गणित – II

लेखक:

गरिमा सिंग

अनुवादक:
डॉ. रविंद्रनाथ काशिनाथ जाधव

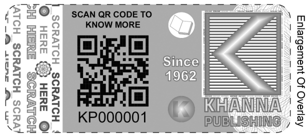
पुनरावलोकनकर्ता:
किरण व्ही. कुरंगकर

KHANNA BOOK PUBLISHING CO. (P) LTD.
PUBLISHER OF ENGINEERING AND COMPUTER BOOKS
4C/4344, Ansari Road, Darya Ganj, New Delhi-110002
Phone: 011-23244447-48 **Mobile:** +91-99109 09320
E-mail: contact@khannabooks.com
Website: www.khannabooks.com

Dear Readers,

To prevent the piracy, this book is secured with HIGH SECURITY HOLOGRAM on the front title cover. In case you don't find the hologram on the front cover title, please write us to at contact@khannabooks.com or whatsapp us at +91-99109 09320 and avail special gift voucher for yourself.

Specimen of Hologram on front Cover title:



Moreover, there is a SPECIAL DISCOUNT COUPON for you with EVERY HOLOGRAM.

How to avail this SPECIAL DISCOUNT:

Step 1: Scratch the hologram

Step 2: Under the scratch area, your "coupon code" is available

Step 3: Logon to www.khannabooks.com

Step 4: Use your "coupon code" in the shopping cart and get your copy at a special discount

Step 5: Enjoy your reading!

ISBN: 978-93-5538-020-3
Book Code: DIP169MA

Mathematics-II
by Garima Singh

[Marathi Edition]

Published by:

Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
Visit us at: **www.khannabooks.com**
Write us at: **contact@khannabooks.com**
CIN: U22110DL1998PTC095547

To view complete list of books, Please scan the QR Code: KPH

Printed in India.

प्रो. अनिल डी. सहस्रबुद्धे
अध्यक्ष
Prof. Anil D. Sahasrabudhe
Chairman

सत्यमेव जयते

अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्
(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)
(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)
नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली–110070
दूरभाष : 011–26131498
ई–मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION
(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)
(Ministry of Education, Govt. of India)
Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070
Phone : 011-26131498
E-mail : chairman@aicte-india.org

प्रास्ताविक

शतकानुशतके भारतीय समाजाच्या प्रगती आणि विस्तारामध्ये अभियांत्रिकीने अत्यंत महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावली आहे. भारतीय उपखंडात उगम पावलेल्या अभियांत्रिकी संकल्पनांचा जगावर प्रभाव पडला आहे.

ऑल इंडिया कौन्सिल फॉर टेक्निकल एज्युकेशन (एआयसीटीई) 1987 मध्ये स्थापनेपासून तंत्रशास्त्राच्या विद्यार्थ्यांना शक्य त्या सर्व प्रकारे मदत करण्यात नेहमीच आघाडीवर असते. एआयसीटीईचे ध्येय तांत्रिक शिक्षणाला प्रोत्साहन देणे आणि त्याद्वारे उद्योगाला अधिक उंचीवर नेणे आणि शेवटी आपल्या प्रिय मातृभूमी भारताला आधुनिक विकसित राष्ट्र बनण्याचे आहे. येथे हे नमूद करणे योग्य ठरेल की अभियंते आधुनिक समाजाचा कणा आहेत – चांगले अभियंते, म्हणजे चांगले उद्योग आणि चांगले उद्योग म्हणजे चांगला देश.

NEP 2020 मध्ये प्रादेशिक भाषांमध्ये सर्वांना शिक्षणाची कल्पना मांडण्यात आली आहे, ज्यामुळे प्रत्येक विद्यार्थी पुरेसा सक्षम होईल आणि राष्ट्रीय विकासासाठी योगदान देण्याच्या स्थितीत येईल याची खात्री होईल.

एआयसीटीई गेल्या काही वर्षांपासून अविरतपणे काम करत असलेल्या क्षेत्रांपैकी एक म्हणजे सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांना विविध प्रादेशिक भाषांमध्ये तयार केलेल्या आंतरराष्ट्रीय दर्जाची पुस्तके माफक किमतीमध्ये उपलब्ध करून देणे. ही पुस्तके सोप्या भाषेत, वास्तविक जीवनातील उदाहरणे, समृद्ध सामग्री आणि बदलत्या जगाच्या उद्योगाच्या गरजा लक्षात घेऊनच तयार केलेली आहेत. ही पुस्तके अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञानासाठी एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रम – 2018 नुसार आहेत.

संपूर्ण भारतातील प्रख्यात, उत्तम ज्ञान आणि अनुभव संपन्न प्राध्यापकांनी शैक्षणिक क्षेत्राच्या सोईसाठी ही पुस्तके लिहिली आहेत. एआयसीटीईला विश्वास आहे की ही पुस्तके त्यांच्या समृद्ध सामग्रीसह तांत्रिक विद्यार्थ्यांना अधिक सहजतेने आणि गुणवत्तेसह विषयांवर प्रभुत्व मिळविण्यात मदत करतील.

या अभियांत्रिकी विषयांना अधिक सुबक बनविण्याच्या प्रयत्नांसाठी एआयसीटीई मूळ लेखक, समन्वयक आणि अनुवादकांच्या मेहनतीचे कौतुक करते.

(Anil D. Sahasrabudhe)

ऋणनिर्देश

डिप्लोमा विद्यार्थ्यांसाठी तांत्रिक पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी लेखक AICTE चे सूक्ष्म नियोजन आणि अंमलबजावणीसाठी आभारी आहे.

पुस्तकाचे समीक्षक श्री बिल्लू राम सैनी यांनी पुस्तकाला विद्यार्थ्यांसाठी अनुकूल बनवण्यामध्ये आणि कलात्मक पद्धतीने अधिक चांगला आकार देण्यासाठी दिलेल्या अमूल्य योगदानाची आम्ही मनापासून प्रशंसा करतो.

हे पुस्तक AICTE मॉडेल अभ्यासक्रमाशी आणि राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण (NEP)-2020 च्या मार्गदर्शक तत्त्वांनुसार संरेखित आहे हे देखील आम्ही मोठ्या सन्मानाने सांगतो. प्रादेशिक भाषांमधील शिक्षणाला चालना देण्यासाठी, या पुस्तकाचे भारतीय प्रादेशिक भाषांमध्ये भाषांतर केले जात आहे.

अनुवादात योगदान दिल्याबद्दल डॉ. रविंद्रनाथ काशिनाथ जाधव आणि मराठी भाषेत समीक्षा केल्याबद्दल किरण व्ही. कुरंगकर यांचेही आम्ही आभार मानू इच्छितो.

श्री. बुद्धा चंद्रशेखर CCO NEAT AICTE यांना आम्ही विनम्र अभिवादन करू इच्छितो. त्यांचे AI आधारित अनुवादक साधन भाषांतराच्या उद्देशाने वापरले गेले.

शेवटी आम्ही प्रकाशन गृह, मे. खन्ना बुक पब्लिशिंग कंपनी प्रायव्हेट लिमिटेड, नवी दिल्ली यांचे मनापासून आभार व्यक्त करू इच्छितो. त्यांची संपूर्ण टीम प्रकाशनाच्या सर्व पैलूंवर सहकार्य करण्यास सदैव तत्पर होती जेणेकरून हा एक अद्भुत अनुभव होता.

- गरिमा सिंग

प्रस्तावना

गणित हे मानवी प्रकारच्या सर्व तांत्रिक बाबींना विणलेले आहे. जेव्हा विद्यार्थी तंत्रज्ञानाच्या जगात प्रवेश करतो तेव्हा गणिताचे सखोल ज्ञान अत्यंत महत्त्वाचे असते. जेव्हा तंत्रज्ञानावर लागू केले जाते, तेव्हा ते शास्त्रज्ञ आणि अभियंत्यांना पद्धतशीर पुनरुत्पादन करण्यायोग्य आणि प्रसारित करण्यायोग्य ज्ञान तयार करण्यास अनुमती देते.

"गणित-II" हे पुस्तक प्रामुख्याने डिप्लोमा अभियांत्रिकीच्या विद्यार्थ्यांसाठी (सर्व शाखांमध्ये सामान्य) 21 व्या शतकात आणि पुढे तांत्रिक आव्हानांना सामोरे जाण्यासाठी डिझाइन केलेले आहे. अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञानातील पदविका अभ्यासक्रमांसाठी एआयसीटीईच्या आदर्श अभ्यासक्रमाशी हे काटेकोरपणे जुळलेले आहे, नवीन राष्ट्रीय शिक्षण धोरण 2020 नुसार विद्यार्थ्यांच्या अभिमुख आणि स्वयं-शिक्षण उपक्रमांचा समावेश आहे. पुस्तकाच्या मांडणीमागील परिणाम आधारित शिक्षण आणि ब्लूमची वर्गीकरण संकल्पना ही मुख्य कल्पना आहेत. गणिताची भाषा सोपी आणि खुसखुशीत व्हावी म्हणून पुस्तकातील प्रत्येक विषयाला स्पष्ट आणि सोप्या शैलीने हाताळण्यात आले आहे. प्रकरणाशी तडजोड न करता पुस्तकातील पानांची संख्या किमान ठेवण्याचा मुद्दाम प्रयत्न करण्यात आला आहे. हस्तलिखित तयार करताना, विविध मानक पाठ्यपुस्तके, संदर्भ पुस्तके (संदर्भ विभागातही काही नमूद केलेली आहेत) संदर्भित केली गेली आहेत आणि त्यानुसार विभाग विकसित केले गेले आहेत. शिकण्याचा आनंद घेता यावा म्हणून विषयातील मुलभूत संकल्पना सोप्या पद्धतीने समजावून सांगण्याचा प्रयत्न करण्यात आला आहे.

या पुस्तकात पाच युनिट्सचा समावेश आहे. सर्व युनिट्स लिहिताना एकसमानता राखली आहे. प्रत्येक युनिट हे युनिटची वैशिष्ट्ये, तर्क आणि पूर्व-आवश्यकतांसह सुरू होते. सिद्धांत स्पष्टीकरण आणि सोडवलेली उदाहरणे वगळता मिनी-प्रोजेक्ट्स, क्रियाकलाप, मनोरंजक तथ्ये, क्यूआर कोड, केस स्टडीज, व्हिडिओ संसाधने, वास्तविक जीवन अनुप्रयोग समाविष्ट केले गेले आहेत जेणेकरून परस्परसंवादी समज आणि विद्यार्थ्यांच्या व्यवहार्यता कौशल्य वाढेल. जे त्यांना स्पर्धात्मक आणि रोजगारक्षम तयार करेल. चेक-आउट विभाग सुरू करण्यात आला आहे जेणेकरून या पुस्तकामध्ये अभ्यासलेल्या सर्व विषयांचा मॅटलॅबसह (MATLAB) अभ्यास करून विद्यार्थ्यांचा जिज्ञासा भाग सक्रिय होईल. मजकुराला नोट्स, शेरा, ग्रे बॉक्समधील विभाग लक्षात ठेवा. याशिवाय, 'अधिक जाणून घ्या' या शीर्षकाखाली काही उपयुक्त माहिती देण्यात आली आहे. संबंधित आवश्यक मुलभूत माहिती परिशिष्टांमध्ये समाविष्ट केली गेली आहे. अनुबंध भागातील काही उपक्रमांचा समावेश करून पुस्तक समृद्ध करण्याचा प्रयत्न करण्यात आला आहे. एकूणच, रोट मेमोरिझेशनला परावृत्त करण्यासाठी एक दृष्टिकोन बनवण्याचा प्रयत्न केला गेला आहे. मुख्य संकल्पना, सूत्रे आणि परिणामांच्या थेट पुनरावृत्तीसाठी युनिटचा संक्षिप्त सारांश देण्यात आला आहे.

प्रत्येक युनिटच्या शेवटी, प्रख्यात भारतीय गणितज्ञांशी संबंधित एक उतारा दिला आहे. विशेषत: गणिताच्या क्षेत्रात जेणेकरून विद्यार्थ्यांना समृद्ध भारतीय वारशाची झलक मिळू शकेल. मला मनापासून आशा आहे की हे पुस्तक विद्यार्थ्यांना गणिताची मुलभूत गोष्टी शिकण्यासाठी आणि लागू करण्यासाठी प्रेरित करेल आणि प्रेरणा देईल आणि निश्चितपणे या विषयाच्या भक्कम पाया उभारणीसाठी योगदान देईल. भविष्यातील आवृत्त्यांमध्ये पुस्तकाच्या पुढील सुधारणेसाठी शिक्षक/विद्यार्थी/वाचकांकडून कोणत्याही टिप्पण्या/सूचना मान्य केल्याबद्दल मी कृतज्ञ आहे. भविष्यातील नेत्यांनी समाजासाठी मुलभूत योगदान द्यावे यासाठी विविध विषयांचा समावेश असलेले पुस्तक लिहिणे खरोखरच आनंददायी होते.

- गरिमा सिंग

फलित आधारित शिक्षण

निकालावर आधारित शिक्षणाच्या अंमलबजावणीसाठी पहिली अट म्हणजे निकालावर आधारित अभ्यासक्रम विकसित करणे आणि निकालावर आधारित मुल्यांकन प्रणालीमध्ये समाविष्ट करणे. निकालांवर आधारित मुल्यांकनाद्वारे, मुल्यमापन करणाऱ्यांना विद्यार्थ्यांनी नमूद केलेले मानक, विशिष्ट आणि मोजण्यायोग्य परिणाम साध्य केले आहेत की नाही याचे मुल्यांकन करण्यास सक्षम असेल. निकालावर आधारित शिक्षणाचा योग्य समावेश केल्याने कोणत्याही स्तरावर हार न मानता सर्व विद्यार्थ्यांसाठी किमान मानक साध्य करण्यासाठी एक निश्चित वचनबद्धता असेल. निकालावर आधारित शिक्षणाच्या सहाय्याने चालणाऱ्या प्रोग्रामच्या शेवटी विद्यार्थी खालील निकालांवर पोहोचण्यास सक्षम असेल:

प्रोग्राम ऑउटकम्समधून (POs) पदवीधरांसाठी अशी विधाने आहेत जी विद्यार्थ्यांना काय माहित असणे अपेक्षित आहे आणि त्यावर काय करण्यास सक्षम आहे याचे वर्णन करते. हे कौशल्य, ज्ञान, विश्लेषणात्मक क्षमता वृत्ती आणि प्रोग्रामद्वारे विद्यार्थी जे वर्तन मिळवतात त्या संबंधित आहेत. POs मुलत: सुचित करतात की प्रोग्राम दरम्यान त्यांना प्राप्त झालेल्या विषयवार ज्ञानापासून विद्यार्थी काय करू शकतात. अशाप्रकारे, POs अभियांत्रिकी पदविकाचे व्यावसायिक प्रोफाइल परिभाषित करतात.

नॅशनल बोर्ड ऑफ ॲक्रेडिटेशन (NBA) ने अभियांत्रिकी पदविका पदवीधारकासाठी खालील सात POs परिभाषित केले आहेत:

PO-1: **मूलभूत आणि विद्याशाखा विशिष्ट ज्ञान:** अभियांत्रिकी समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी मुलभूत गणित, विज्ञान आणि अभियांत्रिकी मुलभूत आणि अभियांत्रिकी विशेषज्ञतेचे ज्ञान लागू करणे.

PO-2: **समस्येचे विश्लेषण:** कोडिफाईड स्टँडर्ड पद्धती वापरून चांगल्या प्रकारे परिभाषित अभियांत्रिकी समस्या ओळखणे आणि त्यांचे विश्लेषण करणे.

PO-3: **उपायांची रचना/ विकास:** चांगल्या परिभाषित तांत्रिक समस्यांसाठी डिझाइन सोल्यूशन्स आणि निर्दिष्ट गरजा पूर्ण करण्यासाठी सिस्टम घटक किंवा प्रक्रियेच्या डिझाइनसह सहाय्य करणे.

PO-4: **अभियांत्रिकी साधने, प्रयोग आणि चाचणी:** मानक चाचण्या आणि मोजमाप करण्यासाठी आधुनिक अभियांत्रिकी साधने आणि योग्य तंत्र वापरणे.

PO-5: **समाज, शाश्वतता आणि पर्यावरणासाठी अभियांत्रिकी पद्धती:** समाज, शाश्वतता, पर्यावरण आणि नैतिक पद्धतींच्या संदर्भात योग्य तंत्रज्ञान लागू करणे.

PO-6: **प्रकल्प व्यवस्थापन:** अभियांत्रिकी व्यवस्थापन तत्त्वे वैयक्तिकरित्या वापरणे. एक टीम सदस्य किंवा एक नेता म्हणून प्रकल्प व्यवस्थापित करणे आणि प्रभावीपणे सुसंस्कृत अभियांत्रिकी उपक्रमांबद्दल संवाद साधणे.

PO-7: **आयुष्यभर शिक्षण:** वैयक्तिक गरजांचे विश्लेषण करण्याची आणि तांत्रिक बदलांच्या संदर्भात अद्ययावत करण्यात गुंतण्याची क्षमता असणे.

अभ्यासक्रमाचे परिणाम

अभ्यासक्रम पूर्ण झाल्यानंतर विद्यार्थी हे करू शकतील:

CO-1: मॅट्रिक्स आणि डिटर्मिनन्टमध्ये आवश्यक पार्श्वभूमी म्हणजे जेणेकरून ते उपाय शोधण्यात लागू होतील आणि रेखीय प्रणाली व अनुकूलन रणनीतीचा अर्थ लावण्यात/विश्लेषित करण्यात मदत करतील.

CO-2: विशेषत: इंटिग्रल कॅल्क्युलसची सोपी तंत्रे वापरून क्षेत्रफळ आणि घनफळ निश्चित करणे.

CO-3: निर्देशक भुमितीचे विश्लेषण करण्यासाठी रेषा आणि वक्रांच्या आलेखांद्वारे बीजगणित आणि भूमिती यांच्यातील संबंध प्रदान करणे.

CO-4: रिझल्टंट आणि काँकरंट फोर्समधील फरक सांगणे; साध्या भौतिक समस्यांचे स्पष्टीकरण आणि विश्लेषण डिफरंशिअल इक्वेशनच्या स्वरूपात करणे.

CO-5: शिकलेल्या भागांचा वापर करून आणि मॅटलॅबच्या काही मुलभूत गोष्टींच्या मदतीने डेटा एक्सप्लोर आणि व्हिज्युअलायझ करणे.

कोर्स आउटकॉम्स	कार्यक्रमाच्या परिणामांसह अपेक्षित मॅपिंग (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)						
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7
CO-1	3	3	3	3	1	1	3
CO-2	3	2	2	2	1	1	3
CO-3	3	2	2	2	1	1	3
CO-4	3	2	2	3	1	1	3
CO-5	3	3	3	3	1	1	3

संक्षिप्तरूपे आणि चिन्हे

संक्षेपांची यादी

प्रतीक/संक्षेप	चिन्हाचे नाव/पूर्ण फॉर्म	प्रतीक/संक्षेप	चिन्हाचे नाव/पूर्ण फॉर्म
[A:B] किंवा [A/B]	संवर्धित मॅट्रिक्स	dy/dx	व्हेरिएबल y च्या संदर्भात व्हेरिएबल x चे डेरीव्हेटीव्ह ऑपरेटर
$\overline{AB}$	रेषाखंड AB	$\int$	इंटिग्रल
$\lvert AB \rvert$	$\overline{AB}$ची लांबी	!	फॅक्टोरीअल
$\overrightarrow{AB}$	किरण AB	$\in$	/चा घटक आहे
CO	कोर्स आऊटकम्स	$\notin$	चा घटक नाही/संबंधित नाही
UO	युनिट आऊटकम्स	$\neq$	च्या समान नाही
PO	प्रोग्राम आऊटकम्स	$\sim$	सारखे आहे
N	नैसर्गिक संख्येचा संच	$\parallel$	च्या समांतर आहे
W	पूर्ण संख्यांचा संच	$\approx$	च्या अंदाजे समान आहे
Z	पूर्णांक संच	( )	कंस (समूह चिन्ह)
Q	परिमेय संख्यांचा संच	[ ]	चौरस कंस (गट चिन्ह)
R	वास्तविक संख्या संच	{}	ब्रेस किंवा करली ब्रॅकेट (गटबद्ध चिन्ह)
C	कॉम्प्लेक्स संख्यांचा संच	$\cong$	सुसंगत आहे.
I	अपरिमेय संख्यांचा संच	$\sqrt[3]{\ }$	घनमुळ
Lf′(a)	‘a’ वर ‘f’ चा डाव्या बाजूचा डेरीव्हेटीव्ह	$\sum$	ची बेरीज
Rf′(a)	‘a’ वर ‘f’ चा उजव्या बाजूचा डेरीव्हेटीव्ह	$\subset$ किंवा $\subseteq$	चा उपसंच आहे
L.H.S.	डाव्या हाताची बाजू	$\not\subset$ किंवा $\not\subseteq$	उपसंच नाही
R.H.S.	उजव्या हाताची बाजू	$\cup$	च्या युनियन
adj (A)	मॅट्रिक्स A चा अडजॉईन्ट	$\cap$	चे छेदनबिंदू
Lim	लिमिट	ϕ	रिक्त संच/शून्य संच
fn(a)	‘a’ वर (f) चे n वे डेरीव्हेटीव्ह	$\Rightarrow$	हे सुचवते
s.t. (such that)	असे की	$\Leftrightarrow$	सुचवते आणि द्वारे निहित आहे
w.r.t.(with respect to)	च्या संदर्भात	$\lvert\ \rvert$	मॉड्यूलस
$\forall$	सर्वांसाठी	$\lVert\ \rVert$	नॉर्म
$\because$	कारण	$\therefore$	म्हणून

आकृत्यांची यादी

युनिट 4: व्हेक्टर अलजेब्रा

युनिट 5: डिफरंशिअल इक्वेशन

शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

आउटकम बेस्ड एज्युकेशन (OBE) लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांचे ज्ञान स्तर आणि कौशल्य संच वाढवले पाहिजे. OBE च्या योग्य अंमलबजावणीसाठी शिक्षकांनी मोठी जबाबदारी स्वीकारली पाहिजे. OBE प्रणालीतील शिक्षकांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे असू शकतात:

- वाजवी मर्यादेत, त्यांनी त्यांचा वेळ सर्व विद्यार्थ्यांच्या फायद्यासाठी वापरला पाहिजे.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांच्या क्षमतेचे मूल्यांकन केवळ परिभाषित निकषावर आणि कोणत्याही पक्षपात आणि भेदभावाशिवाय केले पाहिजे.
- त्यांनी हे सुनिश्चित करण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे की सर्व विद्यार्थ्यांना त्यांचे शिक्षण पूर्ण झाल्यानंतर पुरेसे दर्जेदार ज्ञान तसेच त्यांच्या मुख्य शिस्तीशी जुळणारी क्षमता प्राप्त होईल.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांना त्यांची अंतिम कामगिरी क्षमता विकसित करण्यासाठी नेहमी प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी नवीन दृष्टीकोन एकत्रित करण्यासाठी गट कार्य आणि सांघिक कार्य सुलभ केले पाहिजे आणि प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी मूल्यांकनाच्या प्रत्येक भागात ब्लूम वर्गीकरण पाळावे.

ब्लूम वर्गीकरण

स्तर	शिक्षकांनी तपासावे	विद्यार्थी सक्षम असावा	मूल्यांकनाची संभाव्य पद्धत
निर्माण करणे	विद्यार्थी तयार करण्याची क्षमता	डिझाइन करा किंवा तयार करा	सूक्ष्म प्रकल्प
मूल्यमापन	विद्यार्थ्यांचे औचित्य सिद्ध करण्याची क्षमता	वाद घालणे किंवा बचाव करणे	असाइनमेंट
विश्लेषण करणे	विद्यार्थ्यांमध्ये फरक करण्याची क्षमता	फरक किंवा भेद करा	प्रकल्प/प्रयोगशाळा पद्धती
अर्ज करणे	विद्यार्थ्यांची माहिती वापरण्याची क्षमता	चालवा किंवा प्रात्यक्षिक करा	तांत्रिक सादरीकरण/ प्रात्यक्षिक
समजून घेणे	विद्यार्थ्यांची कल्पना स्पष्ट करण्याची क्षमता	स्पष्ट करा किंवा वर्गीकृत करा	सादरीकरण / परिसंवाद
आठवणे	विद्यार्थ्यांची आठवण करण्याची क्षमता (किंवा लक्षात ठेवणे)	व्याख्या करा किंवा आठवा	प्रश्नमंजुषा

विद्यार्थ्यांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

OBE लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांनी समान जबाबदारी घ्यावी. OBE प्रणालीतील विद्यार्थ्यांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे आहेत:

- प्रत्येक कोर्समध्ये युनिट सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक UO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक CO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक PO ची चांगली माहिती असावी.
- विद्यार्थ्यांनी योग्य चिंतन आणि कृतीसह गंभीर आणि वाजवी विचार केला पाहिजे.
- विद्यार्थ्यांचे शिक्षण व्यावहारिक आणि वास्तविक जीवनातील परिणामांशी जोडलेले आणि समाकलित केले पाहिजे.
- विद्यार्थी OBE च्या प्रत्येक स्तरावर त्यांची क्षमता जाणून घ्या.

अनुक्रमणिका

1 डिटर्मिनन्ट आणि मॅट्रायसेस

युनिट वैशिष्ट्ये

या युनिटमध्ये पुढील संकल्पनांचा समावेश आहे: डिटर्मिनन्टच्या 3 ऱ्या ऑर्डर पर्यंतचे प्राथमिक गुणधर्म, समीकरणांची सुसंगतता, क्रॅमरचे नियम, मॅट्रिक्सचे बीजगणित, मॅट्रिक्सचे इन्व्हर्स, 3 व्हेरिएबल्समध्ये रेषीय समीकरणांची प्रणाली सोडवण्यासाठी मॅट्रिक्स इन्व्हर्स पद्धत, सोडवलेल्या आणि न सोडवलेल्या उदाहरणांच्या मदतीने समजून घेण्यावर भर आहे.

अभ्यासाचे औचित्य

आपण शिकत असलेल्या प्रत्येक गोष्टीचा उपयोग असतो आणि जेव्हा मॅट्रिक्स आणि डिटर्मिनन्टचा विचार केला जातो तेव्हा ते सर्वव्यापी असतात. ते आपल्या सभोवताल सर्वत्र आहेत. मॅट्रिक्स हा सहजपणे व्यक्त करता येणाऱ्या गोष्टींचा सुटसुटीत आणि सोपा मार्ग आहे. आपण आता पाहत असलेले बरेच संगणक सिम्युलेशन (simulation) मॅट्रिक्स वापरतात. अभियांत्रिकी, भौतिकशास्त्र, अर्थशास्त्र, संयोजक, नेटवर्क विश्लेषण, ऑपरेशन्स संशोधन, महामारी विज्ञान, संप्रेषण आणि इतर बऱ्याच शाखांमध्ये मोठ्या प्रमाणात मॅट्रिक्स वापरतात. डिटर्मिनन्ट या मॅट्रिक्सला निश्चित मूल्य देतात आणि त्याच नाण्याचा दुसरा चेहरा देखील आहे.

