graphical calculator) वापरा.
2. फल आणि वास्तविक जगाच्या अनुप्रयोगांसह सीमा यावर आधारित प्रश्नांचा संच गोळा करा.

चौकसपणा आणि जिज्ञासासाठी प्रश्न

1. इनपुट किमती बदलल्यामुळे फलच्या किमती (function values) (output) कसे बदलतात, या अभ्यासाचा मूलभूत भाग म्हणजे सीमा ची चिन्हांकन.
2. काही फल संदर्भात अनंतची (infinity) भूमिका काय आहे, या प्रश्नाचे उत्तर सीमाच्या संकल्पनेद्वारे देऊ शकतात.
3. जेव्हा एखादा अभियंता नवीन कार डिझाईन करतो, तेव्हा कारच्या इंजिनद्वारे पेट्रोलचे (gasoline) जाळीने (mesh) मॉडेल बनवतो, अशा प्रकारात बहुपदरुपी (polynomials) फल (function) वापरतात. हे अंदाज (approximation) नेहमी सीमा (limit) वापरतात.
4. आपण तक्ता (table) आणि आलेखातून रेषीय फल (linear function) कसे निर्धारित करू?
5. दिलेले समीकरण एक रेषात्मक फल (linear function) आहे की अरेखीय फल (non-linear function) आहे हे आम्ही कसे ठरवू शकतो?
6. दैनंदिन जीवनात किंवा वास्तविक जगाच्या समस्यांवर सीमा कशा वापरल्या किंवा लागू केल्या जातात?
7. स्वचलची (independant variable) किंमत खूप मोठी झाल्यावर काय होते?

समजा की ‘t’ खूप मोठे असेल तर f(t) खूप लहान होते. या उदाहरणात f(t) शून्याकडे जातो कारण ‘t’ अनंततेकडे (infinity) जाते.

उदा. सरल आवर्त गती (simple harmonic motion) चे अवमंदन (damping). वरील प्रश्नांव्यतिरिक्त, फल आणि सीमा च्या इतर अनुप्रयोगांमध्ये वेग मर्यादा (speed limit), वाहनांची क्षमता (vehicle capacity), आपण घेतलेल्या अन्नाची मर्यादा (limit of food intake), इंटरनेट वापरण्याची मर्यादा, औषधांचा वापर करण्याची मर्यादा यावर आधारित समस्यांसह मूलभूत समस्या येऊ शकतात.

संदर्भ आणि सूचित वाचन

1. E. Krezig, Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition, Wiley, 2015.
2. H. K. Das, Advanced Engineering Mathematics, S. Chand & Co, New Delhi, 2007.
3. B. S. Grewal, *Higher Engineering Mathematics,* Khanna Publication, New Delhi, 2015.
4. S. S. Sastry, *Engineering Mathematics, Volume 1*, PHI Learning, New Delhi, 2009.
5. Alan Jeffrey, Advanced *Engineering Mathematics,* Harcourt/Academic Press, 2002, USA.
6. M.P. Trivedi and P.Y. Trivedi, Consider Dimension and Replace Pi, Notion Press, 2018.
7. https://grafeq.en.downloadastro.com/- Graph Eq^n 2.13
8. www.scilab.org/ -SCI Lab.
9. https://www.geogebra.org- Geo Gebra.
10. https://opentextbc.ca/calculusv1openstax/chapter/the-limit-of-a-function.
11. https://www.accessengineeringlibrary.com/?implicit-login=true.
12. https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function#References.

3 विकलन

घटक वैशिष्ट्ये

सादर घटक खालील विषयांवर सविस्तर चर्चा करते:

- बीजगणितीय, त्रिकोणमितीय, घातांकीय आणि लॉगरिदमिक फलाची परिभाषेनुसार व्युत्पत्ती;
- बेरीज फरक; दोन फलच्या बेरीज, गुणन आणि भागाकार चे व्युत्पन्न;
- फलच्या फल ची व्युत्पत्ती;
- त्रिकोणमितीय आणि व्यस्त त्रिकोणमितीय फल ची व्युत्पत्ती;
- लॉगरिदमिक व्युत्पन्न;
- घातांकीय फल.

अधिक उत्सुकता आणि सृजनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी अनुप्रयोग आधारित प्रश्नांवर चर्चा केली आहे. मोठ्या प्रमाणात दिलेले दोन प्रकारात वर्गीकृत बहुपर्यायी प्रश्न तसेच लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न, याव्यतिरिक्त Bloom च्या वर्गीकरणानुसार खालची ते वरची पातळी या क्रमाने अनेक संख्यात्मक प्रश्नांचे स्वाध्याय, संदर्भ आणि सूचित वाचन अधिक सराव करण्यासाठी दिलेले आहेत. याव्यतिरिक्त, "अधिक जाणून घ्या" विभाग जोडला आहे. हा विभाग विचारपूर्वक आखला गेला आहे, जेणेकरून या भागातील पुरवलेली माहिती पुस्तक वापरकर्त्यांसाठी फायदेशीर ठरेल. हा विभाग प्रामुख्याने विकलन तील पुढील शिक्षण अणि अध्यापन शी संबंधित काही मनोरंजक तथ्य, कलन चा अभ्यास का?, दैनंदिन जीवनात कलन चा वापर, सीमा आणि व्युत्पत्ती, गणिताचा विचार रोजच्या जीवनात का मोलाचा आहे?, अंतर्ज्ञानाने विकलन शिकणे, विकलन कमी क्लिष्ट बनवणे, STEM शिक्षण यांवर प्रकाश टाकणारा आहे. दुसरीकडे, सुचवलेले लघु प्रकल्प आणि मेंदु-विचारमंथन आधारित प्रश्न या विषयात समाविष्ट असलेल्या विषयांसाठी जिज्ञासा आणि कुतूहल निर्माण करतात.

प्रस्तावना

कलन (Calculus) ही अभियंते (engineer), वैज्ञानिक (scientist) आणि अर्थशास्त्रज्ञांची (economist) भाषा आहे. कलन (Calculus) ही गणिताची एक शाखा आहे जी पदार्थ, कण आणि अलौकिक वस्तू प्रत्यक्षात कसे फिरतात याची गणना करते. कलनच्या (Calculus) सहाय्याने, एखाद्या सिस्टमच्या बदलत्या परिस्थितीचा आपल्यावर कसा प्रभाव पडतो हे आपण शोधू शकतो, आपण त्या सिस्टमवर नियंत्रण ठेवू शकतो. काही राशी (quantities) अशा असतात जे एकमेकांच्या संदर्भात बदलतात आणि बदलांचे हे दर अनेकदा व्युत्पन्न (derivative) म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकतात. विशिष्ट फल (particular function) ची कमाल आणि किमान (maximum and minimum) मूल्ये निश्चित करण्यासाठी उदा. किंमत, सामर्थ्य, इमारतीत वापरल्या

जाणाऱ्या सामग्रीची माला, इ. आणि फिरत्या वस्तूंच्या वर्तनाचे मॉडेलिंग करण्यास आम्ही व्युत्पन्न (derivative) संकल्पना वापरतो. स्पेस शटलच्या स्थितीचा मागोवा घेण्यासारख्या विविध परिस्थिती आणि इतर तत्सम प्रश्न विकलन (Differential Calculus) च्या सहाय्याने सोडवणे शक्य होते. संगणक (computers) आता विकलन (Differential Calculus) च्या सहाय्याने एकेकाळी कठीण वाटत असणाऱ्या विविध समस्या सोडविण्यासाठी एक मौल्यवान साधन बनले आहेत. कलन (Calculus) मध्ये एक मोहक सौंदर्य आहे जे गणितज्ञांना कलेच्या दृष्टिकोनातून पाहण्यास प्रवृत्त करते.

पूर्व-आवश्यकता

- फल आणि त्यांचे आलेख (Functions and their graphs)
- फलचे रूपांतर (Transforming a function)
- त्रिकोणमितीय फल (Trigonometric function)
- त्रिकोणमितीय नित्यसमीकरण (Trigonometric identities)
- निर्देशक भूमिती (Coordinate geometry)
- द्विपदी प्रमेय (binomial theorem)
- सीमा आणि सातत्यता (limit and continuity).
- बीजगणित तंत्राची ओळख.
- प्रतिस्थापन (substitution).

घटक निष्पत्ती

U3-O1: एका चलच्या फलचे व्युत्पन्नची (derivative of functions of one variable) गणना करणे.

U3-O2: दिलेल्या बीजगणितीय (algebraic), त्रिकोणमितीय (trigonometric), व्यस्त त्रिकोणमितीय (inverse trigonometric), घातांकीय (exponential) आणि लॉगॅरिथमिक (logarithmic) फलची व्युत्पन्न (derivatives) गणना करणे.

U3-O3: फलच्या आलेखाचे गुणधर्म निश्चित करण्यासाठी फलचे व्युत्पन्न वापरणे.

U3-O4: दिलेल्या फलच्या व्युत्पन्नचे (derivative of functions) भूमितीयदृष्ट्या विश्लेषण आणि व्याख्या करण्याची क्षमता दर्शवणे.

U3-O5: वास्तविक जगातील परिस्थितींमध्ये व्युत्पन्न (derivative) संकल्पना वापरणे.

घटक-2 निष्पत्ती (UO)	विषय निष्पत्ती सह संभावित मानचित्रण (1-दुर्बल सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5	CO-6	CO-7
U3-O1	-	-	1	1	1	1	-
U3-O2	-	1	2	2	2	2	-
U3-O3	-	1	3	3	2	1	-
U3-O4	-	1	3	3	2	1	-
U3-O5	-	1	3	2	3	2	-

3.1 एका बिंदूवर फल चे व्युत्पन्न

समजा f हे वास्तविक मूल्य फल (real valued function) आहे आणि त्याच्या अधिक्षेत्र (domain) मधील एक बिंदू a आहे. जर सीमा (limit) अस्तित्वात असेल तर a वर f चे व्युत्पन्न परिभाषित केले जाऊ शकते.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a वर $f(x)$ चे व्युत्पन्न $f'(a)$ द्वारे दर्शवितात. $f'(a)$ हे x संदर्भात f(x) मधील बदलास प्रमाणित करते.

उदाहरण 1: $x = 2$ करिता फल $f(x) = 3x$ चे व्युत्पन्न काढा.

उत्तर: $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$

3.1.1 फल चे व्युत्पन्न

दिलेल्या फल साठी आम्हाला प्रत्येक बिंदूवर व्युत्पन्न (derivative) सापडेल. जर व्युत्पन्न (derivative) प्रत्येक ठिकाणी अस्तित्त्वात असेल तर ते f चे व्युत्पन्न (derivative) नावाचे नवीन फल परिभाषित करते. औपचारिकरित्या, आपण एखाद्या फल चे व्युत्पन्न खालीलप्रमाणे परिभाषित करतो.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

जिथे सीमा (limit) अस्तित्वात आहे ते f चे व्युत्पन्न x करिता म्हणून परिभाषित केले आहे. आणि f'(x) द्वारे दर्शविले गेले आहे. व्युत्पन्नच्या (derivative) या व्याख्येस व्युत्पन्नचे पहिले तत्व (first principle of derivative) सुद्धा म्हटले जाते. अशा प्रकारे,

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

3.1.2 परिभाषेनुसार काही विशिष्ट फलची व्युत्पत्ती

उदाहरण 2: $y=f(x)=x^n$ चे व्याख्येनुसार व्युत्पन्न शोधा.

उत्तर: आपल्या माहितीनुसार

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}=\lim_{x+h\to x}\frac{(x+h)^n-(x)^n}{(x+h)-x}$$

$$=nx^{n-1}\quad ;\text{ वापरा } \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

उदाहरण 3: $y=f(x)=sinx$ चे व्याख्येनुसार व्युत्पन्न शोधा.

उत्तर: $\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}=\cos x\cdot 1=\cos x\,.$$

वापरा $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

उदाहरण 4: $y=f\left(x\right)=cosx$ चे व्याख्येनुसार व्युत्पन्न शोधा.

उत्तर:

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+h\right)-\cos\left(x\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

वापरा $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

उदाहरण 5: $y=f\left(x\right)=tanx$ चे व्याख्येनुसार व्युत्पन्न शोधा.

उत्तर:

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan\left(x\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos(x+h)}{h\cdot\cos x\cdot\cos(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cdot\cos x\cdot\cos(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot\cos(x+h)}$$

$$=1\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$ वापरा $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

उदाहरण 6: $y = f(x) = e^x$ चे व्याख्येनुसार व्युत्पन्न शोधा.

उत्तर:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h} = e^x\cdot\log_e e = e^x\cdot 1 = e^x$$

वापरा $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$

उदाहरण 7: $y = f(x) = log_e x$ चे व्याख्येनुसार व्युत्पन्न शोधा.

उत्तर:
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$
$$= \log\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \log\left[\left\{\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}^{\frac{1}{x}}\right] = \log_e e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$$

(1) बीजगणितीय फलची व्युत्पत्ती:

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iv) $\frac{d}{dx}(k) = 0$ जिथे k = अचल

(2) त्रिकोणमितीय फलची व्युत्पत्ती:

(i) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

(ii) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

(iii) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

(iv) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$

(v) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x\cot x$

(vi) $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

(3) लॉगॅरिथमिक आणि घातांकीय फलची व्युत्पत्ती:

(i) $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$, जिथे $x > 0$

(ii) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

(iii) $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \log a$, जिथे $a > 0$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\log a}$, जिथे $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

(4) व्यस्त त्रिकोणमितीय फलची व्युत्पत्ती

(i) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, जिथे $-1 < x < 1$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, जिथे $-1 < x < 1$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, जिथे $|x| > 1$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, जिथे $|x| > 1$

(v) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}$, जिथे $x \in R$

(vi) $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} x = \dfrac{-1}{1+x^2}$, जिथे $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$

3.2 फलच्या व्युत्पन्नचे बीजगणित

व्युत्पन्नच्या परिभाषेत (definition of derivatives) सीमा (limits) समाविष्ट असल्याने आम्ही व्युत्पन्नसाठीचे नियम काळजीपूर्वक पालन करण्याचे गृहीत धरतो. हे खालील निकालात समजेल:

समजा f आणि g अशी दोन फल आहेत की त्यांचे व्युत्पन्न सामान्य अधिक्षेत्र (domain) मध्ये परिभाषित केले जातात. मग

(i) दोन फलच्या बेरीज (किंवा फरक) चे व्युत्पन्न म्हणजेच दोन फलच्या व्युत्पन्नची बेरीज (किंवा फरक)

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)p$$

(ii) अचलसह गुणनचे व्युत्पन्न

$$\frac{d}{dx}\big(kf(x)\big) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

Basics of Calculus

(iii) दोन फलचे गुणनचे व्युत्पन्न

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) \times g(x)\big) = f(x) \times \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \times \frac{d}{dx}f(x)$$

(iv) दोन फलचे (function) भागाकार (division/quotient) चे व्युत्पन्न

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g^2(x)}$$

उदाहरण 8: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=$

(a) $1-\frac{1}{x^2}$

(b) $1+\frac{1}{x^2}$

(c) $1-\frac{1}{2x}$

(d) यापैकी नाही

उत्तर: (a) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{d}{dx}\left[x+\frac{1}{x}+2\right]=1-\frac{1}{x^2}$.

उदाहरण 9: खाली दिलेल्या चे व्युत्पन्न काढा:

(i) $(x-1)(x^2+3)$

(ii) $\frac{(2x+1)(x^2-3)}{x}$

उत्तर: (i) $Let,\ y=(x-1)(x^2+3)$

$$\therefore y=x^3-x^2+3x-3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-2x+3$$

(ii) $Let,\ y=\frac{(2x+1)(x^2-3)}{x}$

$$\therefore y=\frac{2x^3+x^2-6x-3}{x}$$

$$\therefore y=2x^2+x-6-\frac{3}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4x+1+\frac{3}{x^2}$$

उदाहरण 10: खाली दिलेल्या चे व्युत्पन्न काढा:

(i) $(1+2x^2)\cos x$

(ii) $2x\sin x-\left(1+x^2\right)\sin x$

उत्तर: (i) समजा $y=(1+2x^2)\cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(1+2x^2)\cos x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(1+2x^2)\frac{d}{dx}\cos x+\cos x\frac{d}{dx}(1+2x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(1+2x^2)\left(-\sin x\right)+\cos x\left(4x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4x\cos x-2x^2\sin x-\sin x$$

(ii) समजा $y=2x\sin x-\left(1+x^2\right)\sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[2x\sin x-\left(1+x^2\right)\sin x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2x\sin x\right)-\frac{d}{dx}\left[\left(1+x^2\right)\sin x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left[2x\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)+\sin x\frac{d}{dx}\left(2x\right)\right]-\left[\left(1+x^2\right)\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)+\sin x\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left[2x\left(\cos x\right)+\sin x\left(2\right)\right]-\left[\left(1+x^2\right)\left(\cos x\right)+\sin x\left(2x\right)\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\left[2x\cos x+2\sin x\right]-\left[\cos x+x^2\cos x+2x\sin x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2x\cos x+2\sin x-\cos x-x^2\cos x-2x\sin x$$

उदाहरण 11: शोधा: $\frac{dy}{dx}$

(i) $y=\frac{x^2-4}{3x^2+5}$ (ii) $y=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ (iii) $y=\frac{4^x\cot x}{\sqrt{x}}$

उत्तर: (i) $y=\frac{x^2-4}{3x^2+5}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\left(3x^2+5\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)-\left(x^2-4\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2+5\right)}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\left(3x^2+5\right)(2x)-\left(x^2-4\right)(6x)}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x^3+10x-6x^3+24x}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{34x}{\left(3x^2+5\right)^2}$$

(ii) $$y=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

(iii) $$y=\frac{4^x\cot x}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{4^x\cot x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(4^x\cot x\right)-4^x\cot x\frac{d}{dx}\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x}\left[4^x(-\cos ec^2x)+\cot x\cdot 4^x\log 4\right]-4^x\cot x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4^x\left(2x\cot x\log 4-2x\cos ec^2x-\cot x\right)\cdot}{2x\sqrt{x}}$$

उदाहरण 12: जर $f(x) = x\tan^{-1}x$, शोधा $f'(1) =$

उत्तर: $f(x) = x\tan^{-1}x$

x च्या संदर्भात व्युत्पन्न घेऊन, $f'(x) = x\dfrac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x$

आता $x = 1$ करिता, $f'(1) = \dfrac{1}{2} + \tan^{-1}(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

3.3 संयुक्त फल ची व्युत्पत्ती (शृंखला सूत्र)

जर y हे u चे फल आहे आणि u हे x चे फल आहे तर x च्या संदर्भात y चे व्युत्पन्न आहे.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

सामान्यतः $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdots\cdots\dfrac{dz}{dx}$

उदाहरण 13: जर $y = f(x) = \sin x^2$ तर x च्या संदर्भात y चे व्युत्पन्न काढा.

उत्तर: $\dfrac{d}{dx}y = \dfrac{d}{dx}sinx^2 = cosx^2\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x\ cosx^2$

उदाहरण 14: शोधा: $\dfrac{d}{dx}(\log\tan x) =$

उत्तर: $\dfrac{d}{dx}(\log\tan x) = \dfrac{1}{\tan x}\sec^2 x = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x\sin x}$

$$= \frac{2}{2}\frac{1}{\cos x\sin x} = 2\operatorname{cosec}2x$$

उदाहरण 15: शोधा: $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(\sec x + \tan x) =$

उत्तर: $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(\sec x + \tan x) = \dfrac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 16: x च्या संदर्भात $\cos ec(2x^2+3)$ चे व्युत्पन्न काढा:

उत्तर: समजा, $y = \cos ec(2x^2+3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosec}(2x^2+3)\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}(2x^2+3)\cot(2x^2+3)\cdot\frac{d}{dx}(2x^2+3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -4x\operatorname{cosec}(2x^2+3)\cot(2x^2+3)$$

उदाहरण 17: x च्या संदर्भात खाली दिलेल्याचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ (ii) $\tan^3 x + \dfrac{1}{3}\tan x + \dfrac{x}{3}$

उत्तर: (i) समजा, $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\left[\frac{(1+\cos x)\cdot\frac{d}{dx}(1-\cos x)-(1-\cos x)\cdot\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\cdot\left[\frac{(1+\cos x)(\sin x)-(1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\cdot\left[\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}\right] = \frac{1}{1+\cos x}$$

लक्षात घ्या, या उदाहरणात जर त्रिकोणमितीय नित्यसमीकरण (identities) वापरून y सोडविल्यास पर्यायाने हे सहज सोडवता येईल, हेच गणिताचे सौंदर्य आहे.

यावरून, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

जे पुढे सोडविल्यास, $\dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

(ii) समजा, $y = \tan^3 x + \dfrac{1}{3}\tan x + \dfrac{x}{3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan^3 x + \frac{1}{3}\tan x + \frac{x}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\tan^2 x \frac{d}{dx}(\tan x) + \frac{1}{3}\sec^2 x + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\tan^2 x \sec^2 x + \frac{1}{3}\sec^2 x + \frac{1}{3}$$

3.4 त्रिकोणमितीय व व्यस्त त्रिकोणमितीय फल ची व्युत्पत्ती

उदाहरण 18: शोधा: $\frac{dy}{dx}$

(i) $y = \sqrt{1+\sin 2x} + \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{1-\cos 2x}$ (ii) $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

(iii) $y = \frac{1-\sin x}{\cos x}$

उत्तर: (i) $y = \sqrt{1+\sin 2x} + \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{1-\cos 2x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sin 2x} + \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{1-\cos 2x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sin 2x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{1-\cos 2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin 2x}}\frac{d}{dx}(1+\sin 2x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+2\cos^2 x - 1}}{1-1+2\sin^2 x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin 2x}}\left[\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}\sin 2x\right] + \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cot x \cdot \cos ecx\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sin 2x}}\left[2\cos 2x\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cot x \frac{d}{dx}(\cos ecx) + \cos ecx \frac{d}{dx}(\cot x)\right)$$

$$= \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cot x(-\cos ecx \cot x) + \cos ecx(-\cos ec^2 x)\right]$$

$$= \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}} + \frac{\cos ecx}{\sqrt{2}}\left[\cot^2 x + \cos ec^2 x\right]$$

(ii) $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sec^2 x + \tan^2 x\right) = \frac{d}{dx}\left(\sec^2 x\right) + \frac{d}{dx}\left(\tan^2 x\right)$$

$$= 2\sec x \cdot \sec x \tan x + 2\tan x \cdot \sec^2 x = 4\tan x \cdot \sec^2 x$$

पर्यायी

$$y = \sec^2 x + \tan^2 x = \sec^2 x - 1 + \sec^2 x = 2\sec^2 x - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sec^2 x+\tan^2 x\right)=\frac{d}{dx}\left(2\sec^2 x-1\right)=4\sec x\cdot\sec x\tan x$$

$$=4\tan x\cdot\sec^2 x$$

(iii) $$y=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\frac{d}{dx}\left(1-\sin x\right)-\left(1-\sin x\right)\frac{d}{dx}\left(\cos x\right)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x(-\cos x)-\left(1-\sin x\right)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{-\cos^2 x+\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}$$

उदाहरण 19: शोधा: $\frac{dy}{dx}$

(i) $y=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ (ii) $y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

(iii) $y=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

उत्तर: (i) $$y=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right),$$

समजा, $x=\sin\theta \quad \therefore \theta=\sin^{-1}x$

आणि $2x\sqrt{1-x^2}=2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

$$\therefore y=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta=2\sin^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2\sin^{-1}x\right)=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) $$y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right),$$

समजा, $x=\cos\theta \quad \therefore \theta=\cos^{-1}x$

आणि $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\tan\frac{\theta}{2}$

$$\therefore y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}x\right) = \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) $$y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right),$$

समजा, $x = \tan\theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1}x$

आणि $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tan 2\theta$

$$\therefore y = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\tan^{-1}x\right) = 2\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

उदाहरण 20: शोधा: $\dfrac{dy}{dx}$

(i) $y = \sin^{-1}\left(3x-4x^3\right)$ (ii) $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(iii) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

उत्तर: (i) $$y = \sin^{-1}\left(3x-4x^3\right),$$

समजा, $x = \sin\theta \quad \therefore \theta = \sin^{-1}x$

आणि $3x-4x^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$

$$\therefore y = \sin^{-1}\left(3x-4x^3\right) = \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta = 3\sin^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3\sin^{-1}x\right) = 3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) $$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),$$

समजा, $x = \tan\theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1}x$

आणि $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta$

$$\therefore y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\cos^{-1}(\cos 2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2\tan^{-1}x\right)=2\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}$$

(iii) $$y=\tan^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$

समजा, $x=\sin\theta \quad \therefore \theta=\sin^{-1}x$

आणि $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore y=\tan^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=\tan^{-1}(\tan\frac{\theta}{2})=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sin^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

3.5 लॉगॅरिथमिक आणि घातांकीय फलची व्युत्पत्ती

उदाहरण 21: शोधा $\dfrac{dy}{dx}$

(i) $y=x^{\sqrt{x}}$ (ii) $y=\left(\sin x\right)^x+x^{\sin x}$

(iii) $y=\log_{\cos x}\sin x$

उत्तर: (i) $y=x^{\sqrt{x}}$,

दोन्ही बाजूला लॉग चा वापर करून, $\log y=\log\left(x^{\sqrt{x}}\right)$

$$\therefore \log y=\sqrt{x}\log x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\log x)\right]=x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\log x)\right]$$

(ii) $$y=(\sin x)^{x}+x^{\sin x},$$

समजा आपण असे मानू की, $u=(\sin x)^{x}$ *and* $v=x^{\sin x}$

$$\therefore \log u=\log(\sin x)^{x}=x\log(\sin x)$$

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=x\frac{d}{dx}\left[\log(\sin x)\right]+\log(\sin x)\frac{d}{dx}(x)$$

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\log(\sin x)\cdot 1=x\cot x+\log(\sin x)$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=u\left[x\cot x+\log(\sin x)\right]=(\sin x)^{x}\left[x\cot x+\log(\sin x)\right]$$

आणि $v=x^{\sin x}$

$$\therefore \log v=\log(x)^{\sin x}=\sin x\log(x)$$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\sin x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\sin x\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot\cos x=\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x$$

$$\therefore \frac{dv}{dx}=v\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]=x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}=(\sin x)^{x}\left[x\cot x+\log(\sin x)\right]+x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]$$

(iii) $$y=\log_{\cos x}\sin x$$

इथे, $y=\log_{\cos x}\sin x$ $\quad\therefore y=\dfrac{\log_e\sin x}{\log_e\cos x}$

समजा आपण असे मानू की, $u=\log_e\sin x$ *and* $v=\log_e\cos x$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x \textit{ and } \qquad \frac{dv}{dx}=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-\tan x$$

$$\therefore y=\frac{u}{v}\quad \textit{and}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(\log_e\cos x)(\cot x)-(\log_e\sin x)(-\tan x)}{(\log_e\cos x)^{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cot x\log_e\cos x+\tan x\log_e\sin x}{(\log_e\cos x)^{2}}$$

उदाहरण 22: करिता $y = x^{x^x}$ $\dfrac{dy}{dx}$ शोधा

उत्तर: $y = x^{x^x}$

$$\therefore \log y = \log x^{x^x} = x^x \log x$$

समजा आपण असे मानू की, $let\ u = x^x$ $\qquad \therefore \dfrac{d}{dx}x^x = \dfrac{du}{dx}$

$$\log u = \log x^x = x \log x$$

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x)$$

$$\therefore \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = u(1 + \log x) = x^x (1 + \log x)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x \frac{d}{dx}\log x + \log x \frac{d}{dx}x^x$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x \cdot \frac{1}{x} + x^x \log x(1 + \log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = yx^x\left[\frac{1}{x} + \log x(1 + \log x)\right] = x^{x^x} \cdot x^x\left[\frac{1}{x} + \log x(1 + \log x)\right]$$

अनुप्रयोग (वास्तविक जीवन/औद्योगिक)

सिव्हिल अभियांत्रिकी, स्थलरूप

उदाहरण 1: समजा x हे क्षैतिज (horizontal) अंतर आणि p(x) रस्त्याची किंवा पायथ्याशी उंची असेल तर अंतराच्या संदर्भात व्युत्पन्न p'(x) म्हणजे रस्ता किंवा पायथ्याची प्रवणता (gradient) आहे.