म्हणूनच जेव्हा एखाद्याच्या कार्यक्षमतेबद्दल तांत्रिकदृष्ट्या विचार केला जातो तेव्हा या गोष्टींचा सखोल अभ्यास करण्यास नकार दिला जाऊ शकत नाही. उच्च शिक्षणासाठी या बऱ्याच गोष्टींचे पुर्वज्ञान आवश्यक आहे.जेव्हा मुलभूत गोष्टी आरशासारख्या स्पष्ट असतात तेव्हा त्याचे उपयोजन चांगले होते. आजच्या जगात जेव्हा आपल्या जवळपास प्रत्येक शास्त्रासाठी असंख्य ॲप्स असतात तेव्हा आपल्याला मॅट्रिक्स आणि डिटर्मिनन्टची समज असणे आवश्यक असते.

थोडक्यात, मॅट्रिक्स आणि डिटर्मिनन्ट बऱ्याच विषयांशी जोडले आहेत. ते गणिताच्या गोष्टींचे मॉडेलिंग करण्यासाठी अत्यंत कार्यक्षम साधने आहेत!

पुर्व-ज्ञान

- बेरीज, वजाबाकी, संख्या आणि बहुपदीचे गुणाकार.
- रेखीय समीकरणांची मूलतत्त्वे.
- त्रिकोणमितीय सूत्रांचे मूलभूत ज्ञान.

घटक परिणाम

या घटकाचे परिणाम खालीलप्रमाणे आहेत.

U1-O1: विविध समस्या सोडवण्यासाठी डिटर्मिनन्टचे (determinant) गुणधर्म वापरणे.

U1-O2: वास्तविक जीवनातील समस्यांची रेषीय समीकरण प्रणालीशी सांगड घालणे आणि क्रॅमर नियमाच्या सहाय्याने चाचणी/व्याख्यांसह समीकरणांची सुसंगतता करणे.

U1-O3: बेरीज, स्थिरांक गुणाकार, गुणाकार, क्रमपरिवर्तन सारख्या सामान्य मॅट्रिक्स क्रिया सादर करणे.

U1-O4: मॅट्रिक्सची भाषा वापरून समीकरणांची रेखीय प्रणाली सोडविणे.

U1-O5: समस्येचे आकलन करण्यासाठी संपूर्णपणे (toto) डिटर्मिनन्ट आणि मॅट्रिक्सचा उपयोग करणे.

CO-UO मॅपिंग

युनिट-1: निष्पत्ती (UO)	अपेक्षित पाठ्यक्रम निष्पत्ती मॅपिंग (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U1-O1	3	1	-	2	1
U1-O2	3	-	1	-	1
U1-O3	3	-	2	-	1
U1-O4	3	-	1	-	1
U1-O5	3	-	1	-	2

पार्ट-I: डिटर्मिनन्ट्स

1.1 परिचय

डिटर्मिनन्टची संकल्पना बऱ्याच वर्षांमध्ये विकसित झाली. 1750 मध्ये गॅब्रिएल क्रॅमर या जर्मन गणितज्ञाने क्रॅमरचा नियम देऊन समीकरणांच्या संचाच्या संदर्भात डिटर्मिनन्टच्या सिद्धांतामध्ये भर घातली. आर्थर कायले, सी. जी. जे. जैकोबी, जे. जे. सिल्व्हेस्टर इ. सारख्या इतर अनेक शिक्षणतज्ज्ञ यांनी डिटर्मिनन्ट सिद्धांत समृद्ध केले. जरी विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, अर्थशास्त्र इत्यादीचे मोठ्या प्रमाणात उपयोग आहेत, तरी विशेषत: तांत्रिक अनुप्रयोगांच्या बाबतीत डिटर्मिनन्टचे ज्ञान आवश्यक आहे.येथे आपण तिसऱ्या ऑर्डरपर्यंत डिटर्मिनन्टचा अभ्यास करू.

व्याख्या

प्रत्येक स्क्वेअर मॅट्रिक्स * $A = [a_{ij}]$ वर आपण स्क्वेअर मॅट्रिक्स A चे डिटर्मिनन्ट म्हणून ओळखली जाणारी संख्या (वास्तविक किंवा काल्पनिक) घेऊ शकतो. हे $\det A$ किंवा $|A|$ किंवा Δ द्वारे दर्शविले जाते.

क्रॅमरचा नियम स्विस गणितज्ञ गॅब्रिएल क्रॅमर (1704-1752) यांनी 1750 मध्ये Introduction ál' Analyse des lignes Courbes algebriques परिचय दिला होता.

ऑर्डर 1 चे डिटर्मिनन्ट

ज्या डिटर्मिनन्ट मध्ये एक पंक्ती (row) आणि एक स्तंभ (column) आहे आणि डिटर्मिनन्टचे मुल्य मॅट्रिक्समधील फक्त एक संख्या आहे त्यास ऑर्डर 1 चे डिटर्मिनन्ट म्हणतात.

उदाहरणार्थ: जर $|A| = |2|_{1 \times 1}$ तर $|A| = |2|$.

ऑर्डर 2 चे डिटर्मिनन्ट

$a_1x + b_1 = 0$ आणि $a_2x + b_2 = 0$ समीकरण प्रणालीचा विचार करा. जर हे x च्या समान मुल्याद्वारे सत्य असतील तर $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. $a_1b_2 - a_2b_1$ या राशीला ऑर्डर २ च्या डिटर्मिनन्टचे मुल्य असे म्हटले जाते आणि ते खालीलप्रमाणे दर्शविले जाते.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 च्या परिमाणांना डिटर्मिनन्टचे घटक म्हणतात. ऑर्डर 2 च्या डिटर्मिनन्टमध्ये दोन पंक्ती (two horizontal lines) आणि दोन स्तंभ (two vertical lines) असतात. आता आपण दोन डिटर्मिनन्टचा विचार करू.

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (9 \times 2) - (4 \times 1) = 18 - 4 = 14.$$

आणि $$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = (7 \times 2) - (20 \times 0) = 14 - 0 = 14.$$

$\therefore$ $$\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 20 & 2 \end{vmatrix}$$

म्हणून डिटर्मिनन्ट फक्त संख्यांची एक प्रणाली नसते.त्याला एक संख्यात्मक मुल्य मिळाले आहे.

टीप: ऑर्डर 2 डिटर्मिनन्टची चिन्ह पद्धती $\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$ ही आहे.

उदाहरण 1: जर $\Delta = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ तर x ची किंमत काढा.

उत्तर: उदाहरणात दिलेली माहिती $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ आहे.

$\therefore \quad (x \times 2) - (4 \times 3) = (3 \times 2) - (1 \times 2)$

$\Rightarrow \quad 2x - 12 = 6 - 2$

$\Rightarrow \quad 2x = 16$

$\Rightarrow \quad x = 8$

मजेदार तथ्य: 'डिटर्मिनन्ट' ही संज्ञा सर्वप्रथम कार्ल फ्रेडरिक गॉस यांनी 21 व्या वर्षी त्यांच्या पुस्तकात 'Disquisitiones arithmeticae' 1798 (1801 मध्ये प्रकाशित केला होता) मध्ये परिचयात आणला.

ऑर्डर 3 चे डिटर्मिनन्ट

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ आणि $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ समीकरण प्रणालीचा विचार करा. जर ही समीकरणे x आणि y च्या समान मूल्यांनी सत्य असतील तर x आणि y काढून टाकल्यास आपल्याला मिळेल.

$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$

डावीकडील (L.H.S.) वरील टर्म्सला तिसऱ्या ऑर्डरचा डिटर्मिनन्ट म्हणतात आणि खालीलप्रमाणे दर्शविली जातो.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तिसऱ्या ऑर्डरच्या डिटर्मिनन्टमध्ये तीन पंक्ती आणि तीन स्तंभ असतात. a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 या परिमाणांना डिटर्मिनन्टचे घटक म्हणतात.

टीप 1: ऑर्डर 3 डिटर्मिनन्टची चिन्ह पद्धती ही आहे.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$ (सुरुवातीचे चिन्ह + घेऊन एक सोडून एक + आणि – चिन्ह घेऊ.)

टीप 2: मॉड्यूलस फंक्शन (Modulus function) हे डिटर्मिनन्टपेक्षा पूर्णपणे भिन्न आहे.
उदाहरणार्थ: मॉड्यूलसमध्ये $|-2| = 2$ तर डिटर्मिनन्टमध्ये $|-2| = -2$ आहे.

1.1.1 तिसऱ्या ऑर्डरच्या डिटर्मिनन्टचे मूल्य/विस्तार

(a) पहिल्या पंक्तीच्या संदर्भात,

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & b_1 & \cdots & c_1 \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \\ a_3 & & b_3 & & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

(b) दुसऱ्या स्तंभच्या संदर्भात,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ & \vdots & \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & \vdots & \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

टिपण्णी: एक डिटर्मिनन्ट त्याच्या कोणत्याही पंक्ती किंवा स्तंभासह विस्तृत केले जाऊ शकते. डिटर्मिनन्टचे मूल्य एकच असते.

सारसचा नियम (Rule of Sarrus): खालीलप्रमाणे तीन ऑर्डरच्या डिटर्मिनन्टचे मूल्य मिळविण्यासाठी हे एक मेमोनिक युक्ती (mnemonic device) आहे.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -\text{ve} \ -\text{ve} \ -\text{ve} \\ \\ +\text{ve} \ +\text{ve} \ +\text{ve} \end{matrix}$$

$$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)$$

लक्षात घ्या की प्रथम कंसामधील गुणाकार (म्हणजे $a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3$) दुसऱ्या कंसामधील गुणाकार समान आहे.

उदाहरण 2: सोडवा $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

उत्तर:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3 + 3) - 2(-1 - 6) + 3(1 - 6) = 5$$

दुसऱ्या पद्धतीने (Alternatively): सारस नियमाद्वारे,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= (3 + 12 + 3) - (18 - 3 - 2) = 18 - 13 = 5$$

1.1.2 मायनर्स व कोफॅक्टर्स

व्याख्या: मायनर - डिटर्मिनन्टच्या दिलेल्या घटकापैकी एका घटकाचा मायनर म्हणजे दिलेले घटक असलेले रो आणि कॉलम वगळून आलेला डिटर्मिनन्ट होय.

उदाहरणार्थ, a_1 चा $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ मधील मायनर $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ आहे आणि b_2 चा मायनर $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ आहे.

म्हणून तीन ऑर्डरच्या डिटर्मिनन्टला 9 मायनर असतात.

व्याख्या: कोफॅक्टर - जर M_{ij} हा i^{th} ची पंक्ती आणि j^{th} चा स्तंभातील घटकांचा मायनर म्हणून प्रतिनिधित्व करीत असेल तर त्या घटकाचा कोफॅक्टर $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ आहे.

उदाहरणार्थ 3: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ ह्या डिटर्मिनन्टमधील '−3', '5' आणि '−1' ह्या घटकांचे मायनर व कोफॅक्टर शोधा.

उत्तर:

$$-3 \text{ चा मायनर } = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 26; \text{ चा कोफॅक्टर } -3 = -26$$

$$5 \text{ चा मायनर } = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \text{ चा कोफॅक्टर } 5 = 2$$

$$-1 \text{ चा मायनर } = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15; \text{ चा कोफॅक्टर } -1 = -15$$

1.1.3 डिटर्मिनन्टचे मायनर्स व कोफॅक्टर्स स्वरूपात विस्तार

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(*i*) कोणत्याही संबंधित पंक्ती (स्तंभ) च्या घटकांच्या गुणाकाराची बेरीज त्यांच्या संबंधित कोफॅक्टरसह नेहमी डिटर्मिनन्टच्या मूल्याइतकी असते.

(*ii*) कोणतीही पंक्ती (स्तंभ) यातील घटकांचा इतर पंक्ती (स्तंभ) मधील कोफॅक्टर्सच्या गुणाकाराची बेरीज नेहमी शून्याइतकी असते.

1.1.4 डिटर्मिनन्टचे गुणधर्म

(*i*) पंक्ती आणि स्तंभ आंतर-बदलले असल्यास डिटर्मिनन्टचे मुल्य अबाधित राहते.

उदा., जर $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(*ii*) डिटर्मिनन्टच्या कोणत्याही दोन ओळी (किंवा स्तंभ) बदलल्यास, डिटर्मिनन्ट किंवा मुल्य केवळ चिन्हामध्ये बदलले जातील.

जर $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{आणि} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$\therefore \quad \Delta_1 = -\Delta.$

(*iii*) जर पंक्तीचे (किंवा स्तंभ) सर्व घटक शून्य असतील तर डिटर्मिनन्टचे मुल्य शून्य होते.

(*iv*) जर कोणत्याही पंक्तीचे (किंवा स्तंभ) सर्व घटक समान संख्येने गुणाकार केले तर डिटर्मिनन्टत्या संख्येने गुणाकार होतो.

उदा., जर $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ आणि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\therefore \quad \Delta_1 = k\Delta$

(v) जर एखाद्या पंक्तीचे (किंवा स्तंभ) सर्व घटक इतर कोणत्याही पंक्तीच्या घटकाशी संबंधित (किंवा समान) असतील तर डिटर्मिनन्ट नाहीसा होतो, म्हणजे त्याचे मुल्य शून्य असते.

उदा., जर $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 0$

जर $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 0$

(vi) जर कोणत्याही पंक्तीचा (किंवा स्तंभ) प्रत्येक घटक दोन (किंवा अधिक) पदांची बेरीज म्हणून व्यक्त केला असेल तर डिटर्मिनन्ट दोन (किंवा अधिक) डिटर्मिनन्टची बेरीज म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो.

उदा., $\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) पंक्ती - स्तंभ ऑपरेशन – (Row-column operation): $C_i \to C_i + \alpha C_j + \beta C_k (j, k \neq i)$ C_i क्रिये अंतर्गत किंवा $R_i \to R_i + \alpha R_j + \beta R_k$ $(j, k \neq i)$ स्वरूपाचा पंक्ती R_i क्रियेअंतर्गत डिटर्मिनन्टचे मुल्य अबाधित राहते. दुसऱ्या शब्दात, कोणत्याही पंक्ती (किंवा स्तंभ) च्या इतर घटकांच्या (किंवा स्तंभ) संबंधित घटकांच्या समान गुणामध्ये कोणत्याही पंक्तीचे घटक (किंवा स्तंभ) जोडून डिटर्मिनन्टचे मूल्य बदलू शकत नाही.

उदा., समजा $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तर $\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\beta a_2 & b_3+\beta b_2 & c_3+\beta c_2 \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + \alpha R_2; R_3 \to R_3 + \beta R_2)$

($viii$) अवयव प्रमेय (Factor theorem): जर मॅट्रिक्स A चा प्रत्येक घटक x मधील बहुपद असेल आणि $x = a$ साठी आपणास $|A| = 0$ मिळत असेल तर $(x - a)$ हा $|A|$ अवयव आहे.

दुसऱ्या स्वरूपात, जर डिटर्मिनन्ट Δ चे घटक हे x मधील असतील आणि $x = a$ साठी डिटर्मिनन्ट Δ चे दोन पंक्ती (किंवा स्तंभ) समान असतील तर $(x - a)$ हा Δ चा अवयव आहे.

लक्षात घ्या की जेव्हा $x = a$ साठी Δ च्या r पंक्ती समान असतील तर $(x - a)^{r-1}$ हा Δ अवयव आहे.

उदाहरण 4: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ चे मूल्य शोधा.

उत्तर: आपण दुसऱ्या पंक्तीचा (रांगचा) विस्तार करू.

$$\Delta = -5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -5(7 + 3) + 0 - 2(-2 - 2) = -50 + 8 = -42$$

टिप: घटक 5 दुसऱ्या पंक्ती आणि पहिल्या स्तंभात आहे. आपणास माहित आहे $(-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$.
म्हणून आपल्याकडे 5 पूर्वी वजा चिन्ह निश्चित केले आहे. नंतर 0 पूर्वीचे चिन्ह बेरजेचे असेल तर २ पूर्वीचे चिन्ह वजा असेल.

1.1.5 दोन डिटर्मिनन्टचा गुणाकार

जर $$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad A \times B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1l_1 + b_1l_2 & a_1m_1 + b_1m_2 \\ a_2l_1 + b_2l_2 & a_2m_1 + b_2m_2 \end{vmatrix}$$

त्याचप्रमाणे ऑर्डर तीनचे दोन डिटर्मिनन्टचा गुणाकार करतात.

(a) आपण ओळीला स्तंभाने गुणिले आहे. आपण ओळीला ओळीने, स्तंभाला ओळीने आणि स्तंभाला स्तंभाने गुणाकार करू शकतो. (हे लक्षात घेतले पाहिजे की मॅट्रिक्स गुणाकार आणि डिटर्मिनन्ट गुणाकार समान प्रक्रिया आहेत.)

(b) जर ऑर्डर n असलेल्या Δ च्या घटकाऐवजी संबंधित कोफॅक्टरचा उपयोग करून Δ_1 डिटर्मिनन्ट तयार झाला म्हणून $\Delta_1 = \Delta^{n-1}$.

उदाहरण 5: सिद्ध करा $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

उत्तर: आपणास लिहिता येईल, $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

[गुणाकाराच्या स्तंभ नियमानुसारपंक्ती लागू करणे.]

1.1.6 रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीचे स्वरूप आणि क्रॅमरचा नियम

I. दोन चलांतील रेषीय समीकरणातील प्रणालीचे सामान्यरूप

(*i*) सुसंगत समीकरणे

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ आणि $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ह्या दोन समीकरणांचा विचार करू.

(1) **निश्चित आणि एकमेव सोल्युशन [छेदनबिंदू रेषा]:** एक (रेखीय) समीकरण प्रणालीचे कमीतकमी एक सोल्युशन असल्यास ते सुसंगत असल्याचे म्हटले जाते.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

(2) **अनंत सोल्युशन [समान रेषा]:** जर (रेखीय) समीकरणांची प्रणालीकडे अनंत सोल्युशन असतील तर ते सुसंगत असल्याचे म्हटलेजाते.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\Rightarrow$ दिलेली समीकरणे सुसंगत आणि अवलंबून आहेत.

(*ii*) विसंगत समीकरणे-सोल्युशन नाही [समांतर रेषा]: (रेखीय) समीकरणांची एक प्रणालीकडे कोणतेही सोल्युशन नसल्यास ती विसंगत असल्याचे म्हटले जाते.

समजा $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$

बीजगणितानुसार, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow$ दिलेली समीकरणे विसंगत आहेत.

II. रेखीय समीकरणांची प्रणाली सोडविण्यासाठी क्रॅमरचा नियम

क्रॅमरचा नियम हे रेखीय समीकरणांच्या निराकरणासाठी सुस्पष्ट सूत्र आहे. संबंधित डिटर्मिनन्टचे मुल्य शून्य नसल्यासच हे लागू होते. येथे आपण आपला अभ्यास दोन आणि तीन चलांतील समीकरणांपुरता करणार आहोत.

दोन चलामधील रेखीय समीकरणांची प्रणाली (क्रॅमरचा नियम)

आता आपण समीकरणांची प्रणाली असल्याचे विचार करू या.

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{येथे } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

विरुद्ध गुणाकार करून आपल्याला मिळेल,

$$\frac{x}{(b_1c_2 - b_2c_1)} = \frac{y}{(c_1a_2 - c_2a_1)} = \frac{1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

तीन चलामधील मधील रेखीय समीकरणांची प्रणाली (क्रॅमरचा नियम)

आता आपण समीकरणांची प्रणाली असल्याचे विचार करू या.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad ...(i)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad ...(ii)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \qquad ...(iii)$$

येथे

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

जर $\Delta \neq 0$, तर,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad ...(iv)$$

समीकरण (iv) मध्ये x, y आणि z चे मूल्य शोधण्यासाठी असलेल्या सुत्राला क्रॅमरचा नियम म्हटले जाते.

शेरा: $\Delta_i (i = 1, 2, 3)$ हा डिटर्मिनन्ट i^{th} स्तंभांच्या घटकांना d_1, d_2, d_3 कडून पुनर्स्थित करून प्राप्त केले.

III. तीन चलांतील रेषीय समीकरणातील प्रणालीचे सामान्यरूप

आता आपण समीकरणांची प्रणाली असल्याचे विचार करू या.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad ...(i)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad ...(ii)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \qquad ...(iii)$$

$\therefore$,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

येथे $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ला नेहमीचा अर्थ आहे.

(i) जर $\Delta \neq 0$ आणि कमीत-कमी एक $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$ तर दिलेली समीकरणांची प्रणाली सुसंगत असेल आणि त्यात एकमेव नॉन -ट्रिव्हिअल सोल्युशन (non-trivial solution) असेल.

(ii) जर $\Delta \neq 0$ आणि $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$ तर दिलेली समीकरणांची प्रणाली सुसंगत आहे आणि फक्त ट्रिव्हिअल सोल्युशन (trivial solution) असेल.

(iii) जर $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ तर दिलेली समीकरणांची प्रणाली सुसंगत आहे आणि अनंत सोल्युशन (infinite solution) आहेत.

लक्षात घ्या, $\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_1x+b_1y+c_1z=d_2 \\ a_1x+b_1y+c_1z=d_3 \end{aligned}\right\}$ (d_1, d_2 आणि d_3 पैकी कमीत - कमी दोन सारखे नको.)

$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. परंतु ही तीन समीकरणे तीन समांतर प्रतल प्रतिनिधित्व करतात. त्यामुळे ही प्रणाली विसंगत आहे.

(iv) जर $\Delta = 0$ आणि $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ पैकी कमीत-कमी एक शुन्य नसेल तर समीकरणे विसंगत आहेत आणि त्याचे सोल्युशन नाही.

उदाहरण 6: क्रॅमरच्या नियमांनुसार खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$$x + y = 5 \quad \text{आणि} \quad 3x - 2y = 7$$

उत्तर: येथे,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -10-7 = -17 \quad \text{आणि} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7-15 = -8$$

$\therefore$ क्रॅमरच्या नियमांनुसार,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-17}{-5} = \frac{17}{5} \quad \text{आणि} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{17}{5}, \quad y = \frac{8}{5}$$

म्हणून दिलेली रेषीय समीकरणे सुसंगत आहेत कारण त्यांच्याकडे निश्चित आणि एकमेव सोल्युशन (रेषांना छेदणारे) आहेत.

उदाहरण 7: क्रॅमरच्या नियमांनुसार खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 7 \\ 2x + 4y + 5z &= 8 \\ 3x + y + 9z &= 6 \end{aligned}$$

उत्तर: समजा

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{aligned} R_2 &\to R_2 - 2R_1 \\ R_3 &\to R_3 - 3R_1 \end{aligned}$$

$$= 15$$

अशा प्रकारे $\Delta \neq 0$ आणि म्हणूनच प्रणालीकडे एकमेव सोल्युशनखाली दिल्याप्रमाणे आहे.

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}7 & 2 & 1\\8 & 4 & 5\\6 & 1 & 9\end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\2 & 8 & 5\\3 & 6 & 9\end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\2 & 4 & 8\\3 & 1 & 6\end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 5\\3 & 1 & 9\end{vmatrix}}$$

आता $$\Delta_1 = \begin{vmatrix}7 & 2 & 1\\8 & 4 & 5\\6 & 1 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7 & 2 & 1\\-6 & 0 & 3\\5/2 & 0 & 17/2\end{vmatrix} \begin{matrix}R_2 \to R_2 - 2R_1\\R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1\end{matrix}$$ उपयोग करून

$$= -2\left[\left(-6\times\frac{17}{2}\right)+\left(-3\times\frac{5}{2}\right)\right]$$

$= 102 + 15 = 117$ (स्तंभ 2 सह विस्तारित)

पुन्हा, $$\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\2 & 8 & 5\\3 & 6 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\0 & -6 & 3\\0 & -15 & 6\end{vmatrix} \begin{matrix}R_2 \to R_2 - 2R_1\\R_3 \to R_3 - 3R_1\end{matrix}$$ उपयोग करून

$= 39$

पुन्हा, $$\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\2 & 4 & 8\\3 & 1 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\0 & 0 & -6\\3 & 1 & 6\end{vmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1$$ उपयोग करून

$= -30$ (पंक्ती 2 सह विस्तारित)

$\therefore$ सोल्युशन खालीलप्रमाणे देता येईल.

$$\frac{x}{117} = \frac{y}{39} = \frac{z}{-30} = \frac{1}{15}$$

$\therefore$ $$x = \frac{117}{15}, y = \frac{39}{15}, z = -2.$$

म्हणुन, रेखीय समीकरणांची दिलेली प्रणाली सुसंगत आहे कारण त्याचे एकमेव नॉन -ट्रिव्हिअल सोल्युशन आहे.

IV. रेखीय समीकरणांची एकसंध प्रणाली

समजा $$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad ...(i)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad ...(ii)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad ...(iii)$$

तीन चलांमध्ये एकसमान रेषीय समीकरणांची प्रणाली आहे.

$\Rightarrow$ $$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

म्हणूनच, प्रणालीकडे नेहमीच एक सोल्युशन असते $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ज्यास ट्रिव्हिअल सोल्युशन (trivial solution) म्हणतात. म्हणजे ही प्रणाली नेहमीच सुसंगत असते.

Δ चे तपासणी मूल्य

$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
एकमेव ट्रिव्हिअल सोल्युशन	ट्रिव्हिअल आणि नॉन -ट्रिव्हिअल सोल्युशन (infinite solutions)

आकृती 1.1: एकसंध समीकरणांसाठी फ्लोचार्ट

> लक्षात घ्या की जर रेषीय समीकरणांच्या दिलेल्या प्रणालीमध्ये त्याच्या सर्व चलांसाठी फक्त शून्य उकल असतील तर दिलेल्या समीकरणांना ट्रिव्हिअल सोल्युशन म्हणतात.

हे देखील लक्षात घ्या की जर समीकरणांची प्रणाली $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ नेहमीच सुसंगत असेल तर $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ पण विरुद्ध विधान सत्य नाही.

उदाहरण 8: दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरणाचे स्वरूप शोधा;

$$x + y + 3z = 3, \quad 2x + 2y + 4z = 4, \quad 3x + 3y + 5z = 0$$

उत्तर: Here $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ आता $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10$

$\therefore$ $D = 0$ परंतू $D_1 \neq 0$, म्हणून सोल्युशन नाही.