न्यूटनची पद्धत:

उदाहरण 2: बीजगणितने न सोडविल्या जाणाऱ्या समीकरणासाठी उपयुक्त.

वक्ररेषीय गती:

उदाहरण 3: वक्रात फिरणाऱ्या वस्तुचा वेग (velocity) आणि त्वरण (accelaration) शोधण्यासाठी उपयुक्त.

व्युत्पत्ती वापरून वक्र रेखाटने:

उदाहरण 4: चलचे वर्तन रचण्यासाठी (To model the behavior of variables).

उपयोजित कमाल आणि किमान प्रश्न

उदाहरण 5: किंमत कमी करण्याच्या किंवा नफ्यात वाढ करण्याच्या प्रश्नांत कमाल किंवा किमान (Maximum or Minimum) स्थिती शोधणे.

यांत्रिक अभियांत्रिकी:

उदाहरण 6: समजा इंजिनद्वारे t वेळेत तयार होणारी उर्जा R(t) आहे. वेळेच्या संदर्भात ऊर्जेचे व्युत्पन्न R'(t) ही इंजिनची शक्ती आहे.

जीवशास्त्र:

उदाहरण 7: जीवाणू संस्कृतीत (bacterial culture) वाढीच्या अचूक दराचे नियमन करण्यासाठी जीवशास्त्रज्ञ विकलन (Differential Calculus) चा वापर करतात.

अर्थशास्त्र:

उदाहरण 8: Macro-economics मध्ये, काळाच्या संदर्भात अर्थव्यवस्थेच्या जीडीपीच्या बदलाचा दर आर्थिक विकास दर म्हणून ओळखला जातो. हे वारंवार अर्थशास्त्रज्ञांद्वारे वाढीचे माप म्हणून वापरले जाते.

संगणक बीजगणित प्रणाली:

उदाहरण 9: Maple आणि Mathematica ही व्युत्पन्न (derivative) मोजण्यासाठी वापरली जाऊ शकतात तसेच आयुर्विज्ञान (life science) च्या विद्यार्थ्यांना व्युत्पन्न (differentiation) वर प्रभुत्व मिळविण्यासाठी संगणक खूप उपयुक्त आहे.

घर्षण बल (Frictional forces) निश्चित करणे:

उदाहरण 10: घर्षण बल निर्धारित करण्यासाठी संकुल वस्तूंच्या (complex objects) पृष्ठभागाच्या क्षेत्राचे मोजणी करताना यांत्रिक अभियंता कलन (Calculus) चा वापर करतात.

खगोलशास्त्र (Astronomy):

उदाहरण 11: ग्रहांच्या गतीच्या नियमांवर आधारित, खगोलशास्त्रज्ञ ग्रहांच्या वेगवेगळ्या हालचालींचा अभ्यास करण्यासाठी कलन (Calculus) चा वापर करतात.

न्यूरोलॉजी:

उदाहरण 12: चेतापेशी (Neuron) मध्ये वेळेच्या (time) संदर्भात voltage चे बदल मोजण्यासाठी मज्जातंतूशास्त्रज्ञ (Neurologist) विकलन (Differential Calculus) चा वापर करतात.

रोगशास्त्र:

उदाहरण 13: रोग किती दूर आणि किती वेगाने पसरतो हे निश्चित करण्यासाठी साथरोगशास्त्रज्ञ (epidemiologist) संसर्गजन्य रोगांच्या (infectious disesases) प्रसाराचा अभ्यास करण्यासाठी कलन (Calculus) वापरतात.

ईष्टतमीकरण प्रश्न:

उदाहरण 14: व्युत्पत्ती (differentiation) वापरून फल (function) च्या स्थिर बिंदूंची (stationary points) व्युत्पन्न गणना केली जाऊ शकते आणि त्यांचे आलेख रेखाटले जाऊ शकते. स्थिर बिंदूंची गणना आम्हाला अशा समस्या सोडविण्यास मदत करते ज्यामध्ये काही चल (variable) कमाल किंवा किमान (maximize or minimize) करणे आवश्यक असते. या संकल्पनेचा वापर करून कमीतकमी इंधन वापरणाऱ्या कारची गती निश्चित केली जाऊ शकते.

घटक सारांश

प्रथम विभाग मध्ये व्युत्पत्तीचे पहिले तत्व (first principle of derivative), बदलांचे सरासरी दर (average rate of change) संकल्पना, बदलांचे त्वरित दर (instantaneous rate of change) यावर चर्चा केली गेली.

दुसरा विभाग व्युत्पन्नचे नियम बेरीज/फरक (linearity), गुणन (product rule), भागाकार (quotient rule) चे व्युत्पन्न यांच्याशी संबंधित आहे. हे सामान्य नियम व्युत्पन्न प्रश्न (differentiation problems) ला मूलभूत सूत्रांमध्ये (basic formula) परिवर्तित करण्यासाठी खूप उपयुक्त आहेत. गणिताच्या अनेक अनुप्रयोगांमध्ये संगणकीय बीजगणित प्रणाली वापरण्यासाठी व्युत्पन्नचे Chain Rule महत्त्वपूर्ण आहे. व्युत्पन्न मोजण्यासाठी तिसरा विभाग त्रिकोणमितीय (trigonometric) आणि व्यस्त त्रिकोणमितीय (inverse trigonometric) फलचे विकलनसह प्रारंभ होतो आणि पुढे लॉगॅरिथमिक (Logarithmic) विकलन, घातांकीय फल (Exponential) यांचे विकलनचा समावेश होतो.

प्रत्येक विभागात सुधारित ब्लूमच्या वर्गीकरणानुसार वाढत्या अडचणींच्या पातळीवर उदाहरणे दिली आहेत, सराव करण्यासाठी प्रश्नावली प्रदान करताना समान नमुना अवलंबला आहे. व्युत्पन्नच्या मुख्य संकल्पना आणि अनुप्रयोगांना मजबुती देण्यासाठी तयार केलेली नवीन उदाहरणे, ज्यायोगे विद्यार्थ्यांना विश्लेषणात्मक साधन म्हणून व्युत्पत्तीबद्दल थोडीशी ओळख असेल. काही मुक्त प्रश्नांचा सल्ला देखील देण्यात आला आहे की हे तोंडी प्रश्न मुख्य अटी आणि संकल्पनांच्या वैचारिक आकलनाचे मूल्यांकन करण्यास मदत करतील. दुसरीकडे, बीजगणित समस्या विद्यार्थ्यांना बीजगणित सोडविण्यास मदत करतात, आलेख आणि व्युत्पन्नशी संबंधित प्रश्न विद्यार्थ्यांचे आलेखीय दृष्टिकोनातून व्युत्पन्न भाषेच्या क्षमतेचे मूल्यांकन करतात. संख्यात्मक प्रश्न साठी विद्यार्थ्यांना गणना करणे आवश्यक असते. वास्तविक जागतिक अनुप्रयोग वास्तववादी समस्येची परिस्थिती सादर करतात.

स्वाध्याय

बहुपर्यायी प्रश्न

1. $\dfrac{d}{dx}\log(\log x) =$

(a) $\dfrac{x}{\log x}$ (b) $\dfrac{\log x}{x}$

(c) $(x\log x)^{-1}$ (d) यापैकी नाही

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 =$

(a) $1-\dfrac{1}{x^2}$ (b) $1+\dfrac{1}{x^2}$

(c) $1-\dfrac{1}{2x}$ (d) यापैकी नाही

3. जर $y = x + \frac{1}{x}$, तर

(a) $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 0$ (b) $x^2 \frac{dy}{dx} + xy + 2 = 0$

(c) $x^2 \frac{dy}{dx} - xy + 2x^2 = 0$ (d) यापैकी नाही

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4 \sec x}\right) =$

(a) $\frac{x \sin x + 4 \cos x}{x^5}$ (b) $\frac{-(x \sin x + 4 \cos x)}{x^5}$

(c) $\frac{4 \cos x - x \sin x}{x^5}$ (d) यापैकी नाही

5. जर $y = x \sin x$, तर

(a) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \cot x$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \cot x$

(c) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \cot x$ (d) यापैकी नाही

6. $\frac{d}{dx}(x^2 e^x \sin x) =$

(a) $x e^x (2 \sin x + x \sin x + x \cos x)$ (b) $x e^x (2 \sin x + x \sin x - \cos x)$

(c) $x e^x (2 \sin x + x \sin x + \cos x)$ (d) यापैकी नाही

7. $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)\right] =$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) -1 (d) 1

8. $\frac{d}{dx}[\cos(1 - x^2)^2] =$

(a) $-2x(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$ (b) $-4x(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$

(c) $4x(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$ (d) $-2(1 - x^2)\sin(1 - x^2)^2$

9. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right) =$

(a) $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(b) $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(c) $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(d) यापैकी नाही

10. जर $y = \cos(\sin x^2)$, तर $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \dfrac{dy}{dx} =$

(a) -2

(b) 2

(c) $-2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

(d) 0

11. $a^x + \log x.\sin x$ चा भिन्नता गुणांक आहे _______

(a) $a^x \log_e a + \dfrac{\sin x}{x} + \log x.\cos x$

(b) $a^x + \dfrac{\sin x}{x} + \cos x.\log x$

(c) $a^x \log a + \dfrac{\cos x}{x} + \sin x.\log x.$

(d) यापैकी नाही

12. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\dfrac{ax-b}{bx+a}\right) =$

(a) $\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

(b) $\dfrac{-1}{1+x^2} - \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

(c) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

(d) यापैकी नाही

13. $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{2}}}\right)$ बरोबर

(a) $-\dfrac{1}{4}$

(b) $\dfrac{1}{2}$

(c) $-\dfrac{1}{2}$

(d) $\dfrac{1}{4}$

14. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}} =$

(a) $\sec^2 x$

(b) $-\sec^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

(c) $\sec^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

(d) $\sec^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

15. जर $y=\sqrt{(1-x)(1+x)}$, तर

(a) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=0$

(b) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=0$

(c) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-2xy=0$

(d) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=0$

16. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cot^2 x-1}{\cot^2 x+1}\right)=$

(a) $-\sin 2x$

(b) $2\sin 2x$

(c) $2\cos 2x$

(d) $-2\sin 2x$

17. $\dfrac{d}{dx}[\sin^n x\cos nx]=$

(a) $n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x$

(b) $n\sin^{n-1} x\cos nx$

(c) $n\sin^{n-1} x\cos(n-1)x$

(d) $n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x$

18. जर $f(x)=\log_x(\log x)$, तर $f'(x)$ ला $x=e$ आहे ______

(a) e

(b) $\dfrac{1}{e}$

(c) 1

(d) यापैकी नाही

19. जर $y=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/4}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1} x$, तर $\dfrac{dy}{dx}=$

(a) $\dfrac{x^2}{1-x^4}$

(b) $\dfrac{2x^2}{1-x^4}$

(c) $\dfrac{x^2}{2\,(1-x^4)}$

(d) यापैकी नाही

20. जर $y = \log \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, तर $\dfrac{dy}{dx} =$

(a) $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$

(c) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

21. $\dfrac{d}{dx} e^{x+3\log x} =$

(a) $e^x . x^2 (x+3)$ (b) $e^x . x(x+3)$

(c) $e^x + \dfrac{3}{x}$ (d) यापैकी नाही

22. $\dfrac{d}{dx} \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}} =$

(a) $\sec^2 x$ (b) $-\text{cosec}^2 x$

(c) $2\sec^2 \dfrac{x}{2}$ (d) $-2\text{cosec}^2 \dfrac{x}{2}$

23. $\dfrac{d}{dx} \log \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) =$

(a) $\text{cosec}\, x$ (b) $-\text{cosec}\, x$

(c) $\sec x$ (d) $-\sec x$

24. $\dfrac{d}{dx} \log(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) =$

(a) $\dfrac{1}{2[\sqrt{(x-a)} + \sqrt{(x-b)}]}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ (d) यापैकी नाही

25. जर $y = \sin[\cos(\sin x)]$, तर $dy/dx =$

(a) $-\cos[\cos(\sin x)]\sin(\cos x).\cos x$ (b) $-\cos[\cos(\sin x)]\sin(\sin x).\cos x$

(c) $\cos[\cos(\sin x)]\sin(\cos x).\cos x$ (d) $\cos[\cos(\sin x)]\sin(\sin x).\cos x$

26. जर $y = \sin^{-1}\sqrt{\sin x}$, तर $\frac{dy}{dx}$ बरोबर

(a) $\frac{2\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}$ (b) $\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cosec} x}$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{cosec} x}$

27. जर y = log (cosec x – cot x), तर $\frac{dy}{dx}$ बरोबर

(a) cosec x + cot x (b) cot x

(c) sec x + tan x (d) cosec x

28. जर y = log (sinx), तर $\frac{dy}{dx}$ बरोबर

(a) cot x (b) tan x

(c) sec x (d) cosec x

29. जर y = sin(logx) तर $\frac{dy}{dx}$ बरोबर

(a) cos(log$x$) (b) $\frac{1}{sinx}$

(c) $\frac{\cos(logx)}{x}$ (d) cosec (log$x$)

30. जर $y = 3\sqrt[3]{cosx}$ तर $\frac{dy}{dx}$ बरोबर

(a) $3\sqrt[3]{sinx}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{cosx}}$

(c) $-\ 3\sqrt[3]{sinx}$ (d) $\frac{-sinx}{\sqrt[3]{cos^2x}}$

उत्तरे - बहुपर्यायी प्रश्न									
1.	c	**2.**	a	**3.**	c	**4.**	b	**5.**	a
6.	a	**7.**	a	**8.**	c	**9.**	b	**10.**	d
11.	a	**12.**	d	**13.**	a	**14.**	b	**15.**	b
16.	d	**17.**	a	**18.**	b	**19.**	a	**20.**	b
21.	a	**22.**	b	**23.**	c	**24.**	b	**25.**	b
26.	c	**27.**	d	**28.**	a	**29.**	c	**30.**	d

लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. व्याख्येनुसार x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y = x^2 + 2x - 3$ (ii) $y = \cos 2x$

(iii) $y = \log(x+1)$ (iv) $y = \dfrac{1}{2x+3}$

(v) $y = e^{3x+2}$ (vi) $y = \tan x$

2. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (ii) $y = \dfrac{4x^3 - 3x + 7}{x}$

(iii) $y = \dfrac{\left(x^2+1\right)(x-1)}{x\sqrt{x}}$ (iv) $y = 2x^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2^x$

(v) $y = \left(3x^2 - 2x + 5\right)^2$ (vi) $y = \log_e x^3 + 3e^x - 12$

3. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y = (2 + 3\sin x)(3 + 2\cos x)$ (ii) $y = x \tan x (x^2 + 1)$

(iii) $y = \operatorname{cosec} x \cot x$ (iv) $y = x \sin^{-1} x$

(v) $y = e^x \tan^{-1} x$ (vi) $y = e^x x^2 2^x$

4. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y = \dfrac{px^2 + qx + r}{ax^2 + bx + c}$ (ii) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

(iii) $y = \dfrac{\tan x}{\sec x + \tan x}$ (iv) $y = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

(v) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (vi) $y = \dfrac{e^x \tan x}{x}$

5. x च्या संदर्भात $y = \dfrac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 5}$ चे व्युत्पन्न काढा आणि शोधा $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}$

6. जर $y = \dfrac{x}{1+x}, x \neq -1$, सिद्ध करा $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y^2$.

7. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y=\tan^3 x+\tan x^3$ (ii) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(iii) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

8. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y=e^{2x}\sin 3x$ (ii) $y=2^x\log\cos x$

(iii) $y=\log\left[\log\left(\sin 2x\right)\right]$ (iv) $y=e^{m\tan^{-1}x}$

(v) $y=\left(3x^3+2x^2-x-11\right)^5$ (vi) $y=\sin\left[\log\left(\cos 2x\right)\right]$

9. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y=\left(\sin x\right)^{\tan x}$ (ii) $\left(\cos x\right)^y=\left(\sin y\right)^x$

(iii) $y=\dfrac{x+1}{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}$ (iv) $y=\left(x\right)^{\sqrt{x}}+\left(\sqrt{x}\right)^x$

(v) $y=x^{x^{\sqrt{x}}}$ (vi) $x^y=e^{x+y}$

10. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $y=\cos^{-1}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ (ii) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin 3\theta-\sin\theta}{\cos 3\theta+\cos\theta}\right)$

(iii) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$ (iv) $y=\tan^{-1}\left[\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right]$

(v) $y=\cos^{-1}\left[\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)\right]$ (vi) $y=\cos^{-1}\left(2x^2-1\right)$

11. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $x=at^2, y=2at \quad t\in R$

(ii) $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta \; where \; \theta\neq\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$

(iii) $x=2\cos t-\cos 2t, y=2\sin t-\sin 2t,\; t\in R$

12. x च्या संदर्भात खाली दिलेल्या फलचे व्युत्पन्न काढा:

(i) $x^3+y^3=3xy$ (ii) $y=\sin(x+y)$

(iii) $x\sin y+y\sin x=11$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. (i) $2x+2$ (ii) $-2\sin 2x$ (iii) $\dfrac{1}{x+1}$

(iv) $\dfrac{-2}{(2x+3)^2}$ (v) $3e^{3x+2}$ (vi) $\sec^2 x$

2. (i) $\dfrac{1}{2}\left(x^{\frac{-1}{2}}+x^{\frac{-3}{2}}\right)$ (ii) $8x-\dfrac{7}{x^2}$ (iii) $\dfrac{1}{2}\left(3x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{-1}{2}}-x^{\frac{-3}{2}}+3x^{\frac{-5}{2}}\right)$

(iv) $6x^2+\dfrac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}+2^x\log 2$ (v) $2\left(18x^3-18x^2+34x-10\right)$ (vi) $3\left(\dfrac{1}{x}+e^x\right)$

3. (i) $9\cos x-4\sin x+6\cos 2x$ (ii) $(x^3+x)\sec^2 x+(3x^2+1)\tan x$

(iii) $\dfrac{-(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$ (iv) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1} x$ (v) $e^x\left(\dfrac{1}{1+x^2}+\tan^{-1} x\right)$

(vi) $xe^x 2^x\left(x\log 2+x+2\right)$

4. (i) $\dfrac{(pb-qa)x^2+2(pc-ra)x+(qc-rb)}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$ (ii) $\dfrac{1}{1+\cos x}$ (iii) $\dfrac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^2}$

(iv) $\dfrac{4xa^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ (iv) $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ (vi) $\dfrac{e^x}{x^2}\left[x\sec^2 x+(x-1)\tan x\right]$

5. $\dfrac{3x^2-24x+15}{\left(x^2-5\right)^2}$ $,-\dfrac{3}{8}$

7. (i) $3\left[\tan^2 x\sec^2 x+x^2\sec^2\left(x^3\right)\right]$ (ii) $\dfrac{-1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)(1+x)}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

8. (i) $e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$ (ii) $2^x(\log 2\cdot\log\cos x-\tan x)$ (iii) $\dfrac{2\cot 2x}{\log(\sin 2x)}$

(iv) $\dfrac{m}{1+x^2}e^{m\tan^{-1}x}$ (v) $5(9x^2+4x-1)(3x^3+2x^2-x-11)^4$

(vi) $-2\tan 2x\cdot\cos\left[\log\left(\cos 2x\right)\right]$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न
9. (i) $(\sin x)^{\tan x}\left[1+\sec^2 x\log\sin x\right]$ (ii) $\dfrac{\log(\sin y)+y\tan x}{\log(\cos x)-x\cot y}$ (iii) $\dfrac{-\left(x^2+2x+5\right)}{(x-3)^2(x+2)^2}$
(iv) $\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(2+\log x)+\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^x}{2}\left(1+2\log\sqrt{x}\right)$ (iv) $x^{x^{\sqrt{x}}}x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\log x(2+\log x)}{2\sqrt{x}}\right)$
(vi) $\dfrac{x-y}{x(\log x-1)}$
10. (i) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$ (ii) 0 (iii) $\dfrac{3}{1+x^2}$ (iv) $\dfrac{1}{2}$
(v) $\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$ (vi) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
11. (i) $\dfrac{1}{t}$ (ii) $\dfrac{b}{a}\cos ec\theta$ (iii) $\tan\left(\dfrac{3t}{2}\right)$
12. (i) $\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$ (ii) $\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$ (iii) $-\dfrac{\sin y+y\cos x}{\sin x+x\cos y}$

अधिक जाणून घ्या

- विकलन (Differential Calculus) चा विकास.
- व्युत्पत्तीचा (Differentiation) अभ्यास का?
- कलन (Calculus) आपल्या दैनंदिन जीवनात कसा वापरला जातो.
- सीमा आणि व्युत्पत्ती (Limits and Differentiation)
- वक्रला स्पर्शिकाचा कल (Slope of a Tangent to a Curve).
- तात्काळ बदलाचा दर (Instantaneous Rate of Change) म्हणून व्युत्पन्न
- बहुपदीचे व्युत्पन्न (Derivatives of Polynomials)
- उच्च व्युत्पन्न (Higher Derivatives)
- आंशिक व्युत्पन्न (Partial Derivatives)
- दैनंदिन जीवनात गणिताची विचारसरणी का महत्त्वाची आहे?
- ऑनलाईन अध्यापन (Shift to Online Teaching).

- व्युत्पत्ती (Differentiation) शिकण्याचा सर्वात सोपा मार्ग.
- विकलन (Differential Calculus) चा शोध का लागला?
- विकलन (Differential Calculus) अंतर्ज्ञानाने शिकणे.
- व्युत्पत्ती (Differentiation) ला कमी क्लिष्ट करणे.
- शिक्षकांसाठी ऑनलाईन शिक्षणाची साधने.
- विवेचनात्मक विचार (critical thinking) शिकवणे
- STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) शिक्षण

लघु प्रकल्प

1. Geo Gebra चा वापर फलचा आलेख (graph of function) आणि व्युत्पन्न (derivative) तसेच अभियांत्रिकी अनुप्रयोग (engineering application) साठी करा.
2. वास्तविक जगाच्या समस्यांसाठी व्युत्पन्नच्या अनुप्रयोगांवर (application of derivative) आधारित प्रश्नांचा संच गोळा करा.

चौकसपणा आणि जिज्ञासासाठी प्रश्न

1. कंपनीमध्ये नफा कसा वाढविला जाऊ शकतो किंवा आपण खर्च कमीतकमी कसा करू शकतो?
2. विशिष्ट वस्तू तयार करण्यासाठी आम्ही कमीतकमी सामग्रीची गणना कशी करू शकतो?
3. वळण फेरी मारत असताना गाडी का घसरते?
4. बहुमुळे (multiple roots) असलेल्या अ-बहुपदी फल (non-polynomial function) चे काय होते?
5. सर्वोत्तम स्टॉक कसा निवडायचा?
6. दिलेले समीकरण एक रेषात्मक फल (linear function) आहे की अरेखीय फल (non-linear function) आहे हे आम्ही कसे ठरवू शकतो?
7. जर एखादे फल (function) एखाद्या बिंदूवर (point) परिभाषित केलेले नसेल तर त्या ठिकाणी व्युत्पन्न केले जाऊ शकते काय?
8. दोन धनात्मक संख्यांची बेरीज 40 आहे. एका संख्येला दुसऱ्याच्या वर्गाने गुणाकार केला जातो. गुणन जास्तीत जास्त करण्यासाठी, संबंधित संख्या किती असेल?
9. प्रत्येक क्षणी तुम्ही तुमचे स्थान नेमके कसे मोजता?
10. आलेखात स्पर्शिकांबद्दलचे (tangent) कोणतेही विधान व्युत्पन्न (derivative) बद्दलचे विधान म्हणून वाचले जाऊ शकते का?

वरील प्रश्नांव्यतिरिक्त, कलन (Calculus) चा वापर जटिल आणि अनियमित आकारांचे क्षेत्र (area of complicated and irregular shapes) सोडविण्यासाठी, सर्वेक्षण डेटाचा अंदाज, वाहनांची सुरक्षितता, व्यावसायिक पूर्वानुमान (occupational forecasting), क्रेडिट कार्ड पेमेंट रेकॉर्ड इत्यादींचे निराकरण करण्यासाठी केला जातो.

संदर्भ आणि सूचित वाचन

1. E. Krezig, Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition, Wiley, 2015.
2. H. K. Das, Advanced Engineering Mathematics, S. Chand & Co, New Delhi, 2007.
3. B. S. Grewal, *Higher Engineering Mathematics,* Khanna Publication, New Delhi, 2015.
4. S. S. Sastry, *Engineering Mathematics, Volume 1*, PHI Learning, New Delhi, 2009.
5. Alan Jeffrey, Advanced *Engineering Mathematics,* Harcourt/Academic Press, 2002, USA.
6. M.P. Trivedi and P.Y. Trivedi, Consider *Dimension and Replace Pi,* Notion Press, 2018.
7. www.scilab.org/ -SCI Lab
8. https://grafeq.en.downloadastro.com/- Graph Eq^n 2.13
9. https://www.geogebra.org- Geo Gebra
10. Thomas Jr, George B., Weir, Maurice D. and Hass, Joel R., Thomas' Calculus, 12th edition. Pearson 2014.
11. Thomas, G.B. and Finney, R.L., Calculus and Analytic Geometry, 9th Edition, Pearson, Reprint, 2002.
12. https://www.desmos.com/ Desmos
13. https://math.microsoft.com
14. https://nptel.ac.in/courses/111/105/111105121/

4 संमिश्र संख्या आणि आंशिक अपूर्णांक

घटक वैशिष्ट्ये

सादर घटक खालील विषयांवर सविस्तर चर्चा करते:

- संमिश्र संख्याच्या वास्तविक (real) आणि काल्पनिक (imaginary) भागांची व्याख्या;
- ध्रुवीय (Polar) आणि कार्टेशियन (Cartesian) स्वरूप;
- संमिश्र संख्येचे प्रतिनिधित्व आणि त्याचे एका रूपातून दुस -या स्वरूपात रूपांतरण;
- संमिश्र संख्येचे संयुग्म (conjugate), संमिश्र संख्येचे मापांक (modulus) आणि कोनांक (argument);
- संमिश्र संख्येची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार;
- De-Movire चे प्रमेय, त्याचे अनुप्रयोग;
- बहुपदीय अपूर्णांक (polynomial fraction), योग्य (proper) आणि अयोग्य (improper) अपूर्णांक ची व्याख्या;
- आंशिक अपूर्णांक (partial fraction) व्याख्या;
- विविध प्रकरणांमध्ये योग्य अपूर्णांक आंशिक अपूर्णांकात सोडवणे;
- अयोग्य अपूर्णांक आंशिक अपूर्णांकात सोडवणे.

अधिक उत्सुकता आणि सृजनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी अनुप्रयोग (application) आधारित प्रश्नांवर चर्चा केली आहे.

मोठ्या प्रमाणात दिलेले दोन प्रकारात वर्गीकृत बहुपर्यायी प्रश्न तसेच लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न, याव्यतिरिक्त Bloom च्या वर्गीकरणानुसार खालची ते वरची पातळी या क्रमाने अनेक संख्यात्मक प्रश्नांचे स्वाध्याय, संदर्भ आणि सूचित वाचन अधिक सराव करण्यासाठी दिलेले आहेत. याव्यतिरिक्त, "अधिक जाणून घ्या" विभाग जोडला आहे. हा विभाग विचारपूर्वक आखला गेला आहे, जेणेकरून या भागातील पुरवलेली माहिती पुस्तक वापरकर्त्यांसाठी फायदेशीर ठरेल.

हा विभाग प्रामुख्याने संमिश्र नंबरचा अभ्यास का करावा? यातील पुढील शिक्षण अणि अध्यापन शी संबंधित काही मनोरंजक तथ्य, आपल्या दैनंदिन जीवनात संमिश्र संख्या आणि आंशिक अपूर्णांक कसे वापरले जातात, वास्तविक संख्यांचा संच वाढवण्याची गरज, दैनंदिन जीवनात गणिताची विचारसरणी का मोलाची आहे, ऑनलाइन शिक्षणाकडे वळणे, संमिश्र संख्या आणि त्याचे बीजगणित शिकण्याचा सर्वात सोपा मार्ग, आंशिक अपूर्णांकाचे, अंतर्ज्ञानाने शिक्षण आणि महत्त्व, शिक्षकांसाठी ऑनलाइन शिक्षण साधने यांवर प्रकाश टाकणारा आहे. दुसरीकडे, सुचवलेले लघु प्रकल्प आणि मेंदु-विचारमंथन आधारित प्रश्न या विषयात समाविष्ट असलेल्या विषयांसाठी जिज्ञासा आणि कुतूहल निर्माण करतात.

प्रस्तावना

संमिश्र संख्या (Complex numbers), गणितातील सर्वात मोहक आणि मनोरंजक विषयांपैकी एक आहे. संमिश्र संख्या, त्यांची बीजगणित आणि भूमिती हे नेहमी शुद्ध आणि उपयोजित गणितावर (pure and applied mathematics) आधारित हजारो समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी एक महत्त्वाचे साधन आहे. खरं तर, काही गुणधर्म वास्तविक चल (real variables) पेक्षा संमिश्र (complex) मध्ये सोपे असतात. यामध्ये बहुपदी समीकरणे सोडवताना त्यांचे महत्त्व पाहण्याचा समावेश आहे. संमिश्र संख्यांची बेरीज आणि गुणाकार, त्यांचे प्रतिनिधित्व आम्हाला परिपथ (circuit) चे वर्तन समजण्यास मदत करते, ज्यात A.C. सिग्नल लागू करताना प्रतिरोध (reactance) असते. विद्युत अभियंता (electric engineer) विद्युत प्रवाह (electric current) मोजण्यासाठी आणि विद्युत परिपथ (circuit) कसे कार्य करतात हे स्पष्ट करण्यासाठी संमिश्र संख्या वापरतात. इमारती आणि पुलांमधील बीम (beam) च्या ताणांचे विश्लेषण करण्यासाठी यांत्रिक अभियंते (mechanical engineer) संमिश्र संख्यांचा वापर करतात. सारणीची (matrix) स्व-मूल्ये आणि स्व-सदिश राशी (eigenvalues and eigenvectors) च्या मदतीने अभियंते बीम (beam) चे ताण संख्यात्मकदृष्ट्या स्पष्ट करतात. हे आम्हाला दोलन (oscillation) बद्दल विचार करण्याचा एक नवीन मार्ग देते. युक्लिडच्या प्रतलीय भूमिती (Eucild's plane geometry) मध्ये संमिश्र संख्यांचे महत्त्व आणि त्याच्या अनुप्रयोगांचे (application) महत्त्व जाणून विश्लेषणात्मक किट (analytical kit) भविष्यातील शिक्षकांना विद्यार्थ्यांसोबत काम करताना एक मजबूती प्रदान करते.

दुसरीकडे, आंशिक अपूर्णांक विघटन (partial fraction decomposition) ही एक गुणोत्तरीय राशी (rational expression) ची आणि सोप्या गुणोत्तरीय राशीमध्ये विघटन करण्याची प्रक्रिया आहे, जी आपण मूळ गुणोत्तरीय राशी (original rational expression) मिळवण्यासाठी जोडू किंवा वजा (add or subtract) करू शकतो. गुणोत्तरीय राशीचा समावेश असलेले अनेक संकलक (integrals) संकल्यवर (integrand) आंशिक अपूर्णांक (partial fraction) वापरून सोडवले जाऊ शकतात.

पूर्व-आवश्यकता

- फल आणि त्यांचे आलेख (Functions and their graphs)
- त्रिकोणमितीय फल (Trigonometric function)
- त्रिकोणमितीय नित्यसमीकरण (Trigonometric identities)
- निर्देशक भूमिती (Coordinate Geometry)
- बीजगणित तंत्रांची ओळख (Familiarity with the algebraic techniques)
- योग्य अपूर्णांक (Proper fraction)
- अयोग्य अपूर्णांक (Improper fraction)
- प्रतिस्थापन (Substitution)

घटक निष्पत्ती

या घटकाची निष्पत्ति खालीलप्रमाणे आहे:

U4-O1: संमिश्र संख्यांवर बीजगणित वापरणे आणि Argand आकृतीवर संमिश्र संख्याचे आलेखन करणे.

U4-O2: दिलेले प्रश्न सोडवण्यासाठी संमिश्र संख्यांचे ध्रुवीय स्वरूप $[r, \theta]$ आणि त्याचे बीजगणित वापरणे.

U4-O3: संमिश्र प्रतलात (complex plane) संमिश्र संख्या आणि बिंदूमार्ग (locii) चे संबंध सांगणे.

U4-O4: अनुप्रयोग-आधारित प्रश्नसाठी De-Moivre चे प्रमेय वापरणे.

U4-O5: बीजगणितीय अपूर्णांक (algebraic fraction) त्याच्या आंशिक अपूर्णांकांची (partial fraction) बेरीज म्हणून व्यक्त करणे.

घटक-4 निष्पत्ती (UO)	विषय निष्पत्ती सह संभावित मानचित्रण (1-दुर्बल सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5	CO-6	CO-7
U4-O1	-	-	-	1	1	1	3
U4-O2	-	1	-	1	2	1	3
U4-O3	-	1	-	3	1	1	2
U4-O4	-	1	-	2	1	1	3
U4-O5	-	-	-	2	2	1	-

4.1 संमिश्र संख्येची व्याख्या आणि बीजगणित

4.1.1 संमिश्र संख्येची मूलभूत संकल्पना

व्याख्या: $x, y \in R$ आणि $i = \sqrt{-1}$ करिता $x + iy$, च्या स्वरूपातील संख्याना संमिश्र संख्या आणि 'i' ला आयोटा (iota) असे म्हटले जाते. संमिश्र संख्या सहसा z आणि संमिश्र संख्येचा संच C द्वारे दर्शविला जातो.

$$i.e.,\ C = \left\{x + iy : x \in R, y \in R, i = \sqrt{-1}\right\}$$

उदा. $5+3i, -1+i, 0+4i, 4+0i$ इत्यादी संमिश्र संख्या आहेत.

(i) यूलर (Euler) हे पहिले गणितज्ञ होते ज्यांनी $i^2 = -1$. गुणधर्मासह (– 1) च्या वर्गमूळासाठी i (iota) चिन्ह सादर केले. त्याने या चिन्हाला काल्पनिक एकक (imaginary unit) असेही म्हटले.

(ii) कोणत्याही धनात्मक वास्तविक संख्या a साठी, $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \times a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a}$

(iii) जर a आणि b पैकी किमान एक अ-ऋणात्मक (non-negative) असेल तरच गुणधर्म $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ वैध असेल. जर a आणि b दोन्ही ऋणात्मक असतील तर $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{|a|.|b|}$.

उदाहरण 1: $\sqrt{-2}\sqrt{-3} =$

(a) $\sqrt{6}$ (b) $-\sqrt{6}$

(c) $i\sqrt{6}$ (d) या पैकी नाही

उत्तर: (b) $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = i\sqrt{2}i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

i (iota) चे घातांक:

जेव्हा $i=\sqrt{-1}$ तर $i^2=-1$, $i^3=-i$ and $i^4=1$. $i^n(n>4)$, ची किंमत काढण्याकरिता n ला 4 ने भाग द्या. समजा q भागाकार (quotient) आणि r बाकी (remainder) आहे.

$n=4q+r$ करिता, $i^n=i^{4q+r}=(i^4)^q.(i)^r=(1)^q.(i)^r=i^r$ ... जेथे $0\le r\le 3$

अशाप्रकारे, आपल्याकडे $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, जेथे n हा पूर्णांक आहे.

उदाहरण 2: $\dfrac{i^{592}+i^{590}+i^{588}+i^{586}+i^{584}}{i^{582}+i^{580}+i^{578}+i^{576}+i^{574}}-1=$

(a) -1 (b) -2

(c) -3 (d) -4

उत्तर: (b) $\dfrac{i^{584}\left(i^8+i^6+i^4+i^2+1\right)}{i^{574}\left(i^8+i^6+i^4+i^2+1\right)}-1=\dfrac{i^{584}}{i^{574}}-1=i^{10}-1=-1-1=-2$

4.1.2 संमिश्र संख्येचे वास्तविक (real) आणि काल्पनिक भाग (imaginary parts)

जर x आणि y दोन वास्तविक (real) संख्या आहेत, तर $z=x+iy$ च्या स्वरूपातील संख्येला संमिश्र संख्या म्हणतात. येथे x ला z चा वास्तविक भाग (real part) आणि y ला z चा काल्पनिक भाग (imaginary part) म्हणतात. z चा वास्तविक भाग Re(z) आणि काल्पनिक भाग Im(z) द्वारे दर्शवला जातो. जर z = 3 – 4i, तर Re(z) = 3 आणि Im(z) = –4· संमिश्र संख्येत काल्पनिक भाग (imaginary part) शून्य असल्यास z पूर्णपणे वास्तविक असेल अर्थात Im(z) = 0 आणि जर वास्तविक भाग (real part) शून्य असेल तर z पूर्णपणे काल्पनिक असेल, म्हणजे Re(z) = 0.

उदाहरण 3: Re(2i – 3) = ...

(a) –2 (b) 2

(c) –3 (d) 3

उत्तर: (a) Re(2i – 3) = Re(–3 + 2i) = – 3

4.1.3 संमिश्र संख्येची बीजगणितीय क्रिया

समजा $z_1=a+ib$ आणि $z_2=c+id$ दोन संमिश्र संख्या आहेत.

बेरीज (z_1+z_2) : $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

वजाबाकी (z_1-z_2) : $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

गुणाकार $(z_1.z_2)$: $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

भागाकार (z_1/z_2) : $\dfrac{a+ib}{c+id}$ (जेथे c आणि d शून्येतर (non-zero) असेल)

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)}{(c+id)}\cdot\frac{(c-id)}{(c-id)} \text{ (परिमेयन)}$$

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

4.1.4 संमिश्र संख्येची बीजगणितीय क्रियाचे गुणधर्म

समजा z_1, z_2 आणि z_3 ह्या संमिश्र संख्या आहेत तर बीजगणितीय क्रियाचे गुणधर्म खालीलप्रमाणे आहेत:

(i) संमिश्र संख्येची बेरीज (addition) क्रमनिरपेक्ष (commutative) आणि साहचर्य (associative) गुणधर्म दाखवतात.
$z_1+z_2=z_2+z_1$ आणि $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

(ii) संमिश्र संख्येचा गुणाकार (multiplication) क्रमनिरपेक्ष (commutative) आणि साहचर्य (associative) गुणधर्म दाखवतात. $z_1z_2=z_2z_1$ आणि $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.

(iii) संमिश्र संख्येच्या बेरीजवर गुणाकार हे वितरक (multiplication is distributive over addition) गुणधर्म दाखवतात. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ आणि $(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1$.

उदाहरण 4: निर्देशित क्रिया करा आणि उत्तर $x+iy$ स्वरूपात लिहा, जेथे $x, y \in R$.

(i) $(3-2i)+i(5+2i)$

(ii) $\left(\sqrt{2}-i\right)-(2+4i)+i\left(2+\sqrt{2}i\right)$

(iii) $(3-2i)(i+4)$

(iv) $(2-i)(2+i)(1+i)$

(v) $\dfrac{5-2i}{2+3i}$

(vi) $\dfrac{(2+i)(i-3)}{4i+3}$

(vii) $i^{12}+(3-2i)^2$

(viii) $\left(\sqrt{5}-7i\right)\left(\sqrt{5}+7i\right)^2$

(ix) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)}{1+i}$

उत्तर:

(i) समजा $z=(3-2i)+i(5+2i)$

$$\therefore z=(3-2i)+\left(5i+2i^2\right)=3-2i+5i-2=1+3i$$

(ii) समजा $z=\left(\sqrt{2}-i\right)-(2+4i)+i\left(2+\sqrt{2}i\right)$

$$z=\left(\sqrt{2}-i\right)-(2+4i)+i\left(2+\sqrt{2}i\right)=\sqrt{2}-i-2-4i+2i+\sqrt{2}\,i^2=\sqrt{2}-3i-2-\sqrt{2}=-2-3i$$

(iii) समजा $z=(3-2i)(i+4)$

$$\therefore z=(3-2i)(i+4)=3i+12-2i^2-8i=14-5i$$

(iv) समजा $z=(2-i)(2+i)(1+i)$

$$\therefore z=(2-i)(2+i)(1+i)=\left((2)^2-(i)^2\right)(1+i)$$

$$=(4+1)(1+i)=5(1+i)=5+5i$$

(v) समजा $z=\dfrac{5-2i}{2+3i}$

$$\therefore z=\frac{5-2i}{2+3i}=\frac{5-2i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{10-15i-4i+6i^2}{(2)^2+(3)^2}=\frac{4-19i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i$$

(vi) समजा $z=\dfrac{(2+i)(i-3)}{4i+3}$

$$\therefore z=\frac{(2+i)(i-3)}{4i+3}=\frac{2i-6+i^2-3i}{3+4i}=\frac{-7-i}{3+4i}=\frac{-7-i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}$$

$$=\frac{-21+28i-3i+4i^2}{(3)^2+(4)^2}=\frac{-25+25i}{25}=-1+i$$

(vii) समजा $z=i^{12}+(3-2i)^2$

$$z=i^{12}+(3-2i)^2=1+9-12i-4=6-12i$$

(viii) समजा $z=\left(\sqrt{5}-7i\right)\left(\sqrt{5}+7i\right)^2$

$$\therefore z=\left[\left(\sqrt{5}\right)^2+(7)^2\right]\left(\sqrt{5}+7i\right)=54\left(\sqrt{5}+7i\right)=54\sqrt{5}+378i$$

(ix) समजा $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)}{1+i}$

$$\therefore z=\frac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)}{1+i}=\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}}{1+1}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

4.1.5 दोन संमिश्र संख्येची समानता

दोन संमिश्र संख्या $z_1=x_1+iy_1$ आणि $z_2=x_2+iy_2$ समान असतात, जर त्यांचे वास्तविक (real) आणि काल्पनिक (imaginary) भाग समान असतील. $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1+iy_1=x_2+iy_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ आणि $y_1=y_2$. संमिश्र संख्येत क्रमबद्धता ही संकल्पना (property of order) आढळत नाही. $(a+ib)<(c+id)$ किंवा $(a+ib)<(c+id)$ हे परिभाषित करता येत नाही. उदाहरणार्थ, $(9+6i)>(3+2i)$ हे युक्तीसंगत नाही.

उदाहरण 5: $(x+iy)\ (2-3i)\ =\ 4+i$ समीकरण करिता x आणि y च्या वास्तविक किमती आहे.

(a) $x=\frac{5}{13}, y=\frac{8}{13}$ (b) $x=\frac{8}{13}, y=\frac{5}{13}$

(c) $x=\frac{5}{13}, y=\frac{14}{13}$ (d) या पैकी नाही

उत्तर: (c) समीकरण $(x+iy)(2-3i)=4+i$

$\Rightarrow (2x+3y)+i(-3x+2y)=4+i$

वास्तविक (real) आणि काल्पनिक (imaginary) भागांची बरोबरी करून,

$$2x+3y=4 \quad \text{...(i)}$$

$$-3x+2y=1 \quad \text{...(ii)}$$

(i) आणि (ii) वरून, $x=\frac{5}{13}, y=\frac{14}{13}$

पर्यायी पद्धत: $x+iy=\frac{4+i}{2-3i}=\frac{(4+i)(2+3i)}{13}=\frac{5}{13}+\frac{14}{13}i$

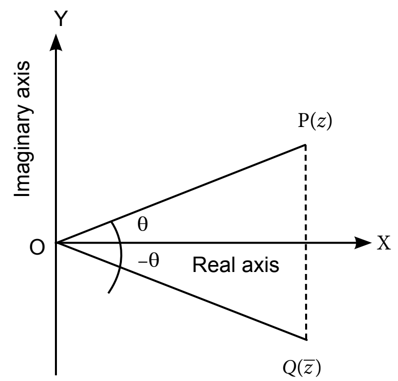
4.2 संमिश्र संख्येचे संयुग्म

4.2.1 संयुग्मित संख्या

जर $z=a+ib, a,b\ \in$ R संमिश्र संख्या असेल तर त्याचे संयुग्म $\overline{z}=a-ib$ ने परिभाषित केले जाते.

इथे, वास्तविक (real) भाग $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ आणि काल्पनिक (imaginary) भाग $Im(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

भूमितीय दृष्ट्या, z चे संयुग्म (conjugate) म्हणजे वास्तविक अक्ष (real axis) वरील z बिंदूचे प्रतिबिंब (reflection) किंवा बिंदू प्रतिमा (point image) असते.



आकृती 4.1: संयुग्मित संमिश्र संख्या

4.2.2 संयुग्मचे गुणधर्म

जर z, z_1 आणि z_2 संमिश्र संख्या आहेत, तर

(i) $\overline{(\overline{z})} = z$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(iii) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

(iv) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\ \overline{z}_2$, सामान्यीकरण करून, $\overline{z_1 . z_2 . z_3 ..... z_n} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2 . \overline{z}_3 ..... \overline{z}_n$

(v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$

(vi) $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$

(vii) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}) =$ पूर्णतया वास्तविक

(viii) $z - \overline{z} = 2iIm(z) =$ पूर्णतया काल्पनिक

(ix) $z\overline{z} = |z|^2 =$ पूर्णतया वास्तविक

उदाहरण 6: $\frac{2+5i}{4-3i}$ चे संयुग्म (conjugate) ______ आहे.

(a) $\frac{7-26i}{25}$ (b) $\frac{-7-26i}{25}$

(c) $\frac{-7+26i}{25}$ (d) $\frac{7+26i}{25}$

उत्तर:

(c) $\frac{2+5i}{4-3i} = \frac{(2+5i)(4+3i)}{25} = \frac{-7+26i}{25}$.

संयुग्म (conjugate) $\frac{-7-26i}{25}$ आहे.

उदाहरण 7: संयुग्म शोधा:

(i) $(-2+i)(3i-2)$ (ii) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (iii) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{i-2}{3+4i}$

उत्तर: (i) समजा $z = (-2+i)(3i-2) = -6i + 4 + 3i^2 - 2i = 1 - 8i$

$\therefore \overline{z} = 1 + 8i$

(ii) समजा $z=\frac{1+7i}{(2-i)^2}$

$$\therefore z=\frac{1+7i}{(2-i)^2}=\frac{1+7i}{4-4i-1}=\frac{1+7i}{3-4i}$$

$$\therefore z=\frac{1+7i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3+4i+21i+28i^2}{(3)^2+(4)^2}=\frac{-25+25i}{25}=-1+i$$

$$\therefore \overline{z}=-1-i$$

(iii) समजा $z=\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{i-2}{3+4i}$

$$\therefore z=\frac{(1+2i)(3+4i)+(i-2)(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$\therefore z=\frac{3+4i+6i+8i^2+3i-4i^2-6+8i}{9+16}=\frac{-7+21i}{25}=-\frac{7}{25}+\frac{21}{25}i$$

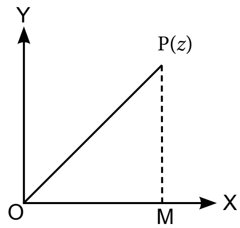
$$\therefore \overline{z}=-\frac{7}{25}-\frac{21}{25}i$$

4.3 संमिश्र संख्येचे मापांक

4.3.1 व्याख्या

एका संमिश्र संख्या $z=a+ib$ चे मापांक $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, धनात्मक वास्तविक संख्येद्वारे परिभाषित केले जाते जेथे a, b वास्तविक संख्या आहेत. भौमितिकदृष्ट्या, $|z|$ हे आरंभ बिंदु (origin) पासून बिंदू P चे अंतर दर्शवते, म्हणजेच $|z|$ = OP.

जर $|z|=1$ असेल तर संबंधित संमिश्र संख्या एकमापांकी संमिश्र संख्या r म्हणून ओळखली जाते. स्पष्टपणे, z हे आरंभ बिंदु (0, 0) वर असलेल्या एकक त्रिज्याच्या (unit radius) वर्तुळावर असते.



आकृती 4.2: संमिश्र संख्येचे मापांक

4.3.2 मापांकचे गुणधर्म

(i) $|z|\geq 0 \Rightarrow |z|=0 \text{ if } z=0$ आणि $|z|>0 \text{ if } z\neq 0$.