व्हिडिओ संसाधन संदर्भ

Determinants

Properties of determinants

Minors and co-factors

Singular and non-singular matrices

Matrix method a system of linear equations

डिटर्मिनन्टचे उपयोजन

1. मॅट्रिक्सचा वापर करण्याव्यतिरिक्त डिटर्मिनन्ट अनेक विषयांमध्ये वापरले जातात. जसे की बहुपदीय बहुपदीय प्रक्षेपण (interpolation), समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ शोधणे, इष्टिकाचितेचे घनफळ; आलेख इत्यादींमध्ये डिटर्मिनन्टचा उपयोग होतो.

2. बिंदू (x_1, y_1) व (x_2, y_2) मधून जाणाऱ्या सरळ रेषेचे समीकरण $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ आहे.

3. समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ सरळ रेषांच्या जोडीचे प्रतिनिधित्व करते जर

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

4. जर (x_r, y_r); $r = 1, 2, 3$ त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहेत, तर त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

$$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ असते.

जर $D = 0$ तर तीन बिंदू एकरेषीय किंवा समांतर असतात.

5. तीन रेषा $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ...(*i*)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ...(*ii*)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ...(*iii*)

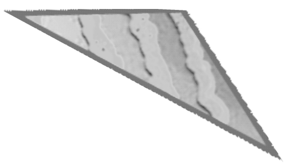
एका बिंदूत छेदतील जर $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

दोन चलांमध्ये तीन एकरेषीय समीकरणांच्या सुसंगततेसाठी ही अट आहे.

केस स्टडी

एक शेतकरी त्रिकोणी जमीन तुकडय़ासाठी 100 रुपये प्रति स्क्वेअर युनिट दराने विकत घेतो. जमिनीच्या कोपऱ्यांचे शिरोबिंदू (0, 0), (2, 6) आणि (9, 10) आहेत.

वरील माहितीच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.



आकृती 1.2

1. डिटर्मिनन्ट सूत्राचा वापर करून जमिनीचे क्षेत्र मूल्यांकन केले जाते $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ________ आहे.

2. (0, 0) एक कोपरा घेण्याऐवजी शेतकऱ्याने तो (2, –3) घेतला असता तर त्रिकोणी प्लॉटचे क्षेत्र किती असेल?

3. त्रिकोणी भूखंड विकत घेण्याच्या बदल्यात शेतकऱ्याने दिलेला एकूण खर्च किती?
4. जर त्याने त्याच क्षेत्राच्या 5 तुकडे जमीन त्याने विकत घेतलेल्या त्रिकोणी भूखंडाच्या विकत घेतल्यास.

तपासा !!!

आपण मॅटलॅबची मूलभूत गोष्टी शिकल्यानंतर मॅटलॅबची विनामूल्य चाचणी आवृत्ती डाऊनलोड करा.

आपण खालील डिटर्मिनन्टचे मूल्य शोधू शकता? ते सत्य करा!

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & 8 & 6 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 11 \\ 20 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

क्रिया

- क्रॅमरचा नियम कधी अयशस्वी होतो? आपल्या शिक्षकांशी चर्चा करा.
- खालील डिटर्मिनन्टची किंमत कोणत्याही ओपन सोर्स सॉफ्टवेअरचा उपयोग करून शोधा.

$$\begin{vmatrix} 330 & 190 & 2947 \\ 347 & 509 & 3033 \\ 7777 & 8888 & 9999 \end{vmatrix}$$

प्रिंट-आउट/स्क्रीनशॉट घ्या आणि तुमच्या शिक्षकांना दाखवा.तुमच्या सहकाऱ्यांसह तुमचे उत्तर सांगा. तुम्हा सर्वांना डिटर्मिनन्टचे समान मूल्य मिळते का?

पार्ट-2: मॅट्रायसेस

1.2 परिचय

'm' आडव्या रेषा (rows) आणि 'n' उभ्या रेषा (column) स्वरूपात m द्वारा n अंकांच्या (जे वास्तविक किंवा काल्पनिक असू शकतात) आणि ऑर्डर $m \times n$ असलेल्या आयताकृती रचनेला मॅट्रायसेस म्हणतात. ते मॅट्रीक्स $m \times n$ असे लिहतात. मॅट्रिक्स देखील सदिश संचाच्या रूपात कल्पना केले जाऊ शकतात (आपण युनिट 4 मध्ये अभ्यास कराल!). प्रत्येक रो/कॉलम (row/column) हे रो/कॉलम सदिश दर्शवितात. एखाद्या उदाहरणाच्या मदतीने आपण हे समजावून सांगाल का? पुढे जा!

मॅट्रीक्स हे [ ] किंवा ( ) किंवा || || कंसाने दर्शवितात. $m \times n$ मॅट्रिक्स खालिलप्रमाणे लिहिले जाते.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

संक्षिप्त स्वरूपात, वरील मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ द्वारे दर्शविले जाते. संख्या a_{11}, a_{12} ... इ. मॅट्रिक्स A चे घटक म्हणून ओळखले जातात, a_{ij} घटक हा i^{th} रो आणि j^{th} कॉलमतील आहे आणि त्याला मॅट्रिक्स A चा $(i, j)^{\text{th}}$ घटक म्हणतात.

उदा. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ मॅट्रिक्समध्ये 3 रो आणि 2 कॉलम आहेत. त्याची ऑर्डर 3×2 आहे आणि यात 6 घटक आहेत:

$$a_{11} = 0, a_{12} = -1, a_{21} = 2, a_{22} = 7, a_{31} = 3, a_{32} = 1$$

1.2.1 मॅट्रायसेसचे प्रकार

(1) **रो मॅट्रिक्स (रो वेक्टर – Row matrix):** एक रो असणाऱ्या मॅट्रिक्सला रो मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदा. $A = [a_{11}, a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}]$

> **FUN FACT**
> The elements of a matrix can be anything, ranging from numbers to equations to pictures!

(2) **कॉलम मॅट्रिक्स (कॉलम वेक्टर- Column matrix):** एक कॉलम असणाऱ्या मॅट्रिक्सला कॉलम मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदा. $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$

(3) **शून्य किंवा नल मॅट्रिक्स (Zero or null matrix):** $(A = O_{m \times n})$ ज्या $m \times n$ मॅट्रिक्सचे सर्व घटक शून्य आहेत त्यास नल मॅट्रिक्स म्हणतात.

(4) **हॉरीझंटल मॅट्रिक्स (Horizontal matrix):** जर $n > m$ तर $m \times n$ ऑर्डर मॅट्रिक्सला हॉरीझंटल मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदा. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(5) **व्हर्टिकल मॅट्रिक्स (Vertical matrix):** जर $m > n$ तर $m \times n$ ऑर्डर मॅट्रिक्सला व्हर्टिकल मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदा. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(6) **रेक्टँग्युलर मॅट्रिक्स (Rectangular matrix):** रो संख्या आणि कॉलम संख्या समान नसल्यास त्या मॅट्रिक्सला रेक्टँग्युलर मॅट्रिक्स असे म्हणतात. म्हणजेच जर $m \neq n$ तर $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ मॅट्रिक्सला रेक्टँग्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात.

(7) **स्क्वेअर मॅट्रिक्स (Square matrix):** जर रो संख्या आणि कॉलम संख्या समान असेल तर त्या मॅट्रिक्सला स्क्वेअर मॅट्रिक्स असे म्हणतात. म्हणजेच जर $m = n$ तर $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ मॅट्रिक्सला स्क्वेअर मॅट्रिक्स म्हणतात.

उदा.

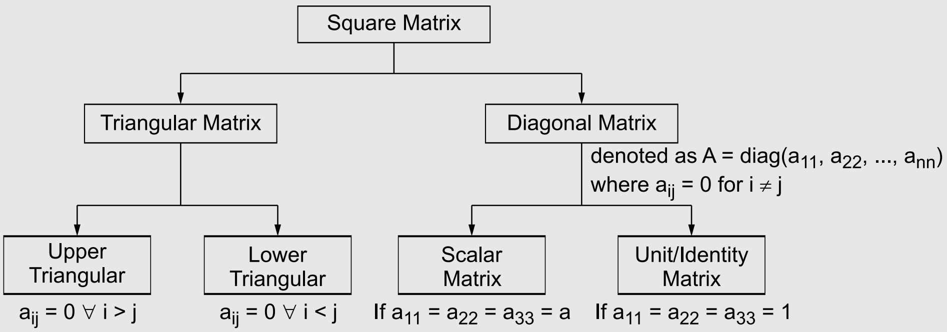
$(i)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$ $\qquad (ii)\ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$

स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत

टीप:

(a) जर $A = [a_{ij}]$ हा ऑर्डर n चा स्क्वेअर मॅट्रिक्स असेल तर घटक $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ मॅट्रिक्स A चे कर्ण आहे असे म्हणतात. ज्या रेषेच्या बाजूने कर्ण घटक असतात त्यास प्रधान किंवा अग्रणी कर्ण म्हणतात. अशाप्रकारे, जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, तर A चे कर्ण घटक 2, 5 आहेत.

(b)



आकृती 1.3: स्क्वेअर मॅट्रिक्सचे प्रकार

(8) **स्केलर मॅट्रिक्स (Scalar matrix):** ज्या डायगोनल मॅट्रिक्सचे सर्व घटक समान असतील त्या मॅट्रिक्सला स्केलर मॅट्रिक्स असे म्हणतात,

अशा प्रकारे जर $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ k, & \text{if } i = j \end{cases}$, येथे k हा स्थिरांक आहे, तर $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ला स्केलर मॅट्रिक्स म्हणतात.

(9) **सब-मॅट्रिक्स (Sub-matrix):** जो मॅट्रिक्स रो आणि कॉलम संख्या हटवून दिलेल्या मॅट्रिक्सकडून मिळविला जातो त्याला दिलेल्या मॅट्रिक्सचा सब-मॅट्रिक्स म्हणतात.

(10) **मॅट्रिक्सचा ट्रेस (Trace of a matrix):** स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ च्या सर्व कर्ण घटकांची बेरीजला मॅट्रिक्स A चा ट्रेस म्हणतात आणि $Tr(A)$ द्वारे दर्शविला जातो.

अशाप्रकारे $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

उदा. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, तर

$Tr(A) = 2 + 3 + 4 = 9$

(11) **सिंगलटन मॅट्रिक्स (Singleton matrix):** ज्या मॅट्रिक्समध्ये फक्त एकच घटक असेल त्या मॅट्रिक्सला सिंगलटन मॅट्रिक्स असे म्हणतात. म्हणजे जर $m = n = 1$, तर मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ सिंगलटन मॅट्रिक्स असे म्हणतात.

(12) **कम्पॅरेबल मॅट्रायसेस (Comparable matrices):** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ आणि $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ असे दोन मॅट्रिक्स आहेत व जर $m = p$ आणि $n = q$ असेल तर त्यांना कम्पॅरेबल मॅट्रायसेस म्हणतात.

1.2.2 मॅट्रिक्सचे बीजगणित

I. मॅट्रिक्सची बेरीज

समजा A आणि B ह्या दोन मॅट्रिक्सची ऑर्डर प्रत्येकी $m \times n$ आहे. मग त्यांची बेरीज $A + B$ ची ऑर्डर $m \times n$ आहे. A आणि B चे संबंधित घटक बेरीज करून $A + B$ मॅट्रिक्स मिळाले आहे.

अशा प्रकारे, जर $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ आणि $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, तर $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$, $\forall\ i, j$

मजेदार तथ्य: मॅट्रिक्सची संकल्पना जेम्स सिल्वेस्टर यांनी सादर केली. त्यांचा मित्र आणि गणितज्ञ आर्थर कायले यांनी मॅट्रिक्सचे बीजगणित पैलू विकसित केले.

उदाहरण 9: $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, आणि $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

खालील गोष्टींचे मूल्यांकन करा (ज्याची व्याख्या केली जाईल):

(1) $A + B$ (2) $A + C$

उत्तर:

(1) दिलेला A ऑर्डरचा मॅट्रिक्स 3×3 आहे तर B ऑर्डरचा मॅट्रिक्स 3×2 आहे म्हणून A आणि B समान ऑर्डरचे नाहीत.

$\therefore$ बेरीज $A + B$ परिभाषित केलेले नाही.

(2) A आणि C मॅट्रिक्सची ऑर्डर 3×3 समान आहेत म्हणून बेरीज $A + C$ ची व्याख्या केली आहे.

$$\therefore \quad A + C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 7+4 & 3-2 \\ -1+2 & 0+7 & 1+1 \\ 0+1 & 5-1 & -3+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स बेरजेचे गुणधर्म

गुणधर्म 1: मॅट्रिक्सची बेरीज कॉम्युटेटिव्ह (commutative) आहे.

म्हणजे, $A + B = B + A$

गुणधर्म 2: मॅट्रिक्सची बेरीज असोसिएटिव्ह (associative) आहे.

म्हणजे, $A + (B + C) = (A + B) + C$

गुणधर्म 3: ॲडिटिव्ह आयडेंटिटीचे (additive identity)अस्तित्व

म्हणजे, $A + O = O + A$

शून्य मॅट्रिक्स O हा मॅट्रिक्स बेरजेसाठी आयडेंटिटी घटक आहे.

गुणधर्म 4: ॲडिटिव्ह इन्व्हर्सचे (additive inverse) अस्तित्व

जर $A + B = O = B + A$

येथे O हा $m \times n$ शुन्य मॅट्रिक्स आहे तर मॅट्रिक्स B ला मॅट्रिक्स A चे ॲडिटिव्ह इन्व्हर्स किंवा A चे निगेटिव्ह मॅट्रिक्स म्हटले जाते.

II. स्केलर गुणाकार

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ हा एक मॅट्रिक्स आहे आणि k कोणतीही संख्या आहे. A च्या प्रत्येक घटकाला k ने गुणाकार करून मिळविलेले मॅट्रिक्स Ak ला स्केलर मल्टिपल मॅट्रिक्स असे म्हणतात आणि kA द्वारे दर्शविले जाते.

अशा प्रकारे, $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$

उदाहरणार्थ 10: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$ आणि $k = 2$ तर मॅट्रिक्स kA शोधा.

उत्तर: $kA = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

$$2A = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times9 & 2\times5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ आणि $kA = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 4b & 12 \end{bmatrix}$ तर $b - a - k$ सोडवा. [**उत्तर:** 1]

III. मॅट्रिक्सची वजाबाकी

A, B हे $m \times n$ ऑर्डरचे मॅट्रिक्स आहेत. त्यांची वजाबाकी $A - B$ हे $m \times n$ ऑर्डरचे मॅट्रिक्स आहे. हे मॅट्रिक्स A आणि B च्या संबंधित घटकांची वजाबाकी करून मिळविली जाते.

अशाप्रकारे, जर $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ आणि $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

तर $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n} \ \forall\ , i, j$

उदाहरणार्थ 11: जर $A = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$. तर $A - B$ शोधा.

उत्तर: A आणि B हे दोन्ही समान ऑर्डरचे 2×2 चे मॅट्रिक्स आहेत, म्हणून $A - B$ परिभाषित केले आहे.

$$\therefore \quad A - B = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-3 & 10-5 \\ 13-8 & 20-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

प्रश्न: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$, आणि $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. आणि $A + 2C = B$, तर मॅट्रिक्स C चे मूल्यांकन करा.

$$\left[\textbf{Hint.}\ C = \frac{1}{2}[B - A]\right]$$

लक्षात ठेवाः जर दोन A आणि B मॅट्रिक्स समान ऑर्डरचे असतील तर त्यांची बेरीज आणि वजाबाकी शक्य आहे आणि ही मॅट्रिक्स बेरीज किंवा वजाबाकी करण्यासाठी अनुकूल असल्याचे म्हटले जाते. दुसरीकडे, जर मॅट्रिक्स A आणि B भिन्न ऑर्डरचे असतील तर त्यांचे बेरीज आणि वजाबाकी शक्य नाही आणि या मॅट्रिक्सला बेरीज आणि वजाबाकीसाठी अनुकूल नाही असे म्हणतात.

IV. मॅट्रायसेसचा गुणाकार (कॉलमनुसार रो)

समजा A ह्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर $m \times n$ आणि B ह्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर $p \times q$ आहे. जर $n = p$ असेल तर मॅट्रिक्स गुणाकार AB अनुकूल असल्याचे म्हटले जाते. गुणाकार AB मध्ये A ला प्री-फॅक्टर आणि B ला पोस्ट फॅक्टर म्हटले जाते.

$\Rightarrow$ पूर्व-घटकातील कॉलमची संख्या = पोस्ट फॅक्टरमधील रोची संख्या असल्यास गुणाकार AB शक्य आहे.

समजा $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ आणि $B_{n \times p} = [b_{ij}]$, तर AB ची ऑर्डर $m \times p$ आहे आणि $(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$

उदाहरणार्थ:

समजा $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{आणि} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A ची ऑर्डर 2×3 आहे आणि B ची ऑर्डर 3×2 आहे तर गुणाकार करता येईल.

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

AB हा 2×2 मॅट्रिक्स आहे ज्यातील प्रत्येक घटक हा मॅट्रिक्स A मधील प्रत्येक रो हे B मॅट्रिक्स मधील संबंधित प्रत्येक कॉलमशी गुणाकारांची बेरीज आहे. ही गणना खालीलप्रमाणे आहे,

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1\ 3\ -1}\ \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{1\ 3\ -1}\ \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \\ \boxed{0\ 9\ 2}\ \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{0\ 9\ 2}\ \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 1\times3+3\times8+(-1)\times0 & 1\times4+3\times1+(-1)\times1 \\ 0\times3+9\times8+2\times0 & 0\times4+9\times1+2\times1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 3+24+0 & 4+3-1 \\ 0+72+0 & 0+9+2 \end{bmatrix}$$

अशाप्रकारे, $AB = \begin{bmatrix} 27 & 6 \\ 72 & 11 \end{bmatrix}_{2\times2}$

प्रश्न: जर $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$. तर AB चा गुणाकार करा. BA गुणाकार करता येईल काय? विश्लेषण करा.

$\left[\textbf{उत्तर:} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 12 & -12 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}_{3\times2}\right]$

प्रश्न: जर A, B हे दोन मॅट्रिक्स असतील आणि $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, तर AB शोधा.

$\left[\textbf{उत्तर:} \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right]$

मॅट्रिक्स गुणाकारांचे गुणधर्म

1. मॅट्रिक्स गुणाकार कॉम्यूटेटिव्ह (commutative) नाही - म्हणजे $AB \neq BA$
   येथे AB आणि BA दोन्ही अस्तित्त्वात आहेत आणि ते देखील समान प्रकारचे आहेत परंतु
   $AB \neq BA$ (सर्वसाधारणपणे)
   उदाहरण: समजा $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; तर $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   $\Rightarrow \quad AB \neq BA$

2. $AB = O$ हे $A = O$ किंवा $B = O$ सुचित करत नाही
   उदाहरण: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (शुन्य नसलेले मॅट्रिक्स)
   आणि $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (शुन्य नसलेले मॅट्रिक्स)
   आहेत तर $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

टीप: जर A आणि B दोन शुन्य मॅट्रिक्स नाहीत आणि $AB = O$ तर A आणि B ला शुन्याचे विभाजक म्हणतात.

3. मॅट्रिक्स गुणाकार असोसिएटिव्ह (associative) आहे.
   जर A, B आणि C हे AB आणि BC च्या गुणाकारास अनुकूल असतील तर
   डिस्ट्रीब्युटिव्ह
   $$\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (A+B)C &= AC+BC \end{aligned}\right] A, B \text{ आणि } C \text{ संबंधित गुणाकारासाठी अनुकूल आहेत.}$$
4. स्क्वेअर मॅट्रिक्स A साठी, $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{n \text{ वेळापर्यंत}}$ येथे $n \in N$

1.2.3 मॅट्रिक्सचा ट्रान्सपोज (बदलत्या पंक्ती आणि स्तंभ)

समजा $A = [a_{ij}]$ हे $m \times n$ ऑर्डरचे मॅट्रिक्स आहे. म्हणुन A^T किंवा $A' = [a_{ji}]$, $1 \le i \le m$ आणि $1 \le j \le n$, मॅट्रिक्सची ऑर्डर $n \times m$ आहे.

उदाहरण12: जर $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. तर समीकरण $A^T + A = I_2$. सत्य होण्यासाठी θ ची किंमत शोधा.

उत्तर: $A^T + A = I_2$ दिले आहे.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 2\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in N$$

1.2.4 ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स

जर $AA' = I$, येथे I हा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे, तर स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ला ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स म्हणतात.

टीप:

1. जर $AA' = I$ असेल तर $A^{-1} = A^T$.
2. जर A आणि B ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असतील तर AB देखील ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे.
3. जर A ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असेल तर A^{-1} आणि A' देखील ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहेत
4. ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्सचे डिटर्मिनन्ट मूल्य 1 किंवा –1 असते.

उदाहरण13: जर $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे हे तपासा.

उत्तर: A ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे.

$$\therefore \quad AA' = I.$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AA' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AA' = \begin{bmatrix} 4+0 & 0 \\ 0 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AA' = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AA' = 4I$$

A ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स नाही.

शेरा: जर $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तर आर्थोगोनल मॅट्रिक्स आहे हे सिद्ध करा.

1.2.5 सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रायसेस

व्याख्या: सिमेट्रिक मॅट्रिक्स

जर $a_{ij} = a_{ji} \; \forall \; i$ आणि j, तर स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ सिमेट्रिक असल्याचे म्हटले जाते.

$\therefore$ सिमेट्रिक मॅट्रिक्ससाठी : $A = A^T$.

व्याख्या: स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स

जर $a_{ij} = -\,a_{ji} \; \forall \; i$ आणि j, तर A स्क्वेअर मॅट्रिक्स $A = [a_{ij}]$ ला स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असे म्हटले जाते.

$\therefore$ स्क्यू-सिमेट्रिकमॅट्रिक्स साठी : $A = -A^T$.

उदाहरणार्थ, जर $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$, तर $A^T = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$. येथे A सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे. कारण $A^T = A$

आता खालील उदाहरणांचा विचार करा-

जर
$$A = \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix},$$

तर
$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix} = -A$$

येथे A स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे कारण $A^T = -A$.

लक्षात ठेवा :

(i) जर A स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, तर $a_{ii} = -a_{ii} \quad \Rightarrow \quad a_{ii} = 0 \; \forall \; i$

म्हणून स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सचे कर्ण घटक सर्व शून्य असतात, परंतु उलट विधान सत्य नाही.

(ii) प्रत्येक स्क्वेअर मॅट्रिक्स सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सचा बेरीज किंवा वजाबाकी म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो.

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{सिमेट्रिक}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{स्क्यू-सिमेट्रिक}} \quad \text{आणि } A = \frac{1}{2}(A^T + A) - \frac{1}{2}(A^T - A)$$

उदाहरण 14: स्क्वेअर मॅट्रिक्स $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ येथे $b_{ij} = (i - j)^n$, n सम किंवा विषम आहे त्यानुसार B सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे हे सिद्ध करा.

उत्तर:

$$b_{ij} = (i - j)^n = (-1)^n (j - i)^n$$

$$= (-1)^n b_{ji} = \begin{cases} b_{ji}, & n \text{ सम संख्या आहे.} \\ -b_{ji}, & n \text{ विषम संख्या आहे.} \end{cases}$$

म्हणजे A हा सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे जर n सम संख्या आहे आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे जर n विषम संख्या आहे.

उदाहरण 15: जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. आपण सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स बेरीज म्हणून A व्यक्त करू शकता का? पुराव्यासह स्पष्टीकरण द्या.

उत्तर: होय, आम्ही सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स बेरीज म्हणून A व्यक्त करू शकतो.

आमच्याकडे, $$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \text{ तर } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7/2 \\ 7/2 & -2 \end{bmatrix} = P^T$$

अशाप्रकारे, $P = \frac{1}{2}(A + A')$ सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे

Also let $$Q = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q^T = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

अशाप्रकारे $Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$ स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे.

आता, $$P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 7/2 \\ 7/2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = A$$

म्हणून सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सचा बेरीज म्हणून A व्यक्त करू शकतो.

प्रश्न: जर A सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल तर A .....मॅट्रिक्स आहे.

(A) डायगोनल मॅट्रिक्स कर्ण मॅट्रिक्स (B) शून्य मॅट्रिक्स

(C) ट्रँग्युलरमॅट्रिक्स (D) आयडेंटिटी मॅट्रिक्स [**उत्तर** (B)]

1.2.6 सिंग्युलर आणि नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स

जर $|A| = 0$ तर स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ला सिंग्युलर मॅट्रिक्स असे म्हटले जाते. जर $|A| \neq 0$ तर स्क्वेअर मॅट्रिक्स A ला नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असे म्हटले जाते.

उदाहरणार्थ:

(*i*) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ हे सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे कारण $|\mathrm{A}| = 0$.

(*ii*) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ हे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे कारण $|A| = 25 - 12 = 13 \neq 0$

1.2.7 मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स

I. स्क्वेअर मॅट्रिक्सचे ॲडजॉईन्ट

व्याख्या:

समजा $A = [a_{ij}]$ हा $n \times n$ ऑर्डरचा मॅट्रिक्स आहे B' मॅट्रिक्स हा $B = [A_{ij}]_{n \times n}$ चा ट्रान्सपोज आहे.

येथे A_{ij} हा डिटर्मिनन्ट $|A|$ मधील a_{ij} घटकाचा कोफॅक्टर दर्शवितो त्याला मॅट्रिक्स A चे ॲडजॉईन्ट (adjoint) असे म्हणतात आणि Adj. A चिन्हाद्वारे दर्शविले जाते. अशाप्रकारे मॅट्रिक्स A चे ॲडजॉईन्ट हे कोफॅक्टर्सद्वारे तयार केलेल्या मॅट्रिक्सचे ट्रान्सपोज होते.

अशाप्रकारे मॅट्रिक्स A चे ॲडजॉईन्ट हे कोफॅक्टर्सद्वारे तयार केलेल्या मॅट्रिक्सचे ट्रान्सपोज होते.

म्हणजे
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\therefore$
$$\text{adj } A = \text{मॅट्रिक्सचे ट्रान्सपोज} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{मॅट्रिक्स} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

टीप: (*i*) कधी कधी मॅट्रिक्सच्या ॲडजॉईन्टला मॅट्रिक्सचे "ॲडज्युगेट" देखील म्हटले जाते. $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

(*ii*) $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I$.

कोफॅक्टर लिहिण्यासाठी नियम

a_{ij} घटकावर पंक्ती आणि स्तंभ प्रतिच्छेदन करा आणि राहिलेल्या डिटर्मिनन्टला D ने दाखवा.

त्यानंतर, $$a_{ij} \text{ चे कोफॅक्टर } = \begin{cases} D, & \text{if } i+j = \text{समपूर्णांक} \\ -D, & \text{if } i+j = \text{विषमपूर्णांक} \end{cases}$$

उदाहरण 16: जर $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, तर Adj.$A$ शोधा.