(ii) $-|z|\leq Re(z)\leq |z|$ आणि $-|z|\leq Im(z)\leq |z|$

(iii) $|z|=|\overline{z}|=|-z|=|-\overline{z}|=|zi|$

(iv) $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$

(v) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

तसेच, $|z_1 z_2 z_3 ......z_n| = |z_1||z_2||z_3|....|z_n|$

(vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0)$

(vii) $|z^n| = |z|^n, n \in N$

(viii) $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

किंवा $|z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

उदाहरण 8: मापांक (modulus) शोधा: $\left(\dfrac{3+2i}{3-2i}\right)$

(a) 1 (b) 1/2

(c) 2 (d) $\sqrt{2}$

उत्तर: (a) $\left(\dfrac{3+2i}{3-2i}\right) = \left(\dfrac{3+2i}{3-2i}\right)\left(\dfrac{3+2i}{3+2i}\right) = \dfrac{9-4+12i}{13} = \dfrac{5}{13} + i\left(\dfrac{12}{13}\right)$

मापांक $= \sqrt{\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = 1$

उदाहरण 9: मापांक (modulus) शोधा:

(i) $(2+5i)+3(i+1)-(1+5i)$ (ii) $\dfrac{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{4+3i}$

(iii) $4(1-i)+[(2+5i)(i-2)]$

उत्तर: (i) समजा $z = (2+5i)+3(i+1)-(1+5i)$

$\therefore z = (2+5i)+3(i+1)-(1+5i) = 2+5i+3i+3-1-5i$

$\therefore z = 4+3i$

$\therefore |z| = \sqrt{(4)^2+(3)^2} = \sqrt{25} = 5$

(ii) समजा $z = \dfrac{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{4+3i}$

$\therefore z = \dfrac{\left((1)^2 + (\sqrt{2})^2\right)}{4+3i} = \dfrac{3}{4+3i}$

$$\therefore z = \frac{3}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{12-9i}{(4)^2+(3)^2} = \frac{12-9i}{25} = \frac{12}{25} - \frac{9}{25}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{9}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{144+81}{625}} = \sqrt{\frac{225}{625}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

पर्यायी:

$$\therefore z = \frac{3}{4+3i} = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{जिथे, } z_1 = 3 = 3+0i \text{ आणि } z_2 = 4+3i$$

$$\therefore |z_1| = \sqrt{(3)^2} = 3 \text{ आणि } |z_2| = \sqrt{(4)^2+(3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{5}$$

(iii) समजा $z = 4(1-i) + \left[(2+5i)(i-2)\right]$

$$\therefore z = (4-4i) + \left(2i - 4 + 5i^2 - 10i\right) = 4 - 4i + 2i - 4 - 5 - 10i = -5 - 12i$$

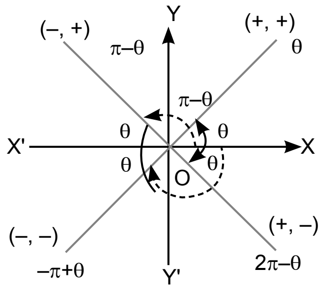
$$\therefore z = -5 - 12i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

4.4 संमिश्र संख्येचा कोनांक/ उच्चता

4.4.1 व्याख्या

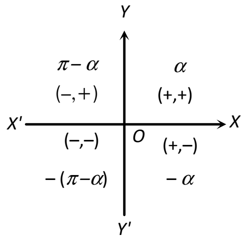
समजा $z = a + ib$ संमिश्र संख्या असेल तर भौमितिकदृष्ट्या एका बिंदू P द्वारे दर्शवली जाते. OP रेषेने वास्तविक अक्षसह बनविलेल्या कोनाला z चा कोनांक/ उच्चता (argument or amplitude) म्हणून ओळखले जाते आणि arg $(z) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \theta = \angle POM$ ने दर्शविले जाते. संमिश्र संख्येचा कोनांक अद्वितीय नाही, कारण जर कोनांकचे मूल्य θ असेल तर $2n\pi + \theta$, जेथे $n \in I$ देखील कोनांक असतो.



आकृती 4.3: संमिश्र संख्येचा कोनांक/ उच्चता

4.4.2 कोनांक arg (z) चे मुख्य मूल्य

कोनांकचे मूल्य θ, जे $-\pi < \theta \le \pi$ या असमानतेचे समाधान करते त्याला कोनांकचे मुख्य मूल्य (Principal value) म्हणतात, जेथे $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$ (लघु कोन) आणि arg (z) कोनांकचे मुख्य मूल्य $\alpha, \pi-\alpha, -\pi+\alpha$, $-\alpha$ असतील जी अनुक्रमे 1, 2, 3 आणि 4 मध्ये चरण मधील बिंदू z आहेत.



आकृती 4.4: कोनांक arg (z) चे मुख्य मूल्य

उदाहरण 10: $-1+i\sqrt{3}$ चा कोनांक (argument) काढा.

(a) $-60°$ (b) $60°$

(c) $120°$ (d) $-120°$

उत्तर: (c) $arg\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120^{o}$ कारण ते द्वितीय चरण मध्ये आहे.

उदाहरण 11: कोनांक (argument) काढा:

(i) $1+i$ (ii) $-1-i\sqrt{3}$ (iii) $2+i\sqrt{3}$

उत्तर: (i) समजा $z = 1+i$

$\therefore z = 1+i$ इथे $a = 1$आणि $b = 1$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1 \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

इथे $a > 0$आणि$b > 0 \therefore \theta$ कोन पहिले चरण मध्ये आहे.

$$\therefore amp(z) = \arg(z) = \theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$$

(ii) समजा $z = -1-i\sqrt{3}$

$\therefore z = -1-i\sqrt{3}$ इथे $a = -$ आणि$b = -\sqrt{3}$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \sqrt{3} \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

इथे $a < 0$आणि$b < 0 \therefore \theta$ कोन तिसरे चरण मध्ये आहे.

$$\therefore amp(z) = \arg(z) = \theta = -\pi+\alpha = -\pi+\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

(iii) समजा $z = 2+i\sqrt{3}$

$\therefore z = 2+i\sqrt{3}$ इथे $a = 2$ आणि $b = \sqrt{3}$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

इथे $a>0$ आणि $b>0$ $\therefore \theta$ कोन पहिले चरण मध्ये आहे.

$$\therefore amp(z)=\arg(z)=\theta=\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

तक्ता 4.1: संमिश्र संख्येचा कोनांकचा तक्ता

संमिश्र संख्या	कोनांक
धनात्मक वास्तविक $+ve$ Re (z)	0
ऋणात्मक वास्तविक $-ve$ Re (z)	π
धनात्मक काल्पनिक $+ve$ Im (z)	$\pi/2$
ऋणात्मक काल्पनिक $-ve$ Im (z)	$3\pi/2 or -\pi/2$
$-(z)$	$\lvert\theta\pm\pi\rvert, if\, \theta is -ve and +ve$ respectively
(iz)	$\left\{\frac{\pi}{2}+arg(z)\right\}$
$-(iz)$	$\left\{arg(z)-\frac{\pi}{2}\right\}$
(z^n)	$n.arg\,(z)$
$(z_1.z_2)$	$arg\,(z_1)+arg\,(z_2)$
$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$	$arg\,(z_1)-arg\,(z_2)$

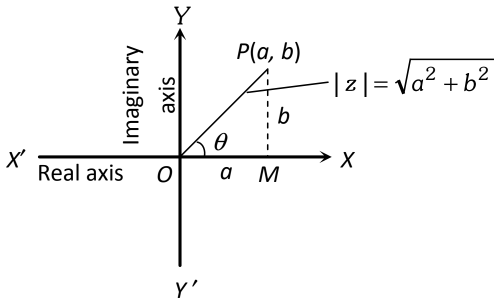
4.5 संमिश्र संख्यांचे विविध प्रतिरूपण

संमिश्र संख्यांचे विविध प्रतिरूपण खालीलप्रमाणे आहे:

4.5.1 भौमितीय प्रतिरूपण

संमिश्र संख्या $z=a+ib=(a,b)$ बिंदू P द्वारे दर्शविले जाते ज्याचे निर्देशांक आयताकृती अक्ष XOX' आणि YOY' कडे संदर्भित केले जातात आणि ज्याला अनुक्रमे वास्तविक अक्ष (real axis) आणि काल्पनिक अक्ष (imaginary axis) म्हणतात. या प्रतलला Argand प्रतल किंवा Argand आकृती किंवा संमिश्र प्रतल किंवा Gaussian प्रतल म्हणतात. आरंभ बिंदु (origin) पासून कोणत्याही संमिश्र संख्येचे अंतर त्याला संमिश्र संख्येचे मापांक म्हणतात आणि $|z|$ द्वारे दर्शविले जाते. $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ x – अक्षांच्या धनात्मक दिशेने असलेल्या कोणत्याही संमिश्र संख्येच्या कोनाला z चा कोनांक म्हणतात.

$$i.e.,\ amp(z) = arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



आकृती 4.5: संमिश्र संख्येचे कार्टेशियन प्रतिरूपण

4.5.2 त्रिकोणमितीय (ध्रुवीय) प्रतिरूपण

समजा ΔOPM मध्ये, $OP = r$, तर $a = r\cos\theta$ आणि $b = r\sin\theta$.

म्हणून $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

जेथे, r = |z| आणि θ = कोनांक arg (z) चे मुख्य मूल्य (principal value).

कोनांकच्या (argument) साधारण (general) मूल्यकरिता, $z = r[\cos(2n\pi+\theta) + i\sin(2n\pi+\theta)]$ $(\cos\theta + i\sin\theta)$ ला $cis\theta$ असे सुद्धा लिहू शकतो.

Complex Numbers

4.5.3 एका स्वरूपातून दुसऱ्यात बदल

उदाहरण 12: $\frac{1-i}{1+i}$ चे ध्रुवीय स्वरूप

(a) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ (b) $\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$

(c) $\sin\frac{\pi}{2} + i\cos\frac{\pi}{2}$ (d) या पैकी नाही

उत्तर: (b) $\frac{1-\boldsymbol{i}}{1+\boldsymbol{i}} = \frac{(1-\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})}{(1+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})} = \frac{1+(\boldsymbol{i})^2 - 2\boldsymbol{i}}{1+1} = -\boldsymbol{i}$

ज्याला $\cos\frac{\pi}{2} - i\ \sin\frac{\pi}{2}$ असे लिहू शकतो

उदाहरण 13: खालील संमिश्र संख्येचे Cartesian मधून ध्रुवीय (polar) स्वरूपात बदल करा.

(i) i (ii) $-1+i$ (ii) $2\sqrt{3} - 2i$

उत्तर: (i) समजा $z = i$

$\therefore z = i = 0 + i$ इथे $a = 0$ आणि $b = 1$

$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0+1} = 1$

इथे $a = 0$ आणि $b > 0$

$$\therefore amp(z) = \arg(z) = \theta = \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore z = rcis\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

(ii) समजा $z = -1 + i$

$\therefore z = -1 + i$ इथे $a = -1$ आणि $b = 1$

$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1 \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

इथे $a < 0$ आणि $b > 0$, θ lie in second quadrant

$$\therefore amp(z) = \arg(z) = \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore z = rcis\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

(iii) समजा $z = 2\sqrt{3} - 2i$

$\therefore z = 2\sqrt{3} - 2i$ इथे $a = 2\sqrt{3}$ आणि $b = -2$

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

इथे $a > 0$ आणि $b < 0, \theta$ *lie in fourth quadrant*

$$\therefore amp(z) = \arg(z) = \theta = -\alpha = -\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore z = rcis\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

4.6 DE' MOIVRE चे प्रमेय

(1) जर n कोणतीही परिमेय संख्या आहे, तर $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

(2) जर $z = (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2)(cos\theta_3 + isin\theta_3)$ ...... $(cos\theta_n + isin\theta_n)$

तर $z = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n) \ + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n)$

जेथे $\theta_1, \theta_2, \theta_3 ..... \theta_n \in R$.

(3) जर $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ आणि n धनात्मक पूर्णांक आहे,

तर $z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\dfrac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right]$,

जेथे $k = 0, 1, 2, 3, ...(n-1)$.

हा प्रमेय असत्य असतो, जेव्हा

(i) n ही परिमेय संख्या नसेल किंवा

(ii) संमिश्र संख्या $\cos\theta + i\sin\theta$ या स्वरूपात नसेल.

उदाहरण 14: जर $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^5$, तर

(a) $\mathrm{Re}(z) = 0$ (b) $Im(z) = 0$

(c) $\mathrm{Re}(z) > 0, Im(z) > 0$ (d) $\mathrm{Re}(z) > 0, Im(z) < 0$

उत्तर: (a) Using De Moivre's theorem

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ and putting n = 0, 1, 2 then we get required roots.

उदाहरण 15: De' Moivre चे प्रमेय वापरून सोडवा:

(i) $\left[\dfrac{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\right]^2$

(ii) $\dfrac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^2 (\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^{-3}}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{-5} (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^4}$

उत्तर: (i) समजा $z = \left[\dfrac{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\right]^2$

$$\therefore z = \frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^2}{(\cos\theta - i\sin\theta)^2} = \frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right]^2}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}\right]^2} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^6}{(cos\theta + i\sin\theta)^{-2}}$$

$$\therefore z=(\cos\theta+i\sin\theta)^{6-(-2)}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{8}=\cos 8\theta+i\sin 8\theta$$

(ii) समजा $z=\dfrac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{2}(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^{-3}}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{-5}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^{4}}$

$$\therefore z=\frac{\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{3}\right]^{2}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{5}\right]^{-3}}{\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{4}\right]^{-5}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{2}\right]^{4}}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{6}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-15}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-20}(\cos\theta+i\sin\theta)^{8}}$$

$$\therefore z=(\cos\theta+i\sin\theta)^{6+(-15)-(-20)-8}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{3}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

उदाहरण 16: सिद्ध करा: $(\sin\theta+i\cos\theta)^{4n}=cos 4n\theta-i\sin 4n\theta, n\in N$

उत्तर: डावी बाजू $=(\sin\theta+i\cos\theta)^{4n}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^{4n}$

$$=\cos 4n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin 4n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(2n\pi-4n\theta)+i\sin(2n\pi-4n\theta)$$

$=\cos(4n\theta)-i\sin(4n\theta)=$ उजवी बाजू

उदाहरण 17: सिद्ध करा: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{n}+\left(\sqrt{3}-i\right)^{n}=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right), n>0$

उत्तर: समजा $z_1=\left(\sqrt{3}+i\right) and z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)$

$z_1 and z_2$ चे ध्रुवीय (polar) स्वरूपात बदल करून,

$$\therefore z_1=\left(\sqrt{3}+i\right)=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] and z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

डावी बाजू $=\left(\sqrt{3}+i\right)^{n}+\left(\sqrt{3}-i\right)^{n}$

$$=\left\{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^{n}+\left\{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^{n}$$

More on Complex nos

$$=2^{n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]$$

$=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)=$ उजवी बाजू

4.7 आंशिक अपूर्णांक

लक्षात ठेवा की परिमेय फल (rational function) हे $\frac{P(x)}{Q(x)}$ स्वरूपात दोन बहुपदीचे (polynomials) गुणोत्तर (ratio) म्हणून परिभाषित केले आहे, जेथे P(x) आणि Q(x) या x मधील बहुपदी आहेत आणि Q(x) $\neq 0$. जर Q(x) बहुपदीची कोटी (degree) Q(x) बहुपदीच्या कोटी (degree) पेक्षा कमी असेल तर परिमेय फल ला योग्य अपूर्णांक (proper fraction) म्हटले जाते, अन्यथा, त्याला अयोग्य अपूर्णांक (improper fraction) म्हणतात.

अयोग्य परिमेय फल (improper rational function) दीर्घ भागाकार प्रक्रियेद्वारे (long division method) योग्य परिमेय फलमध्ये (proper rational function) सोडवली जाऊ शकतात. अशा प्रकारे, जर $\frac{P(x)}{Q(x)}$. अयोग्य (improper) आहे, तर $\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

जेथे T(x) हे x मध्ये बहुपद आहे आणि $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ एक योग्य परिमेय फल (proper rational function) आहे. खालील सारणी विविध प्रकारच्या परिमेय फल शी संबंधित असलेल्या सोप्या आंशिक अंशांचे प्रकार सूचित करते.

तक्ता 4.2: परिमेय फल शी संबंधित आंशिक अंश

S. No.	परिमेय फल प्रकार	आंशिक अपूर्णांक प्रकार
1.	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a\neq b$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$
2.	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$
4.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$
5.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+C)}$	$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{(x^2+bx+C)}$
जेथे x^2+bx+C पुन्हा विघटित (factorize) होऊ शकत नाही.		

उदाहरण 18: आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

उत्तर: संकल्य (integrand) योग्य परिमेय फल (proper rational function) आहे. करिता, आंशिक अपूर्णांक

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}$$

जेथे, A आणि B वास्तविक संख्या ची मूल्ये काढता येतात.

$$1 = A\ (x + 2) + B\ (x + 1).$$

दोन्ही बाजूची x चे सहगुणक (coefficient) आणि अचल पदे (constant terms) बरोबर करून,

$$A + B = 0 \text{ आणि}$$

$$2A + B = 1$$

समीकरण सोडवून, A =1 आणि B = – 1.

म्हणून, अपूर्णांक $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+1)}+\frac{-1}{(x+2)}$

उदाहरण 19: आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

उत्तर: संकल्य (integrand) योग्य परिमेय फल (proper rational function) नाही.

करिता, x^2+1 ला x^2-5x+6 ने भागून,

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}=1+\frac{5x-5}{x^2-5x+6}=1+\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$$

समजा $\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$

$$5x-5=A(x-3)+B(x-2)$$

दोन्ही बाजूची x चे सहगुणक (coefficient) आणि अचल पदे (constant terms) बरोबर करून,

$$A + B = 5 \text{ आणि}$$

$$3A + 2B = 5.$$

समीकरण सोडवून, A = – 5 आणि B = 10

म्हणून, अपूर्णांक

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}=1-\frac{5}{x-2}+\frac{10}{x-3}$$

उदाहरण 20: आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}$

उत्तर: दिल्याप्रमाणे, $\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+3)}$

$$3x-2=A(x+1)(x+3)+B(x+3)+C(x+1)^2$$

$$3x-2=A\left(x^2+4x+3\right)+B(x+3)+C\left(x^2+2x+1\right)$$

दोन्ही बाजूची x^2, x चे सहगुणक (coefficient) आणि अचल पदे (constant terms) बरोबर करून,

$A+C=0,$

$4A+B+2C=3$ आणि

$3A+3B+C=-2$.

समीकरण सोडवून $A=\frac{11}{4}, B=-\frac{5}{2} and C=-\frac{11}{4}$

म्हणून, अपूर्णांक

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}=\frac{11}{4(x+1)}-\frac{5}{2(x+1)^2}-\frac{11}{4(x+3)}$$

उदाहरण 21: आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$

उत्तर: $\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$ मध्ये $x^2=y$ ठेवून

$$\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

समजा $\frac{y}{(y+1)(y+4)}=\frac{A}{y+1}+\frac{B}{y+4}$

म्हणून $y=A(y+4)+B(y+1)$

दोन्ही बाजूची y चे सहगुणक (coefficient) आणि अचल पदे (constant terms) बरोबर करून,

A + B = 1

आणि 4A + B = 0,

सोडवून $A=-\frac{1}{3}, B=\frac{4}{3}$. आपण लिहू शकतो

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)}=-\frac{1}{3(y+1)}+\frac{4}{3(y+4)}$$

उदाहरण 22: आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x^2+x+1}{(x+2)\left(x^2+1\right)}$

उत्तर: $$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+c}{x^2+1}$$

म्हणून $$x^2+x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)$$

दोन्ही बाजूची x^2, x चे सहगुणक (coefficient) आणि अचल पदे (constant terms) बरोबर करून,

A + B =1,

2B + C = 1 आणि

A + 2C = 1.

समीकरण सोडवून $A=\frac{3}{5}, B=\frac{2}{5}\, and\, C=\frac{1}{5}$

म्हणून, अपूर्णांक

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{3}{5(x+2)}+\frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}=\frac{3}{5(x+2)}+\frac{2x+1}{5(x^2+1)}$$

अनुप्रयोग (वास्तविक जीवन/औद्योगिक)

नियंत्रण सिद्धांत:

उदाहरण 1: जेव्हा नियंत्रण सिद्धांतातील यंत्रणा time अधिक्षेत्र (Domain) मधून frequency अधिक्षेत्र (Domain) मध्ये बदलली जाते तेव्हा Laplace transform ची भूमिका सुरू होते, या transform च्या स्थिरतेचे विश्लेषण संमिश्र प्रतल मधील अनंतक (poles) आणि शून्यक (zeros) च्या सिद्धांताच्या आधारे केले जाते.

अवशेष प्रमेय:

उदाहरण 2: अनंतकी फल (meromorphic function) च्या पथ संकलकचे (line integrals) मूल्यांकन संमिश्र विश्लेषणातील (complex analysis) अवशेष प्रमेयावर (residue theorem) आधारित आहे, हे प्रमेय वास्तविक संकलकची (real integrals) गणना करण्यास देखील मदत करते.

विद्युत चुंबकत्व:

उदाहरण 3: विद्युतचुंबकत्व (electromagnetism) मध्ये वास्तविक भाग (real part) विद्युत (electrical) म्हणून घेता येतो आणि चुंबकीय भाग काल्पनिक म्हणून घेतला जाऊ शकतो आणि संपूर्णपणे हे एक संमिश्र संख्या (complex number) म्हणून घेतले जाऊ शकते.

स्थापत्य आणि यांत्रिक अभियांत्रिकी:

उदाहरण 4: संमिश्र भूमिती (complex geometry) आणि Argand प्रतलची कल्पना इमारती आणि कार तयार करण्यात तसेच टूल्स निर्मितीसाठी देखील अतिशय उपयुक्त आहे.

द्रव गतिशीलता:

उदाहरण 5: विश्लेषणात्मक फल (Analytic function) दोन आयामांमध्ये (dimensions) प्रवहनचे (potential flow) वर्णन करण्यासाठी वापरली जातात. ते बल (force) आणि परिबलची (moments) गणना करण्यासाठी आणि हवामानाच्या नमुन्यांचा अंदाज लावण्यासाठी देखील वापरले जातात.

भूमिती:

उदाहरण 6: संमिश्र संख्यांची संकल्पना Fractals मध्ये वापरली जाते (उदा. Mandelbrot sets आणि Julia sets).

विद्युत अभियांत्रिकी:

उदाहरण 7: एक द्विमितीय प्रमाण (2-dimensional quantity) गणिताद्वारे संमिश्र संख्येद्वारे दर्शविले जाऊ शकते. संमिश्र संख्येच्या प्रतिरूपण (representation) मध्ये, घटकांना वास्तविक आणि काल्पनिक (real and imaginary) म्हणून संबोधले जाते. उदाहरणार्थ घरामध्ये "AC" voltege ला दोन मापदंडांची आवश्यकता असते.

सिग्नल विश्लेषण:

उदाहरण 8: सिग्नल विश्लेषण (Signal analysis) मध्ये संमिश्र संख्या (Complex numbers) वापरतात. sine wave साठी दिलेल्या वारंवारतेचे (frequency) मापांक $|z|$ हे संबंधित z चे कोनांक arg (z) आहे.

कलनमधील गुणोत्तरीय राशी:

उदाहरण 9: संकल्यवर (integrands) आंशिक अपूर्णांकचा (partial fractions) वापर करून गुणोत्तरीय राशीचा (rational expression) समावेश असलेले अनेक संकलक (integrals) सोडविता येतात.

विकलन समीकरणे:

उदाहरण 10: आंशिक अपूर्णांक (partial fractions) विकलन समीकरणांच्या (Differential Equations) सिद्धांतामध्ये Inverse Laplace Transform शोधण्यासाठी वापरला जाऊ शकतो.

घटक सारांश

या युनिटमध्ये पहिला विभाग संमिश्र संख्येचे (complex number) वास्तविक आणि काल्पनिक भाग (real and imaginary parts) परिभाषित करण्यासाठी समर्पित आहे, त्यासह ध्रुवीय (Polar) आणि Cartesian स्वरूपाचे प्रतिरूपण (representation)आणि त्याचे एका स्वरूपामधून दुसऱ्या स्वरूपात रूपांतरण.

त्यानंतरचे विभाग एका संमिश्र संख्येचे संयुग्म (conjugate), संमिश्र संख्येचे मापांक (modulus) आणि कोनांक (amplitude) आणि संमिश्र संख्यांसह मूलभूत अंकगणित (arithmetic), वजाबाकी (subtraction) आणि भागाकारची (division) अधिक अचूक व्याख्या यावर आधारित आहेत. उदाहरणार्थ, गुणाकार भौमितिकदृष्ट्या वर्णित केले आहे. बीजगणितीय आणि भूमितीय गुणधर्मांवर देखील चर्चा केली आहे.

शेवटचे विभाग बहुपदीय अंश (polynomial fraction) योग्य आणि अयोग्य अपूर्णांक (proper and improper fraction) आणि आंशिक अपूर्णांक (partial fraction) व्याख्या व अनुप्रयोग यावर आधारित आहेत. संमिश्र संख्यांच्या मुख्य

संकल्पना आणि अनुप्रयोगांना मजबुती देण्यासाठी निर्मित केलेली नवीन उदाहरणे आहेत. काही मुक्त प्रश्नांचा (open problems) सल्ला देखील दिला आहे की हे तोंडी प्रश्न मुख्य परिभाषा आणि संकल्पनांच्या वैचारिक आकलनाचे मूल्यांकन करण्यात मदत करतील. दुसरीकडे बीजगणित प्रश्नावली विद्यार्थ्यांना बीजगणितीय संकल्पना लागू करण्यास मदत करतात. संमिश्र संख्येच्या गुणकशी संबंधित व आलेखीय प्रश्न विद्यार्थ्यांची आलेख समजण्याची किंवा तयार करण्याची क्षमतेचे मूल्यांकन करतात. संख्यात्मक प्रश्नासाठी विद्यार्थ्यांना गणना करणे आवश्यक असते. वास्तविक जागतिक अनुप्रयोग (Real-World Applications) वास्तववादी समस्येची परिस्थिती सादर करतात.