उत्तर: $|A|$ मध्ये δ हा α चा कोफॅक्टर आहे आणि $-\gamma$ हा β चा कोफॅक्टर आहे. तसेच $-\beta$ हा γ चा कोफॅक्टर आहे आणि α हा δ चा कोफॅक्टर आहे. म्हणून $|A|$च्या घटकांच्या कोफॅक्टर्सची बनलेली मॅट्रिक्स B आहे

$$B = \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

आता $$\text{Adj } A = B \text{ मॅट्रिक्सचा ट्रान्सपोज}$$
$$= \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

उदाहरण 17: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 10 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ चे ॲडजॉईन्ट शोधा.

उत्तर: $$|A| = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 10 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$|A|$ च्या पहिल्या पंक्तीच्या घटकांचे कोफेक्टर

$\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$, आहेत, म्हणजे अनुक्रमे – 30, 42, – 24 आहेत.

$|A|$ च्या दुसऱ्या पंक्तीच्या घटकांचे कोफॅक्टर

$-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$, आहेत, म्हणजे अनुक्रमे ±8, – 16, 16 आहेत.

$|A|$ च्या तिसऱ्या पंक्तीच्या घटकांचे कोफेक्टर

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$, आहेत, म्हणजे अनुक्रमे 5, 17, – 8 आहेत.

$\therefore$ Adj. $A = B$ मॅट्रिक्सचा ट्रान्सपोज येथे

$$B = \begin{bmatrix} -30 & 42 & -24 \\ 8 & -16 & 16 \\ 5 & 17 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -30 & 8 & 5 \\ 42 & -16 & 17 \\ -24 & 16 & -8 \end{bmatrix}$$

प्रश्न: मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ चे अॅडजॉईन्ट शोधा व $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I$ प्रमेयाची पडताळणी करा.

$$\left[\textbf{उत्तर:} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right]$$

प्रश्न: ऑर्डर 3 च्या कर्ण मॅट्रिक्सचे अॅडजॉईन्ट त्याचा डायगोनल मॅट्रिक्स असते याची पडताळणी करा.

प्रश्न: जर O हा ऑर्डर n चे शून्य मॅट्रिक्स आहे, तर $\text{adj}.O = O$ खरे आहे की खोटे आहे त्याचे विश्लेषण करा.

प्रश्न: जर I_n हे ऑर्डर n चे मॅट्रिक्स असेल तर आपण ते $\text{adj } I_n = I_n$ दर्शवू शकता?

मजेदार तथ्य: इंग्रजी गणितज्ञ जेम्स सिल्व्हेस्टर कायद्याचे शिक्षण घेत असताना सहकारी गणितज्ञ आर्थर केले यांना भेटले!

II. मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स (रेसिप्रोकल मॅट्रिक्स)

जर B हे स्क्वेअर मॅट्रिक्स n ऑर्डरचे असेल आणि $AB = I_n = BA$ व A (नॉन-सिंगुलर) हा स्क्वेअर मॅट्रिक्स n ऑर्डरचा आहे तर A या मॅट्रिक्सला इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स म्हणतात. मग B ला A चा इन्व्हर्स (रेसिप्रोकल) मॅट्रिक्स म्हणतात आणि ते A^{-1} दर्शविले जाते.

अशाप्रकारे, $\quad A^{-1} = B \Leftrightarrow I_n = BA$

आपल्याला माहीत आहे, $\quad A(\text{adj } A) = |A|I_n$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} A(\text{adj A}) = A^{-1} I_n|A|$$

$$\Rightarrow \quad I_n(\text{adj } A) = A^{-1} |A|I_n$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}; \text{ जर } |A| \neq 0$$

टीपः स्क्वेअर मॅट्रिक्स A हा इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स होण्याकरीता $|A| \neq 0$ ही आवश्यक आणि पुरेशी अट आहे.

इन्व्हर्स मॅट्रिक्सचे गुणधर्म

(*i*) जर A आणि B हे समान ऑर्डरचे इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स असतील तर $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

(*ii*) जर A इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स असेल तर A^T देखील इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स आहे आणि $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(*iii*) जर A इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स असेल तर

(*a*) $(A^{-1})^{-1} = A$ and (*b*) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k; k \in N$

(iv) जर A नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(v) ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स A नेहमीच इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स असतो आणि $A^{-1} = A^T$

महत्वाची टीप: AB व BA या दोन्ही गुणाकारासाठी आणि समानतेसाठी A आणि B दोन्ही समान ऑर्डरचे स्क्वेअर मॅट्रिक्स असणे आवश्यक आहे. अशाप्रकारे नॉन-स्क्वेअर मॅट्रिक्समध्ये इन्व्हर्स नसतो.

उदाहरण 18: जर $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $|A| = 2$ आणि $|A| \neq 0$ तर A मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स शोधा.

उत्तर: $|A| \neq 0$ असल्याने मॅट्रिक्स A नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे पहिल्या स्तंभात डिटरमिनंटच्या विस्तृत करून, आता $|A|$ च्या पहिल्या ओळीतील घटकांचे कोफॅक्टर

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, आहेत. म्हणजे $-1, 1, 1$

दुसरी पंक्ती $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, म्हणजे $1, -1, 1$

तिसरी पंक्ती $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, म्हणजे $1, 1, -1$

$$\therefore \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B' = (\text{Adj } A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad A^{-1} = \text{Adj}(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

टीप: मॅट्रिक्स A चे इन्व्हर्स मॅट्रिक्स शोधल्यानंतर आम्ही $A \cdot A^{-1} = I$ उत्तर तपासले पाहिजे.

उदाहरण 19: जर A आणि B मॅट्रिक्सचा गुणाकार होत असेल तर A^{-1} आणि B^{-1} चा गुणाकार होतो हे सिद्ध करा.

उत्तर: जर A आणि B मॅट्रिक्सचा गुणाकार होत असेल तर $AB = BA$

आता $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1}\,\text{A}^{-1}$

तसेच $\qquad (AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$

$\therefore \qquad B^{-1}\,A^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$

अशाप्रकारे A^{-1} आणि B^{-1} चा गुणाकार होतो.

उदाहरण 20: जर A, B, C तीन मॅट्रिक्स गुणाकारांना अनुकूल असेल, तर $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

उत्तर: आपल्याला माहीत आहे,

$$(ABC)^{-1} = \{A(BC)\}^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1}$$
$$= (C^{-1}B^{-1})A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

उदाहरण 21: जर A हे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर A^{-1} अस्तित्वात आहे $AB = AC \Rightarrow B = C$, येथे B आणि C ची ऑर्डर A सारखीच आहे हे सिद्ध करा.

उत्तर: जर A हे नॉन -सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर A^{-1} अस्तित्वात आहे

म्हणून $\quad AB = AC \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$

$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \quad \Rightarrow \quad I_n B = I_n C$

$\Rightarrow \quad B = C$

उदाहरण 22: $AB = AC$ दिले आहे. $B = C$ असू शकते काय? आपण दुसरे उदाहरण देऊ शकता?

उत्तर: जर A हे नॉन -सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर $AB = AC \Rightarrow B = C$. परंतु जर मॅट्रिक्स A सिंग्युलर असेल तर $AB = AC$ हे $B = C$ सूचित करत नाही.पुढील उदाहरण हे स्पष्ट करेल.

समजा $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

आपल्याला माहीत आहे जर $B \neq C$

परंतू $\quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{AC}.$

प्रश्न: जर $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. तर मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स शोधा व तुमचे उत्तर तपासा.

$\left[\textbf{उत्तर: } A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\right]$

प्रश्न: जर $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ तर

(i) $\det A$ $\qquad$ (ii) $\text{Adj } A$

(iii) A^{-1} शोधा.

$\left[\textbf{उत्तर: } \det A = 2; A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{vmatrix}\right]$

1.2.8 मॅट्रिक्स पद्धत

(रेखीय समीकरणांच्या सिस्टीमचे निराकरण शोधण्यासाठी मॅट्रिक्स इन्व्हर्सचा वापर)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$. x_n अशा n चलामध्ये रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीचा विचार करा.

म्हणून $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

ही समीकरणे $AX = B$ मॅट्रिक्स समीकरणाच्या स्वरूपात लिहिता येतील.

येथे,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

समजा A नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे. म्हणजे $|A| \neq 0$

म्हणून A^{-1} अस्तित्वात आहे आणि $X = A^{-1}B$.

समीकरणाचे प्रकार आणि त्यांची सुसंगतता

प्रकार 1: एकसमान नसलेल्या समीकरण प्रणालीसाठी

(a) $|A| \neq 0$, तर समीकरण प्रणाली सुसंगत आहे आणि $X = A^{-1}B$ एकमेव उत्तर आहे.

(b) $|A| = 0$ आणि (adj A). $B \neq O$ तर समीकरणाची प्रणाली विसंगत आहे आणि यावर उत्तर नाही.

(c) $|A| = 0$ आणि (adj A) $\cdot B = O$, तर समीकरणाची प्रणाली सुसंगत आहे आणि असंख्य उत्तरे आहेत.

प्रकार 2: एकसमान समीकरणांच्या प्रणालीसाठी

(a) $|A| \neq 0$, तर समीकरणाच्या प्रणालीत ट्रिव्हीअल सोल्युशन (trivial solution) व एक उत्तर आहे.

(b) $|A| = 0$, तर समीकरणाच्या प्रणालीत नॉन-ट्रिव्हीअल सोल्युशन (non-trivial solution) आणि त्यात अनंत उत्तरे असतात.

(c) जर समीकरणांची संख्या < चलांच्या संख्या तर त्यात ट्रिव्हीअल सोल्युशन (trivial solution) नाही.

> **टीप:** एकसमान नसलेले रेखीय समीकरणे देखील क्रॅमरच्या नियमाद्वारे सोडविली जाऊ शकतात, डिटरमिनंटच्या या पद्धतीबद्दल चर्चा केली गेली आहे.

उदाहरण 23: खालील समीकरणे प्रणाली मॅट्रिक्स मध्ये लिहा.

$$x + y + z = 92$$
$$2x + 5y + 7z = 52$$
$$2x + y - z = 10$$ आणि A^{-1}, शोधा.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ आणि म्हणून दिलेली समीकरण सोडवा.

उत्तर: दिलेली समीकरण प्रणाली $AX = B$ मॅट्रिक्स स्वरूपात लिहिता येईल.

$$AX = B \qquad \ldots(1)$$

येथे,
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 92 \\ 52 \\ 10 \end{bmatrix}$$

आपल्याला माहीत आहे $|A| = 1(-5-7) - 1(-2-14) + 1(2-10) = -12 + 16 - 8 = -4$

अशा प्रकारे A नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे आणि म्हणून A^{-1}अस्तित्वात आहे. आता आपण A^{-1} शोधू या.

$|A|$ च्या पहिल्या पंक्तीचे कोफॅक्टर्स

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5-7 = -12 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-14) = 16$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8$$

$|A|$ च्या दुसऱ्या पंक्तीचे कोफॅक्टर्स

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1$$

$|A|$ च्या तिसऱ्या पंक्तीचे कोफॅक्टर्स

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7-5 = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(7-2) = -5$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-2 = 3$$

$\therefore$ Adj A = मॅट्रिक्स B चे ट्रान्सपोज

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 16 & -8 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ समीकरण (1) ला A^{-1} ने सुरुवातीने गुणु.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$I_3X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

आपल्याला माहीत आहे, $$A^{-1}B = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -12 & 2 & 2 \\ 16 & -3 & -5 \\ -8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 92 \\ 52 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -12\times 92 + 2\times 52 + 2\times 10 \\ 16\times 92 + (-3)\times 52 + (-5)\times 10 \\ -8\times 92 + 1\times 52 + 3\times 10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -1104 + 104 + 20 \\ 1472 - 156 - 50 \\ -736 + 52 + 30 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -980 \\ 1266 \\ -654 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 245 \\ -\frac{633}{2} \\ \frac{327}{2} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$x = 245, \quad y = \frac{-633}{2}, \quad z = \frac{327}{2}$$

उदाहरण 24: जर A हे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे व ते सिमेट्रिक असेल तर A^{-1} देखील सिमेट्रिक असेल हे सिद्ध करा.

उत्तर: $A^T = A$ [$\because$ A सिमेट्रिक आहे.]

$(A^T)^{-1} = A^{-1}$ [$\because$ A नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे.]

$(A^{-1})^T = A^{-1}$ म्हणून सिद्ध झाले.

प्रश्न: मॅट्रिक्स पद्धत वापरून खालिल प्रणालीचे निराकरण करा.

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + 2z = 7$$

$$2x - y + 3z = 12$$

[**उत्तर:** $x = 2, y = 1, z = 3$]

प्रश्न: मॅट्रिक्स पद्धत वापरून खालिल प्रणालीचे निराकरण करा. $x + y + z = 6, x - y + z = 2, 2x + y - z = 1.$

[**उत्तर:** $x = 1, y = 2, z = 3$]

उदाहरण 25: खालिल प्रणालीचे निराकरण करा.

$$x + 4y + 7z = 0$$

$$2x + 5y + 8z = 0$$

$$3x + 6y + 9z = 0$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे $x + 4y + 7z = 0$

$$2x + 5y + 8z = 0$$

$3x + 6y + 9z = 0$ आहेत.

मॅट्रिक्स स्वरूपात दिलेली समीकरण प्रणाली खाली लिहिलेली आहे.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = O$$

येथे, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ आणि $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $|A| = 1(45-48) - 4(18-24) + 7(12-15) = -3 + 24 - 21 = 0$

$$|A| = 0$$

आणि म्हणूनच प्रणालीकडे ट्रिव्हीअल सोल्युशन नाही. आता आपण दिलेली दोन समीकरणे लिहू.

$$x + 4y + 7z = 0 \quad \text{आणि} \quad 2x + 5y + 8z = 0.$$

हे समीकरण x ने सोडवत आहोत,

$$x = -(4y + 7z), \quad 2x = -(5y + 8z)$$

म्हणजे $x = -\dfrac{5y+8z}{2} = -(4y + 7z)$, जे देते $y = -2x$.

आता आपण प्रणालीच्या समीकरणात $(3x + 6y + 9z = 0)$ मध्ये $z = x$ आणि $y = -2x$ आता टाकत आहे.

डावी बाजू $= 3x + 6(-2x) + 9(x)$

$= 3x - 12x + 9x = 0$ उजवी बाजू

म्हणूनच तिसरे समीकरण $x = -(4y + 7z)$, $z = x$ and $y = -2x$ सत्य होते.

आता समजा $\dfrac{z}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{x}{1} = k$

म्हणून $x = k$, $y = -2k$, $z = k$ (येथे k हा बदलता स्थिरांक आहे.) म्हणून समीकरणात असंख्य निराकरणे आहेत.

व्हिडिओ संसाधन संदर्भ

Introduction to matrices

Types is matrices

Operation on matrices part-1

Matrices and determinants- an introduction

Properties of matrix

Transpose of a matrix

मॅट्रायसेसचे उपयोग

मॅट्रिक्स हे परिमाण असण्याऐवजी सदिश किंवा चलाच्या रूपांतरणासाठी वापरले जाते. मॅट्रिक्सची बेरीज आणि गुणाकार अदिश राशीपेक्षा क्रिया आहेत.

भौमितिक उपयोग

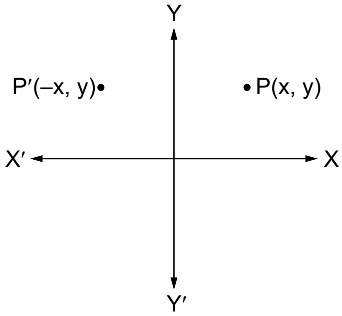
(1) **परावर्तन-बिंदू:** जर (x, y) बिंदू y-अक्षांद्वारे प्रतिबिंबित झाला तर नवीन बिंदू समन्वय $X' = -x,\ Y' = y$ ...(1) असेल ते या स्वरुपात लिहिता येतील

$$X' = -1x + 0.y$$

आणि
$$Y' = 0.x + 1y$$

मॅट्रिक्सच्या बाबतीत ते खालीलप्रमाणे लिहिले जाऊ शकतात.

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



आकृती 1.4: मॅट्रिक्सचे उपयोग : Y-अक्षातून प्रतिबिंब

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ह्या स्तंभ राशीला $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ने सुरुवातीला गुणून y अक्षातील प्रतिबिंब मिळवले जाते.

त्याचप्रमाणे $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ने सुरुवातीला गुणून x अक्षातील प्रतिबिंब मिळवले जाते.

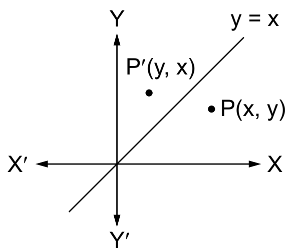
(2) **$y = x$ या ओळीबद्दल प्रतिबिंब**

$$y' = x, \quad x' = y \text{ असल्याने}$$

आणि म्हणून
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

त्याचप्रमाणे (x, y) चे $y = -x$ रेषा विषयी प्रतिबिंब $x' = -y,\ y' = -x$ ने मिळवले जाते.

किंवा
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



आकृती 1.5: मॅट्रिक्सचे उपयोग : $y = x$ रेषेतून प्रतिबिंब

(3) **आरंभबिंदूभोवती फिरणे:** जर बिंदू A चे निर्देशांक (x, y) आहेत. O हा आरंभबिंदू आहे आणि OA रेषा हे α कोनाद्वारे O केंद्रबिंदू-भोवती विरूद्ध दिशेने फिरवले जाते तर A चे नवीन निर्देशांक आहेत,

$$X' = r\cos(\theta + \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

$$Y' = r\sin(\theta + \alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha = y\cos\alpha + x\sin\alpha$$

म्हणून
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
येथे (r, θ) हे (x, y) ध्रुवीय निर्देशांक असू शकतात.

जर फिरण्याची गती घड्याळाच्या दिशेने असेल तर आपण $-\alpha$ ऐवजी α ठेवू शकतो.

सामान्य उपयोग

1. रोबोटिक्स आणि ऑटोमेशन मध्ये मॅट्रिक्स रोबोट हालचालीसाठी मूलभूत घटक आहेत.
2. मॅट्रिक्स बॅटरी उर्जा उत्पादन, नोंदणी आणि विद्युत उर्जेचे इतर उपयुक्त उर्जेमध्ये रूपांतरित करण्यात मदत करते.
3. मॅट्रिक्सचा वापर थ्रीडी स्पेसमध्ये बदलण्यासाठी केला जातो. हे ॲनिमेशन अधिक सुस्पष्ट आणि परिपूर्ण बनविण्यात मदत करू शकते.
4. इलेक्ट्रिकल सर्किट, क्वांटम मेकॅनिक्स आणि ऑप्टिक्सच्या अभ्यासामध्ये मॅट्रिक्सचा वापर केला जातो.
5. ऑपरेशन रिसर्च सारख्या क्षेत्रात हेसियन मॅट्रिक्स, जॅकोबियन्स इत्यादी महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावतात.

मजेशीर तथ्य: Matrices are so popular that many movies have been named after them!!!!

सारांश

1. डिटर्मिनन्टला स्केलर व्हॅल्यू म्हणून परिभाषित केले जाते ते det A किंवा $|A|$ किंवा Δ. दर्शविले जातात.
2. **मायनर (Minor):** डिटर्मिनन्टच्या दिलेल्या घटकामधील म्हणजे रो व कॉलम वगळुन प्राप्त केलेला डिटर्मिनन्ट असतो त्याला मायनर म्हणतात.
3. **कोफॅक्टर (Cofactor):** जर M^{ij} हा i^{th} रो आणि j^{th} कॉलम घटकातील मायनरचे प्रतिनिधित्व करत असेल तर मग त्या घटकाचा कोफॅक्टर $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
4. जर $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$.

   तर, $A \times B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1l_1 + b_1l_2 & a_1m_1 + b_1m_2 \\ a_2l_1 + b_2l_2 & a_2m_1 + b_2m_2 \end{vmatrix}$
5. दोन चलामध्ये रेखीय समीकरणांची प्रणाली (क्रॅमरचा नियम)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

6. तीन चलामध्ये रेखीय समीकरणांची प्रणाली (क्रॅमरचा नियम)

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \text{ येथे } \Delta \neq 0$$

7. ‘m’ आडव्या रेषा (रो) आणि ‘n’ उभ्या रेषा (कॉलम) स्वरूपात m द्वारा n अंकांच्या (जे वास्तविक किंवा काल्पनिक असू शकतात) आणि ऑर्डर $m \times n$ असलेल्या रेक्टॅंग्युलर रचनेला मॅट्रायसेस म्हणतात, ते मॅट्रीक्स $m \times n$ असे लिहतात.
8. **पंक्ती किंवा रो मॅट्रिक्स (रो वेक्टर):** समजा $A = [a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}]$ म्हणजेच रो मॅट्रिक्सची अगदी एक पंक्ती असते.

9. **स्तंभ किंवा कॉलम मॅट्रिक्स (कॉलम वेक्टर):** समजा $A = [a_{11}, a_{21}, \ldots a_{m1}]$ म्हणजेच कॉलम मॅट्रिक्सचा अगदी एक स्तंभ असतो.

10. **शून्य किंवा नल मॅट्रिक्स:** $(A = O_{m \times n})$ $m \times n$ मॅट्रिक्स ज्याचे सर्व घटक शून्य आहेत त्यास नल मॅट्रिक्स म्हणतात.

11. **हॉरीझंटल मॅट्रिक्स:** जर $n > m$ तर $m \times n$ ऑर्डर

12. **व्हर्टिकल मॅट्रिक्स:** जर $m > n$ तर $m \times n$ ऑर्डर मॅट्रिक्सला व्हर्टिकल मॅट्रिक्स म्हणतात.

13. **रेक्टँग्युलर मॅट्रिक्स:** पंक्तींची संख्या आणि स्तंभांची संख्या समान नसल्यास त्या मॅट्रिक्सला रेक्टँग्युलर मॅट्रिक्स असे म्हणतात.
    म्हणजेच, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ मॅट्रिक्सला रेक्टँग्युलर मॅट्रिक्स म्हणतात, जर $m \neq n$

14. **स्क्वेअर मॅट्रिक्स (Square matrix):** जर पंक्तींची संख्या आणि स्तंभांची संख्या समान असेल तर त्या मॅट्रिक्सला स्क्वेअर मॅट्रिक्स असे म्हणतात.
    जर $m = n$ तर $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ मॅट्रिक्सला स्क्वेअर मॅट्रिक्स म्हणतात.

15. **मॅट्रिक्सचा ट्रान्सपोज:** समजा $A = [a_{ij}]$ ऑर्डरचे $m \times n$ मॅट्रिक्स आहे. A^T किंवा $A' = [a_{ji}]$, $1 \leq i \leq m$ आणि $1 \leq j \leq n$, ची ऑर्डर $n \times m$ आहे.

16. जर $AA' = I$ तर स्क्वेअर मॅट्रिक्स A हा ऑर्थोगोनल मॅट्रिक्स असे म्हणतात. येथे I हा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स आहे.

17. जर B हे स्क्वेअर मॅट्रिक्स n ऑर्डरचे अस्तित्वात असेल आणि $AB = I_n = BA$ व A (नॉन-सिंग्युलर) हा स्क्वेअर मॅट्रिक्स n ऑर्डरचा आहे तर A या मॅट्रिक्सला इन्व्हर्टिबल मॅट्रिक्स म्हणतात.

18. सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्समध्ये अनुक्रमे, $A = A^T$ आणि $A = -A^T$ आहे.

19. $A^{-1} = \dfrac{\text{adj } A}{|A|}$; $|A| \neq 0$

20. **मॅट्रिक्स मेथड:** $X = A^{-1}B$

सराव प्रश्न

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Q.1. जर $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ तर $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} =$

(*a*) A (*b*) $3A$

(*c*) $9A$ (*d*) 81A **[उत्तर:** (*c*)]

Q.2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} =$

(*a*) 1 (*b*) 0

(*c*) 3*adb* (*d*) *ab* [**उत्तर:** (*d*)]

Q.3. जर $[4 \quad z \quad 6]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 0$, तर z किंमत .....आहे

(*a*) −11.8 (*b*) 0

(*c*) −13 (*d*) 2 [**उत्तर:** (*a*)]

व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न

Q.1. जर $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$ सारखे मॅट्रिक्स असतील तर a, b, c आणि d च्या किमती शोधा.

[**उत्तर:** $a = 7, b = 3, c = 9, d = -4$]

Q.2. जर $X = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$, तर $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ याची पडताळणी करा.

Q.3. जर D हा $m \times n$ मॅट्रिक्स आहे तर $D = -(-D)$ दाखवा.

Q.4. जर $X = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{bmatrix}$ आणि $Y = \begin{bmatrix} \cos B & -\sin B \\ \sin B & \cos B \end{bmatrix}$ तर $XY = YX$ दाखवा.

Q.5. जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ तर A मॅट्रिक्सचे ॲडजॉईन्ट शोधा.

[**उत्तर:** $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$]

Q.6. जर $u^2 + v^2 + w^2 + d^2 = 1$ आणि $A = \begin{bmatrix} u+iv & w+id \\ -w+id & u-iv \end{bmatrix}$ तर A मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स शोधा.

[**उत्तर:** $\begin{bmatrix} u-iv & -w-id \\ w-id & u+iv \end{bmatrix}$]

Q.7. (*a*) जर A हे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ दाखवा.

(*b*) जर A आणि B दोन्ही ऑर्डर n चे स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत, B हे नॉन-सिंग्युलर मॅट्रिक्स असेल तर मॅट्रिक्स A आणि $B^{-1} AB$ यांचे समान डिटर्मिनन्ट असतील हे सिद्ध करा.

Q.8. जर A स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे, मग $\text{adj } A^T = (\text{adj } A)^T$ शक्य आहे का? जर होय, तर ते सिद्ध करा!

Q.9. जर A सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे, तर adj A सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे ते सिद्ध करा.

आकलन

Q.4. जर समीकरण प्रणाली

$2\alpha + u\beta + 6\gamma = 8, \quad \alpha + 2\beta + v\gamma = 5$ आणि $\alpha + \beta + 3\gamma = 4$ तर

(*i*) या समीकरण प्रणालीस अनंत उत्तरे असतील जर

(*a*) $\gamma = 32$ (*b*) $\gamma = 12$

(*c*) $\gamma = 13$ (*d*) $\gamma = 2$

(*ii*) या समीकरण प्रणालीस उत्तरे नसतील जर

(*a*) $\mu = 3, v \neq 4$ (*b*) $\mu \neq 13, v = 32$

(*c*) $\mu \neq 2, v = 3$ (*d*) $\mu = 12, v = 32$

(*iii*) या समीकरण प्रणालीस एकमेव उत्तर असेल जर

(*a*) $u \neq 2, v \neq 3$ (*b*) $u \neq 3$

(*c*) $u = 2, v = 3$ (*d*) $u = 2, v \neq 3$

[**उत्तर:** (*i*) (*d*), (*ii*) (*c*), (*iii*) (*a*)]

Q.5. समजा $\begin{vmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1+\alpha \end{vmatrix} = a\alpha^5 + b\alpha^4 + c\alpha^3 + d\alpha^2 + e\alpha + f$ खालील स्तंभांमधील नोंदी जुळवा.

	स्तंभ-I	स्तंभ-II	
(*A*)	"f" ची बरोबर किंमत	(*a*)	0
(*B*)	"e" ची बरोबर किंमत	(*b*)	1
(*C*)	$a + c$ ची बरोबर किंमत	(*c*)	−1
(*D*)	$b + d$ ची बरोबर किंमत	(*d*)	3

[**उत्तर:** $(A) \rightarrow (b); (B) \rightarrow (d); (C) \rightarrow (c); (D) \rightarrow (a)$]

Q.6. जर 'B' 3×3 मॅट्रिक्स आहे आणि $\det(3B) = R\{\det(B)\}$, तर $R =$

(*a*) 7 (*b*) 1 (*c*) 6 (*d*) 27 [**उत्तर:** (*d*)]

Q.7. जर X, Y हे 3 ऑर्डरचे स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहेत आणि $|X| = -1$, $|Y| = 3$, तर $|XY|$

(*a*) 81 (*b*) −81 (*c*) 18 (*d*) −18 [**उत्तर:** (*d*)]

Q.8. जर $D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ तर adj $D =$

(*a*) D (*b*) D^T (*c*) $3D$ (*d*) $3D^T$ [**उत्तर:** (*d*)]

Q.9. जर 'L' 3×3 मॅट्रिक्स आहे आणि "M" हा L चा ॲडजॉईन्ट आहे व $|M| = 64$, तर $|L| =$

(a) ± 16 (b) ± 64 (c) ± 8 (d) ± 4 [**उत्तर:** (c)]

Q.10. जर D मॅट्रिक्सची 2×2 ऑर्डर आहे आणि $D(\text{adj } D) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, तर $|D| =$ ________. [**उत्तर:** 5]

Q.11. जर D हा सिंग्युलर मॅट्रिक्स आहे, तर adj$D$ = ________. [**उत्तर:** परिभाषित नाही]

Q.12. जर D हा सिंग्युलर मॅट्रिक्स नाही, तर $D(\text{adj } D) =$ ________. [**उत्तर:** ($|D|I$)]

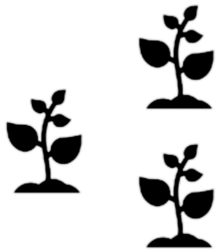
Q.13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ चे इन्व्हर्स मॅट्रिक्स.... [**उत्तर:** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$]

Q.14. जर A हा सिमेट्रिक आणि स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे तर A हा .... मॅट्रिक्स आहे. [**उत्तर:** नल मॅट्रिक्स]

केस स्टडी

A, B आणि C या तीन पॉलिटेक्निक महाविद्यालयांनी आवश्यकतेनुसार साथीच्या आजाराने ग्रस्त रुग्णांच्या मदतीसाठी निधी गोळा करणाऱ्या उपक्रमाचे आयोजन केले. त्यांनी अनुक्रमे 25 रुपये, 25 रुपये आणि 20 रुपये दराने कडुनिंब, पीपल आणि मनी वनस्पती विकल्या. A, B आणि C प्रत्येक पॉलिटेक्निक महाविद्यालयाने विक्री केलेल्या वनस्पतींची संख्या खाली दिली आहे.

वनस्पती	पॉलिटेक्निक		
	A	B	C
कडुनिंब	100	90	70
पीपल	70	120	55
मनी	20	30	50



वरील माहितीच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या:

1. साथीचा रोग असलेला साठी एकूण फंड _______ आहे
2. वाढत्या क्रमाने मांडलेल्या तीन पॉलिटेक्निक कॉलेजांनी गोळा केलेला निधी आहे
   रु.-------- [कॉलेज] ≥ रुपये _______ (कॉलेज _____). रुपये ____ (कॉलेज ______)
3. जर F हे 1×3 मॅट्रिक्स असेल, तर प्रत्येक तुकड्याच्या विक्री किंमती $F =$?
4. T हे 3×3 मॅट्रिक्स असेल ज्यात स्तंभ 3 पॉलिटेक्निक महाविद्यालये आणि पंक्तींचे रोपांच्या विक्रीचे प्रतिनिधित्व करतात. तर $T =$?

तपासा!!!

मॅटलॅबची मुलभूत माहिती शिकल्यानंतर, मॅटलॅबची विनामूल्य चाचणी आवृत्ती खालील URL वरून डाऊनलोड करा.

आपण मॅट्रिक्स $A = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 21 \end{vmatrix}$ चे व्यस्त (inverse) शोधू शकता का ते तपासा.

क्रिया

ॲडजॉईन्ट मॅट्रिक्स: हा एक स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे जो विशेषत: आलेख सिद्धांत आणि संगणक विज्ञान क्षेत्रातील मर्यादित आलेख दर्शविण्यासाठी वापरला जातो. समायोजित मॅट्रिक्सची व्याख्या शोधा आणि अप्रत्यक्ष आलेखाचे उदाहरण घेऊन स्पष्ट करा.

मिनी प्रकल्प

4-5 विद्यार्थ्यांचे छोटे गट तयार करा आणि मॅट्रिक्स/डिटर्मिनन्टच्या वापरावर ऑनलाइन/ऑफलाइन सर्वेक्षण करा. किमान 10 वापरांच्या तपशीलांसह यादी करा. शाब्दिक गट सादरीकरण करा, ते विषय शिक्षकांसमोर सादर करा.

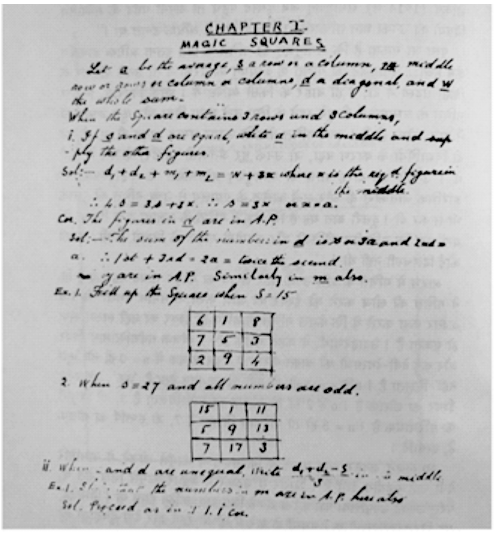
अधिक जाणून घेऊ या!

मॅट्रिक्सची समानता: A आणि B हे n चे दोन स्क्वेअर मॅट्रिक्स आहे. जर मॅट्रिक्स P असेल जसे की $B = \mathrm{P}^{-1}AP$ तर B हे A सारखे असल्याचे म्हटले जाते.

मॅट्रिक्सची श्रेणी: मॅट्रिक्सची श्रेणी ही विविध अनुप्रयोगांमध्ये वापरली जाणारी एक महत्वाची संकल्पना आहे. जसे की रेषीय समीकरणांची प्रणाली सोडविण्यासाठी ऑगमेंटेड मॅट्रिक्सचा (augmented matrix) वापर होतो इ.

संदर्भ आणि सुचविलेले वाचन

- Narayan Shanti and Mittal P.K., (1953). A textbook on matrices. S. Chand and Co.
- NCERT. Mathematics Textbook Class XII (Part I).
- Lipschutz S. and Lipson M.L. Schaum's (2001) Linear Algebra. Tata Mc.Graw-Hill.
- Vivek Sahai, Vikas Bist (2001). Linear Algebra, Narosa Publishing House.



भारतीय गणितज्ञ **श्रीनिवास रामानुजन** (1887-1920) अनंत जाणणाऱ्या व्यक्ती म्हणून ओळखले जाणारे जवळजवळ 3,900 निकाल संकलित केले आणि त्यांचे सर्व दावे बरोबर सिद्ध झाले!

त्यांच्या नोटबुक मधून एक उतारा खाली दिला आहे.

("Source – Muley Gunakar (1992) - SANSAAR KE MAHAN GANITAGYA, Raajkamal Prakashan.")

2 इंटिग्रल कॅल्क्युलस

युनिट वैशिष्ट्ये

(फक्त लिनिअर अवयव) वर आधारीत इंटिग्रेशन, $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ आणि $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$ या सुत्रांचा उदाहरणे सोडवण्यासाठी उपयोग, वक्र आणि अक्ष यामधील क्षेत्रावर इंटिग्रेशनचे अनुप्रयोग; आणि अक्षांविषयीच्या क्षेत्राच्या भ्रमणाने तयार झालेल्या घनतेच्या घनफळावर साध्या आणि स्पष्ट पद्धतीने चर्चा केली आहे.

अभ्यासाचे औचित्य

कॅल्क्युलस ही अभियंते, वैज्ञानिक, तांत्रिक व्यावसायिक इ. ची गणिताची भाषा आहे. तुमच्या फ्रीज, मोबाईल, टीव्ही आणि वाहनांपासून ते औषधे, रोबोटिक्स, राष्ट्रीय सुरक्षा यांचा आपल्या जीवनावर चांगला प्रभाव आहे. इंटिग्रल कॅल्क्युलस लांबी, क्षेत्रफळ आणि घनफळ यासारख्या अभ्यासानुसार वस्तुची बेरीज किंवा एकूण आकार किंवा मुल्य निर्धारित करण्यात मदत करते. उदाहरणार्थ, जेव्हा आपण वेग फंक्शन इंटिग्रेट करतो तेव्हा आम्हाला अंतराचे फंक्शन प्राप्त होते, जे आपल्याला वेळोवेळी वस्तूद्वारे प्रवास केलेले अंतर मोजण्यास मदत करते. येथे हे सांगणे महत्वाचे आहे की कॅल्क्युलसचे मुलभूत प्रमेय डेरिवेटिव्ह ते इंटिग्रेशनशी संबंधित आहेत.

पुर्व ज्ञान

- डिफरंशिएशनचे मूलभूत ज्ञान.
- बीजगणित, त्रिकोणमितीय आणि घातांकीय कार्ये असलेल्या मुलभूत ऑपरेशन्सचे ज्ञान.

घटक परिणाम

या घटकाचे परिणाम खालीलप्रमाणे आहेत.

U2-O1: इंटिग्रेशनला डिफरंशिएशनची व्यस्त क्रिया म्हणून वापरा.

U2-O2: अँटीडेरिवेटिव्ह शोधण्यासाठी, त्यांचे विश्लेषण करण्यासाठी आणि समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी इंटिग्रेशनची विविध तंत्रे लागू करा.

U2-O3: उदाहरणे सोडवण्यासाठी खालील सूत्रे वापरा. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ आणि $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$

U2-O4: इंटिग्रल आणि क्षेत्रफळ दरम्यान संकल्पनात्मक संबंध विकसित करा. वक्र आणि अक्षांद्वारे बांधलेल्या क्षेत्रावरील सोप्या समस्यांचे मूल्यांकन करणे.

U2-O5: इंटिग्रेशनचा वापर करून अक्षाभोवतीच्या परिभ्रमणामुळे बनलेल्या घनाचे घनफळाशी संबंधित सोपे उदाहरणे सोडवणे.

CO-UO मॅपिंग

युनिट-2: निष्पत्ती (UO)	अपेक्षित पाठ्यक्रम निष्पत्ती मॅपिंग (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U2-O1	-	3	-	2	1
U2-O2	-	3	-	1	1
U2-O3	-	1	-	-	1
U2-O4	-	3	-	-	1
U5-O5	-	3	-	-	1

2.1 प्रस्तावना

या युनिटमध्ये आपण इंटिग्रल कॅल्क्युलस (Integral Calaculus) या संकल्पनेचा अभ्यास करू, जे अँटीडेरिवेटिव्ह्ज (Antiderivatives) शोधण्याच्या कल्पनेवर आधारित आहे. मागील सत्रात आपण डिफरंशिएशन (Differentiation) आणि डेरिवेटिव्ह संकल्पनेचा अभ्यास केला आहे. आता जेव्हा जेव्हा एखादे फंक्शनचे डेरिवेटिव्ह दिले जाते तेव्हा शोधण्याची उत्सुकता अखंड कॅल्क्युलसचा सविस्तर अभ्यास करण्यास प्रवृत्त करते.

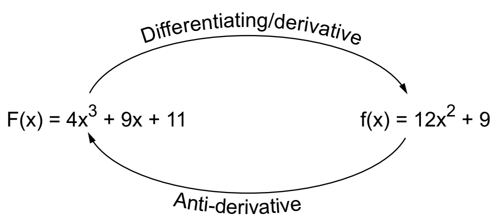
कॅल्क्युलसचा पुढील दोन भागांत अभ्यास केला जाऊ शकतो:

- इंडेफिनाइट इंटिग्रल
- डेफिनाइट इंटिग्रल

या युनिटमध्ये प्रथम आपण इंटिग्रल कॅल्क्युलसचा अभ्यास करू ज्यामुळे त्यांच्या डेरिवेटिव्ह्जमधून फंक्शन (Function) निश्चित करण्यात मदत होते. त्यानंतर, आपण डेफिनाइट इंटिग्रलची संकल्पना थोडक्यात समजून घेऊ जेणेकरुन ते आपल्याला क्षेत्रफळ आणि घनफळ काढण्यासाठी लागू करता येईल.

2.1.1 डिफरंशिएशनची व्यस्त क्रिया म्हणजे इंटिग्रेशन

आपण डिफरंशिएशनच्या उलट प्रक्रियेचा विचार करू या. म्हणजेच आपण $F(x)$ हे फंक्शन घेऊ आणि $F(x)$ च्या डेरिव्हेटिव्ह असलेल्या $f(x)$ फंक्शन्सचा विचार करू. ही क्रिया अँटीडेरिवेटिव्ह आणि इंटिग्रेशनची संकल्पना ठरवते. आतापर्यंत डेरिवेटिव्ह कसे शोधायचे हे आपल्याला आधीच माहित आहे. समजा $F(x) = 4x^3 + 9x + 11$ या फंक्शनला डिफरंशिएट केले असता $f(x) = F'(x) = 12x^2 + 9$ हे मिळेल.



आकृती 2.1: डेरीवेटीव्ह आणि अँटीडेरीवेटीव्ह

पण आता प्रश्न उद्भवतो की वर दर्शविल्याप्रमाणे $f(x)$ चे एंटी-डेरिव्हेटिव्ह एकमेव (unique) आहे की नाही? ते आपण पाहू! हे इतर फंक्शन्स जसे: $4x^3 + 9x + 20$, $4x^3 + 9x + 200$, $4x^3 + 9x$ इ. ज्यांचा डेरीवेटीव्ह $f(x) = 12x^2 + 9$ हा आहे. याचे कारण असे आहे की या प्रत्येक फंक्शनमधील स्थिरांक आपण डिफरंशिएशन करतो त्या क्षणी अदृश्य होतो. तर हे सर्व $f(x) = 12x^2 + 9$ याचे अँटी-डेरीवेटीव्ह आहेत. दुसऱ्या शब्दांत, जर $F(x)$ हा $F(x)$ चा अँटी-डेरीवेटीव्ह असेल तर $F(x) + c$ (कोणत्याही स्थिरांक c साठी) हा देखील $f(x)$ चा अँटी-डेरीवेटीव्ह असेल. आता आपण इंडेफिनाइट इंटिग्रलची व्याख्या करू.

2.2 इनडेफिनिट इंटिग्रल ($\int$ चिन्हाने दाखवितात)

जर f आणि F हे x चे असे फंक्शन आहेत की $F'(x) = f(x)$. F फंक्शनला $f(x)$ चे x शी संबंधित अँटीडेरिवेटिव्ह किंवा प्रिमिटिव्ह किंवा इंटिग्रल असे म्हटले जाते. चिन्हाद्वारे खालीलप्रमाणे दर्शविता येईल.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x),$$

येथे c हा इंटिग्रेशनचा स्थिरांक आहे आणि $f(x)$ हा इंटीग्रँड आहे.

टीप: $\int f(x)dx = F(x) + c$, ही एक वक्राची फॅमिली (family of curves) आहे. येथे c च्या भिन्न किंमती या वक्राच्या फॅमिलीमधील वेगवेगळ्या सदस्यांशी संबंधित आहेत आणि कोणत्याही सदस्यांशी समांतर असलेल्या वक्रांना हलवून हे सदस्य मिळू शकतात. याव्यतिरिक्त, जर आपण वक्रांसह रेषेचे छेदनबिंदू (intersction) $x = a$ घेतल्यास, या छेदनबिंदूवरील वक्रांमधील स्पर्शिका (tangent) समांतर असतात. ही इंडेफिनाइट इंटिग्रेशनची भुमितीय व्याख्या आहे.

इंडेफिनाइट इंटिग्रेशनचे गुणधर्म

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ ('a' हा स्थिरांक आहे.).
2. बेरजेचे इंटिग्रल हे इंटिग्रलच्या बेरजेइतके असते. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
3. जर $\int f(y)dy = F(y) + c$, तर $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$, $a \neq 0$.

प्रमाणित सूत्रे

1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c;\ n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c$
3. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
4. $\int a^{px+q}dx = \frac{1}{p}\frac{a^{px+q}}{\log a} + c,\ (a > 0)$
5. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
6. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
7. $\int \tan(ax+b)dx = \frac{1}{a}\log|\sec(ax+b)| + c$
8. $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\log|\sin(ax+b)| + c$

9. $\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

10. $\int \text{cosec}^2(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

11. $\int \text{cosec}(ax+b)\cdot\cot(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\text{cosec}(ax+b)+c$

12. $\int \sec(ax+b)\cdot\tan(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b)+c$

13. $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\right|+c$

14. $\int \text{cosec}\, x dx = \log|\text{cosec}\, x - \cot x| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log[x+\sqrt{x^2+a^2}]+c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log[x+\sqrt{x^2-a^2}]+c$

20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

21. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

22. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

23. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+c$

24. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+c$

25. $\int e^{ax}\cdot\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)+c$

26. $\int e^{ax}\cdot\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)+c$

सोडविलेली उदाहरणे (इंटिग्रेशन ही डिफरंशिएशनची उलट प्रक्रिया आहे या संकल्पनेवर आधारित)

उदाहरण 1: सोडवा $I = 2\int e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)dx$.

उत्तर: येथे $2e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$ हा $e^{2x}\cos 2x$ चा डेरीवेटीव्ह आहे.

$\Rightarrow$ $$I = e^{2x}\cos 2x + c.$$

उदाहरण 2: सोडवा $1 = \int \frac{2dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

उत्तर: खालील प्रकारे इंटीग्रँड (integrand) बदला.

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{d}{dx}[\tan x - \cot x]$$

$$1 = 2\int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)dx = 2 \tan x - 2 \cot x + c.$$

सोडविलेली उदाहरणे: (प्रमाणित सूत्रांवर आधारित)

सोडवा:

1. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

2. $\int (3x^2 - 10x + 7)dx = 3\int x^2 dx - 10\int x dx + 7\int dx = \frac{3 \cdot x^3}{3} - \frac{10 \cdot x^2}{2} + 7x = x^3 - 5x^2 + 7x + c$

3. $\int \frac{dx}{(x+7)} = \log|x + 7| + c$

4. $\int \frac{dx}{9x-7} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{9}\log|t| + c = \frac{1}{9}\log|9x - 7| + c$ (येथे $t = 9x - 7$ आणि $dt = 9\, dx$)

5. $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}(5dx) = \frac{e^{5x}}{5} + c$

6. $\int a^{9x} dx = \frac{1}{9}\int a^{9x}(9dx) = \frac{a^{9x}}{9\log a} + c$

7. $\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}\int \cos 4x \cdot (4dx) = \frac{1}{4}\sin 4x + c$

8. $\int \sin\frac{x}{3} dx = 3\int \sin\frac{x}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}dx\right) = -3\cos\frac{x}{3} + c$

9. $\int \tan 9x dx = \frac{1}{9}\int \tan 9x \cdot 9dx = \frac{1}{9}\log|\sec 9x| + c$

10. $\int x^2 \cot x^3 dx = \frac{1}{3}\int \cot x^3 (3x^2 dx) = \frac{1}{3}\int \frac{\cos x^3}{\sin x^3} \cdot (3x^2 dx) = \frac{1}{3}\log|\sin x^3| + c$

11. $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx = \int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx = \log|\sec x + \tan x| + c$

    [$(\sec x + \tan x) = t$ ठेवा, म्हणजे $(\sec^2 x + \sec x \tan x)dx = dt$ मिळेल.]

12. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos^2 x)} dx = \int \frac{(1 - \cos x)}{\sin^2 x} dx = \int [\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x] dx$

    $= -\cot x + \operatorname{cosec} x + c$

13. $\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx}{\tan\frac{x}{2}} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

15. $\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{4} + c$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-25}} = \int \frac{3dx}{3x\sqrt{(3x)^2-5^2}} = \frac{1}{5}\sec^{-1}\frac{3x}{5} + c$

17. $\int \frac{(x+5)}{\sqrt{7-3x-x^2}} \cdot dx$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{(-2x-10)dx}{\sqrt{7-4x-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{(-2x-4)-6}{\sqrt{7-4x-x^2}}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{(-2x-4)}{\sqrt{7-4x-x^2}}dx + \frac{6}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x-x^2}}$$

$$= -\sqrt{7-4x-x^2} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{11-(x+2)^2}}$$

$$= -\sqrt{7-4x-x^2} + 3\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{11}}\right) + c$$

इंटिग्रल चिन्हाची उत्पत्ती : 17 व्या शतकात जर्मन गणितज्ञ गॉटफ्राइड विल्हेल्म लिबनिझ यांनी इंटिग्रल चिन्हाची ओळख करून दिली. त्यांनी अक्षरे *f* (‘*s*’ चे पुरातन रूप) पासून इंटिग्रल चिन्ह रुपांतर केले, जे ‘बेरीज’ किंवा ‘एकूण’ साठी लॅटिन भाषेतील सुमासाठी वापरले जाते.

18. $\int \frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

19. $\int \frac{dx}{(1-x^2)} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log|x+\sqrt{x^2-1}| + c$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log|x+\sqrt{x^2+1}| + c$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2+5^2}} = \frac{1}{2}\log(2x+\sqrt{4x^2+25}) + c$

23. $\int\sqrt{4-x^2dx} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}+c = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$

24. $\int\sqrt{x^2-9}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\log|x+\sqrt{x^2-9}|+c$

25. $\int\sqrt{7x^2+11}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int\sqrt{7x^2+11}\cdot\sqrt{7}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sqrt{7x^2+11}+\frac{11}{2}\log\{\sqrt{7}x+\sqrt{7x^2+11}\}\right]+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{7x^2+11}+\frac{11}{2\sqrt{7}}\log(\sqrt{7}x+\sqrt{7x^2+11})+c$$

2.3 इंटिग्रेशनच्या महत्त्वाच्या पद्धती /तंत्रज्ञान

जर इंटीग्रँड माहीत असलेल्या फंक्शनचे डेरिवेटिव्ह नसेल तर संबंधित इंटिग्रल आपण सोडवू शकत नाही. अशा उदाहरणामधील इंटिग्रेशन शोधण्यासाठी इंटिग्रेशनचे मुख्य तीन नियम वापरले जातात-

नियम 1: सब्स्टिट्युशनद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by substitution म्हणजे चल बदलून)

नियम 2: पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by parts)

नियम 3: पार्शियल फ्रॅक्शनद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by partial fraction)

नियम 1: सब्स्टिट्युशनद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by substitution म्हणजे चल बदलून)

जर $f(x)$ हे कंटिन्युअस डिफरंशिएबल (Continuous Differentiable Function) फंक्शन असेल तर $\int\phi(f(x))f'(x)dx$ इंटिग्रल सोडवण्यासाठी आपण $f(x)$ = t आणि $f'(x)dx = dt$ ठेवतो. म्हणून I = $\int\phi(f(x))f'(x)dx = \int\phi(t)dt$.

तसेच $\int[Q(x)]^nQ'(x)dx$ किंवा $\int\frac{Q'(x)}{\sqrt{Q(x)}}dx$ किंवा $\int\frac{Q'(x)}{[Q(x)]^n}dx$ अशा प्रकारच्या इंटिग्रलमध्ये आपण $Q(x) = t$ ठेवतो.

> **टीप:** सब्स्टिट्युशन करण्याच्या पद्धतीमध्ये प्रश्न काळजीपूर्वक पाहणे आवश्यक आहे आणि त्यानंतर एखादे फंक्शन ज्याचे डेरिवेटिव्ह्ज देखील इंटिग्रेशनमध्ये आहे त्याचे सब्स्टिट्यूशन करणे आवश्यक आहे.

उदाहरणे

उदाहरण 3: सोडवा: $\int\frac{\cos(\log x)}{x}dx$.

उत्तर: $\log x = y$ ठेवा (कारण $\log x$ चा डेरिवेटिव $1/x$ आहे.)

म्हणून $dt = \frac{1}{x}dx$, ही किंमत दिलेल्या इंटिग्रेशन मध्ये ठेवली असता

$$I = \int\cos t dt = \sin t + c; I = \sin(\log x) + c$$

उदाहरण 4: सोडवा: $\int \frac{(1+\log x)^3}{x} dx$.

उत्तर: $$I = \int \frac{(1+\log x)^3}{x} dx$$

आपण $(1 + \log x) = z$, म्हणून $\frac{1}{x} dx = dz$

कारण $$I = \int z^3 dz = \frac{z^4}{4} + c, \text{ as } z = 1 + \log x$$

$$I = \frac{(1+\log x)^4}{4} + c$$

उदाहरण 5: सोडवा: $\int e^x \cos e^x dx$.

उत्तर: $$\int e^x \cos e^x dx = \int \cos e^x \cdot e^x dx .$$

आपण $e^x = t$ ठेवू

$\therefore$ $$I = \int \cos t dt$$

$$I = \sin t + c$$

$$I = \sin e^x + c$$

मजेशीर तथ्य: ग्रीक गणितज्ञ युडोक्ससने सुमारे 2400 वर्षांपूर्वी इंटिग्रल्स निर्धारित करण्यास सक्षम असलेले प्रथम दस्तऐवजीकृत पद्धतशीर तंत्र “the method of exhaustion” मध्ये दिले होते.

नियम 2: पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशन

जर u आणि v हे x चे वेगवेगळे फंक्शन असतील तर,

$$\int u \cdot v dx = u \int v dx - \int [u' \cdot \int v dx] dx \quad ...(1)$$

येथे $$u' = \frac{du}{dx}$$

(1) मध्ये दिलेले इंटिग्रल दोन भागांमध्ये वेगळे करणे आवश्यक आहे.एक भाग (प्रथम फंक्शन) u आहे आणि दुसरा भाग (दुसरे फंक्शन) v आहे. [या कारणास्तव त्याला पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by parts) म्हटले जाते].