स्वाध्याय

बहुपर्यायी प्रश्न

1. जर n धनात्मक पूर्णांक आहे, तर कोणता संबंध चुकीचा आहे

(a) $i^{4n}=1$ (b) $i^{4n-1}=i$

(c) $i^{4n+1}=i$ (d) $i^{-4n}=1$

2. जर n धनात्मक पूर्णांक आहे, तर $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1}=$

(a) 1 (b) – 1

(c) i (d) $-i$

3. जर $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{m}=1,$ तर m ची कमीत कमी पूर्णांक किंमत

(a) 2 (b) 4

(c) 8 (d) या पैकी नाही

4. जर $(1-i)^n=2^n,$ तर $n=$

(a) 1 (b) 0

(c) -1 (d) या पैकी नाही

5. $(1+i)^5\times(1-i)^5$ बरोबर

(a) – 8 (b) $8i$

(c) 8 (d) 32

6. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ बरोबर

(a) $2i$ (b) $-2i$

(c) -2 (d) 2

7. $1+i^2+i^4+i^6+.....+i^{2n}$ बरोबर

(a) धनात्मक (b) ऋणात्मक

(c) शून्य (d) अस्तित्वात नाही

8. $i^2+i^4+i^6+......\ (2n+1)$ पद पर्यंत =

(a) i (b) $-i$

(c) 1 (d) -1

9. जर $i=\sqrt{-1}$, तर $1+i^2+i^3-i^6+i^8$ बरोबर

(a) $2-i$ (b) 1

(c) 3 (d) -1

10. जर $i^2=-1$, $\sum_{n=1}^{200} i^n$ बरोबर

(a) 50 (b) – 50

(c) 0 (d) 100

11. जर $\sum_{n=1}^{13}\left(i^n+i^{n+1}\right)$, $i=\sqrt{-1}$, बरोबर

(a) i (b) $i-1$

(c) $-i$ (d) 0

12. कमीत कमी पूर्णांक n करिता $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n$ बरोबर

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 5

13. $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}, (n\in N)$ बरोबर

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) या पैकी नाही

14. $(1+i)^8+(1-i)^8$ बरोबर

(a) 16 (b) – 16

(c) 32 (d) – 32

15. जर $(1+i)^{10}$, $i^2=-1$, बरोबर

(a) $32\,i$ (b) $64+i$

(c) $24\,i-32$ (d) या पैकी नाही

संयुग्म, मापांक आणि कोनांक आधारित प्रश्न

16. जर $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$, तर $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) =$

(a) A^2+B^2 (b) A^2-B^2

(c) A^2 (d) B^2

17. z संमिश्र संख्याकरिता, $z+\bar{z}$ आणि $z\bar{z}$ मधून

(a) एक वास्तविक संख्या आहे (b) दोन्ही वास्तविक संख्या आहेत

(c) एक काल्पनिक संख्या आहे (d) दोन्ही काल्पनिक संख्या आहेत

18. x आणि y च्या किमती ज्याकरिता संख्या $3+ix^2y$ आणि x^2+y+4i संयुग्म असतील

(a) $(-2,-1)$ किंवा $(2,-1)$ (b) $(-1,2)$ किंवा $(-2,1)$

(c) $(1,2)$ किंवा $(-1,-2)$ (d) या पैकी नाही

19. जर $z=3+5i$, then $z^3+\bar{z}+198=$

(a) $-3-5i$ (b) $-3+5i$

(c) $3+5i$ (d) $3-5i$

20. $\frac{2-3i}{4-i}$, चे संयुग्म

(a) $\frac{3i}{4}$ (b) $\frac{11+10i}{17}$

(c) $\frac{11-10i}{17}$ (d) $\frac{2+3i}{4i}$

21. 1 + i चे संयुग्म

(a) i (b) 1

(c) 1 − i (d) 1 + i

22. $\left|(1+i)\frac{(2+i)}{(3+i)}\right| =$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(c) 1 (d) −1

23. $arg\left(5-\sqrt{3}i\right)=$

(a) $\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{3}}$

(b) $\tan^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

(c) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$

(d) $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

24. $\frac{1+i}{1-i}$ चे कोनांक आणि मापांक अनुक्रमे

(a) $\frac{-\pi}{2}$ आणि 1

(b) $\frac{\pi}{2}$ आणि $\sqrt{2}$

(c) 0 आणि $\sqrt{2}$

(d) $\frac{\pi}{2}$ आणि 1

25. $arg\left(\frac{3+i}{2-i}+\frac{3-i}{2+i}\right)$ बरोबर

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) $-\frac{\pi}{2}$

(c) 0

(d) $\frac{\pi}{4}$

26. जर $x+iy=\sqrt{\frac{a+ib}{c+id}}$, तर

(a) $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

(b) $\frac{a+b}{c+d}$

(c) $\frac{c^2+d^2}{a^2+b^2}$

(d) $\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}\right)^2$

27. $|1-i|^x=2^x$ समीकरणाचे शून्येतर पूर्णांक (non-zero integers) उत्तरची संख्या

(a) अनंत

(b) 1

(c) 2

(d) या पैकी नाही

***De Moivre* चे प्रमेय वर आधारित प्रश्न**

28. $\sqrt{i}=$

(a) $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$

(b) $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

(c) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

(d) या पैकी नाही

29. $\left(\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\sin\theta+i\cos\theta}\right)^4$ बरोबर

(a) $\sin 8\theta - i\cos 8\theta$ (b) $\cos 8\theta - i\sin 8\theta$

(c) $\sin 8\theta + i\cos 8\theta$ (d) $\cos 8\theta + i\sin 8\theta$

30. जर $i^2=-1$ तर $(-\sqrt{3}+i)^{53}$ बरोबर

(a) $2^{53}\left(\sqrt{3}+2i\right)$ (b) $2^{52}\left(\sqrt{3}-i\right)$

(c) $2^{53}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$ (d) $2^{53}\left(\sqrt{3}-i\right)$

उत्तरे - बहुपर्यायी प्रश्न									
1.	b	**2.**	c	**3.**	b	**4.**	b	**5.**	d
6.	c	**7.**	d	**8.**	d	**9.**	a	**10.**	c
11.	b	**12.**	a	**13.**	a	**14.**	c	**15.**	a
16.	a	**17.**	c	**18.**	a	**19.**	c	**20.**	b
21.	c	**22.**	c	**23.**	d	**24.**	d	**25.**	c
26.	a	**27.**	d	**28.**	c	**29.**	d	**30.**	c

लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. खालील संमिश्र संख्येचे वास्तविक (real) आणि काल्पनिक (imaginary) भाग काढा:

(i) $\sqrt{-16}+\sqrt{-3}$ (ii) $\dfrac{3}{2}i-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $2+i-\sqrt{3}i$

2. निर्देशित क्रिया करा आणि उत्तर $x+iy$ स्वरूपात लिहा जेथे $x, y \in R$.

(i) $(3+2i)^3$ (ii) $\left(\sqrt{2}+3i\right)\left(\sqrt{2}-3i\right)^2+(3+2i)$

(iii) $\dfrac{(2+3i)(1-i)}{(1+2i)(2+i)}$ (iv) $\left(\dfrac{i}{3}+2\right)^2$

(v) $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}i\right)\left(2-i\sqrt{3}\right)$ (vi) $\dfrac{(1-i)}{(1+i)^2}$

3. खालील संमिश्र संख्येचे मापांक काढा:

(i) $-2+i\sqrt{5}$ (ii) $\dfrac{1}{2}+3i$ (ii) $(1+i)(17+7i)$

4. खालील संमिश्र संख्येचे संयुग्म काढा:

(i) $\dfrac{(2-3i)(6-i)}{(3+4i)}$ (ii) $\dfrac{-3+2i}{1-i}$ (iii) $\dfrac{2-\sqrt{-25}}{1-\sqrt{-16}}$

5. खालील संमिश्र संख्येचे गुणकीय व्यस्त (multiplicative inverse) काढा:

(i) $(1-3i)^2$ (ii) $\dfrac{4+3i}{5-3i}$ (iii) $\sqrt{5}+3i$

6. खालील संमिश्र संख्येचे कोनांक (argument) काढा:

(i) $2+i$ (ii) $3i$ (ii) $\sqrt{3}+i$

7. खालील संमिश्र संख्येचे Cartesian मधून ध्रुवीय (polar) स्वरूपात बदल करा.

(i) i (ii) $-1+i$ (ii) $2\sqrt{3}-2i$

8. संमिश्र संख्या z_1 आणि z_2 करिता सिद्ध करा:

(i) $\text{Re}(z_1+z_2)=\text{Re}(z_1)+\text{Re}(z_2)$

(ii) $Im(z_1\cdot z_2)=\text{Re}(z_1)Im(z_2)+Im(z_1)\text{Re}(z_2)$

(iii) $(z_1+z_2)^2=(z_1)^2+2z_1z_2+(z_2)^2$

9. $z_1=2+3i$ आणि $z_2=5+12i$, करिता $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ पडताळा.

10. जर $1+i4\sqrt{3}=(b+ai)^2$ तर सिद्ध करा $b^2-a^2=1$ आणि $ab=2\sqrt{3}.$

11. जर कोणत्याही z या संमिश्र संख्येकरिता $|z|=1$, तर सिद्ध करा $\dfrac{z-1}{z+1}$ शून्य किंवा पूर्णतया काल्पनिक आहे.

12. कोणत्याही z या संमिश्र संख्येकरिता सिद्ध करा $\overline{z}=2\pi-\arg z, z\neq 0$

13. De' Moivre चे प्रमेय वापरून सोडवा:

(i) $\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)^6(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^2}$

(ii) $\dfrac{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^2(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^3}{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^3(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)}$

14. सिद्ध करा: $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right), n>0$

15. सिद्ध करा: $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right], n>0$

16. सिद्ध करा: $\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta} = ie^{-i\theta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

17. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$

18. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

19. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

20. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x^3-6x^2+10x-2}{x^2-5x+6}$

21. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{3x+1}{(x-2)^2(x+2)}$

22. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}$

23. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{2x-3}{(x-1)^2(x+1)(x+2)}$

24. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$

25. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{8}{(x+2)(x^2+4)}$

26. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}$

27. आंशिक अपूर्णांक मध्ये वियोजन (resolve) करा: $\frac{x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. (i) $\text{Re}(z)=0$ and $Im(z)=4+\sqrt{3}$

(ii) $\text{Re}(z)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ and $Im(z)=\dfrac{3}{2}$

(iii) $\text{Re}(z)=2$ and $Im(z)=1-\sqrt{3}$

2. (i) $-9+46i$ (ii) $\left(11\sqrt{2}+3\right)-31i$ (iii) $\dfrac{1}{5}-i$ (iv) $\dfrac{35}{9}+\dfrac{4}{3}i$

(v) $\sqrt{7}+i\sqrt{7}$ (vi) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

3. (i) 3 (ii) $\dfrac{\sqrt{37}}{2}$ (iii) 26

4. (i) $-\dfrac{7}{5}+\dfrac{24}{5}i$ (ii) $-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$ (iii) $\dfrac{22}{17}-\dfrac{3}{17}i$

5. (i) $\dfrac{2}{25}+\dfrac{3}{50}i$ (ii) $\dfrac{11}{25}-\dfrac{27}{25}i$ (iii) $\dfrac{\sqrt{5}}{14}-\dfrac{3}{14}i$

6. (i) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (ii) $\dfrac{\pi}{2}$ (iii) $\dfrac{\pi}{6}$

7. (i) $\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

(iii) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

10. True

13. (i) $\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ (ii) 1

17. $\dfrac{2}{3(x+1)}+\dfrac{1}{3(x-2)}$

18. $-\dfrac{1}{6(x-1)}-\dfrac{1}{3(x+2)}+\dfrac{1}{2(x-3)}$

19. $\dfrac{5}{2(x-1)}-\dfrac{8}{x-2}+\dfrac{11}{2(x-3)}$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न
20. $(x-1)-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}$
21. $\frac{5}{16(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}-\frac{5}{16(x+2)}$
22. $\frac{3}{8(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{5}{8(x+3)}$
23. $\frac{17}{36(x-1)}-\frac{1}{6(x-1)^2}-\frac{5}{4(x+1)}+\frac{7}{9(x+2)}$
24. $-\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+2}$
25. $\frac{1}{x+2}+\frac{-x+2}{x^2+4}$
26. $\frac{1}{5(x-1)}+\frac{-x+4}{5(x^2+4)}$
27. $\frac{3x}{(x^2+1)}+\frac{-3x+1}{(x^2+2)}$

अधिक जाणून घ्या

- संमिश्र संख्या चा अभ्यास का करावा?
- आपल्या दैनंदिन जीवनात संमिश्र संख्या (complex numbers) आणि आंशिक अंश (partial fractions) कसे वापरले जातात?
- वास्तविक संख्येचा संच (set of real numbers) विस्तार करण्याची आवश्यकता लक्षात घ्या.
- संमिश्र प्रतल (complex plain) आणि Riemann sphere ची कल्पना समजून घ्या.
- दैनंदिन जीवनात गणिताचा विचार का मोलाचा आहे?
- ऑनलाईन अध्यापन.
- संमिश्र संख्या आणि त्याचे बीजगणित शिकण्याचा सर्वात सोपा मार्ग.

- संमिश्र चल चा सिद्धांत (Theory of Complex variable) का शोधला गेला?
- अंतर्ज्ञानाने संमिश्र विश्लेषणाचे (Complex analysis) शिकणे.
- गणितास सोपा बनविणे.
- शिक्षकांसाठी ऑनलाइन शिक्षण साधने.
- विवेचनात्मक विचार (critical thinking) शिकवणे
- STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) शिक्षण
- Ball, W.W. Rouse. A Short Account of the History of Mathematics. London: Sterling Publications, 2002.
- Bittinger, Marvin L., and David Ellenbogen. Intermediate Algebra: Concepts and Applications. 6th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing, 2001.

लघु प्रकल्प

1. संमिश्र संख्यांच्या संकल्पनेवर आधारित क्षुल्लकेतर (non-trivial) गणिताच्या विषयाचे परिपूर्ण तोंडी सादरीकरण तयार करा.
2. "लोकांनी संमिश्र संख्यांना अवास्तव, कल्पित (unreal, imaginary) मानले" या टिप्पणीवर केस स्टडी तयार करा.

चौकसपणा आणि जिज्ञासासाठी प्रश्न

1. वास्तविक जीवनातील परिमाणचे (quantity) वास्तविक संख्येऐवजी (real numbers) संमिश्र संख्याद्वारे (complex numbers) वर्णन कसे केले जाऊ शकते?
2. जर आपण ऋण संख्यांची (negative numbers) वर्गमूळे (square roots) शोधण्याचा प्रयत्न केला तर काय होईल?
3. वास्तविक संख्यांची (real numbers) प्रणाली नवीन संख्येच्या प्रणालीपर्यंत वाढविली गेली तर ती अपरिहार्यपणे (necessarily) संमिश्र संख्या असेल काय?
4. विशिष्ट कार्य (special jobs) ऋण संख्येचे वर्गमूळ कसे आणि का वापरते?
5. भूमिती (geometry) आणि काल्पनिक संख्या (imaginary numbers) मध्ये कोणत्या प्रकारचे संबंध जोडले जाऊ शकतात?
6. इलेक्ट्रॉनिक परिपथ (circuit) मधील घटक (components) एका संमिश्र संख्येने मोजता येतात काय?

वरील प्रश्नांव्यतिरिक्त भूमिती (Geometry), बीजगणितीय संख्या सिद्धांत (Algebraic number theory), विश्लेषणात्मक संख्या सिद्धांत (Analytic number theory), अयोग्य संकलक (Improper integrals), गतिशील समीकरणे (Dynamic equations), उपयोजित गणित (applied mathematics) आणि भौतिकशास्त्र (physics) साठी संमिश्र संख्यांची संकल्पना वापरली जाते.

संदर्भ आणि सूचित वाचन

1. E. Krezig, Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition, Wiley, 2015.
2. H. K. Das, Advanced Engineering Mathematics, S. Chand & Co, New Delhi, 2007.
3. B. S. Grewal, *Higher Engineering Mathematics,* Khanna Publication, New Delhi, 2015.
4. S. S. Sastry, *Engineering Mathematics, Volume 1*, PHI Learning, New Delhi, 2009.
5. Alan Jeffrey, Advanced *Engineering Mathematics,* Harcourt/Academic Press, 2002, USA.
6. M.P. Trivedi and P.Y. Trivedi, Consider Dimension and Replace Pi, Notion Press, 2018.
7. www.scilab.org/ -SCI Lab
8. https://grafeq.en.downloadastro.com/- Graph Eq^n 2.13
9. https://www.geogebra.org- Geo Gebra
10. http://www.ebookpdf.net/_engineering-application-of-complex-number-(pdf)_ebook_.html.
11. https://issuu.com/harrowhongkong/docs/final_scientific_harrovian_issue_vi-i/s/11488755
12. https://math.microsoft.com
13. http://euclideanspace.com
14. https://www.youtube.com/watch?v=f079K1f2WQk
15. Ball, W.W. Rouse. A Short Account of the History of Mathematics. London: Sterling Publications, 2002.
16. Bittinger, Marvin L., and David Ellenbogen. Intermediate Algebra: Concepts and Applications. 6th ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing, 2001.

5 क्रमचयन आणि संयोजन, द्विपदी प्रमेय

घटक वैशिष्ट्ये

सादर घटक खालील विषयांवर सविस्तर चर्चा करते:

- क्रमचयन आणि संयोजन;
- ${}^{n}P_{r}$ आणि ${}^{n}C_{r}$ चे मूल्य;
- धनात्मक पूर्णांक घातांकसाठी द्विपद प्रमेय (पुराव्याशिवाय);
- कोणत्याही घातांकसाठी द्विपद प्रमेय (पुराव्याशिवाय विस्तार);
- अभियांत्रिकी प्रश्नांच्या अनुप्रयोगांसह प्रथम आणि द्वितीय द्विपद स्थूलमान

अधिक उत्सुकता आणि सृजनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी अनुप्रयोग आधारित प्रश्नांवर चर्चा केली आहे.

मोठ्या प्रमाणात दिलेले दोन प्रकारात वर्गीकृत बहुपर्यायी प्रश्न तसेच लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न, याव्यतिरिक्त Bloom च्या वर्गीकरणानुसार खालची ते वरची पातळी या क्रमाने अनेक संख्यात्मक प्रश्नांचे स्वाध्याय, संदर्भ आणि सूचित वाचन अधिक सराव करण्यासाठी दिलेले आहेत.

याव्यतिरिक्त, "अधिक जाणून घ्या" विभाग जोडला आहे. हा विभाग विचारपूर्वक आखला गेला आहे, जेणेकरून या भागातील पुरवलेली माहिती पुस्तक वापरकर्त्यांसाठी फायदेशीर ठरेल.

हा विभाग प्रामुख्याने क्रमचयन आणि संयोजन चा अभ्यास का करावा? यातील पुढील शिक्षण अणि अध्यापन शी संबंधित काही मनोरंजक तथ्य, द्विपद प्रमेय आणि त्याचे सहगुणक आपल्या दैनंदिन जीवनात कसे वापरले जातात, नमुने आणि नातेसंबंधांचे औचित्य आणि सामान्यीकरण करून गणिती युक्तिवादाचा वापर, समकालीन नसलेल्या गणिताच्या घटनांसह ऐतिहासिक संदर्भात गणिताचा विकास, अपरिचित सेटिंग्जसाठी गणितावर आधारित समस्या कशा वापरल्या जाऊ शकतात, क्रमचयन आणि संयोजन तसेच त्याचे बीजगणित शिकण्याचा सर्वात सोपा मार्ग, द्विपदीय प्रमेयाचा सिद्धांत आणि त्याचे सहगुणक का शोधले गेले?, क्रमचयन आणि संयोजन अंतर्ज्ञानाने शिकणे यांवर प्रकाश टाकणारा आहे.

दुसरीकडे, सुचवलेले लघु प्रकल्प आणि मेंदु-विचारमंथन आधारित प्रश्न या विषयात समाविष्ट असलेल्या विषयांसाठी जिज्ञासा आणि कुतूहल निर्माण करतात.

प्रस्तावना

चयन सिद्धांत (combinatorial theory) ही एक अग्रगण्य गणिताची शाखा आहे ज्यामध्ये अनेक क्षेत्रांमध्ये संयुक्त अनुप्रयोगांची विस्तृत अनुप्रयोगे आहेत, जसे की क्रमचयन आणि संयोजन (permutations and combinations), मूलभूत स्वभावामुळे आणि व्यावहारिक अनुप्रयोगांमध्ये महत्त्व असल्यामुळे व्यापकपणे अभ्यास केला गेला आहे. वास्तविक जगातील गोष्टींबद्दल विचार करणे. क्रमचयन (permutations) हे गणिताद्वारे जगातील गोष्टी पाहण्याचा एक वेगळा मार्ग आहे. क्रमचयन आणि संयोजन हे संभाव्यतेतील (Probability) दोन सर्वात मूलभूत विषय आहेत. ते आकडेवारीमध्ये खूप मौल्यवान आहेत, आणि म्हणून सर्व भागांमध्ये गणित तसेच वास्तविक जीवनात त्यामुळे विद्यार्थ्यांकडून शिकली जाणारी एक महत्त्वाची संकल्पना बनते. आपल्या सभोवतालचे जग समजून घेण्यासाठी क्रमचयन आणि संयोजन (permutations and combinations) यांचा अभ्यास करणे आवश्यक आहे कारण या दोन पद्धती आम्हाला चांगले पर्याय निवडण्यास मदत करतात. क्रमचयन (permutations) मध्ये घटकांच्या गटांवर (groups of elements) अभ्यास असतो, जेथे त्यांचा क्रम (order) महत्त्वाचा आहे. दुसरीकडे संयोजन (combinations) मध्ये घटकांच्या गटांवर (groups of elements) अभ्यास असतो जेथे क्रम (order) महत्त्वाचा नाही.

द्विपद प्रमेयाचा (binomial theorem) वापर सुलभतेमुळे आणि समजण्यायोग्यतेमुळे असंख्य अनुप्रयोग आहेत, मग ते अर्थव्यवस्थेत अंदाज बांधण्यासाठी असो किंवा हवामानाचा अंदाज बांधण्यासाठी. त्याच्या वापराची विस्तृत श्रेणी अशी शिफारस करते की उच्च गणित किंवा भौतिकशास्त्र शिकण्यासाठी या प्रमेयावरील प्रभुत्व आवश्यक आहे.

पूर्व-आवश्यकता

- बीजगणितीय राशी (algebraic expressions) सोडविण्यास मूलभूत कौशल्ये.
- कंस (brackets) विस्तार.
- रेखीय आणि द्विवर्गीय राशी (linear and quadratic expressions) चे घटकीकरण (factoring).
- बहुपदांसह (polynomials) काम करण्याचा काही अनुभव.
- बीजगणितीय तंत्रांची (algebraic techniques) ओळख.
- प्रतिस्थापन (Substitution).

घटक निष्पत्ती

या घटकाची निष्पत्ति खालीलप्रमाणे आहे:

U5-O1: एका वेळी n मधील r वस्तूंच्या क्रमचयन आणि संयोजनांची संख्या मोजणे.

U5-O2: मोजणीच्या प्रश्न (counting problems) चे निराकरण करण्यासाठी क्रमचयन आणि संयोजनचा सिद्धांत (theory of permutations and combinations) वापरणे.

U5-O3: सूत्रानुसार द्विपद सहगुणक (Binomial coefficients) काढणे.

U5-O4: द्विपद राशी चा (binomial expression) विस्तार धनात्मक पूर्णांक घातांक (positive integer powers) करण्यासाठी द्विपदीय प्रमेय (Binomial theorem) वापरणे.

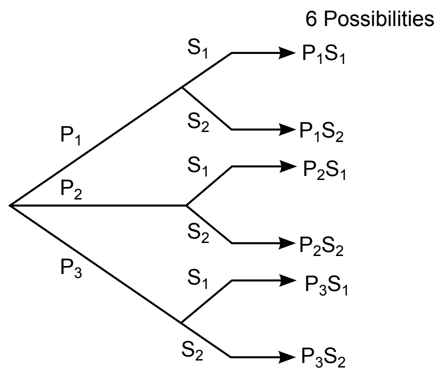
U5-O5: स्थूलमान (approximation) साठी द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) वापरणे.

घटक-5 निष्पत्ती (UO)	विषय निष्पत्ती सह संभावित मानचित्रण (1-दुर्बल सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5	CO-6	CO-7
U5-O1	-	-	-	-	2	1	3
U5-O2	-	-	-	1	2	1	3
U5-O3	-	-	-	-	1	-	3
U5-O4	-	-	-	1	2	1	3
U5-O5	-	-	-	1	2	1	3

5.1 मोजणीचे मूलभूत तत्व

5.1.1 गुणाकाराचे तत्व

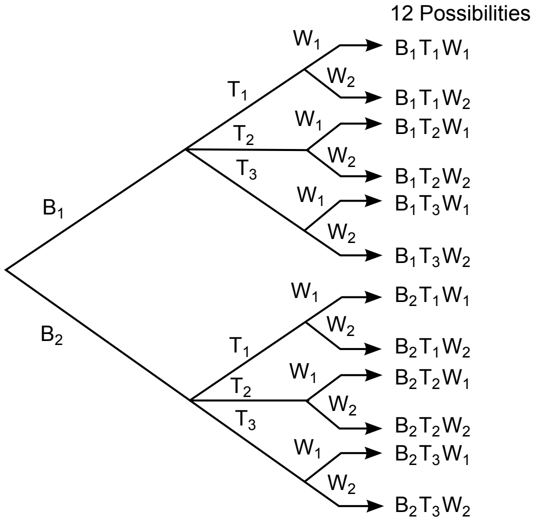
चलाखालील प्रश्नचा विचार करूया. मोहनकडे 3 पँट आणि 2 शर्ट आहेत. पँट आणि शर्टच्या किती वेगवेगळ्या जोड्या, तो घालू शकतो? पँट निवडण्याचे 3 मार्ग आहेत, कारण तेथे 3 पँट उपलब्ध आहेत. त्याचप्रमाणे, शर्ट 2 प्रकारे निवडला जाऊ शकतो. पँटच्या प्रत्येक निवडीसाठी, शर्टचे 2 पर्याय आहेत. म्हणून, पँट आणि शर्टच्या $3 \times 2 = 6$ जोड्या आहेत. समजा तीन पँटला P_1, P_2, P_3 आणि दोन शर्टला S_1, S_2 अशी नावे देऊ. मग, या सहा शक्यता आकृती मध्ये स्पष्ट केल्या जाऊ शकतात.



आकृती 5.1: गुणाकार-1 दर्शवण्याची शक्यता

चला याच प्रकारच्या आणखी एका प्रश्नचा विचार करूया. शबनमकडे 2 स्कूल बॅग, 3 टिफिन बॉक्स आणि 2 पाण्याच्या बाटल्या आहेत. ती किती प्रकारे या वस्तू घेऊन जाऊ शकते (प्रत्येकी एक निवडून).