आपण सामान्यत: पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by parts) करण्यासाठी खालील नियमांचे अनुसरण करतो:

(*i*) u आणि v असे निवडा की $\int v dx$ आणि $\int [u' \int v dx] dx$ यांचे इंटिग्रेशन करणे सोपे होईल.

(*ii*) जर इंटीग्रँडमध्ये फक्त एकच फंक्शन असेल तर आपण दुसरे फंक्शन म्हणून युनिटी (Unity) 1 घेतो. उदाहरणार्थ $\int \sin^{-1} x dx$ मध्ये पहिले फंक्शन (u) म्हणून $\sin^{-1} x$ आणि दुसरे फंक्शन (v) म्हणून 1 घेतले जाते.

(*iii*) सामान्यत: आपण प्रथम फंक्शन (u) म्हणून असे फंक्शन निवडतो जे ILATE या शब्दामध्ये प्रथम येते. येथे I म्हणजे इन्व्हर्स फंक्शन, L म्हणजे लॉगॅरिथमिक फंक्शन, A म्हणजे अल्जेब्रिक फंक्शन, T म्हणजे ट्रिगॉनॉमेट्रीक फंक्शन आणि

E म्हणजे एक्सपोनेन्शिअल फंक्शन आहे. उदाहरणार्थ, $\int x^2 \cos x dx$ मध्ये पहिले फंक्शन (u) म्हणून x^2 आणि दुसरे फंक्शन (v) म्हणून $\cos x$ घेतले आहे.

उदाहरणे

उदाहरण 1: सोडवा $\int \sec^3 \theta d\theta$

उत्तर: आपण $$I = \int \sec\theta \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

$\Rightarrow$ $$I = \sec\theta \int \sec^2 \theta d\theta - \int \tan\theta(\sec\theta \tan\theta) d\theta$$

$\Rightarrow$ $$I = \sec\theta \tan\theta - \int (\sec^2 \theta - 1) \sec\theta d\theta$$

$\Rightarrow$ $$I = \sec\theta \tan\theta - \int \sec^3 \theta d\theta + \log|\sec\theta + \tan\theta| + c_1$$

$\Rightarrow$ $$2I = \sec\theta \tan\theta + \log|\sec\theta + \tan\theta| + c_1$$

$\Rightarrow$ $$I = \frac{1}{2}\sec\theta \tan\theta + \frac{1}{2}\log|\sec\theta + \tan\theta| + c \left(c = \frac{c_1}{2} \right)$$

उदाहरण 2: सोडवा $\int \log x dx$.

उत्तर: इंटिग्रेन्डमध्ये फक्त एकच फंक्शन असल्यामुळे आपण दुसरे फंक्शन युनिटी (Unity) 1 घेऊ.

$\therefore$ जर $$I = \int 1 \cdot \log x dx$$

तर $$I = \log x \int 1 dx - \int \left[\left[\frac{d}{dx}(\log x) \right] \times \int 1 \cdot dx \right] dx + c$$

$\Rightarrow$ $$I = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx + c \quad \Rightarrow \quad I = x \log x - x + c$$

उदाहरण 3: सोडवा $\int e^x \sin x dx$.

उत्तर: आपण $I = \int e^x \sin x dx$ म्हणू

येथे पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशनचा (integration by parts) उपयोग करू. याठिकाणी sinx हे प्रथम फंक्शन तर ex हे दुसरे फंक्शन मिळेल.

$$I = \sin x \int e^x dx - \int e^x (\cos x) dx + c$$

$\Rightarrow$ $$I = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right] + c$$

(पुन्हा पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशनचा उपयोग करू.)

$\Rightarrow$ $$I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx + c \qquad (\because I = \int e^x \sin x \, dx)$$

$\Rightarrow$ $$2I = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$\Rightarrow$ $$I = \frac{1}{2}[e^x \sin x - e^x \cos x] + c$$

नियम 3: पार्शियल फ्रॅक्शनद्वारे इंटिग्रेशन

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ फॉर्मचे फंक्शनमध्ये $f(x)$ आणि $g(x)$ हे बहुपद (Polynomial) असतात. त्याला रॅशनल फ्रॅक्शन (rational fraction) म्हणतात. जर $f(x)$ ची डिग्री (degree) $g(x)$ च्या डिग्री (degree) पेक्षा कमी असेल तर त्याला प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन (proper rational fraction) म्हणतात, अन्यथा इम्प्रोपर रॅशनल फ्रॅक्शन (improper rational fraction) म्हणतात. इम्प्रोपर रॅशनल फ्रॅक्शन (improper rational fraction) पुढे बहुपदीची (Polynomial) बेरीज आणि प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन (proper rational fraction) म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकतात (यासाठी लांब भागाकार प्रक्रिया वापरली जाऊ शकते). प्रत्येक प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन सोप्या फंक्शनची बेरीज म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो. याला पार्शिअल फ्रॅक्शन (partial fraction) म्हणतात. येथे आपण आपला अभ्यास पार्शिअल फ्रॅक्शनच्या छेदातील लिनिअर फॅक्टर्स (linear factors) घटकांपुरता मर्यादित करतो आणि म्हणून तक्ता 2.1 (Table 2.1) मध्ये वेगवेगळ्या केसेस दिल्या आहेत. येथे A_1, A_2, A_3 हे स्थिरांक त्यानुसार निश्चित करायचे असतात.

Table 2.1

अनु. क्र.	प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन	पार्शिअल फ्रॅक्शन
1.	$\dfrac{px+q}{(ax+b)(cx+d)}$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{cx+d}$
2.	$\dfrac{px+q}{(ax+b)^2(cx+d)}$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\dfrac{A_3}{(cx+d)}$
3.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(ax+b)(cx+d)(ex+f)}$	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{cx+d}+\dfrac{A_3}{ex+f}$
4.	$\dfrac{px^2+qx+r}{(ax+b)^2(cx+d)}$	$\dfrac{A_1}{(ax+b)}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\dfrac{A_3}{(cx+d)}$

उजळणी: X मधील बहुपद (polynomial) हे $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ अशा स्वरूपाचे फंक्शन असते जेथे सर्व a_i हे स्थिर असतात आणि $a_0 \neq 0$. n हा शून्यासह धन पूर्णांक (positive integer) आहे.

उदाहरणे

उदाहरण 1: सोडवा $I = \int \dfrac{(3x+1)}{(x+1)(x-2)}dx$.

उत्तर: येथे इंटीग्रँड प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन (proper rational fraction) आहे. याला पुढे पार्शिअल फ्रॅक्शनमध्ये लिहू.

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad (3x+1) = A_1(x-2) + A_2(x+1) \qquad \ldots(1)$$

आता $x = 2$ हे (1) मध्ये ठेवले असता

$7 = 3A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{7}{3}$ आणि $x = -1$ हे (1) मध्ये ठेवले असता, $-2 = -3A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$ मिळेल.

$$\therefore \quad I = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{7}{3}\log|x-2| + c$$

उदाहरण 2: सोडवा $\int \frac{(3x-4)}{(x-1)^2(x+1)}dx$.

उत्तर:

$$I = \int \frac{(3x-4)}{(x-1)^2(x+1)}dx$$

येथे इंटीग्रँड प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन (proper rational fraction) आहे. याला पुढे पार्शिअल फ्रॅक्शनमध्ये लिहू.

$$\frac{3x-4}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad (3x-4) = A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2 \qquad \text{...(1)}$$

$x = 1$, हे (1) मध्ये ठेवले असता

$-1 = 2A_2 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{-1}{2}}$ मिळेल.

$x = -1$, हे (1) मध्ये ठेवले असता

$-7 = 4A_3 \Rightarrow \boxed{A_3 = -\frac{7}{4}}$ मिळेल.

आता (1) च्या दोन्ही बाजूच्या स्थिरांकाच्या कोइफिशन्ट (coefficient) ची तुलना केली तर

$$-4 = -A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = 4 + A_2 + A_3$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = 4 - \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \qquad \left[\because A_2 = -\frac{1}{2}; A_3 = \frac{-7}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_1 = \frac{7}{4}}$$

$$\therefore \quad I = \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} \frac{-7}{4}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{7}{4}\log|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\log|x+1| + c$$

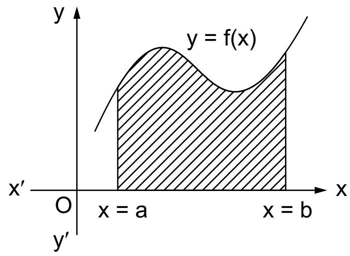
$$I = \frac{7}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x-1)} + c \qquad \left(\because \log\frac{m}{n} = \log m - \log n\right)$$

2.4 डेफिनाइट इंटिग्रल

कंटिन्यूअस फंक्शन (continuous function) ची क्लोज्ड इंटरव्हल (closed interval) $[a, b]$ वर असलेली डेफिनाइट इंटिग्रल (definite integral) ची व्याख्या खालीलप्रमाणे आहे:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

येथे $F(x)$ हे f चे अँटी-डेरीवेटीव्ह आहे. 'a' ला इंटिग्रलची खालची मर्यादा (lower limit) म्हणतात आणि 'b' ला इंटिग्रलची वरची मर्यादा (upper limit) म्हणतात. डेफिनाइट इंटिग्रलची एकच किंमत असते. भौमितिकदृष्ट्या, डेफिनाइट इंटिग्रल हे $y = f(x)$, $x = a$ व $x = b$ आणि X-अक्ष यांच्याद्वारे व्यापलेले क्षेत्रफळ दर्शविते.



आकृती 2.2: डेफिनाइट इंटिग्रल

टीप:

1. $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ समीकरण $f(x) = 0$ चे कमीतकमी एक उकल (a, b) मध्ये आहे. येथे f हे (a, b) वरील कंटिन्यूअस फंक्शन (continuous function) आहे.
2. $\int_a^a f(x)dx$ (म्हणजेच जेव्हा वरची मर्यादा (upper limit) = खालची मर्यादा (lower limit) असते.

उदाहरणे

उदाहरण 1: सोडवा:

(*i*) $\int_0^2 x^3 dx$ (*ii*) $\int_0^{\pi/4} \sin^4 2t \cos 2t dt$

उत्तर:

(*i*) समजा $I = \int_0^2 x^3 dx$

जसे आपल्याला माहित आहे, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} = F(x)$

$\therefore$ $I = F(2) - F(0) = \frac{16}{4} - 0 = 4$

(*ii*) समजा $I = \int_0^{\pi/4} \sin^4 2t \cos 2t dt$

तर $\int \sin^4 2t \cos 2t dt = \frac{1}{2}\int z^4 \cdot dz$ [$\sin 2t = z$ ठेवा $\Rightarrow 2 \cos 2t \, dt = dz$]

$$= \frac{z^5}{10} = \frac{(\sin 2t)^5}{10} = F(t)$$

तर $$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{10}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$\Rightarrow$ $$I = \frac{1}{10}$$

डेफिनाइट इंटिग्रलचे काही सामान्य गुणधर्म

1. $= \int_a^b f(t)dt$ (येथे दोन्ही f सारखेच आहेत)

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, येथे c हा $[a, b]$ च्या आत किंवा बाहेर असू शकतो हा नियम तेव्हा वापरला जातो जेव्हा f हे (a, b) मध्ये पिसवाईझ कंटिन्यूअस फंक्शन असते.

4. $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx = \begin{cases} 0; & \text{जर } f(x) \textit{ is an odd function} \\ 2\int_0^a f(x)dx; & \text{जर } f(x) \textit{ is an even function} \end{cases}$$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

6. $$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx; & \text{जर } f(2a-x) = f(x) \\ 0; & \text{जर } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

7. $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$, येथे '$T$' हा पिरीयड फंक्शन कालावधी असतो. म्हणजे $f(T+x) = f(x)$

हे लक्षात घ्या: $\int_x^{T+x} f(t)dt$ हे x वर अवलंबून नाही आणि $\int_x^{T+x} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

उदाहरणे:

उदाहरण 1: जर $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 < x < 1 \\ 2x+1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ तर $\int_0^2 f(x)dx$ सोडवा.

उत्तर:
$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$
$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x+1)dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + [x^2+x]_1^2 = \frac{1}{4} + [4+2-2] = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \quad \textbf{Ans.}$$

उदाहरण 2: सोडवा $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$.

मनोरंजक साहृश्य:
डिफरंशिएशन : डेरिवेटिव्ह् :: इंटिग्रेशन : इंटिग्रल

उत्तर: समजा
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \cdot dx \qquad ...(1)$$

$\Rightarrow$
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$

($\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ या डेफिनाइट इंटिग्रलच्या गुणधर्माचा वापर करून)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \cdot dx \qquad ...(2)$$

(1) आणि (2) वरून,

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})}{(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx$$

$\Rightarrow$
$$I = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4}$$

2.5 वॉलि इंटिग्रल फॉर्मुल्याचा वापर

($\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$) या सूत्राचे श्रेय इंग्रजी गणितज्ञ जॉन वॉलि (1616-1703) यांना दिले जाते. याची सिद्धता रिडक्शन सूत्रांवर आधारित आहे.

पुढील दोन प्रकारांचा आपण अभ्यास करणार आहोत :

प्रकार 1: $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$. ट्रिगॉनॉमेट्रीक इंटिग्रँड असतांना डेफिनाइट इंटिग्रलची किंमत खाली दिलेल्या प्रमाणे वॉलिच्या इंटिग्रल सूत्राचा वापर करून सहजपणे काढता येईल. जर m, n हे दोन्ही धन पूर्णांक असतील तर

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx$$

$$\begin{cases} = \dfrac{(m-1)(m-3)...(1 \text{ or } 2)\cdot(n-1)(n-3)...(1 \text{ or } 2)}{(m+n)(m+n-2)...(1 \text{ or } 2)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{जर } m \text{ आणि } n \text{ सम असतील} \\ = \dfrac{(m-1)(m-3)...(1 \text{ or } 2)\cdot(n-1)(n-3)...(1 \text{ or } 2)}{(m+n)(m+n-2)...(1 \text{ or } 2)}\cdot 1, & \text{इतर केसेसमध्ये} \end{cases}$$

प्रकार 2: जर n धन पूर्णांक असेल तर

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)...3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)...4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}; & \text{जर } n \text{ सम असेल} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)...4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)...5\cdot 3}\cdot 1; & \text{जर } n \text{ विषम असेल} \end{cases}$$

हा वॉलि सूत्राचा खास प्रकार आहे.

उदाहरण 1: सोडवा $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^2 x dx$.

उत्तर: वॉलि सूत्राचा वापर करून,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^2 x dx = \frac{(6-1)(6-3)(6-5)\cdot(2-1)}{(6+2)(6+2-2)(6+2-4)(6+2-6)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(कारण 6 आणि 2 दोन्ही धन पूर्णांक आहेत)

$$= \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{15}{384}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{15}{768}\cdot\pi$$

उदाहरणे: खालील उदाहरणे सोडवा.

1. $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x dx \Rightarrow I = 2\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x dx$ (दिलेले इंटीग्रँड हे सम (even) फंक्शन आहे)

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2\cdot(3\cdot 1)(5\cdot 3\cdot 1)}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{256}$$

2. $I = \int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx$. एक्सपोनंट (exponent) हा विषम (odd) असल्यामुळे वॉलीचे सूत्र वापरून

$$I = \frac{6\times 4\times 2}{7\times 5\times 3} = \frac{16}{35}$$

3. $I = \int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$. एक्सपोनंट (exponent) हा सम (even) असल्यामुळे वॉलीचे सूत्र वापरून

$$I = \frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{35\pi}{256}$$

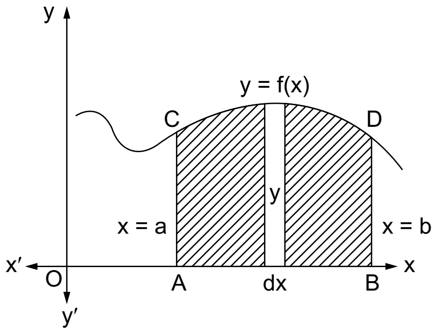
2.6 इंटिग्रेशनचे उपयोग

भौगोलिक, अर्थशास्त्र इत्यादी अनेक क्षेत्रांवर इंटिग्रल्स लागू केले जातात. त्याशिवाय घनफळ, पृष्ठभाग क्षेत्र, कमान लांबी, फंक्शन्सचे सरासरी मूल्य इत्यादी मोजण्यासाठी वापरले जाते. भुमितीच्या पारंपारिक पद्धती आपल्याला साध्या आकृत्यांचे क्षेत्रफळ, घनफळ इत्यादी मोजण्यात मदत करतात.परंतु या पारंपारिक पद्धतींचा वापर वक्रांनी बंद केलेले क्षेत्रफळ, घनफळ इत्यादी मोजण्यासाठी केला जाऊ शकत नाही. येथे इंटिग्रल्स कॅल्क्यूलस ही संकल्पना आपल्याला उपयोगी येते. या भागात, आपण वक्र आणि अक्ष यामधील क्षेत्रफळ काढणार आहोत. याव्यतिरिक्त आपण अक्षांविषयी (केवळ सोपी उदाहरणे) क्षेत्राच्या परिभ्रमणामुळे तयार झालेल्या घनच्या घनतेची गणना करायला शिकू.

I. वक्र आणि अक्षांमधील क्षेत्रफळ

आपण शिकलो की डेफिनाइट इंटिग्रल क्षेत्रफळ शोधण्यात आपल्याला मदत करतात. जेव्हा आपल्याला वक्र आणि अक्ष यांच्यामध्ये असलेले क्षेत्रफळ काढायचे असते तेव्हा खालील दोन केसेस येतात.

केस I: जेव्हा आपल्याला वक्र $y = f(x)$, x - अक्षाद्वारे आणि ऑर्डिनेट्स $x = a$ आणि $x = b$ द्वारे सिमित क्षेत्रफळ A काढायचे आहे. (Fig.2.3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे) आपल्याला $ABCD$ मध्ये संलग्न क्षेत्रफळ शोधावे लागेल. हे क्षेत्रफळ बऱ्याच पातळ उभ्या पट्ट्या / आयताकृतींचे बनलेले आहे असे मानले जाते. आपण उंची y आणि रुंदी dx ची एक कोणतीही पट्टी मानू या. या पट्टीचे क्षेत्रफळ $dA = y\ dx$. (येथे $y = f(x)$). या क्षेत्राला प्राथमिक क्षेत्रफळ (Elementry Area) म्हणतात. आपण $x = a$ ते $x = b$ ($ABDC$ मधील) इंटिग्रेशन करून अशा सर्व प्राथमिक क्षेत्रफळ बेरीज करतो आणि वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष आणि रेषा $x = a$, $x = b$ या रेषांनी बांधलेले एकूण क्षेत्रफळ खालीलप्रमाणे मिळवतो-

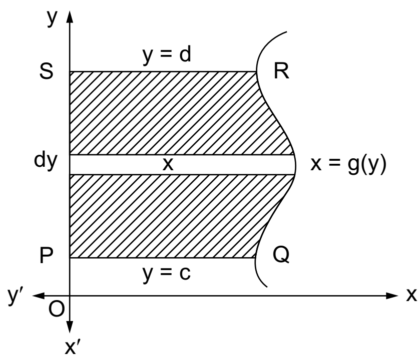


आकृती 2.3: वक्र आणि X-अक्षामधील क्षेत्रफळ

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \text{ म्हणून } \boxed{A = \int_a^b f(x) dx}$$

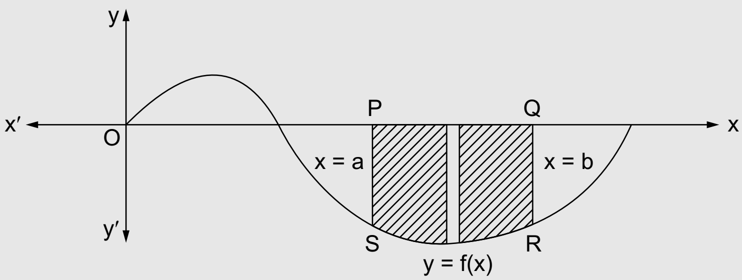
केस II: जेव्हा आपल्याला वक्र $x = g(y)$, Y-अक्षाद्वारे आणि $y = a$ आणि $y = b$ द्वारे सीमित क्षेत्रफळ A काढायचे आहे. आपल्याला $PQRS$ मध्ये असलेले क्षेत्रफळ शोधावे लागेल. हे क्षेत्रफळ बऱ्याच पातळ आडव्या पट्ट्या / आयताकृतींचे ज्यांची उंची x आणि रुंदी dy आहे यांचे बनलेले आहे असे मानू या.

$$\therefore \qquad \boxed{A = \int_c^d g(y) dy}$$



आकृती 2.4: वक्र आणि Y-अक्षामधील क्षेत्रफळ

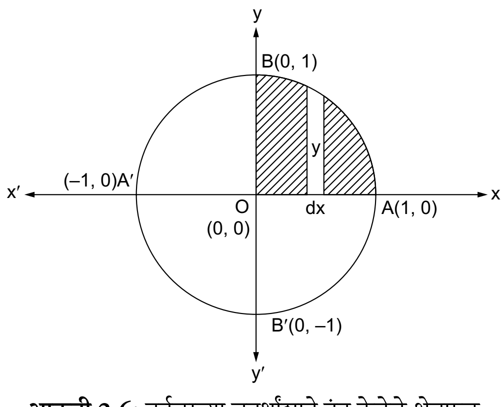
लक्षात ठेवा:



आकृती 2.5: वक्र आणि X-अक्षाखालील मधील क्षेत्रफळ

1. कधीकधी असे होऊ शकते की विचाराधीन क्षेत्रफळ A चे मूल्य ऋण असते. परंतु, अशा परिस्थितीत आपण क्षेत्रफळ केवळ संख्यात्मक मूल्य विचारात घेतो. म्हणजे त्याचे पूर्ण मूल्य $|A|$ घ्या.
   उदाहरणार्थ: दिलेल्या वक्रांचा विचार करा. (Fig.2.5). या वक्रमध्ये असलेले क्षेत्रफळ A अंतर्गत $PQRS$ अंतर्गत आहे, जे X-अक्षाच्या खाली आहे आणि $y = f(x) < 0$ म्हणून ऋण (negative)आहे. म्हणून आपण त्याचे परिपूर्ण मूल्य घेतो., $|A| = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.
2. X-अक्षाचे समीकरण $y = 0$ आहे.
   Y-अक्षाचे समीकरण $x = 0$ आहे.

उदाहरण 1: $x^2 + y^2 = 1$ या वर्तुळाच्या एका चतुष्पादाने (quadrant) व्यापलेले क्षेत्रफळ काढा. तसेच दिलेल्या वर्तुळाद्वारे व्यापलेले एकूण क्षेत्रफळ शोधा.



आकृती 2.6: वर्तुळाच्या चतुर्थांशाने बंद केलेले क्षेत्रफळ

उत्तर: हे दिलेल वर्तुळ $x^2 + y^2 = 1$ आहे. ...(1)

दिलेल वर्तुळ दोन्ही अक्षांसह सममितीय आहे. (1) आणि X-अक्षासोबत असलेले छेदनबिंदू हे $A(1, 0)$ व $A'(-1, 0)$ आणि Y - अक्षासोबत असलेले छेदनबिंदू हे $B(0, 1)$ व $B'(0, -1)$ आहेत. यावरून आपल्याला आकृती 2.6 (Fig.2.6) मिळेल. सर्व चतुर्भुजांचे क्षेत्रफळ समान असल्याने आपण चतुर्भुज $OABO$ चे क्षेत्रफळ काढू.

म्हणून $$Q_1 = \int_0^1 y dx$$

उभी पट्टी घेऊन, $$Q_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

(येथे $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ला धन चिन्ह येईल कारण हे पहिल्या चतुर्भुज मध्ये आहे)

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \left[\frac{1}{2}\sin^{-1}1\right]$$ कारण $\sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \frac{\pi}{4}$$

यानंतर वर्तुळाने व्यापलेले क्षेत्रफळ $A = 4 \times Q_1$

$$\Rightarrow \quad A = 4 \times \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow \quad A = \pi$ चौरस एकक

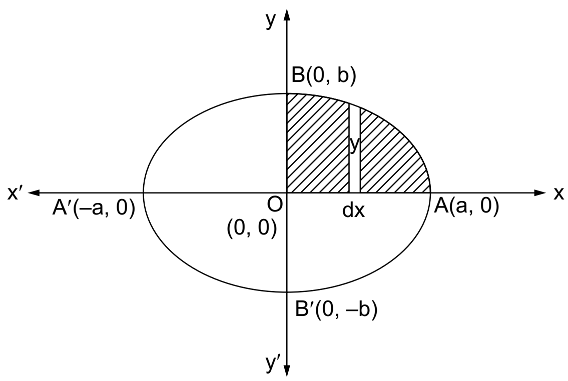
पर्यायी पद्धत: आपण धन क्वाड्रंटमध्ये आडव्या पट्ट्या वापरुन हा प्रश्न सोडवू शकता. प्रयत्न करा!

उदाहरण 2: लंबवर्तुळ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. व्यापलेले क्षेत्रफळ काढा.

उत्तर: दिलेल्या लंबवर्तुळाचे समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{...(1) आहे.}$$

x-अक्ष आणि y-अक्षासह (1) चे छेदनबिंदू अनुक्रमे $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$ आणि $B(0, b)$; $B'(0, -b)$ आहेत. दिलेल लंबवर्तुळ दोन्ही अक्षांस सममितीय आहे.



आकृती 2.7: इलिप्सने बंद केलेले क्षेत्रफळ

तर आपल्याला मिळणाऱ्या आकृती 2.7 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे पहिल्या चतुर्थांशात उभ्या पट्ट्या घ्या,

लंबवर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= 4 \times$ (चतुर्भुजचे क्षेत्रफळ $OABO$)

$$= 4\times\int_0^a ydx = 4\times\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

[कारण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, येथे y ला धन चिन्ह येईल कारण $OABO$ हे पहिल्या चतुर्भुज मध्ये आहे.]

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

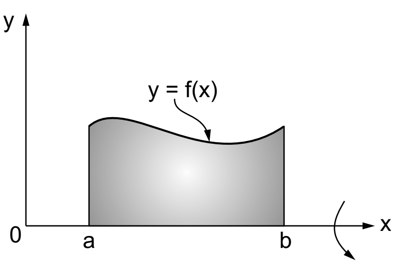
$$\Rightarrow \quad A = \frac{4b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a}\right] = \frac{4b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right]$$

$$A = \cancel{2}ba\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} = \pi\, ab \qquad \left[\text{as } \sin^{-1}1=\frac{-\pi}{2}\right]$$

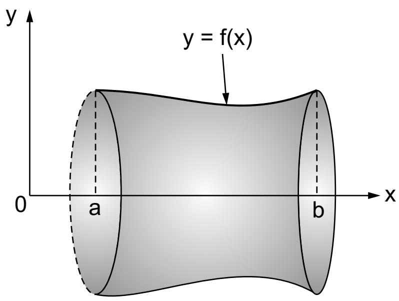
म्हणून $A = \pi\, ab$ चौरस एकक

II. अक्षाभोवती क्षेत्राच्या परिभ्रमणामुळे तयार झालेल्या घनाचे घनफळ (डिस्क पद्धत वापरून)

इंटिग्रेशनच्या महत्त्वपूर्ण आणि सोप्या अनुप्रयोगांपैकी एक म्हणजे अक्षाभोवती क्षेत्राच्या परिभ्रमणामुळे तयार झालेल्या घनाचे घनफळ शोधणे. पुढील दोन केसेस येतात.