शाळेची बॅग 2 वेगवेगळ्या प्रकारे निवडली जाऊ शकते. स्कूल बॅग निवडल्यानंतर, टिफिन बॉक्स 3 वेगवेगळ्या प्रकारे निवडला जाऊ शकतो. म्हणून, शाळेच्या बॅगच्या $2 \times 3 = 6$ जोड्या आणि टिफिन बॉक्स आहेत. या प्रत्येक जोडीसाठी पाण्याची बाटली 2 वेगवेगळ्या प्रकारे निवडली जाऊ शकते. म्हणूनच, $6 \times 2 = 12$ भिन्न मार्ग आहेत ज्यात शबनम या वस्तू शाळेत घेऊन जाऊ शकते. जर आम्ही 2 शाळेच्या पिशव्यांना B_1, B_2, तीनटिफिन बॉक्स T_1, T_2, T_3 आणि दोन पाण्याच्या बाटल्याना W_1, W_2 असे नाव दिले तर, हे शक्य आहे.



आकृती 5.2: गुणाकार-2 दर्शवण्याची शक्यता

खरं तर, वरील प्रकारांचे प्रश्न सोडविण्यास खालील मोजण्याचे मूलभूत तत्व (fundamental principle of counting), किंवा फक्त, गुणाकाराचे तत्व (Principle of Multiplication) वापरतात, ज्यामध्ये असे म्हटले आहे: "जर एखादी घटना m मध्ये वेगवेगळ्या प्रकारे घडू शकते, ज्यानंतर दुसरी घटना n वेगवेगळ्या प्रकारे घडू शकते, तर दिलेल्या क्रमाने घडलेल्या घटनांची एकूण संख्या $m \times n$ आहे."

5.1.2 जोडण्याचे तत्व

पहिल्या उदाहरणामध्ये पहिली घटना शर्ट निवडणे आहे, म्हणून ती शर्ट S_1 किंवा S_2 किंवा S_3 म्हणून निवडली जाऊ शकते येथे मार्गांची संख्या $1 + 1 + 1 = 3$ आहे म्हणून येथे जोडण्याचे तत्त्व लागू केले आहे. शर्ट घालण्याऐवजी समजा मोहनकडे 5 टी-शर्ट देखील असते तर शर्ट किंवा टी-शर्ट घालण्याच्या एकूण पद्धती $3 + 5 = 8$ असतील.

उदाहरण 1: ROSE या शब्दाच्या अक्षरांमधून तयार होऊ शकणाऱ्या 4 अक्षरांच्या शब्दांची संख्या शोधा, जेथे अक्षरांची पुनरावृत्ती करण्याची परवानगी नाही.

उत्तर: पुनरावृत्तीला परवानगी नाही हे लक्षात ठेवून 4 अक्षरे { }, { }, { }, { } या 4 रिक्त ठिकाणी भरण्याचे मार्ग आहेत, तितके शब्द आहेत. R, O, S, E यापैकी 4 अक्षरांपैकी पहिले स्थान 4 वेगवेगळ्या प्रकारे भरले जाऊ शकते. त्यानंतर, दुसरे स्थान उर्वरित 3 अक्षरांपैकी कोणीही 3 वेगवेगळ्या प्रकारे भरू शकते, त्यानंतर तिसरे जागा 2 वेगवेगळ्या प्रकारे भरली जाऊ शकते; त्यानंतर, चौथे स्थान 1 प्रकारे भरले जाऊ शकते. अशा प्रकारे, गुणाकार तत्वनुसार 4 ठिकाणे भरता येतील, अशा मार्गांची संख्या $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ आहे. म्हणून, शब्दांची आवश्यक संख्या 24 आहे.

टीप: जर अक्षरांच्या पुनरावृत्तीस परवानगी असेल, तर किती शब्द तयार होऊ शकतात? एखादी व्यक्ती सहजपणे समजू शकते की 4 रिक्त ठिकाणांपैकी प्रत्येकी 4 वेगवेगळ्या प्रकारे सलग भरता येतात.
म्हणून, शब्दांची आवश्यक संख्या $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

उदाहरण 2: अंकांची पुनरावृत्ती करता आली तर 1, 2, 3, 4, 5 अंकातून किती 2 अंकी सम संख्या (even numbers) तयार होऊ शकतात?

उत्तर: पाच दिलेल्या अंकांनी सलग 2 रिक्त जागा भरण्याचे मार्ग आहेत तितकेच मार्ग असतील. येथे, या प्रश्नात, आम्ही एकक स्थानची (unit's place) जागा भरणे सुरू करतो, कारण या जागेसाठी पर्याय फक्त 2 आणि 4 आहेत आणि हे 2 प्रकारे केले जाऊ शकते; त्यानंतर दशक स्थानची (ten's place) ची जागा कोणत्याही 5 अंकांनी 5 वेगवेगळ्या प्रकारे भरली जाऊ शकते कारण अंकांची पुनरावृत्ती करता येते. म्हणून, गुणाकार तत्त्वानुसार, दोन अंकी सम संख्यांची आवश्यक संख्या 2×5, म्हणजे, 10 आहे.

5.2 क्रमचयन

मागील भागाच्या उदाहरण 1 मध्ये, आम्ही प्रत्यक्षात ROSE, REOS, ..., इत्यादी अक्षरांच्या वेगवेगळ्या संभाव्य व्यवस्था मोजल्या. येथे, या सूचीमध्ये, प्रत्येक व्यवस्था इतरांपेक्षा वेगळी आहे. दुसऱ्या शब्दांत, अक्षरे लिहिण्याचा क्रम महत्वाचा आहे. प्रत्येक व्यवस्थेला एका वेळी घेतलेल्या 4 वेगवेगळ्या अक्षरांची क्रमचयन (Permutation) म्हणतात.

आता, जर आपल्याला 3-अक्षरांच्या शब्दांची संख्या, अर्थासह किंवा त्याशिवाय, जी NUMBER या शब्दाच्या अक्षरांमधून तयार केली जाऊ शकते, जिथे अक्षरांच्या पुनरावृत्तीस परवानगी नाही, निश्चित करावी लागेल, तर आपल्याला व्यवस्था मोजणे आवश्यक आहे NUM, NMU, MUN, NUB, ..., इ. येथे, आम्ही एकाच वेळी 3 घेतलेल्या, 6 वेगवेगळ्या अक्षरांच्या क्रमचयन मोजत आहोत. शब्दांची आवश्यक संख्या $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (गुणाकार तत्व वापरून).

जर अक्षरांच्या पुनरावृत्तीस परवानगी असेल, तर शब्दांची आवश्यक संख्या $6 \times 6 \times 6 = 216$ असेल.

5.2.1 जेव्हा सर्व वस्तू वेगळ्या (distinct) असतात तेव्हा क्रमचयन (Permutation)

एका वेळी r घेतलेल्या, n वेगवेगळ्या वस्तूंच्या क्रमचयनची संख्या, जेथे $0 < r \le n$ आणि वस्तूंची पुनरावृत्ती होत नाही, ती $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$ आहे, जे ${}^nP_r$ द्वारे दर्शविले जाते. ${}^nP_r$ ही संकल्पना अवघड आहे आणि आम्हाला एक चिन्ह आवश्यक आहे जे या संकल्पनाचा आकार कमी करण्यास मदत करेल. चिन्ह $n!$ (वाचा: फॅक्टोरियल n किंवा n फॅक्टोरियल) मदत करते. खालील मजकूरामध्ये आपण शिकू की प्रत्यक्षात $n!$ म्हणजे काय आहे.

5.2.2 क्रमगुणाकार चिन्ह

चिन्ह $n!$ प्रथम n नैसर्गिक संख्यांचे गुणन दर्शवते, म्हणजे गुणन $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ हे $n!$ म्हणून दर्शविले जाते. आम्ही हे चिन्ह 'n फॅक्टोरियल' म्हणून वाचतो.

अशाप्रकारे,

Thus, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times (n-1) \times n = n!$

$1 = 1!$

$1 \times 2 = 2!$

$1 \times 2 \times 3 = 3!$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$ आणि असे बरेच

म्हणून $0! = 1$

आपण लिहू शकतो $5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$$

स्पष्टपणे, नैसर्गिक संख्या n साठी,

$$n! = n\,(n-1)!$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)!\ [\text{जेथे } (n \geq 2)]$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)!\ [\text{जेथे } (n \geq 3)]$$

आणि इतर

उदाहरण 3: सोडवा:

(i) $5!$ (ii) $7!$ (iii) $7! - 5!$

उत्तर: (i) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(iii) $7! - 5! = 5040 - 120 = 4920.$

उदाहरण 4: किंमत काढा:

(i) ${}^5P_2$ (ii) ${}^4P_4$ (iii) $P(6,0)$

उत्तर: (i) $${}^5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

(ii) $${}^4P_4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4! = 24 \quad \{\because 0! = 1$$

(iii) $$P(6,0) = \frac{6!}{(6-0)!} = \frac{6!}{6!} = 1$$

उदाहरण 5: जर $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$ तर x ची किंमत काढा.

उत्तर: दिल्याप्रमाणे

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{x}{10 \times 9}\ or\ \frac{10}{9} = \frac{x}{90},\ \text{किंवा}\ x = 100$$

उदाहरण 6: सिद्ध करा: $(n-1)! + (n+1)! = (n^2 + n + 1)(n-1)!$

उत्तर: डावी बाजू $= (n-1)! + (n+1)! = (n-1)! + (n+1)(n)(n-1)!$

$$= (n-1)!(1 + n^2 + n) = (1 + n^2 + n)(n-1)! = \text{उजवी बाजू}$$

उदाहरण 7: सिद्ध करा: $2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2)=\dfrac{2(n!)}{n}$

उत्तर: डावी बाजू $=2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2)=2\left[1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n-1)\right]$

$$=2(n-1)!=2\left[\cdot\frac{(n-1)!n}{n}\right]=\frac{2(n!)}{n}= \text{ उजवी बाजू}$$

उदाहरण 8: सिद्ध करा: $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}+\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}=\dfrac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$

उत्तर: डावी बाजू $=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}+\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-r+1)}{(n-r+1)}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\cdot\frac{r}{r}$$

$$=\frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}+\frac{rn!}{(r)!(n-r+1)!}=\frac{(n-r+1+r)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

= उजवी बाजू

5.2.3 क्रमचयन

प्रकार 1: n वस्तूंपैकी r वस्तू एका रेषेत रचायची असेल तर सूत्रानुसार एकूण व्यवस्था मिळवता येतात.

$$^{n}P_{r} \text{ or } \mathrm{P}(\mathrm{n,r})=\frac{n!}{(n-r)!}\ ;\ n\geq r\geq 0$$

प्रकार 2: एका वेळी r घेतलेल्या विविध वस्तूंच्या क्रमचयनची संख्या n^r असते, जेथे पुनरावृत्तीची परवानगी आहे.

प्रकार 3: जेव्हा सर्व वस्तू वेगळ्या वस्तू नसतात तेव्हा क्रमचयन: समजा आपल्याला ROOT शब्दाच्या अक्षरे पुनर्रचना करण्याच्या मार्गांची संख्या शोधावी लागेल. या प्रकरणात, शब्दाची अक्षरे सर्व भिन्न नाहीत. येथे दोन O आहेत, जे एकाच प्रकारचे आहेत. आपण तात्पुरते, दोन O ला वेगळ्या, O_1 आणि O_2 असे म्हणूया. 4-भिन्न अक्षरांच्या क्रमचयनची संख्या, या प्रकरणात, एका वेळी 4 घेतले, तर 4 ! आहे. या क्रमचयनपैकी एकाचा विचार करा, RO_1O_2T. या क्रमचयननुसार, आमच्याकडे 2 ! क्रमचयन आहेत RO_1O_2T आणि RO_2O_1T, जे O_1 आणि O_2 ला भिन्न न मानल्यास समान क्रमचयन होईल, म्हणजे, जर O_1 आणि O_2 दोन्ही ठिकाणी समान O असतील.म्हणून, क्रमपरिवर्तन संख्या

$$\frac{4!}{2!}=4\times3=12$$

Permutations when O_1, O_2 are different	Permutations when O_1, O_2 are the same O.
RO_1O_2T, RO_2O_1T	R O O T
TO_1O_2R, TO_2O_1R	T O O R
RO_1T_2O, RO_2T_1O	R O T O
TO_1RO_2, TO_2RO_1	T O R O
RTO_1O_2, RTO_2O_1	R T O O
TRO_1O_2, TRO_2O_1	T R O O
O_1O_2RT, O_2O_1TR	O O R T
O_1RO_2T, O_2RO_1T	O R O T
O_1TO_2R, O_2TO_1R	O T O R
O_1RTO_2, O_2RTO_1	O R T O
O_1TRO_2, O_2TRO_1	O T R O
O_1O_2TR, O_2O_1TR	O O T R

आकृती 5.3: क्रमपरिवर्तन प्रतिनिधित्व

उदाहरण 9: जर अंकांची पुनरावृत्ती करण्याची परवानगी नसेल तर 1 ते 9 अंक वापरून किती 4-अंकी संख्या तयार केली जाऊ शकते?

उत्तर: येथे क्रम महत्वपूर्ण आहे. उदाहरणार्थ 1234 आणि 1324 या दोन भिन्न संख्या आहेत. म्हणून, एकावेळी 4 घेतलेल्या 9 वेगवेगळ्या अंकांचे क्रमचयन असल्याने 4-अंकी संख्या असतील.

म्हणून, 4-अंकी संख्या $^{9}P_4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

उदाहरण 10: अर्धसत्र (mid-semester) परीक्षेत 12 विद्यार्थी वेगळ्या गुणांसह उत्तीर्ण झाले. पहिली तीन बक्षिसे किती प्रकारे जिंकली जाऊ शकतात?

उत्तर: येथे आमच्याकडे 12 विद्यार्थी आणि 3 बक्षिसे आहेत. सर्व 12 विद्यार्थ्यांनी वेगळे गुण मिळवले त्यामुळे कोणीही एकापेक्षा जास्त बक्षीस जिंकू शकत नाही आणि एकापेक्षा जास्त विद्यार्थी समान बक्षीस जिंकू शकत नाहीत.

म्हणून, मार्गांची संख्या = $^{12}P_3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12\times 11\times 10 = 1320$

उदाहरण 11: वेगळ्या अंकांसह सर्व 6-अंकी संख्यांची संख्या शोधा.

उत्तर: आम्हाला माहित आहे की 10 अंक आहेत. म्हणजे 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. येथे आपल्याला 6-अंकी संख्या तयार करण्यासाठी या 10 पैकी 6 ची व्यवस्था करावी लागेल. हे P (10, 6) मार्गांनी करता येते.

$$^{10}P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5 = 151200$$

परंतु ज्या संख्यांची अत्यंत डावी जागा 0 (शून्य) आहे ती 6-अंकी संख्या नाहीत.

अशा प्रकारच्या P (9, 5) संख्या आहेत.

$$i.e.\ ^{9}P_5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9\times 8\times 7\times 6\times 5 = 15120$$

म्हणून वेगळ्या अंकांसह आवश्यक 6-अंकी संख्या = 151200 – 12120 = 136080.

प्रकार 4: ला n वस्तूच्या क्रमचयनच्या संख्येसाठी सामान्यीकृत केले जाऊ शकते, जेथे p_1 वस्तू एक प्रकारची असतात, p_2 दुसऱ्या प्रकारची, ..., p_k ही k^{th} प्रकारची आणि सर्व भिन्न प्रकारची असेल तर क्रमचयनची संख्या

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$$

उदाहरण 12: ALLAHABAD शब्दाच्या अक्षराच्या क्रमचयनची संख्या शोधा.

उत्तर: येथे, 9 वस्तू (अक्षरे) आहेत ज्यात 4A आहेत, 2 L आहेत आणि बाकी सर्व भिन्न आहेत.

म्हणून, आवश्यक संख्या व्यवस्था = $\frac{9!}{4!2!} = \frac{5\times 6\times 7\times 8\times 9}{2} = 7560$

उदाहरण 13: n ची किंमत काढा, $^{n}P_5 = 42\left(^{n}P_3\right), n > 4$

उत्तर: दिलेले आहे,

$^{n}P_5 = 42\left(^{n}P_3\right), n > 4$

किंवा $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 42n(n-1)(n-2)$

जर $n > 4$ म्हणून $n(n-1)(n-2) \neq 0$

म्हणून, दोन्ही बाजूला $n\ (n-1)\ (n-2)$, ने भागून,

Permutation & Combination

$$(n-3)(n-4)=42$$

$$n^2-7n+12-42=0$$

$$n^2-7n-30=0$$

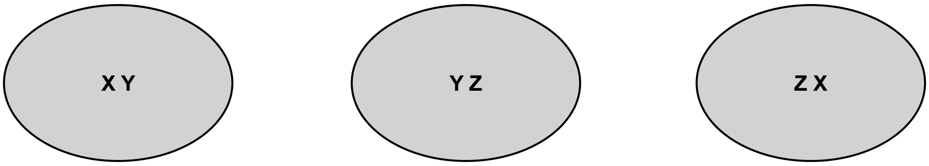
$$n^2-10n+3n-30=0$$

$$(n-10)(n+3)=0$$

$n-10=0$ किंवा $n+3=0$
$n=10$ किंवा $n=-3$
म्हणून, $n=10$ जिथे $n>4$.

5.3 संयोजन

आता आपण असे गृहीत धरूया की 3 lawn tennis खेळाडूंचा एक गट आहे X, Y, Z. 2 खेळाडूंचा एक संघ तयार केला जाणार आहे. आपण किती मार्गांनी असे करू शकतो? X आणि Y ची टीम, Y आणि X च्या टीमपेक्षा वेगळी आहे का? येथे, क्रम महत्त्वपूर्ण नाही. खरं तर, फक्त 3 संभाव्य मार्ग आहेत ज्यात संघ तयार केला जाऊ शकतो.



आकृती 5.4: संयोजनाचे प्रतिनिधित्व

हे XY, YZ आणि ZX आहेत. येथे, प्रत्येक निवडीला एकाच वेळी 2 घेतलेल्या 3 वेगवेगळ्या वस्तूंचे संयोजन (Combination) म्हणतात. येथे क्रम महत्त्वपूर्ण नाही.

आता आणखी काही उदाहरणांचा विचार करा.

1. एका खोलीत बारा व्यक्ती भेटतात आणि प्रत्येकजण इतरांशी हस्तांदोलन करतो. हस्तांदोलनची संख्या कशी ठरवायची? X ने Y सह हात मिळवणे आणि X ने Y शी, हे दोन भिन्न हस्तांदोलन होणार नाहीत. येथे, क्रम महत्त्वपूर्ण नाही. एकावेळी 2 घेतलेल्या 12 वेगवेगळ्या गोष्टींचे संयोजन (Combination) असतील तितके हस्तांदोलन असतील.
2. एका वर्तुळावर सात बिंदू आहेत. या बिंदूंना जोडीने जोडून किती जीवा (chords) काढता येतील? एकाच वेळी 2 घेतलेल्या 7 वेगवेगळ्या गोष्टींचे संयोजन (Combination) असल्याने अनेक जीवा असतील.

आता, आम्ही एका वेळी r घेतलेल्या n विविध वस्तूंच्या संख्यांची संख्या शोधण्याचे सूत्र प्राप्त करतो, जे ${}^nC_r$ द्वारे दर्शविले जाते. ज्याला परिभाषित केले आहे:

$${}^nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

विशेषतः

1. जर $r = n, {}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

2. जर $r = 0, {}^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

3. $^nC_{n-r} = {}^nC_r$ …{ n वस्तूंमधून r वस्तू निवडणे म्हणजे $(n - r)$ वस्तू नाकारणे आहे.

4. जर $^nC_a = {}^nC_b$, तर $a = b$ किंवा $n = a + b$

5. $^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$

उदाहरण 14: जर $^nC_9 = {}^nC_8$ तर सोडवा $^nC_{17}$

उत्तर: जर $^nC_a = {}^nC_b$ तर $a = b$ किंवा $n = a + b$

जर $n = 9 + 8 = 17$

म्हणून $^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

उदाहरण 15: किंमत काढा:

(i) $^7C_3$ (ii) $^5C_5$ (iii) $^{13}C_0$

उत्तर: (i) $C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!(4)!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{3\times2\times1\times4!} = 35$

(ii) $^5C_5 = \frac{5!}{5!(5-5)1} = \frac{5!}{(5!)(0!)} = \frac{5!}{5!} = 1$

(iii) $^{13}C_0 = \frac{13!}{0!(13-0)!} = \frac{13!}{(0!)(13!)} = \frac{13!}{13!} = 1$

उदाहरण 16: 2 पुरुष आणि 3 महिलांच्या गटातून 3 व्यक्तींची समिती स्थापन केली जाणार आहे. हे किती प्रकारे करता येईल? यापैकी किती समित्यांमध्ये 1 पुरुष आणि 2 महिला असतील?

उत्तर: येथे, क्रमला काही फरक पडत नाही. म्हणून, आपल्याला संयोजन (Combination) मोजण्याची आवश्यकता आहे. एकाच वेळी 3 घेतलेल्या 5 वेगवेगळ्या व्यक्तींचे संयोजन असल्याने अनेक समित्या असतील.

Permutation & Combination-2

म्हणून, मार्गांची आवश्यक संख्या $^5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = 10$

आता, 2 पुरुषांमधून 1 पुरुष $^2C_1$ प्रकारे आणि 3 महिलांमधून 2 महिला $^3C_2$ प्रकारे निवडल्या जाऊ शकतात.

म्हणून, समित्यांची आवश्यक संख्या $^2C_1 \times {}^3C_2 = 6$

5.4 द्विपदीय राशी

बीजगणितीय राशी (algebraic expression) ज्यामध्ये धनात्मक किंवा ऋणात्मक चिन्हासह दोन पदांचा समावेश असतो त्याला द्विपदीय राशी (Binomial expression) म्हणतात.

उदाहरणार्थ, $(a+b),(2x-3y),\left(\frac{p}{x^2}-\frac{q}{x^4}\right),\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y^3}\right)$ etc.

5.4.1 धनात्मक पूर्णांक घातांकसाठी द्विपद प्रमेय

ज्या नियमाद्वारे द्विपदांची कोणतीही घातांक विस्तारित करता येते त्याला द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) म्हणतात. जर n एक धनात्मक पूर्णांक आणि x, $y \in C$ असेल तर

$$\left(x-y\right)^n = {}^nC_0x^{n-0}y^0 - {}^nC_1x^{n-1}y^1 + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - ...... +{}^nC_rx^{n-r}y^r + ...+{}^nC_{n-1}xy^{n-1} + {}^nC_nx^0y^n$$

$$i.e., \ (x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r.x^{n-r}.y^r \qquad ....(i)$$

${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ...{}^nC_n$ ला द्विपद सहगुणक (binomial coefficients) म्हणतात.

$0 \le r \le n$ करिता ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+.......$$

काही महत्त्वाचे विस्तार:

(1) मध्ये y ला – y मध्ये बदलून, आम्हाला मिळते,

$$\left(x-y\right)^n = {}^nC_0x^{n-0}y^0 - {}^nC_1x^{n-1}y^1 + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - ...... +(-1)^r\,{}^nC_rx^{n-r}y^r + ...+(-1)^n\,{}^nC_nx^0y^n$$

$$i.e., \ (x-y)^n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}^nC_rx^{n-r}y^r$$

$(x-y)^n$ च्या विस्तारातील एक सोडून एक पद धनात्मक आणि ऋणात्मक आहेत, शेवटची पद धनात्मक किंवा ऋणात्मक आहे कारण n सम किंवा विषम आहे.

(2) मध्ये x ला 1 आणि y ला x मध्ये बदलून, आम्हाला मिळते,

$$(1+x)^n = {}^nC_0x^0 + {}^nC_1x^1 + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_rx^r + ... + {}^nC_nx^n$$

$$i.e., \ (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_rx^r$$

$(1+x)^n$ हे x च्या घातांकचा चढता क्रम आहे.

(3) मध्ये x ला 1 आणि y ला -x मध्ये बदलून, आम्हाला मिळते

$$(1-x)^n = {}^nC_0x^0 - {}^nC_1x^1 + {}^nC_2x^2 - \ldots\ldots + (-1)^r\, {}^nC_rx^r + \ldots\ldots + (-1)^n\, {}^nC_nx^n$$

$$i.e.,\ (1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nC_rx^r$$

(4) $(x+y)^n + (x-y)^n = 2[{}^nC_0x^ny^0 + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_4x^{n-4}y^4 + \ldots\ldots]$ आणि

$$(x+y)^n - (x-y)^n = 2[{}^nC_1x^{n-1}y^1 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + {}^nC_5x^{n-5}y^5 + \ldots]$$

(5) $(1+x)^n$ च्या विस्तारामध्ये (r + 1)th पदचा सहगुणक (coefficient) ${}^nC_r$. आहे.

(6) $(1+x)^n$ च्या विस्तारामध्ये x^r चा सहगुणक (coefficient) ${}^nC_r$. आहे.

सामान्य पद

$(1+x)^n$ च्या विस्तारामध्ये (r + 1)th हा सामान्य पद असून T_{r+1} द्वारे दर्शवली जाते $T_{r+1} = {}^nC_rx^{n-r}y^r$

- $(x-y)^n$ च्या विस्तारातील सामान्य पद $T_{r+1} = (-1)^r\, {}^nC_rx^{n-r}y^r$
- $(1+x)^n$ च्या विस्तारातील सामान्य पद $T_{r+1} = {}^nC_rx^r$
- $(1-x)^n$, च्या विस्तारातील सामान्य पद $T_{r+1} = (-1)^r\, {}^nC_rx^r$

5.4.2 कोणत्याही घातांकसाठी द्विपद प्रमेय

विधान:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots. + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\text{terms up to } \infty$$

जेव्हा n एक ऋणात्मक पूर्णांक किंवा अपूर्णांक असेल, जेथे, $-1 < x < 1$, अन्यथा विस्तार शक्य होणार नाही.