आकृती 2.8



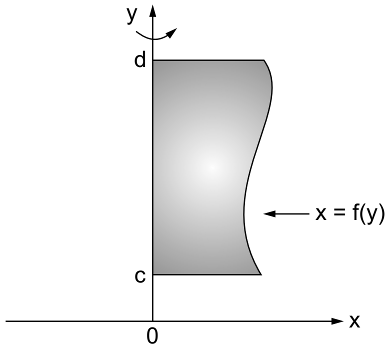
आकृती 2.9

केस I: X-अक्षाभोवती परिभ्रमण: X-अक्षाभोवती परिभ्रमणाने तयार झालेल्या आणि $y = f(x)$ या वक्राने ओर्डीनेट $x = a$, $x = b$ आणि X-अक्ष यांनी सिमित केलेल्या घनाचे घनफळ खालीलप्रमाणे आहे.

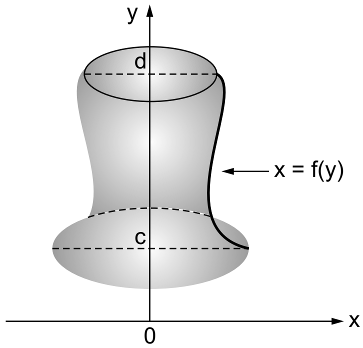
$$\boxed{V=\int_a^b \pi y^2 dx}$$

केस II: Y-अक्षाभोवती परिभ्रमण: Y-अक्षाभोवती परिभ्रमणाने तयार झालेल्या आणि $x = f(y)$ या वक्राने रेषा $y = c, y = d$ आणि Y-अक्ष यांनी सिमित केलेल्या घनाचे घनफळ खालीलप्रमाणे आहे.

$$\boxed{V = \int_c^d \pi x^2 dy}$$ (आकृती 2.10 and आकृती 2.11)



आकृती 2.10



आकृती 2.11

उदाहरण 3: समजा $y = f(x) = x^2$ हा $[0, 2]$ या इंटरव्हल मधला वक्र आहे. X -अक्षाभोवती दिलेल्या इंटरव्हलमध्ये परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ काढा.

उत्तर: आपल्याला माहित आहे की X-अक्षाभोवतीच्या परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \text{ आहे.}$$

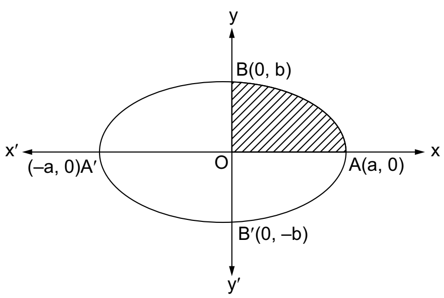
म्हणून $$V = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$\Rightarrow$ $$V = \pi \left| \frac{x^5}{5} \right|_0^2 \Rightarrow V = \frac{32\pi}{5}$$

उदाहरण 4: समजा $y = f(x) = x^2$ हा $[0, 2]$ या इंटरव्हलमधला वक्र आहे. Y-अक्षाभोवती दिलेल्या इंटरव्हलमध्ये परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ काढा.

उत्तर: आपल्याला माहित आहे की Y-अक्षाभोवतीच्या परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy \text{ आहे.}$$



आकृती 2.12: इलिप्स भ्रमणामुळे तयार होणारे घनफळ

येथे $$y = x^2 \Rightarrow x^2 = y \text{ हा } [0, 2] \text{ वर}$$

$\therefore \quad V = \pi\int_0^2 y\,dy \quad \Rightarrow \quad V = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi$

उदाहरण 5: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ या इलिप्सच्या मायनर अक्षाभोवती झालेल्या परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ काढा.

उत्तर: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ = इलिप्सचा मायनर अक्ष हा Y–अक्ष $(b < a)$ आहे.

$\therefore$ येथे आपण Y- अक्षाभोवतीच्या परिभ्रमणाचे सूत्र वापरु.

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy \quad [a, b] \text{ या इंटर्वलमध्ये}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

$\therefore$ इलिप्सच्या मायनर अक्षाभोवती झालेल्या परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ

= $B'AB$ या कंसाचे Y-अक्षा भोवतीच्या परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ

= BA या कंसाचे Y-अक्षाभोवतीच्या परिभ्रमणामुळे निर्माण झालेल्या घनाचे घनफळ दुप्पट करा. (कारण लंब वर्तुळ हे X -अक्षाला समितीय आहे). परंतु कंस BA हा $y = 0$ कडून $y = b$ कडे सरकतो.

$$\therefore \quad \text{घनफळ} = 2\int_0^b \pi x^2 dy$$

$$\Rightarrow \quad V = 2\pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dy \quad \Rightarrow \quad V = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - y^2)dy$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[b^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[b^3 - \frac{b^3}{3}\right] \Rightarrow \boxed{V = \frac{4\pi a^2 b}{3}}$$

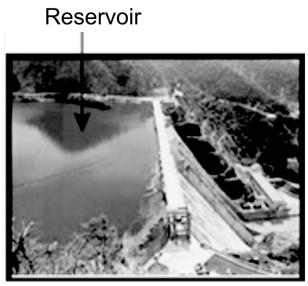
इंटिग्रल कॅल्क्युलसचे विविध उपयोग

हे बहुतेक व्यवसाय/क्षेत्रात उपयुक्त आहे आणि म्हणूनच दररोज आपल्या जीवनाला असंख्य प्रकारे पुढीलप्रमाणे स्पर्श करते.

- धरणे (विशेषतः भारतातील भाक्रा धरणाप्रमाणे) अभियांत्रिकी चमत्कार आहेत. जेव्हा धरणांमागील जलाशय भरले जाते, तेव्हा धरणे मोठ्या प्रमाणावर उभी राहतात. जलाशय पूर्ण भरल्यावर निश्चित केलेल्या इंटीग्रल्सच्या मदतीने या

हायड्रोस्टॅटिक फोर्सची गणना केली जाते. जलाशयाच्या बदलत्या पाण्याची पातळी या शक्तीवर कसा परिणाम करते हे देखील आपण तपासू शकतो.

- मैलो दूर असलेली सबस्टेशन (इलेक्ट्रिकल इंजिनीअरिंग) जोडण्यासाठी लागणाऱ्या पॉवर केबलची अचूक लांबी मोजण्यासाठी इंटिग्रेशन वापर केला जातो.
- भौतिकशास्त्र, कायनेमॅटिक्स, थर्मोडायनामिक्स, इलेक्ट्रोमॅग्नेटिझम, वस्तुमान केंद्र, गुरुत्वाकर्षण केंद्र, जडपणाचा क्षण, ग्रहांची स्थिती, वेग, शक्ती, केलेले कार्य इत्यादी भौतिकशास्त्राच्या विविध संकल्पनांमध्ये मोठ्या प्रमाणावर वापरले जाते.
- क्षेत्रफळ, कंसाची लांबी, त्रिमितीय घनांचे प्रमाण इ. मोजण्यासाठी इंटिग्रेशनचा वापर केला जातो.
- वक्र आकाराच्या रचना बांधण्यासाठी आणि अशा संरचनांचे वजन मोजण्यासाठी आर्किटेक्ट इंटिग्रेशन वापरतात.



आकृती 2.13: भाक्रा धरण - डेफिनाइट इंटिग्रलचे उपयोग

व्हिडिओ संसाधन संदर्भ

Properties of definite Integrals

Applications of Integrals: Introduction

Application of Integrals: Area under the Curve

Application of Integrals: Area Between Two Curves

Application of Integrals: Problems

केस स्टडी

स्मृती चाचणी परीक्षेत विद्यार्थ्यांनी गणिताची चिन्हे ज्या दराने दिली लक्षात ठेवतात आहेत ते दिले आहे. $F'(t) = \frac{t}{10} - \frac{3t^2}{1000}$ येथे $F(t)$ हे t मिनिटांमध्ये लक्षात ठेवलेल्या प्रतीकांची संख्या आहे.

वरील माहितीवर आधारित खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या

1. $F(0) = 0$ हे माहीत असल्यास $F(t)$ चे मूल्यमापन करा.
2. विद्यार्थी 10 मिनिटांत (अंदाजे) किती चिन्हे लक्षात ठेवू शकतो?

तपासा!!!

Download MATLAB (https://www.mathworks.com/downloads/) (Source: MathWorks)

Math Works

युनिट 5 नंतर मोफत चाचणी आवृत्ती शिकवली जाते आणि आपण $\int x^n dx$ and $\int_0^1 x^7 dx$ मूल्याचे मूल्यमापन करू शकता का ते तपासा.

सारांश

1. $\boxed{\int f(x)dx = F(x)+c}$, येथे f आणि F हे x चे $F'(x) = f(x)$ फंक्शन आहेत.

2. इंटिग्रेशनची महत्वाची तंत्रे:

   2.1. **सब्स्टिट्युशनद्वारे इंटिग्रेशन:** या प्रकारचे इंटिग्रल सोडवण्यासाठी $\int \phi(f(x))f'(x)dx$ आपण $f(x) = t$ ठेवतो आणि $f'(x)\ dx = dt$.

   2.2. **पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशन:** जर u आणि v हे x चे वेगवेगळे फंक्शन असतील तर,

   $$\int u\cdot v dx = u\int v dx - \int[u'\cdot\int v dx]dx \text{ येथे, } u' = \frac{du}{dx}$$

   [सामान्यत: आपण प्रथम फंक्शन (u) म्हणून असे फंक्शन निवडतो जे **ILATE** या शब्दामध्ये प्रथम येते, येथे **I** म्हणजे इन्व्हर्स फंक्शन, **L** म्हणजे लॉगॅरिथमिक फंक्शन, **A** म्हणजे अल्जेब्रिक फंक्शन, **T** म्हणजे ट्रिगॉनॉमेट्रीक फंक्शन आणि **E** म्हणजे एक्सपोनेन्शिअल फंक्शन आहे.]

   2.3 **पार्शियल फ्रॅक्शनद्वारे इंटिग्रेशन:** $\frac{f(x)}{g(x)}$, फॉर्मचे फंक्शन, जिथे $f(x)$ आणि $g(x)$ हे बहुपद (polynomial) असतात, त्याला रॅशनल फ्रॅक्शन (rational fraction) म्हणतात. जर $f(x)$ ची डिग्री (degree) $g(x)$ च्या डिग्री (degree) पेक्षा कमी असेल तर त्याला प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन (proper rational fraction) म्हणतात. प्रत्येक प्रॉपर रॅशनल फ्रॅक्शन सोप्या (simpler) फ्रॅक्शन ची बेरीज म्हणून व्यक्त केला जाऊ शकतो. याला पार्शिअल फ्रॅक्शन (partial fraction) म्हणतात.

3. जर $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$; येथे $F(x)$ हे f चे अँटी-डेरीवेटीव्ह आहे, 'a' ला इंटिग्रलची खालची मर्यादा (lower limit) म्हणतात आणि 'b' ला इंटिग्रलची वरची मर्यादा (upper limit) म्हणतात.

4. जर m, n हे दोन्ही धन पूर्णांक असतील तर वॉलि सूत्राचा वापर करून

   $$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\cos^m x dx$$

   $$\begin{cases} = \dfrac{(m-1)(m-3)...(1 \text{ or } 2)\cdot(n-1)(n-3)...(1 \text{ or } 2)}{(m+n)(m+n-2)...(1 \text{ or } 2)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{जर } m \text{ आणि } n \text{ सम असतील} \\ = \dfrac{(m-1)(m-3)...(1 \text{ or } 2)\cdot(n-1)(n-3)...(1 \text{ or } 2)}{(m+n)(m+n-2)...(1 \text{ or } 2)}\cdot 1, & \text{इतर केसेसमध्ये} \end{cases}$$

5. जर n धन पूर्णांक असेल तर, (वॉलि सुत्राचा खास प्रकार)

   $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)...3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)...4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{जर } n \text{ सम असेल} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)...4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)...5\cdot 3}\cdot 1 & \text{जर } n \text{ विषम असेल} \end{cases}$$

6. जेव्हा आपल्याला वक्र $y = f(x)$, x-अक्षाद्वारे आणि $x = a$ आणि $x = b$ द्वारे सिमित क्षेत्रफळ $\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$ असते.

7. जेव्हा आपल्याला वक्र $x = g(y)$, Y-अक्षाद्वारे आणि $Y = a$ आणि $Y = b$ द्वारे सिमित क्षेत्रफळ $\boxed{A = \int_c^d g(y)dy}$ असते.

8. X-अक्षाभोवती परिभ्रमणाने तयार झालेल्या आणि $y = f(x)$ या वक्राने, ओर्डीनेट $x = a$, $x = b$ आणि X-अक्ष यांनी सिमित केलेल्या घनाचे घनफळ $V = \int_a^b \pi y^2 dx$ आहे.

9. Y-अक्षाभोवती परिभ्रमणाने तयार झालेल्या आणि $x = f(y)$ या वक्राने , रेषा $y = c$, $y = d$ आणि Y-अक्ष यांनी सिमित केलेल्या घनाचे घनफळ $V = \int_c^d \pi x^2 dy$ आहे.

सराव प्रश्न

व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न

Q.1. सोडवा: $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$. [**टीप.** Put $x = \cos\theta$ ठेवा] [**उत्तर:** $\sqrt{1-x^2} - \cos^{-1} x + c$]

Q.2. सोडवा (a) $\int \tan^{-1} x dx$ (b) $\int \sin(\log x)dx$

$$\left[\textbf{उत्तर:}\ (a)\ x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c, (b)\ \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c\right]$$

Q.3. सिद्ध करा $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Q.1. जर $f'(x) = \frac{1}{(2\sin x + 3\cos x)^2}$, तर $f(x) =$ ________. [**टीप.** Put ($2 \tan x + 3 = t$ ठेवा]

$$\left[\textbf{उत्तर:}\ \frac{-1}{2(2\tan x + 3)} + c\right]$$

Q.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}} =$ ________. [**टीप.** Put $\sqrt{x} = t$ ठेवा] [**उत्तर:** $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$]

Q.3. $\int 4dx$ = ________. **[उत्तर:** $4x + c$]

Q.4. $\int 5e^x dx$ = ________. **[उत्तर:** $5e^x + c$]

योग्य जोड्या जुळवा:

Q.5. चे अँटी डेरीवेटीव्ह

Table 2.2

Column I		Column II	
(A)	$(\boldsymbol{n} + 1)\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$	(i)	$\log\lvert\sin x\rvert + c$
(B)	$\cos x$	(ii)	$x^{n+1} + c$
(C)	$\cot x$	(iii)	$\tan x + c$
(D)	$\sec^2 x$	(iv)	$(\sin x) + c$

[उत्तर: $A \to (ii); B \to (iv); C \to (i); D \to (iii)$]

लहान प्रयोग

पाच विद्यार्थ्यांचे गट तयार करा. प्रत्येक गटाला 50 अँटीडेरिवेटिव्ह्ज आणि संबंधित डेरिवेटिव्ह्जची एक सारणी बनवावी लागेल. इतर गटांच्या तुलनेत गटाकडे किती समान अँटीडेरिवेटिव्ह्ज आहेत याची गणना करा. (यासाठी देखील एक टेबल बनवा) ते तुमच्या शिक्षकांना दाखवा.

उपक्रम

आपल्यासाठी सहज उपलब्ध असलेल्या जमिनीचा कोणताही भाग निवडा. (परंतु बहुभुज आकारात नाही) डेफिनाइट इंटिग्रल वापरून त्याचे क्षेत्रफळ शोधण्याचा प्रयत्न करा. त्यानंतर टेपच्या मदतीने त्याचे क्षेत्रफळ मोजा. आपल्या उत्तरांची तुलना आणि विश्लेषण करा. ते तुमच्या शिक्षकांना दाखवा.

अधिक जाणून घ्या !

अनेक इंटिग्रल्सची गणना करताना आपल्याला पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशन (Integration by parts) पद्धत एकापाठोपाठ अनेक वेळा वापरावी लागली. पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशनसाठी सामान्यीकृत सूत्र वापरून परिणाम अधिक वेगाने मिळवता येऊ शकतो.

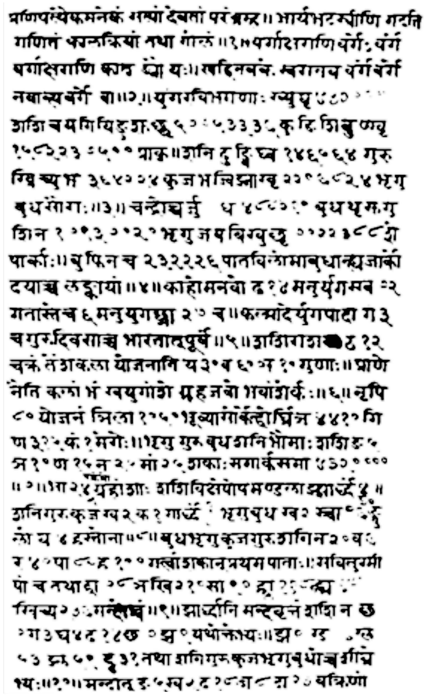
$$\int u(x)v(x)dx = u(x)v_1(x) - u'(x)v_2(x) + u''(x)v_3(x) - \ldots + (-1)^{n-1}u^{n-1}(x)v_n(x) - (-1)^{n-1}\int u^n(x)v_n(x)dx$$

येथे $v_1(x) = \int v(x)dx$, $v_2(x) = \int v_1(x)dx$ ..., $v_n(x) = \int v_{n-1}(x)dx$

येथे, आपण असे गृहीत धरतो की या सूत्रात दिसणारे सर्व डेरिव्हेटिव्ह्ज आणि इंटिग्रल अस्तित्वात आहेत. पार्ट्सद्वारे इंटिग्रेशनसाठी सामान्यीकृत सूत्राचा वापर खालील प्रकारच्या इंटिग्रल सोडवताना विशेषतः उपयुक्त आहे. $\int P_n(x)Q(x)dx$ येथे $P_n(x)$ डिग्री (degree) n चे बहुपद आहे आणि $Q(x)$ हा घटक असा आहे की तो सलग $(n + 1)$ वेळा इंटिग्रेट केला जाऊ शकतो.

संदर्भ व सुचविलेले वाचन

- NCERT, Mathematics Text Book for Class XII Part II.
- Narayan Shanti (1942) Integral Calculus, S. Chand & Co.
- Ayres Frank (1981), Calculus, Schaum's outline series.



An excerpt of ten verses Dashgeetikapaad' from"Aryabhateeya" written by Aryabhatta ("Source – Muley Gunakar (1992) - SANSAAR KE MAHAN GANITAGYA,Raajkamal Prakashan.")

3 निर्देशक भुमिती

युनिट वैशिष्ट्ये

हे युनिट पुढील विषयांवर चर्चा करते-विविध स्वरूपात (पुराव्याशिवाय) सरळ रेषेचे समीकरण, दोन सरळ रेषांचे छेदनबिंदु, दोन रेषांमधील कोन. समांतर आणि लंब रेषा, लंब अंतराचे सूत्र. वर्तुळाचे सामान्य समीकरण, त्याची वैशिष्ट्ये; कोनिक्सची व्याख्या (पॅराबोला, इलिप्स, हायपरबोला), त्यांची मानक समीकरणे देखील लांबीमध्ये स्पष्ट केली गेली आहेत.

अभ्यासाचे औचित्य

ज्या प्रकारे पृथ्वीवरील प्रत्येक व्यक्तीचा घराचा पत्ता आहे, त्याचप्रमाणे प्रत्येक बिंदूचा एक पत्ता असतो ज्याला त्याचे निर्देशांक म्हणतात (जे एकमेव आहेत). निर्देशक प्रणाली वापरून भुमितीचा अभ्यास निर्देशक भुमिती म्हणून ओळखला जातो. हे केवळ उच्च गणिताकडे जाण्याचे पाऊल नाही तर विविध संरचनांचे दृश्य पैलू समजून घेण्याची गुरुकिल्ली आहे. सध्याच्या बाह्य अवकाशातील अन्वेषणासाठी आणि अणूंच्या कणांच्या वर्तनात्मक अभ्यासासाठी ही एक महत्त्वाची शाखा आहे. तसेच निर्देशक भुमिती ही संकल्पना न्यूयॉर्क शहराच्या पत्ता शोधण्याच्या प्रणालीमध्ये वापरली जाते ज्यामुळे पारंपारिक पद्धतीच्या तुलनेत पत्ता शोधणे सोपे होते. म्हणून, निर्देशक भुमिती खूप महत्वाची आहे कारण ती बहुविधपणे भौतिकशास्त्रात, जीपीएसमध्ये, नकाशामध्ये, संगणक ग्राफिक्समध्ये आणि इतर विविध क्षेत्रांमध्ये वेगवेगळ्या पद्धतीने वापरली जाते.

पुर्व-ज्ञान

- भुमितीची मुलतत्त्वे जसे रेषा, कोन इ.
- समीकरण सोडवण्याशी संबंधित ज्ञान
- अंतराचे सुत्र (Distance Formula)
- x (abscissa) आणि y (ordinate) अक्षाचे ज्ञान

घटक परिणाम

या घटकाचे परिणाम खालीलप्रमाणे आहेत.

U3-O1: विविध स्वरूपात सरळ रेषेचे समीकरण शोधा; दोन रेषांमधील कोन, दोन रेषांमधील लंब अंतर शोधण्यासाठी योग्य सूत्र वापरा.

U3-O2: दोन सरळ रेषांमधील छेदनबिंदू निश्चित करा; समांतर आणि लंब रेषांची संकल्पना समजून घ्या.

U3-O3: वर्तुळाचे समीकरण शोधा आणि त्यानुसार त्याची वैशिष्ट्ये सांगा.

U3-O4: उजव्या गोलाकार शंकूच्या संदर्भात कोनिक्सची संकल्पना समजून घ्या.

U3-O5: पॅराबोला, हायपरबोला आणि इलिप्सवर आधारित उदाहरणे सोडवा जेव्हा त्यांचे केंद्रबिंदू, निर्देशिका किंवा शिरोबिंदू दिले जातात.

CO-UO मॅपिंग

युनिट-3: निष्पत्ती (UO)	अपेक्षित पाठ्यक्रम निष्पत्ती मॅपिंग (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U3-O1	-	-	3	1	2
U3-O2	-	-	3	1	2
U3-O3	-	-	3	1	2
U4-O4	-	-	3	1	2
U5-O5	-	-	3	1	2

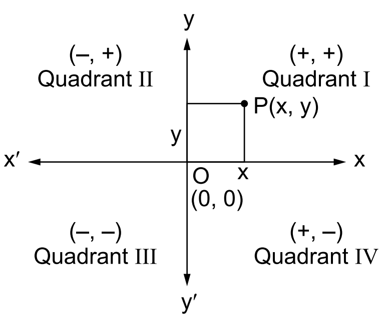
3.1 समन्वय भुमितीची संकल्पना

बीजगणित आणि भुमितीची गणिती सूत्रे निर्देशक भुमिती म्हणून वापरली आहेत. प्रथमच गणिताच्या इतिहासामध्ये बीजगणित आणि भुमितीचा एकाच वेळी वापर तत्कालीनमहान फ्रेंच गणितज्ञ रेने डेसकार्टेस (René Descartes) यांनी केला. विश्लेषण आणि भुमितीच्या बीजगणितीय संयोजनाला विश्लेषणात्मक भुमिती म्हणतात.

Origin of Coordinate Geometry
French mathematician René Descartes first carried out a systematic study of geometry by the use of algebra in his book 'La Géométrie' (published in 1637). Modern coordinate (analytic) geometry is called 'Cartesian' after him.

कार्टेशियन कोऑर्डिनेट्स प्रणाली

कार्टेशियन कोऑर्डिनेट्स सिस्टीमची संकल्पनासाठी भौमितिक रचनेचा विचार करू. XY प्रतल विचार करा, ज्यामध्ये दोन परिमाण आहेत. एकाला x-अक्ष आणि दुसऱ्याला y. अक्ष असे म्हणतात. या भौमितिक रचनेमध्ये दोन अक्ष (लंब) असल्याने म्हणूनच त्याला द्विमितीय आयताकृती समन्वय प्रणाली म्हणतात. क्षैतिज(आडव्या) रेषा X-अक्ष आणि उभ्या रेषा Y-अक्ष म्हणून नावे दिली आहेत. या टप्प्यावर आपण हे स्पष्ट करतो की X-अक्ष स्वतंत्र (independent) व्हेरिएबल म्हणून आहे आणि Y-अक्ष x वर अवलंबून (dependent) व्हेरिएबल म्हणून आहे.



आकृती 3.1: कार्टेशियन समन्वय प्रणाली

आकृती 3.1 (Fig.3.1) मध्ये X-अक्ष आडवा आहे आणि Y-अक्ष उभा आहे. कार्टेशियन प्रणालीमध्ये हे लक्षात घेण्यासारखे आहे, एका बिंदूचे निर्देशांक (x, y) असे लिहिलेले आहेत, ज्यामध्ये प्रथम स्थान विशेषतः X-अक्षांसाठी आणि दुसरे स्थान Y-अक्षांसाठी साठी आहे. $O(0,0)$ हा X-अक्ष आणि Y-अक्ष यांच्यातील छेदनबिंदू आहे.

3.2 सरळ रेषा

भौमितिक रचनेमध्ये P आणि Q असे दोन शिरोबिंदु (बिंदू) विचारात घ्या. P आणि Q या दोन शिरोबिंदूंमधील सर्वात कमी अंतराला सरळ रेषा म्हणतात. कोणतीही सरळ रेषा वक्रताशिवाय वक्र म्हणून पाहिली जाऊ शकते.

जर P आणि Q हे दोन शिरोबिंदू $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ असे दर्शवले असतील, तर P आणि Q मधील अंतर

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ आहे.}$$

जर दोन शिरोबिंदू एकमेकांवर असल्यास $PQ = 0$

उदाहरण 1: X-अक्षावर असणाऱ्या शिरोबिंदूंची संख्या काढा जे दुसऱ्या शिरोबिंदू $Q(3, 4)$ पासून $a(a < 4)$ अंतरावर आहेत.