जर पहिली पद 1 नसेल तर पहिल्या पद ची एकता (unity) खालील प्रकारे करा, $(x+y)^n = x^n\left[1+\frac{y}{x}\right]^n$, जर $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$.

सामान्य पद:

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$$

काही महत्त्वाचे विस्तार:

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\ldots$

2. $(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots..(n-r+1)}{r!}(-x)^r + \ldots\ldots$

3. $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + ... + \frac{n(n+1)......(n+r-1)}{r!}x^r + ...$

4. $(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + ... + \frac{n(n+1)......(n+r-1)}{r!}(-x)^r + ...$

5. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...\infty$

6. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...\infty$

7. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...\infty$

8. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...\infty$

9. $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - ....\infty$

10. $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + ...\infty$

5.4.3 द्विपदीय प्रमेयाने स्थूलमान आधारित प्रश्न

आपल्या माहितीनुसार $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ...$.

जर x हे 1 च्या तुलनेत लहान असेल, तर मूल्ये लहान आणि लहान होतात.वरील विस्तारातील पद लहान आणि लहान होतात.

जर x हे 1 च्या तुलनेत खूपच लहान असेल, तर आम्ही 1 ला $(1+x)^n$ मूल्याच्या पहिल्या स्थूलमान (approximation) प्रमाणे किंवा $1 + nx$ ला दुसऱ्या स्थूलमान च्या रूपात घेऊ शकतो.

उदाहरण 17: विस्तार करा $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 ; x \neq 0$

उत्तर: द्विपद प्रमेय वरून,

$$\left(a+b\right)^n = {}^nC_0(a)^n(b)^0 + {}^nC_1(a)^{n-1}(b)^1 + {}^nC_2(a)^{n-2}(b)^2 + ... + {}^nC_n(a)^0(b)^n$$

आता द्विपद प्रमेयाशी तुलना करून,

$$a = x^2, b = \frac{3}{x} \text{ आणि } n = 4$$

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0\left(x^2\right)^4\left(\frac{3}{x}\right)^0 + {}^4C_1\left(x^2\right)^3\left(\frac{3}{x}\right)^1 + {}^4C_2\left(x^2\right)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2$$

$$+ {}^4C_3\left(x^2\right)^1\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(x^2\right)^0\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4x^6.\frac{3}{x} + 6x^4.\frac{9}{x^2} + 4x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4} = x^8 + 15x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

उदाहरण 18: द्विपद प्रमेय वापरून खालील विस्तार करा:

(i) $\left(-3x+\frac{4}{x^2}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3}{x^2}\right)^6$

(iii) $(2x+3y)^5$ (iv) $(1+x+x^2)^5$

उत्तर: (i) $\left(-3x+\frac{4}{x^2}\right)^4$

द्विपद प्रमेय वरून,

$$(a+b)^n = {}^nC_0(a)^n(b)^0 + {}^nC_1(a)^{n-1}(b)^1 + {}^nC_2(a)^{n-2}(b)^2 + ... + {}^nC_n(a)^0(b)^n$$

आता द्विपद प्रमेयाशी तुलना करून,

$$a=-3x, b=\frac{4}{x} \text{ आणि } n=4$$

$$\therefore \left(-3x+\frac{4}{x^2}\right)^4 = {}^4C_0(-3x)^4\left(\frac{4}{x^2}\right)^0 + {}^4C_1(-3x)^{4-1}\left(\frac{4}{x^2}\right)^1 + {}^4C_2(-3x)^{4-2}\left(\frac{4}{x^2}\right)^2 + {}^4C_3(-3x)^{4-3}\left(\frac{4}{x^2}\right)^3$$

$$+ {}^4C_4(-3x)^{4-4}\left(\frac{4}{x^2}\right)^4$$

$$=1\cdot 81x^4\cdot 1+4\cdot(-27)x^3\cdot\frac{4}{x^2}+6\cdot 9x^2\cdot\frac{16}{x^4}+4\cdot(-3)x\cdot\frac{64}{x^6}+1\cdot 1\cdot\frac{256}{x^8}$$

$$=81x^4-432x+\frac{864}{x^2}-\frac{768}{x^5}+\frac{256}{x^8}$$

(ii) $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3}{x^2}\right)^6$

द्विपद प्रमेय वरून,

$$(a+b)^n = {}^nC_0(a)^n(b)^0 + {}^nC_1(a)^{n-1}(b)^1 + {}^nC_2(a)^{n-2}(b)^2 + ... + {}^nC_n(a)^0(b)^n$$

आता द्विपद प्रमेयाशी तुलना करून,

$$a=\frac{2x^2}{3}, b=-\frac{3}{x^2} \text{ आणि } n=6$$

$$\therefore \left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3}{x^2}\right)^6 = {}^6C_0\left(\frac{2x^2}{3}\right)^6\left(-\frac{3}{x^2}\right)^0 + {}^6C_1\left(\frac{2x^2}{3}\right)^5\left(-\frac{3}{x^2}\right)^1 + {}^6C_2\left(\frac{2x^2}{3}\right)^4\left(-\frac{3}{x^2}\right)^2 + {}^6C_3\left(\frac{2x^2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{x^2}\right)^3$$

$$+ {}^6C_4\left(\frac{2x^2}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{x^2}\right)^4 + {}^6C_5\left(\frac{2x^2}{3}\right)^1\left(-\frac{3}{x^2}\right)^5 + {}^6C_6\left(\frac{2x^2}{3}\right)^0\left(-\frac{3}{x^2}\right)^6$$

$$=1\cdot\left(\frac{64x^{12}}{729}\right)\cdot 1+6\left(\frac{32x^{10}}{243}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)+15\left(\frac{16x^2}{81}\right)\left(\frac{9}{x^4}\right)+20\left(\frac{8x^6}{27}\right)\left(-\frac{27}{x^6}\right)$$

$$+15\left(\frac{4x^4}{9}\right)\left(\frac{81}{x^8}\right)+6\left(\frac{2x^2}{3}\right)\left(-\frac{243}{x^{10}}\right)+1\cdot 1\cdot\left(\frac{729}{x^{12}}\right)$$

$$=\frac{64x^{12}}{729}-\frac{64x^8}{27}+\frac{80x^4}{3}-160+\frac{540}{x^4}-\frac{972}{x^8}+\frac{729}{x^{12}}$$

(iii) $(2x+3y)^5$

द्विपद प्रमेय वरून,

$$(a+b)^n = {}^nC_0(a)^n(b)^0 + {}^nC_1(a)^{n-1}(b)^1 + {}^nC_2(a)^{n-2}(b)^2 + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_n(a)^0(b)^n$$

आता द्विपद प्रमेयाशी तुलना करून,

$a = 2x$, $b = 3y$ आणि $n = 5$

$$\therefore (2x+3y)^5 = {}^5C_0(2x)^5(3y)^0 + {}^5C_1(2x)^4(3y)^1 + {}^5C_2(2x)^3(3y)^2 + {}^5C_3(2x)^2(3y)^3 + {}^5C_4(2x)^1(3y)^4 + {}^5C_5(2x)^0(3y)^5$$

$$\therefore (2x+3y)^5 = 1\cdot(32x^5)\cdot 1+5(16x^4)(3y)+10(8x^3)(9y^2)+10(4x^2)(27y^3)+5(2x)(81y^4)+1\cdot 1\cdot(243y^5)$$

$$\therefore (2x+3y)^5 = 32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3+810xy^4+243y^5$$

(iv) $(1+x+x^2)^5$

समजा $1+x=y \;\therefore (1+x+x^2)^5=(y+x^2)^5$

$$(y+x^2)^5 = \therefore (y+x^2)^5 = {}^5C_0(y)^5(x^2)^0 + {}^5C_1(y)^4(x^2)^1 + {}^5C_2(y)^3(x^2)^2 + {}^5C_3(y)^2(x^2)^3 + {}^5C_4(y)^1(x^2)^4 + {}^5C_5(y)^0(x^2)^5$$

$$\therefore (y+x^2)^5 = 1\cdot(y)^5\cdot 1+5(y)^4(x^2)^1+10(y)^3(x^2)^2+10(y)^2(x^2)^3+5(y)^1(x^2)^4+1\cdot 1\cdot(x^2)^5$$

$$\therefore (y+x^2)^5 = y^5+5y^4x^2+10y^3x^4+10y^2x^6+5yx^8+x^{10}$$

$$\therefore (1+x+x^2)^5 = (1+x)^5+5(1+x)^4x^2+10(1+x)^3x^4+10(1+x)^2x^6+5(1+x)x^8+x^{10}$$

वापर करून

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_nx^{n-1}$$

वापरून

$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$ and $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$

$$\therefore (1+x+x^2)^5 = (1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)+5(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)x^2$$
$$+10(1+3x+3x^2+x^3)x^4+10(1+2x+x^2)x^6+5(1+x)x^8+x^{10}$$

$$\therefore (1+x+x^2)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5+5x^2+20x^3+30x^4+20x^5+5x^6$$
$$+10x^4+30x^5+30x^6+10x^7+10x^6+20x^7+10x^8+5x^8+5x^9+x^{10}$$

$$\therefore (1+x+x^2)^5 = 1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$$

उदाहरण 19: निर्देशानुसार करा.

(i) $(x^2+2y)^8$ च्या विस्तारात 5th पद शोधा.

(ii) $\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{3}{2x^2}\right)^{12}$ च्या विस्तारात मधले पद शोधा.

(iii) $\left(\frac{y^2}{3}-\frac{4}{y^2}\right)^6$ च्या विस्तारात अचल (constant) पद शोधा.

उत्तर: (i) Find 5^{th} term in $(x^2+2y)^8$

The $(r+1)^{th}$ term of $(a+b)^n$ is, $T_{r+1} = {}^nC_r\,(a)^{n-r}(b)^r$

Here $a=x^2, b=2y$ and $n=8$

5 वी पद शोधण्यासाठी आपल्याला r = 4 घ्यावे लागेल.

$$\therefore T_{r+1} = C_4^8 (x^2)^{8-4}(2y)^4 = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4\times3\times2\times1\times4!}\times x^8\times16y^4 = 224x^8y^4$$

(ii) Find the middle term in $\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{3}{2x^2}\right)^{12}$

विस्तारातील पदांची संख्या 12 + 1 = 13 आहे.

म्हणून, फक्त एक मध्यम पद आहे.

येथे $\left(\frac{12}{2}+1\right)^{th} = 7^{th}$ पद मधले पद आहे.

$$a=\frac{2x^2}{3}, b=\frac{3}{2x^2}, n=12 \text{ आणि } r=6$$

$$T_{6+1}=C_6^{12}\left(\frac{2x^2}{3}\right)^{12-6}\left(\frac{3}{2x^2}\right)^6=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6!}{6\times5\times4\times3\times2\times1\times6!}\times\frac{(2)^6x^{12}}{(3)^6}\times\frac{(3)^6}{(2)^6x^{12}}=924$$

(iii) Find the term independent of y in the expansion of $\left(\frac{y^2}{3}-\frac{4}{y^2}\right)^6$

समजा T_{r+1} हे $\left(\frac{y^2}{3}-\frac{4}{y^2}\right)^6$ च्या विस्तारात y नसलेले पद आहे.

$$\therefore T_{r+1}={}^6C_r\left(\frac{y^2}{3}\right)^{6-r}\left(-\frac{4}{y^2}\right)^r=\frac{6!}{r!(6-r)!}\times\frac{y^{12-2r}}{(3)^{6-r}}\times\frac{(-4)^r}{y^{2r}}=\frac{6!}{r!(6-r)!}\times\frac{(-4)^r}{(3)^{6-r}}\times y^{12-4r}$$

आता, आवश्यक पद y पासून स्वतंत्र आहे म्हणजेच y चा घातांक शून्य आहे.

$\therefore 12-4r=0 \qquad \therefore r=3$

$$\therefore T_{r+1}=\frac{6!}{3!(6-3)!}\times\frac{(-4)^3}{(3)^{6-3}}\times y^0=-\frac{1280}{27}$$

उदाहरण 20: सोडवा $(x+y)^4+(x-y)^4$ आणि शोधा $\left(\sqrt{2}+1\right)^4+\left(\sqrt{2}-1\right)^4$

उत्तर: $$(x+y)^4+(x-y)^4=\left\{\begin{array}{l}\left[{}^nC_0(x)^4(y)^0+{}^4C_1(x)^3(y)^1+{}^4C_2(x)^2(y)^2+{}^4C_3(x)^1(y)^3+{}^4C_4(x)^0(y)^4\right]\\+\left[{}^4C_0(x)^4(-y)^0+{}^4C_1(x)^3(-y)^1+{}^4C_2(x)^2(-y)^2+{}^4C_3(x)^1(-y)^3+{}^4C_4(x)^0(-y)^4\right]\end{array}\right\}$$

$$(x+y)^4+(x-y)^4=\left\{\begin{array}{l}\left[1\cdot(x)^4\cdot1+4(x)^3(y)^1+6(x)^2(y)^2+4(x)^1(y)^3+1\cdot1\cdot y^4\right]\\+\left[1\cdot(x)^4\cdot1-4(x)^3(y)^1+6(x)^2(y)^2-4(x)^1(y)^3+1\cdot1\cdot y^4\right]\end{array}\right\}$$

$$(x+y)^4+(x-y)^4=2\left(x^4+6x^2y^2+y^4\right)$$

$$\therefore\left(\sqrt{2}+1\right)^4+\left(\sqrt{2}-1\right)^4=2\left(\left(\sqrt{2}\right)^4+6\left(\sqrt{2}\right)^2(1)^2+(1)^4\right)=2(4+12+1)=34$$

उदाहरण 21: $99^{50}+100^{50}$ किंवा 101^{50} पैकी मोठे शोधा.

उत्तर: आपल्या माहितीनुसार $101^{50}=(100+1)^{50}=100^{50}+50.100^{49}+\frac{50.49}{2.1}100^{48}+....$ .....(i)

आणि $99^{50} = (100-1)^{50} = 100^{50} - 50.100^{49} + \frac{50.49}{2.1}100^{48} - ..$ ....(ii)

(i) मधून (ii) वजा करून,

$$101^{50} - 99^{50} = 2\cdot 50\cdot 100^{49} + 2\cdot\frac{50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 100^{47} = 100^{50} + 2\frac{50.49.48}{1.2.3}100^{47} > 100^{50}$$

Hence $101^{50} > 100^{50} + 99^{50}$.

उदाहरण 22: सिद्ध करा: $(1+x)^n - nx - 1$ ला x^2 ने भाग जातो (जेथे $n \in N$)

उत्तर: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + ...$

$$\therefore\ (1+x)^n - nx - 1 = x^2\left[\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x + ...\right]$$

म्हणून असे सिद्ध होते कि $(1+x)^n - nx - 1$ ला x^2 ने भाग जातो.

उदाहरण 23: $\left(2x^2 - \frac{1}{3x^2}\right)^{10}$ विस्तारामध्ये 6^{th} पद शोधा.

उत्तर: $(x+a)^n$ करिता $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$ वापरून.

म्हणून $T_6 = {}^{10}C_5 (2x^2)^5 \left(-\frac{1}{3x^2}\right)^5$

$$= -\frac{10!}{5!5!}32 \times \frac{1}{243} = -\frac{896}{27}$$

उदाहरण 24: द्विपद प्रमेय वापरून सोडवा:

(i) $(96)^4$ (ii) $(101)^3$

उत्तर: (i) $(96)^4 = (100-4)^4$

$$= {}^4C_0(100)^4(-4)^0 + {}^4C_1(100)^3(-4)^1 + {}^4C_2(100)^2(-4)^2 + {}^4C_3(100)^1(-4)^3 + {}^4C_4(100)^0(-4)^4$$

$$= 1\cdot(100)^4\cdot 1 + 4\cdot(100)^3(-4)^1 + 6\cdot(100)^2(-4)^2 + 4\cdot(100)^1(-4)^3 + 1\cdot 1\cdot(-4)^4$$

$$= (100)^4 - 16(100)^3 + 96(100)^2 - 25600 + 256$$

$$= 100000000 - 16000000 + 960000 - 25600 + 256 = 84934656$$

(ii) $$(101)^3 = (100+1)^3$$

$$= {}^3C_0(100)^3(1)^0 + {}^3C_1(100)^2(1)^1 + {}^3C_2(100)^1(1)^2 + {}^3C_3(100)^0(1)^3$$

$$= 1\cdot(100)^3\cdot 1 + 3\cdot(100)^2(1)^1 + 3\cdot(100)^1(1)^2 + 1\cdot(100)^0(1)^3$$

$$= 1000000 + 30000 + 300 + 1 = 1030301$$

अनुप्रयोग (APPLICATION) (वास्तविक जीवन/औद्योगिक)

अनुरूपण (Simulation):

उदाहरण 1: अनेक क्षेत्रांमध्ये अनुरूपणसाठी क्रमचयन आणि संयोजन (Permutation and Combination) वापरले जाऊ शकतात. विविध जीनोटाइप-फेनोटाइप असोसिएशनचे प्रतिनिधित्व करणारे क्रमचयन अनुवांशिक अनुरूपण (genetics simulations) मध्ये वापरले जातात. अनुरूपणसाठी क्रमचयन आणि संयोजनचा वापर करणारे इतर क्षेत्र म्हणजे नेटवर्क, क्रिप्टोग्राफी, डेटाबेस आणि ऑपरेशन रिसर्च.

सिम कार्ड:

उदाहरण 2: सिम कार्डसाठी भिन्नता क्रमांकाची गणना क्रमचयन सिद्धांताचा अनुप्रयोग म्हणून केली जाऊ शकते.

सुरक्षा कोड:

उदाहरण 3: क्रमचयन सिद्धांत कूटबद्धीकरण (encryption) किंवा सिक्युरिटी कोड /पासवर्ड च्या विज्ञानावर लागू केला जाऊ शकतो. संप्रेषण नेटवर्क (communication networks) आणि समांतर आणि वितरित प्रणालीं (parallel and distributed systems) मध्ये क्रमचयन वारंवार वापरले जातात.

गुप्तलेखन (Cryptography) आणि नेटवर्क सुरक्षा (Network Security):

उदाहरण 4: कामगिरीच्या अंदाजासाठी नेटवर्कवर विविध क्रमचयन मार्गिक्रमण करणे गुप्तलेखन आणि नेटवर्क सुरक्षा क्षेत्रात एक सामान्य समस्या आहे. बऱ्याच संप्रेषण नेटवर्क (communication networks) ला माहितीचे सुरक्षित हस्तांतरण आवश्यक असते, जे गुप्तलेखन आणि नेटवर्क सुरक्षिततेमध्ये विकास करते.

पूर्वानुमान सेवा (Forecast services):

उदाहरण 5: द्विपद प्रमेय आगामी आपत्तींच्या पूर्वानुमानात वापरला जाऊ शकतो, या प्रमेयाचा हवामानाच्या नमुन्यांचा अंदाज आणि विश्लेषण करण्यासाठी देखील वापर केला जाऊ शकतो.

वित्त (Finance):

उदाहरण 6: द्विपद प्रमेय अनेक वर्षांच्या कालावधीनंतर विशिष्ट व्याज दराने प्राप्त झालेल्या व्याजाची गणना करण्यात मदत करण्यासाठी उपयुक्त आहे.

उच्च गणित (Higher Mathematics):

उदाहरण 7: द्विपद प्रमेय उच्च घातांकमध्ये समीकरणांची उत्तरे शोधण्यासाठी वापरला जातो. हे भौतिकशास्त्र आणि गणितातील अनेक महत्त्वपूर्ण समीकरणे सिद्ध करण्यासाठी देखील वापरले जाते.

सांख्यिकी आणि संभाव्यता (Statistics and Probability):

उदाहरण 8: द्विपद प्रमेय सांख्यिकीमध्ये विविध प्रकारचे अनुप्रयोग आहेत आणि प्राप्त झालेल्या परिणामांचे संभाव्यता विश्लेषण आपल्या अर्थव्यवस्थेत मोठ्या प्रमाणावर वापरले जातात.

वास्तुशास्त्र (Architecture):

उदाहरण 9: अभियांत्रिकी प्रकल्पमध्ये खर्चाचा अंदाज लावण्यासाठी, वास्तुशास्त्र द्विपद प्रमेयाच्या अनुप्रयोगांचा वापर करतात, ते संरचनेच्या डिझाइनवर देखील लागू होतात.

इंटरनेट प्रोटोकॉल:

उदाहरण 10: द्विपद प्रमेय इंटरनेट ऑफ थिंग्ज (IoT) मध्ये शक्तिशाली अनुप्रयोग आहे. व्हेरिएबल सबनेटिंग (variable subnetting) मध्ये दुसरा अनुप्रयोग आढळू शकतो.

घटक सारांश

या युनिटमध्ये पहिला विभाग ${}^nP_r$ आणि ${}^nC_r$ च्या मूल्यासह क्रमचयन आणि संयोजन आणि वास्तविक जीवनातील समस्यांसाठी त्याचे अनुप्रयोग ला समर्पित आहे. क्रमचयन आणि संयोजन चा अभ्यास प्रोत्साहित करतो. संकल्पना, बीजगणित सुलभता आणि अचूक गणनाकडे लक्ष देणे आवश्यक आहे. बीजगणित गुणधर्मांवर चर्चा केली आहे. नवीन संकल्पना क्रमचयन आणि संयोजन अनुप्रयोगांसह मुख्य संकल्पनांना बळकट करण्यासाठी नवीन उदाहरण ची रचना केली आहे.

त्यानंतरचे विभाग धनात्मक पूर्णांक घातांक (positive integer index) आणि कोणत्याही घातांकसाठी द्विपद प्रमेय (binomial theorem) हाताळतात. काही मुक्त प्रश्नांचा सल्ला देखील देण्यात आला आहे की हे मौखिक प्रश्न मुख्य अटी आणि संकल्पनांच्या वैचारिक आकलनाचे मूल्यांकन करण्यात मदत करतील. दुसरीकडे बीजगणित प्रश्नावली विद्यार्थ्यांना बीजगणितीय संकल्पना लागू करण्यास मदत करतात. द्विपद सहगुणक (binomial coefficient) वर आधारित प्रश्न विद्यार्थ्यांच्या अंदाज व समान अर्थ लावण्याच्या क्षमतेचे मूल्यांकन करतात. संख्यात्मक प्रश्नासाठी विद्यार्थ्यांना गणना करणे आवश्यक असते. वास्तविक जागतिक अनुप्रयोग (Real-World Applications) वास्तववादी समस्येची परिस्थिती सादर करतात.

स्वाध्याय

बहुपर्यायी प्रश्न

1. जर सर्वोत्तम आणि सर्वात वाईट पेपर एकत्र कधीच दिसला नाही, तर सहा परीक्षांचे पेपर किती प्रकारे क्रमाने लावता येतात?

(a) 120 (b) 480

(c) 240 (d) या पैकी नाही

2. 5 ने विभाजित होणाऱ्या आणि 3000 ते 4000 दरम्यान 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकांमधून तयार झालेल्या किती संख्या आहेत (पुनरावृत्ती अनुमत नाही)?

(a) $\frac{n+r-1}{r}$ (b) ${}^5P_2$

(c) ${}^4P_2$ (d) ${}^6P_3$

3. एका हाताच्या चार बोटावर 6 अंगठ्या घालता येतील अशा पद्धतींची संख्या आहे

(a) 4^6 (b) ${}^6C_4$

(c) 6^4 (d) या पैकी नाही

4. पुनरावृत्तीस परवानगी नसताना 1, 2, 3, 4 अंकांमधून किती संख्या तयार होऊ शकतात?

(a) ${}^4P_4$ (b) ${}^4P_3$

(c) ${}^4P_1+{}^4P_2+{}^4P_3$ (d) ${}^4P_1+{}^4P_2+{}^4P_3+{}^4P_4$

5. एका पदासाठी 3 उमेदवार आहेत आणि एकाची निवड 7 पुरुषांच्या मतांनी करायची आहे. ज्या पद्धतीने मते दिली जाऊ शकतात त्यांची संख्या आहे

(a) 7^3 (b) 3^7

(c) ${}^7C_3$ (d) या पैकी नाही

6. भोपाळ आणि ग्वाल्हेर दरम्यान 4 बस धावतात. जर एखादा माणूस ग्वाल्हेरहून भोपाळला बसने गेला आणि दुसऱ्या बसने ग्वाल्हेरला परत आला, तर एकूण संभाव्य मार्ग

(a) 12 (b) 16

(c) 4 (d) 8

7. जर ${}^nP_5 = 20.\ {}^nP_3$, तर $n=$

(a) 4 (b) 8

(c) 6 (d) 7

8. UNIVERSAL शब्दाच्या कोणत्याही तीन अक्षरांचा समावेश असलेले किती शब्द तयार होऊ शकतात

(a) 504 (b) 405

(c) 540 (d) 450

9. जर ${}^nP_4 : {}^nP_5 = 1:2$, तर $n=$

(a) 4 (b) 5

(c) 6 (d) 7

10. n लेटर-बॉक्समध्ये mn पत्रे किती प्रकारे पोस्ट केली जाऊ शकतात?

(a) $(mn)^n$ (b) m^{mn}

(c) n^{mn} (d) या पैकी नाही

11. 10 चूक-बरोबर प्रश्नांची उत्तरे किती प्रकारे देता येतील?

(a) 20 (b) 100

(c) 512 (d) 1024

12. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 अंकांमधून 3 वेगवेगळ्या अंकांच्या किती सम संख्या तयार केल्या जाऊ शकतात (पुनरावृत्तीला परवानगी नाही)

(a) 224 (b) 280

(c) 324 (d) या पैकी नाही

13. जर ${}^{n}P_5 = 9 \times {}^{n-1}P_4$, तर n ची किंमत

(a) 6 (b) 8

(c) 5 (d) 9

14. ${}^{n}P_r$ ची किंमत

(a) ${}^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1}$ (b) $n.\,{}^{n-1}P_r + {}^{n-1}P_{r-1}$

(c) $n({}^{n-1}P_r + {}^{n-1}P_{r-1})$ (d) ${}^{n-1}P_{r-1} + {}^{n-1}P_r$

15. एकूण 9-अंकी संख्यांची संख्या शोधा ज्यात सर्व अंक भिन्न आहेत

(a) $9 \times 9!$ (b) $9!$

(c) $10!$ (d) या पैकी नाही

16. सहा बाजू असलेले चार घनाकृती फासे (dice) फेकल्यावर कमीतकमी एका फास्यावर (die) 2 हा अंक दर्शविणाऱ्या संभाव्य परिणामांची संख्या आहे.

(a) 1296 (b) 625

(c) 671 (d) या पैकी नाही

17. 4 पुडके (parcels) आणि 5 पोस्ट ऑफिस आहेत. पुडक्यांची नोंदणी किती वेगवेगळ्या प्रकारे करता येते?

(a) 20 (b) 4^5

(c) 5^4 (d) $5^4 - 4^5$

18. जर प्रत्येक विद्यार्थ्याला एक किंवा अधिक बक्षिसे घेता येतील तर चार विद्यार्थ्यांमध्ये 5 बक्षिसे किती प्रकारे वितरित करता येतील?

(a) 1024 (b) 625

(c) 120 (d) 600

19. ट्रेनमध्ये पाच जागा रिक्त असतात, मग तीन प्रवासी किती प्रकारे बसू शकतात ?

(a) 20 (b) 30

(c) 10 (d) 60

20. आकडे 4, 5, 6, 7, 8 प्रत्येक संभाव्य क्रमाने लिहिलेले आहेत. 56000 पेक्षा जास्त संख्येची संख्या आहे.

(a) 72 (b) 96

(c) 90 (d) 98

21. गावातून शहराकडे जाणारे 5 रस्ते आहेत. गावकरी शहरात जाण्यासाठी आणि परत येण्याच्या विविध मार्गांची संख्या आहे.

(a) 25 (b) 20

(c) 10 (d) 5

22. पाच परीक्षांच्या पेपरांची मांडणी किती प्रकारे करता येईल जेणेकरून भौतिकशास्त्र आणि रसायनशास्त्राचे प्रश्न कधीच एकत्र येत नाहीत?

(a) 31 (b) 48

(c) 60 (d) 72

23. 5 स्पर्धकांना प्रथम, द्वितीय आणि तृतीय बक्षिसे देता येतील अशा मार्गांची संख्या आहे

(a) 10 (b) 60

(c) 15 (d) 125

24. 3-अंकी विषम संख्यांची संख्या, जी 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंक वापरून तयार केली जाऊ शकते जेव्हा पुनरावृत्तीची परवानगी आहे

(a) 60 (b) 108

(c) 36 (d) 30

25. अंकांच्या पुनरावृत्तीस परवानगी नसताना 2, 0, 4, 3, 8 अंकांमधून पाच अंकांची किती संख्या तयार केली जाऊ शकते

(a) 96 (b) 120

(c) 144 (d) 14

26. जर $12P_r = 1320$, तर r ची किंमत

(a) 5 (b) 4

(c) 3 (d) 2

27. असे गृहीत धरून की सलग दोन अंक समान नाहीत, n अंकी संख्यांची संख्या आहे

(a) $n!$ (b) $9!$

(c) 9^n (d) n^9

28. SALOON या शब्दाच्या अक्षरांच्या मांडणीची संख्या, जर दोन O एकत्र येत नाहीत,

(a) 360 (b) 720

(c) 240 (d) 120

29. जर दोन व्यंजन एकत्र येत नसतील तर MAXIMUM या शब्दाच्या अक्षरांमधून तयार होणाऱ्या शब्दांची संख्या आहे

(a) $4!$ (b) $3! \times 4!$

(c) $7!$ (d) या पैकी नाही

30. COMMITTEE शब्दाच्या अक्षरांमधून किती शब्द बनवता येतात

(a) $\frac{9!}{(2!)^2}$ (b) $\frac{9!}{(2!)^3}$

(c) $\frac{9!}{2!}$ (d) $9!$

31. MODESTY या शब्दाची अक्षरे सर्व संभाव्य क्रमाने लिहिलेली आहेत आणि हे शब्द शब्दकोशात लिहिलेले आहेत, नंतर MODESTY शब्दाची श्रेणी आहे

(a) 5040 (b) 720

(c) 1681 (d) 2520

32. सलग किती प्रकारे n पुस्तकांची व्यवस्था केली जाऊ शकते जेणेकरून दोन निर्दिष्ट पुस्तके एकत्र नसतील

(a) $n!-(n-2)!$ (b) $(n-1)!(n-2)$

(c) $n!-2(n-1)$ (d) $(n-2)n!$

33. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 च्या मदतीने 500 आणि 600 दरम्यान येणाऱ्या किती संख्या तयार केल्या जाऊ शकतात जेव्हा अंकांची पुनरावृत्ती होणार नाही

(a) 20 (b) 40

(c) 60 (d) 80

34. अंक 0, 1, 2, 3, 4 ने सह बनवता येणाऱ्या 1000 पेक्षा जास्त परंतु 4000 पेक्षा जास्त नसलेल्या संख्यांची संख्या (अंकांची पुनरावृत्ती सह)

(a) 350 (b) 375

(c) 450 (d) 576

35. 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 अंकांच्या मदतीने तयार होणाऱ्या संख्यांची संख्या जेव्हा विषम अंक नेहमी विषम जागी असेल

(a) 24 (b) 18

(c) 12 (d) 30

36. 5 मुले आणि 3 मुली एका ओळीत किती प्रकारे बसू शकतात जेणेकरून दोन मुली एकत्र नाहीत

(a) $5!\times 3!$ (b) ${}^4P_3\times 5!$

(c) ${}^6P_3\times 5!$ (d) ${}^5P_3\times 3!$

37. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 ने सह बनवता येणाऱ्या 1000 पेक्षा लहान संख्यांची संख्या (अंकांची पुनरावृत्ती होणार नाही)

(a) 156 (b) 160

(c) 150 (d) या पैकी नाही

38. अष्टकोनात कर्णांची (diagonals) संख्या असेल

(a) 28 (b) 20

(c) 10 (d) 16

39. जर बहुभुजामध्ये 44 कर्ण (diagonals) असतील तर त्याच्या बाजूंची (sides) संख्या आहे

(a) 7 (b) 11

(c) 8 (d) या पैकी नाही

40. वर्तुळावरील 4 बिंदूंना जोडून किती त्रिकोण तयार करता येतात?

(a) 4 (b) 6

(c) 8 (d) 10

41. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6=$

(a) 101 (b) $70\sqrt{2}$

(c) $140\sqrt{2}$ (d) $120\sqrt{2}$

42. $x^5+10x^4a+40x^3a^2+80x^2a^3+80xa^4+32a^5=$

(a) $(x+a)^5$ (b) $(3x+a)^5$

(c) $(x+2a)^5$ (d) $(x+2a)^3$

43. सूत्र $(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+....$ बरोबर आहे जर

(a) $b<a$ (b) $a<b$

(c) $|a|<|b|$ (d) $|b|<|a|$

44. $(x+a)^{100}+(x-a)^{100}$ च्या विस्तारात सुलभीकरणानंतर (simplification) एकूण पदांची संख्या

(a) 202 (b) 51

(c) 50 (d) या पैकी नाही

45. द्विपद प्रमेय चा वापर करून $\frac{1}{\sqrt{5+4x}}$ चा विस्तार करू शकतो, जर

(a) $x<1$ (b) $|x|<1$

(c) $|x|<\frac{5}{4}$ (d) $|x|<\frac{4}{5}$

46. $(1+x)^{20}$ च्या विस्तारात r^{th} पद आणि $(r+4)^{th}$ पद चे सहगुणक समान आहे तर r ची किंमत

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) 10

47. जर $\left(x^4+\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ च्या विस्तारात r^{th} पदात x^4 आहे तर $r=$

(a) 7 (b) 8

(c) 9 (d) 10

48. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{17}$ च्या विस्तारात 16^{th} पद

(a) $136xy^7$ (b) $136xy$

(c) $-136xy^{15/2}$ (d) $-136xy^2$

49. $(1+x)^m$ च्या विस्तारात $-\frac{1}{8}x^2$ तिसरे पद आहे, तर m ची परिमेय किंमत (rational value)

(a) 2 (b) 1/2

(c) 3 (d) 4

50. $(1+x)^{2n}$ आणि $(1+x)^{2n-1}$ च्या विस्तारात x^n चे सहगुणक अनुक्रमे A आणि B आहे, तर

(a) $A=B$ (b) $A=2B$

(c) $2A=B$ (d) या पैकी नाही

51. $\left(y^2+\frac{c}{y}\right)^5$, च्या विस्तारात y चा सहगुणक

(a) $20c$ (b) $10c$

(c) $10c^3$ (d) $20c^2$

52. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$, च्या विस्तारात अचल (constant) पद

(a) – 20 (b) 20

(c) 30 (d) – 30

53. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ च्या विस्तारात मधले पद

(a) ${}^{10}C_4\ 1/x$ (b) $10C_5$

(c) $10C_5x$ (d) $10C_7x^4$

उत्तरे - बहुपर्यायी प्रश्न									
1.	b	**2.**	c	**3.**	a	**4.**	d	**5.**	b
6	a	**7.**	b	**8.**	a	**9.**	c	**10.**	c
11.	d	**12.**	a	**13.**	d	**14.**	a	**15.**	a
16.	c	**17.**	c	**18.**	a	**19.**	d	**20.**	c
21.	a	**22.**	d	**23.**	b	**24.**	b	**25.**	a
26.	c	**27.**	a	**28.**	c	**29.**	a	**30.**	b
31.	c	**32.**	b	**33.**	a	**34.**	b	**35.**	b
36.	c	**37.**	a	**38.**	b	**39.**	b	**40.**	a
41.	c	**42.**	c	**43.**	d	**44.**	b	**45.**	c
46.	c	**47.**	c	**48.**	c	**49.**	b	**50.**	b
51.	c	**52.**	a	**53.**	b				

लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न

1. खालीलचे मूल्य शोधा:

(i) $(x^0)!$ (ii) $({}^{101}C_1)!$

(iii) $(Log1)!$ (vi) $5!$

(v) $3 \times 4!$ (vi) $6 \times 5 \times 4!$

2. खालीलचे मूल्य शोधा:

(i) ${}^{8}P_5$ (ii) ${}^{14}P_2$

(iii) $P(901,1)$ (iv) ${}^{12}C_3$

(v) ${}^{9}C_5$ (vi) $\therefore z = i$

3. खालीलचे मूल्य शोधा:

(i) $\dfrac{10!}{5!4!}$ (ii) $\dfrac{8!-3!}{6!}$

(iii) $6! + 4!$

4. k ची किंमत काढा जर, $6\left(\dfrac{1}{12!}+\dfrac{1}{13!}\right)=\dfrac{k}{12!+11!}$

5. जर $(n-1)!+n!+576=(n+1)!$ n, ची किंमत काढा.

6. दोन्ही बक्षिसे एकाच विद्यार्थ्याला न देता 3 बक्षिसे 10 वेगवेगळ्या विद्यार्थ्यांना किती प्रकारे दिली जाऊ शकतात?

7. सेमिनार हॉलमध्ये 6 दरवाजे आहेत. एखादी व्यक्ती एका दरवाजातून हॉल मध्ये प्रवेश करून वेगळ्या दरवाज्याने बाहेर किती प्रकारे पडू शकतो?

8. भोपाळ ते मुंबई, रस्ते, रेल्वे आणि हवाई असे तीन मार्ग आहेत. मुंबई ते सुरत असे चार मार्ग आहेत: रस्ता, रेल्वे, हवा आणि समुद्र. भोपाळ ते सुरत किती मार्ग आहेत?

9. 5, 6, 7, 8, 9 अंकांसह 3-अंकी किती भिन्न संख्या तयार होऊ शकतात? (एकाच अंकात कोणताही अंक पुन्हा येत नाही)

10. "OXYGEN" मधील अक्षरे वापरून किती शब्द (अर्थासह किंवा शिवाय) तयार केले जाऊ शकतात?

11. सिद्ध करा ${}^{12}P_4 = {}^{11}P_4 + 4\left({}^{11}P_3\right)$

12. r ची किंमत काढा, जर, $P(8,r) = 8P(9,r-1)$

13. "COMPLIANT" च्या अक्षरांमधून किती वेगवेगळे शब्द तयार होऊ शकतात जेणेकरून स्वर कधीही एकत्र येत नाहीत?

14. 0, 1, 2, 3, 4, 5 अंक वापरून 30000 पेक्षा मोठ्या किती संख्या तयार होऊ शकतात,कोणत्याही संख्येत कोणताही अंक पुन्हा येत नाही?

15. "TRIGONOMETRY" च्या अक्षरांमधून किती वेगवेगळे शब्द तयार होऊ शकतात जेणेकरून व्यंजन एकत्र येतात?

16. दोन महिला एकत्र न येता 6 महिला आणि 6 पुरुषांना टेबलभोवती किती प्रकारे बसवले जाऊ शकते?

17. जर ${}^{2n}C_5 : {}^{n}C_5 = 286:3$ तर n ची किंमत काढा.

18. पडताळून पहा $r\left({}^{n}C_r\right) = n\left({}^{n-1}C_{r-1}\right)$.

19. 5 मुले आणि 4 मुलींमधून 5 ची एक समिती शोधली जाणार आहे. समितीमध्ये (i) 2 मुले (ii) किमान 2 मुली असतील तर हे किती प्रकारे करता येईल का?

20. एका पिशवीत 6 काळे आणि 5 लाल गोळे असतात, 6 गोळे काढले जातात. 3 काळा आणि 3 लाल गोळे काढता येतील अशा मार्गांची संख्या निर्धारित करा.

21. 15 खेळाडूंच्या गटातून 11 खेळाडूंची निवड किती प्रकारे करता येईल?

22. $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^{11}$ च्या विस्तारात 6^{th} पद शोधा.

23. $\left(\dfrac{1}{x}-3x\right)^{6}$ च्या विस्तारात 3^{rd} पद शोधा.

24. $\left(3x^2+\dfrac{1}{2x^2}\right)^{8}$ च्या विस्तारात x नसलेले पद शोधा.

25. विस्तारात मधले पद शोधा:

(i) $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^{8}$ (ii) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$

26. विस्तारात मधले पद शोधा:

(i) $\left(x^2+\dfrac{2}{x^3}\right)^{7}$ (ii) $\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{x^3}{2}\right)^{5}$

27. $(2x+5)^5$ च्या विस्तारात x चे सहगुणक शोधा.

28. $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^9$ च्या विस्तारात x^{-3} चे सहगुणक शोधा.

29. द्विपद प्रमेय वापरून x च्या घातांकात $\left(1-x+x^2\right)^4$ चे विस्तार करा.

30. सोडवा $(x+y)^5+(x-y)^5$ आणि शोधा $\left(\sqrt{3}+1\right)^5+\left(\sqrt{3}-1\right)^5$.

31. द्विपद प्रमेय वापरून सिद्ध करा: 4^n-3n-1 ला 9 ने भाग जातो, जेथे $n\in N$.

32. 3^{99} ला 5 ने भाग दिल्यावर बाकी (remainder) शोधा.

33. द्विपद प्रमेय वापरून, खालीलपैकी प्रत्येकाचे मूल्यांकन करा.

(i) $(1.05)^4$ (ii) $(99.01)^3$

उत्तरे - लघु व दीर्घोत्तरीय प्रश्न				
1. (i) 1	(ii) 1	(iii) 1	(iv) 120	(v) 72
(vi) 720				
2. (i) 6720	(ii) 182	(iii) 901	(iv) 220	(v) 126
(vi) 1				
3. (i) 1260	(ii) 126	(iii) 744		
4. $k=7$	**5.** $n=5$	**6.** 720	**7.** 30	
8. 12	**9.** 60	**10.** 720	**12.** 1	
13. 30240	**14.** 360	**15.** 604800	**16.** $6!5!$	
17. 14	**19.** (i) 40; (ii) 105	**20.** 200	**21.** 1365	
22. $462\frac{x^6}{y^6}$	**23.** $1215x^4$	**24.** $\frac{2835}{8}$	**25.** (i) $-\frac{7}{9}x$; (ii) $\frac{(2n)!}{n!n!}$	
26. (i) $\frac{280}{x},\frac{560}{x^6}$; (ii) $-\frac{1120}{x^3},140x^3$		**27.** 6250	**28.** -314928	
29. $1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$			**30.** $88\sqrt{3}$	
32. 7	**33.** (i) 1.21550625; (ii) 97059305.9701			

अधिक जाणून घ्या

- क्रमचयन आणि संयोजन (permutation and combination) चा अभ्यास का?
- द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) आणि त्याचे सहगुणक (coefficients) आपल्या दैनंदिन जीवनात कसे वापरले जातात.
- नमुने आणि नातेसंबंधांचे (patterns and relationships) औचित्य आणि सामान्यीकरण करून गणिती युक्तिवादाचा (mathematical reasoning) वापर.
- समकालीन नसलेल्या गणिताच्या घटनांसह (contemporary non-mathematical events) ऐतिहासिक संदर्भात गणिताचा विकास.
- गणितावर आधारित संकल्पना अपरिचित परिस्थितीत कशा वापरल्या जाऊ शकतात?
- दैनंदिन जीवनात गणिताचा विचार (mathematical thinking) का मोलाचा आहे
- ऑनलाईन अध्यापन
- क्रमचयन आणि संयोजन आणि त्याचे बीजगणित शिकण्याचा सर्वात सोपा मार्ग.
- द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) आणि त्याचे सहगुणक (coefficients) का शोधले गेले?
- अंतर्ज्ञानाने क्रमचयन आणि संयोजन शिकणे.
- गणन कमी क्लिष्ट (less complicated) बनवणे.
- शिक्षकांसाठी ऑनलाइन शिक्षण साधने.
- विवेचनात्मक विचार (critical thinking) शिकवणे
- STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) शिक्षण

लघु प्रकल्प

1. पास्कलच्या त्रिकोणामध्ये (Pascal's Triangle) एक सूक्ष्म प्रकल्प तयार करा, जसे की क्षैतिज बेरीज (horizontal sums) आणि फिबोनाची अनुक्रम (Fibonacci sequence) तयार करणारे नमुने.
2. द्विपद प्रमेय चे Machine learning आणि IOT (इंटरनेट ऑफ थिंग्ज) च्या अनुप्रयोगांवर एक लघु प्रकल्प तयार करा.

चौकसपणा आणि जिज्ञासासाठी प्रश्न

1. 8 सदस्यांच्या सोसायटीमध्ये आम्हाला 3 सदस्यांची समिती निवडायची आहे, ज्यामध्ये विकास नावाचा सोसायटीचा मालक आधीच समितीचा सदस्य आहे. समिती किती मार्गांनी निवडली जाऊ शकते?
2. जर साखर, पाणी, दूध आणि चहा यांचे मिश्रण करून चहा बनवले तर क्रम (order) महत्त्वाचा आहे का?
3. आपण 7 ग्रहांची किती वेगवेगळ्या प्रकारे रचना करू शकता?
4. मला पुणे ते जबलपूर ट्रेनने प्रवास करायचा आहे. पुण्याहून जबलपूरकडे थेट रेल्वे नाही, पण पुणे ते भोपाळ आणि भोपाळ ते जबलपूर या गाड्या आहेत. पुण्याहून भोपाळपर्यंत तीन गाड्या आणि भोपाळ ते जबलपूर या चार गाड्या असतील तर मी पुणे ते जबलपूर पर्यंत किती मार्गांनी प्रवास करू शकतो?

5. क्रीडा स्पर्धेत समजा पाच संघ लढत आहेत. पहिल्या स्थानाला सुवर्ण आणि दुसऱ्या स्थानाला रौप्य पदके मिळतात. या संघांना पदके किती वेगळी दिली जाऊ शकतात?
6. एखाद्या क्रीडा स्पर्धेमध्ये असे वाटते की सात संघ स्पर्धा करत आहेत. पहिल्या स्थानाला 'अ' प्रकाराचे पदक मिळते आणि दुसऱ्या स्थानाला 'ब' प्रकाराचे पदक मिळते. पदक विजेत्यांचे किती गट शक्य आहेत? संघांच्या क्रमाने काही फरक पडत नाही.
7. 11 जणांच्या समितीमध्ये एक व्यक्ती एकापेक्षा जास्त पदांवर राहू शकत नाही असे गृहीत धरून आपण किती जणांना अध्यक्ष (chair-person), उपाध्यक्ष (vice chair-person), सचिव (secretary) आणि कोषाध्यक्ष (treasurer) म्हणून निवडू शकतो?
8. द्विपद संभाव्यता वितरण (Binomial probability distributions) आम्हाला दुर्मिळ घटनांची शक्यता (possibility of rare events) समजून घेण्यास आणि संभाव्य अंदाज व्याप्ती (possible predictable ranges) सेट करण्यास मदत करते, त्यावर टिप्पणी (comment) करा.
9. मशीन लर्निंग मॉडेलच्या कामगिरीमध्ये द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) कसे वापरले जाऊ शकते?

वरील प्रश्नांशिवाय, क्रमचयन आणि संयोजन आणि द्विपद प्रमेय अर्थव्यवस्थेच्या क्षेत्रातून, उच्च गणित, पूर्वानुमान सेवा, रँकिंग, इंटरनेट प्रोटोकॉल (IP), आर्किटेक्चर, वित्त, लोकसंख्येचा अंदाज आणि इतर बऱ्याच गोष्टींमधून वास्तविक जगाच्या समस्यांसाठी वापरल्या जाऊ शकतात.

संदर्भ आणि सूचित वाचन

1. E. Krezig, *Advanced Engineering Mathematics,* 10th Edition, Wiley, 2015.
2. H. K. Das, *Advanced Engineering Mathematics,* S. Chand & Co, New Delhi, 2007.
3. B. S. Grewal, *Higher Engineering Mathematics,* Khanna Publication, New Delhi, 2015.
4. Alan Jeffrey, Advanced *Engineering Mathematics,* Harcourt/Academic Press, 2002, USA.
5. S. S. Sastry, *Engineering Mathematics, Volume 1*, PHI Learning, New Delhi, 2009.
6. M.P. Trivedi and P.Y. Trivedi, Consider *Dimension and Replace Pi,* Notion Press, 2018.
7. www.scilab.org/ -SCI Lab
8. https://grafeq.en.downloadastro.com/- Graph Eq^n 2.
9. https://www.onlinemathlearning.com
10. http://mathworld.wolfram.com
11. https://math.microsoft.com
12. http://euclideanspace.com

परिशिष्ट

परिशिष्ट: Bloom च्या पातळीनुसार मूल्यांकन

ब्लूमचे वर्गीकरण: यास प्रश्नांच्या निर्मितीसाठी खालीलप्रमाणे दोन वर्गांमध्ये जोडले गेले आहे:

प्रवर्ग I प्रश्न	प्रवर्ग II प्रश्न : उच्च स्तरीय विचार कौशल्ये
ब्लूमची पातळी 1: लक्षात ठेवणे	**ब्लूमची पातळी 4:** विश्लेषण करणे
ब्लूमची पातळी 2: समजणे	**ब्लूमची पातळी 5:** मूल्यांकन करणे
ब्लूमची पातळी 3: वापरणे	**ब्लूमची पातळी 6:** निर्माण करणे

नमुना तपशील सारणी

विषय निष्पत्ती संख्या	घटक क्रमांक	घटक	गुणांची वितरण पद्धती			एकूण गुण
			R	U	A	
CO-1	I	त्रिकोणमिती (Trigonometry)	2	4	6	12
CO-2	II	फल आणि सीमा (Functions and Limit)	2	4	4	10
CO-3	III	विकलन (Differential Calculus)	2	8	10	20
CO-4 CO-5 CO-6	IV	संमिश्र संख्या आणि आंशिक अपूर्णांक (Complex numbers and Partial Fraction)	2	4	8	14
CO-7	V	क्रमचयन आणि संयोजन (Permutation and Combination)	2	6	6	14
	एकूण		**10**	**26**	**34**	**70**

पुढील अभ्यासाकरिता संदर्भ

काही पुस्तकांच्या यादी खाली दिल्या आहेत ज्या इच्छुक असलेल्या विद्यार्थ्यांद्वारे पुढील सिद्धांत आणि व्यावहारिक (both theory and practical) विषय शिकण्यासाठी वापरल्या जाऊ शकतात:

1. B.S. Grewal, Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers, New Delhi, 40^{th} Edition, 2007.
2. G. B. Thomas, R. L. Finney, Calculus and Analytic Geometry, Addison Wesley, 9^{th} Edition, 1995.
3. Reena Garg, Engineering Mathematics, Khanna Publishing House, New Delhi (Revised Ed. 2018).
4. V. Sundaram, R. Balasubramanian, K.A. Lakshminarayanan, Engineering Mathematics, 6/e, Vikas Publishing House.
5. Reena Garg & Chandrika Prasad, Advanced Engineering Mathematics, Khanna Publishing House, New Delhi.

CO आणि PO प्राप्ती सारणी

या कोर्ससाठी विषय निष्पत्ती (CO) कोर्स पूर्ण झाल्यानंतर प्रोग्रामच्या निष्पत्ती सह (PO) मॅप केले जाऊ शकतात आणि प्राप्तीमधील अंतरांचे विश्लेषण करण्यासाठी PO च्या निष्पत्ती सहसंबंध (correlation) तयार केला जाऊ शकतो. या विश्लेषण नंतर प्राप्तीमधील अंतर दूर करण्यासाठी आवश्यक उपाययोजना केल्या जाऊ शकतात.

CO आणि PO प्राप्ती सारणी

कोर्स निष्पत्ती (Course Outcomes)	**प्रोग्राम निष्पत्ती (Programme Outcomes) प्राप्ती** (1-दुर्बल सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)						
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7
CO-1							
CO-2							
CO-3							
CO-4							
CO-5							
CO-6							
CO-7							

गॅप विश्लेषण करण्यासाठी सारणीमध्ये संकलित माहितीचा वापर केला जाऊ शकतो.

शब्दसूची