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) परिभाषित नाही

उत्तर: समजा X-अक्षावर एक शिरोबिंदू $(x_1, 0)$ आहे मग त्याचे शिरोबिंदू $(3, 4)$ पासून अंतर D आहे

$$a = \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (0 - 4)^2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{(x_1 - 3)^2 + 16} \quad \Rightarrow \quad a^2 = (x_1 - 3)^2 + 16$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 - 3)^2 = a^2 - 16$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - 3 = \pm\sqrt{a^2 - 16} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \pm \sqrt{a^2 - 16}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \pm \sqrt{a^2 - 16}$$

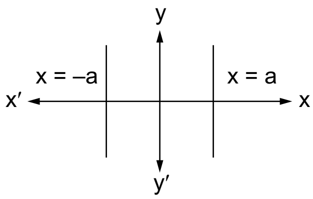
येथे $a < 4$ म्हणून, x_1 परिभाषित नाही. **उत्तर.** (4)

> **टिप्पणी:** x आणि y मधील संबंध जे एका रेषेच्या प्रत्येक बिंदूच्या समन्वयाने (ordinates) समाधानी असतात त्याला सरळ रेषेचे समीकरण म्हणतात. हे $ax + by + c = 0$ ने दाखवले आहे. $[a$ आणि $b \neq 0]$

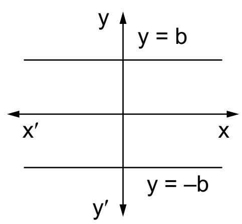
उभ्या रेषांचे समीकरण

(1) Y-अक्षाचे समीकरण $x = 0$ आहे.

(2) Y-अक्षाला समांतर असलेल्या a एकक अंतरावर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण $x = a$ किंवा $x = -a$ आहे. (Fig.3.2)



आकृती 3.2: उभ्या रेषा



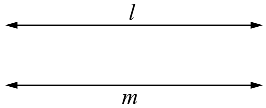
आकृती 3.3: आडव्या रेषा

क्षैतिज (आडव्या) रेषेचे समीकरण

(1) X-अक्षाचे समीकरण $y = 0$ आहे.

(2) X-अक्षाला समांतर असलेल्या b एकक अंतरावर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण $y = b$ किंवा $y = -b$ आहे. (आकृती 3.3)

समांतर रेषा: दोन रेषा समांतर आहेत असे म्हटले जाते जर त्यांच्यामध्ये कोणतेही छेदनबिंदू नसतात. याचा अर्थ असा होतो की दोन रेषा विसंगत आहेत.



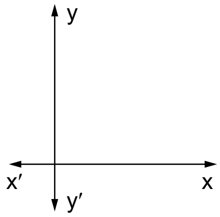
(l आणि m समांतर रेषा आहेत)

टीप: $ax + by + c = 0$ च्या समांतर रेषेचे समीकरण $ax + by + \lambda = 0$ आहे.

लंब रेषा: दोन रेषा $90°$ कोनात छेदल्यास त्यांना लंब रेषा म्हणतात. रेषा $ax + by + c = 0$ च्या लंब रेषेचे समीकरण $bx - ay + \lambda_1 = 0$ (λ_1 = पॅरामीटर) आहे.

उदा. समन्वय अक्ष लंब रेषा आहेत. (Fig.3.4)

एकरेषीय रेषा: दोन रेषा एकरेषीय रेषा आहेत असे म्हटले जाते जेव्हा त्या रेषा एकमेकांवर असतील. हे लक्षात घेण्यासारखे आहे की जेव्हा दोन रेषा (समांतर) एकाच दिशेने जात असतात, तेव्हा ते एका शिरोबिंदू (बिंदू) वर भेटतील ज्याला अनंत शिरोबिंदू म्हणतात. परंतु भौमितिकदृष्ट्या हे काढणे शक्य नाही.



आकृती 3.4: लंब रेषा

उदाहरण 2: सिद्ध करा की रेषा

(a) $2x + 5y + c = 0$; $4x + 10y + 2c_1 = 0$ एकमेकांना समांतर आहेत.

(b) $3x + 4y + 7 = 0$; $4x - 3y + 1 = 0$ एकमेकांना लंब आहेत.

उत्तर: (a) समजा $\quad 2x + 5y + c = 0 \quad$ ...(1)

$4x + 10y + 2c_1 = 0 \quad$ ...(2)

$$(1) \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{5}x - \frac{c}{5}$$

$$(2) \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{10}x - \frac{2c_1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{2x}{5}x - \frac{c_1}{5}$$

$$m_2 = \frac{-2}{5} = m_1$$ $\therefore$ (1) आणि (2) वरून एकमेकांना समांतर आहेत.

(b) दिलेल्या रेषा

$3x + 4y + 7 = 0$ आणि $4x - 3y + 1 = 0$

i.e., $\quad y = \frac{-3}{4}x - \frac{7}{4}$ आणि $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

i.e., $\quad m_1 = -\frac{3}{4}$ आणि $m_2 = \frac{4}{3}$

$\therefore \quad m_1 m_2 = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{3}\right) = -1$. म्हणून रेषा एकमेकांना लंब आहेत.

3.2.1 रेषेचा चढ

समजा PQ ही रेषा X–अक्षांच्या उजव्या बाजूच्या दिशानिर्देशांसह $\phi(0° \leq \phi < 180°, \phi = 90°)$ एक कोन बनवते, तर या रेषेचा चढ $\tan\phi$ दाखवतात आणि $m = \tan\phi$ चिन्हाने दर्शवला जाईल. जर $P(x_1, y_1)$ आणि $Q(x_2, y_2)$ असे दोन बिंदू आहेत व $x_1 \neq x_2$ तर रेषेचा चढ $PQ = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ असेल.

टिप्पणी:

(*i*) जर $\phi = 90°$, तर चढ m अस्तित्वात नाही आणि रेषा Y – अक्षांशी विसंगत आहे.

(*ii*) जर $m = 0$ आणि $\phi = 0$ तर रेषा X अक्षांशी विसंगत असेल.

(*iii*) (*a*) जर रेषा विसंगत असतील तर $m_1 = m_2$ आणि उलट विधान सत्य आहे.

(*b*) रेषा एकमेकांना लंब असल्यास $m_1 \cdot m_2 = -1$ आणि उलट विधान सत्य आहे.

3.2.2 विविध स्वरूपात सरळ रेषेचे समीकरण

(*i*) **स्लोप-इंटरसेप्ट फॉर्म:** समजा m हा रेषेचा स्लोप आहे आणि c हा Y – अक्षावर इंटरसेप्ट आहे. तर अशा सरळ रेषेची समीकरण $y = mx + c$ ...(1)

आहे. जेथे y आणि x अनुक्रमे आश्रित आणि स्वतंत्र चल आहेत. जर या समीकरणात आपण $c = 0$ ठेवले तर समीकरण (1) $y = mx$ होते.

(*ii*) **पॉईंट-स्लोप फॉर्म:** समजा m हा रेषेचा स्लोप आहे व ती रेषा बिंदू (x_1, y_1) मधून जाते. तरअशा सरळ रेषेची समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ आहे.

(*iii*) **इंटरसेप्ट फॉर्म:** समजा c_1 आणि c_2 हे दोन इंटरसेप्ट्स एका सरळ रेषेवर असतील, तर त्याचे समीकरण $\dfrac{x}{c_1} + \dfrac{y}{c_2} = 1$ आहे.

टिप्पणी:

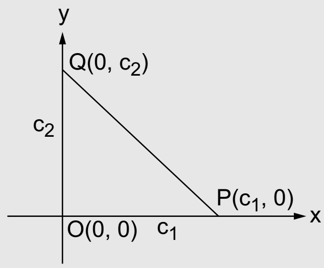
(*i*) समन्वय अक्षामधील रेषेच्या इंटरसेप्टचे अंतर $= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

(*ii*) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $OPQ = \dfrac{1}{2} PO \cdot QO = \left|\dfrac{1}{2} c_1 \cdot c_2\right|$

(*iii*) **टू-पॉइंट फॉर्म:** दोन बिंदू (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) मधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ किंवा } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

आहे. येथे $|x|$ हे x चा डिटरमिनन्ट दाखवते.



आकृती 3.5: अक्षांमधील रेषेचा इंटरसेप्ट

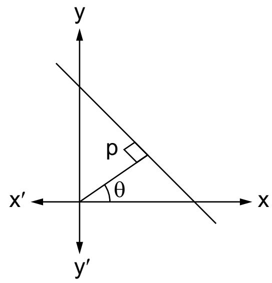
उदाहरण 3: (0, 0) आणि (2, 2) मधून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण शोधा.

उत्तर: आपण टू-पॉइंट फॉर्मचा वापर करू.

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)\text{, we get } y - 0 = \left(\frac{2-0}{2-0}\right)(x-0)$$

$$\Rightarrow \qquad 2y = 2x \quad \Rightarrow \quad y = x$$

(*iv*) **नॉर्मल फॉर्म:** जर p हे आरंभबिंदूपासून एका सरळ रेषेवर लंबांचे अंतर आहे आणि θ हा X-अक्ष आणि लंब यांच्यातील कोन आहे, तर सरळ रेषेचे समीकरण $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ आहे. येथे $(p > 0)\ 0 \le \theta \le 2\pi$.



आकृती 3.6: नॉर्मल फॉर्म

(*v*) **जनरल फॉर्म:** x आणि y या दोन चलामधील आणि तीन स्थिरांक a, b, c चा विचार करा. x आणि y चलामधील रेखीय किंवा प्रथम घातांक समीकरण

$$ax + by + c = 0 \qquad ...(1)$$

आहे. (1) मध्ये दिलेली बीजगणितीय रचना म्हणजे सरळ रेषेचे जनरल फॉर्म आहे. आता आम्ही (1) पासून खालील गोष्टी काढतो-

(*i*) रेषेचा चढ = $\frac{-a}{b}$ = [– (x चा सहगुणक/ y चा सहगुणक]

(*ii*) रेषेचा x-अक्षावरील इंटरसेप्ट = $-\frac{c}{a}$ आणि रेषेचा y-अक्षावरील इंटरसेप्ट = $-\frac{c}{b}$.

(*iii*) रेषेचा जनरल फॉर्म नॉर्मल फॉर्ममध्ये करण्यासाठी समीकरण (1) मधील c आपण उजव्या बाजूला करू आणि त्याला धन करू नंतर सर्व समीकरणाला $\sqrt{a^2 + b^2}$ ने भागू.

3.2.3 दोन रेषेंमधील कोन

(*a*) $y = a_1x + c_1$ आणि $y = a_2x + c_2$, या दोन रेषेंमधील कोन ϕ म्हणू.

$$\tan \phi = \pm\left(\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right)$$

हे लक्षात घेण्यासारखे आहे की-

(*i*) दोन सरळ रेषांमध्ये दोन कोन निर्माण होतात परंतु सामान्यतः तीव्र कोन दोन ओळींमधील कोन म्हणून घेतले जाते. म्हणूनच ϕ ची किंमत $\tan\phi$ ची धन किंमत घेऊन काढली जाते.

(*ii*) समजा a_1, a_2, a_3 हे तीन चढ $L_1 = 0$; $L_2 = 0$; $L_3 = 0$, रेषेचे आहेत. येथे $a_1 > a_2 > a_3$ हे कोणत्याही त्रिकोणाचे अंतर्वक्र कोन आहेत. (ΔEFG)

$$\tan E = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}, \tan F = \frac{a_2 - a_3}{1 + a_2a_3}, \tan G = \frac{a_3 - a_1}{1 + a_3a_1}$$

(*b*) दोन रेषांचे समीकरणांचा विचार करू-

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

तर ह्या रेषा

(*i*) समांतर $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

(*ii*) लंब $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ $(\because a_1a_2 = -1)$

(*iii*) एकरेषीय $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ असतील.

टिप्पणी: सरळ रेषा दिलेला कोन रेषेशी बनवते - (x_1, y_1) बिंदूवरुन जाणारे व $y = mx + c$ रेषेशी α कोन (म्हणा) असणारे रेषेचे समीकरण खालिलप्रमाणे आहे.

$$\therefore \quad y - y_1 = \frac{m \pm \tan\alpha}{1 \mp m\tan\alpha}(x - x_1)$$

उदाहरण 4: $3x + 4y - 5 = 0$ आणि $2x + ky + 6 = 0$ दोन लंब रेषांची दोन समीकरणे असल्यास खालीलपैकी कोणते k चे मुल्य योग्य आहे?

(1) $-\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}$

(3) 3 (4) 4

उत्तर: 1 ल्या रेषेचा चढ = [– (x चा सहगुणक/ y चा सहगुणक]

$3x + 4y - 5 = 0$ समीकरणावरून

$$m_1 = \frac{-3}{4}$$

$2x + ky + 6 = 0$, समीकरणावरून

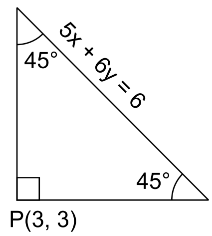
$$m_2 = \frac{-2}{k}$$

जर $m_1m_2 = -1$, तर दोन रेषा लंब आहेत.

$$m_1 = \frac{-3}{4}, m_2 = \frac{-2}{k}$$

$$\therefore \quad m_1m_2 = -1 \Rightarrow -\frac{-3}{4} \times \frac{-2}{k} = -1$$

$$\frac{3}{2k} = -1 \Rightarrow 3 = -2k \Rightarrow k = \frac{-3}{2}$$



आकृती 3.7: समद्विभुज काटकोन त्रिकोण

उदाहरण 5: कर्णाचे समीकरण $5x + 6y = 6$ आणि शिरोबिंदू $P(3, 3)$ आहे तर त्या समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाच्या बाजूंचे समीकरण शोधा.

उत्तर: दिलेल्या बिंदू (3, 3) मधून जाणाऱ्या व $5x + 6y = 6$ किंवा $5x + 6y - 6 = 0$ दिलेल्या सरळ रेषेने 45° चे समान कोन करणाऱ्या रेषेचे समीकरण मिळवू.

$$m_1 = [-(x \text{ चा सहगुणक}/y \text{ चा सहगुणक}] = -5/6$$

$$\tan 45° = \pm\frac{m-m_1}{1+mm_1}$$

or $$1 = \pm\frac{m-m_1}{1+mm_1} = +\frac{m+\frac{5}{6}}{1+m\left(\frac{-5}{6}\right)} = +\frac{6m+\frac{5}{6}}{6-5\frac{m}{6}} \qquad (\because \tan 45° = 1)$$

$\Rightarrow$ $$1 = +\frac{6m+5}{6-5m} \Rightarrow 6-5m = 6m+5 \quad \text{किंवा} \quad m_A = \frac{1}{11},$$

आता $$1 = -\frac{6m+5}{6-5m} \Rightarrow 6-5m = -6m-5$$

किंवा $$6+5 = -6m+5m \quad \text{किंवा} \quad 11 = -m \quad \text{किंवा} \quad m_B = -11$$

म्हणून दोन सरळ रेषांची समीकरणे खालीलप्रमाणे आहेत.

$$y-3 = m_A(x-3)$$

$\Rightarrow$ $$y-3 = \frac{1}{11}(x-3) \Rightarrow x-11y+30 = 0$$

आणि $$y-3 = m_B(x-3)$$

$\Rightarrow$ $$y-3 = -11(x-3) \Rightarrow 11x+y-36 = 0$$

3.2.4 रेषेवर एका बिंदूपासून लंब अंतर

आपण $ax + by + c = 0$ या समीकरणाचा विचार करू. मग $P(x_1, y_1)$ बिंदूपासून लंबचे अंतर = $\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ आहे. विशेषतः, $ax + by + c = 0$ रेषेवर असलेल्या आरंभबिंदू $(0, 0)$ पासून लंबांचे अंतर

$p = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ आहे. (ज्याअर्थी $x = 0, y = 0$)

उदाहरण 6: बिंदू $(4, -6)$ मधून जाणारी व $(-2, 3)$ पासून 10 अंतरावर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण शोधा.

उत्तर: दिलेल्या माहितीवरून खालील सूत्र वापरू.

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

दिलेली रेषा बिंदू $(4, -6)$ मधून जाते व $(-2, 3)$ पासून 10 अंतरावर आहे.

$$y+6 = m(x-4)$$

$\Rightarrow$ $$y+6 = mx-4m$$

$\Rightarrow$ $$mx-y-4m-6 = 0$$

$$\frac{|m(-2)-3-4m-6|}{\sqrt{m^2+1}} = 10$$

$$\frac{|-6m-9|}{\sqrt{m^2+1}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6m+9}{\sqrt{m^2+1}} = 10 \quad \text{किंवा} \quad 6m+9 = 10\sqrt{m^2+1}$$

दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून,

$$6m + 9 = 10\sqrt{m^2+1}$$

$$(6m + 9)^2 = 100(m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \quad 36m^2 + 108m + 81 = 100m^2 + 100$$

$$\Rightarrow \quad 64m^2 - 108m + 19 = 0$$

आता डिस्क्रिमिनन्ट $b^2 - 4ac$ शोधू.

$$(108)^2 - 4(64)(19) = 11664 - 4864 = 6800 > 0$$

संख्या धन असल्याने रेषा शक्य आहे.

3.2.5 समांतर रेषेमधील अंतर

(*i*) दोन समांतर (विसंगत) रेषा $ax + by + c_1 = 0$ आणि $ax + by + c_2 = 0$ मधील अंतर $D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ असते.

हे लक्षात घ्यावे की समांतर (विसंगत) रेषांच्या बाबतीत दोन्ही समीकरणांमध्ये x आणि y चे गुणांक समान असले पाहिजेत.

(*ii*) समांतर चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{q_1 q_2}{\sin\theta}$, q_1 आणि q_2 ह्या दोन विरुद्ध बाजूच्या लांबी आहेत आणि ϕ हा कोणत्याही दोन समीप कडा दरम्यान कोन आहे.

हे लक्षात घेण्यासारखे आहे की समांतरभुज चौकोनाच्या चार बाजू

$$y = m_1x + c_1 \quad ...(i) \qquad y = m_1x + c_2 \quad ...(ii)$$

$$y = m_2x + d_1 \quad ...(iii) \qquad y = m_2x + d_2 \quad ...(iv)$$ आहेत.

तर समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

$$z = \left|\frac{(c_1 - c_2)(d_1 - d_2)}{m_1 - m_2}\right|$$

उदाहरण 7: तीन रेषेचे समीकरण खाली दिले आहेत.

$$x + 2y + 3 = 0 \quad ...(1)$$

$$x + 2y - 8 = 0 \quad ...(2)$$

$$3x - y - 5 = 0 \qquad ...(3)$$

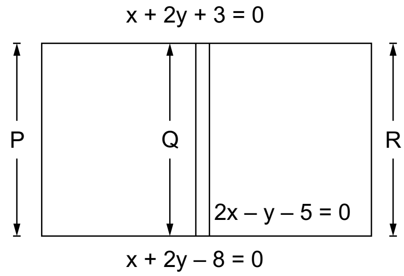
दोन चौरसांच्या 3 बाजू तयार करा. या चौकोनांच्या उर्वरित बाजूंचे समीकरण शोधा.

उत्तर: आम्ही दोन समांतर रेषांमधील अंतर शोधण्यासाठी खालील सूत्र वापरू.

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

येथे a हे x चे गुणांक आहे आणि b हे y चे गुणांक आहे. c_1, c_2 ही स्थिर संज्ञा आहेत. D चे मूल्य शोधण्यासाठी (1) आणि (2) समीकरणे विचारात घ्या.

$$D = \frac{|8+3|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$



आकृती 3.8: दोन समांतर रेषांमधील अंतर

बाजू P आणि R ची समीकरणे

$2x - y + k = 0$ स्वरूपाची आहेत.

बाजू P आणि Q मधील अंतर = बाजू Q आणि R मधील अंतर

$$\frac{|k-(-5)|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{k+5}{\sqrt{5}} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$ किंवा $k + 5 = 11$ किंवा $k = 11-5 = 6$

and $\quad \dfrac{k+5}{\sqrt{5}} = -\dfrac{11}{\sqrt{5}}$ किंवा $k + 5 = -11$ किंवा $k = -11 - 5 = -16$

दोन चौरसांच्या चौथी बाजू खालीलप्रमाणे आहेत. (*i*) $2x - y + 6 = 0$, (*ii*) $2x - y - 16 = 0$.

वर्तुळ

3.3 वर्तुळाची संकल्पना

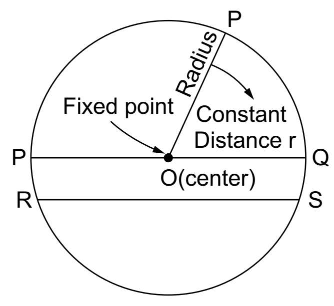
वर्तुळ एक द्विमितीय वर्तुळाकार आकृती आहे ज्यामध्ये प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच वर्तुळाच्या केंद्र बिंदूपासून समान अंतरावर असतो आणि स्थिर अंतराला वर्तुळाची त्रिज्या म्हणतात.

वर्तुळाचा व्यास $(PQ) = 2 \times r = 2r$.

वर्तुळाचा परिघ = $C = 2\pi r$. ही वर्तुळाच्या सीमेची लांबी आहे.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ हे परिघाद्वारे बांधलेले आहे आणि खालील सुत्र वापरून गणना केली आहे, म्हणजे

$$\text{क्षेत्रफळ } (A) = \pi r^2$$



आकृती 3.9: वर्तुळ

जेथे π स्थिर प्रमाण आहे आणि $= \dfrac{22}{7}$ किंवा $\pi = 3.14$ and r ही वर्तुळाची त्रिज्या म्हणतात.

परिघावरील कोणत्याही दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेला जीवा म्हणतात. जर जीवा केंद्रबिंदूमधून जात असेल तर त्याला व्यास म्हणतात. आकृतीमध्ये RS = जीवा, PQ = व्यास, O = केंद्र (Fig.3.9)

टीप: वर्तुळ हे लंबवर्तुळाचा (ellipse) भाग आहे (शंकू विभाग).

3.3.1 वर्तुळाचे समीकरण

वर्तुळ समीकरणांचे गणितीय सूत्र तयार करू या.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots(1)$$

येथे x, y हे व्हेरिएबल्स आहेत, g, f आणि c स्थिर आहेत आणि केंद्र $(-g, -f)$ आहे किंवा

[(− 1/2(x चा सहगुणक), (−1/2(y चा सहगुणक}] आहेत आणि त्रिज्या $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

टीप: जर त्रिज्या r वास्तव असेल तर वास्तव वर्तुळ म्हणून ओळखले जाते; जर त्रिज्या $r = 0$ असेल तर वर्तुळ एक बिंदू/शिरोबिंदू वर्तुळ आहे; जर त्रिज्या r काल्पनिक असेल तर वर्तुळ देखील काल्पनिक आहे.

उदाहरण 8: वर्तुळाचे केंद्र आणि त्रिज्या शोधा.

(*a*) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y + 2 = 0$ (*b*) $x^2 + y^2 + 2x \sin\theta + 2y \cos\theta - 10 = 0$

(*c*) $2x^2 + \lambda xy + 2y^2 + (\lambda - 2)x + 4y - 6 = 0$, λ च्या काही किमतीसाठी

उत्तर:

(*a*) दिलेल्या समीकरणांची पुनर्रचना करू.

$$x^2 + y^2 - \frac{6}{2}x - \frac{8}{2}y + \frac{2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 4y + 1 = 0 \qquad \ldots(i)$$

आम्ही समीकरण (i) वरून g, f आणि c चे मूल्य काढू.

$$\therefore \qquad g = \frac{-3}{2}, f = \frac{-4}{2}, c = 1$$

म्हणून केंद्र $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$ आणि

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ आहे.}$$

$$\therefore \quad \text{त्रिज्या} \qquad r = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

(b) वर्तुळाचे समीकरण $x^2 + y^2 + 2x \sin \theta + 2y \cos \theta - 10 = 0$ विचारात घेऊ.

$$\text{वर्तुळाचे केंद्र} = (-\sin \theta, -\cos \theta)$$

$$\therefore \quad \text{वर्तुळाची त्रिज्या} = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 + 10}$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 10} = \sqrt{1+10} \qquad (\because \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1))$$

$$\therefore \quad r = 3.3$$

(c) वर्तुळाचे समीकरण

$$2x^2 + \lambda xy + 2y^2 + (\lambda - 2)x + 4y - 4 = 0 \qquad ...(ii) \text{ विचारात घेऊ.}$$

दिलेल्या समीकरणाला x^2 च्या गुणांकाने म्हणजे 2 ने विभाजित केल्यानंतर आम्ही समीकरण पुन्हा लिहितो

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{\lambda xy}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{(\lambda-2)\cdot x}{2} + \frac{4y}{2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$\text{किंवा } x^2 + \frac{\lambda}{2}\cdot xy + y^2 + \frac{(\lambda-2)}{2}\cdot x + 2y - 2 = 0 \qquad ...(iii)$$

वर्तुळाच्या सामान्य समीकरणांमध्ये xy चे कोणतेही पद नाही परंतु समीकरण (ii) मध्ये xy ची एक संज्ञा आहे ज्याचे गुणांक $\frac{\lambda}{2}$ आहे

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

म्हणून समीकरण (iii) वरून,

$$x^2 + y^2 - x + 2y - 2 = 0 \qquad ...(iv)$$

$$\text{वर्तुळाचे केंद्र} \left(\frac{1}{2}, -1\right) \; i.e., \left(-\frac{\text{coefficient of } x}{2}, -\frac{\text{coefficient of } y}{2}\right)$$

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

त्रिज्या शून्य असल्याने म्हणून वर्तुळ बिंदू वर्तुळ आहे

3.3.2 वर्तुळाची वैशिष्ट्ये

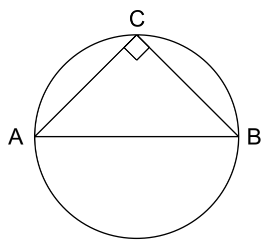
(i) वर्तुळाचा व्यास हा वर्तुळाचा सर्वात लांब जीवा आहे आणि वर्तुळाला दोन समान भागांमध्ये विभागतो.

(ii) वर्तुळाच्या मध्यभागी असलेल्या वर्तुळाच्या दिलेल्या जीवावर काढलेला लंब जीवाला द्विभाजित करतो. (लंबदुभाजक)

(iii) दिलेल्या परिमितीच्या लांबीसाठी वर्तुळ हा सर्वात मोठा क्षेत्रफळ असलेला आकार आहे.

(iv) वर्तुळांना समान त्रिज्या असल्यास ते एकरूप असल्याचे म्हटले जाते.

(v) अर्ध – वर्तुळातील कोन नेहमी 90° असतो. (angle $ACB = 90°$, Fig.3.10)



आकृती 3.10: वर्तुळाची वैशिष्ट्ये

(vi) त्रिज्या किंवा व्यासाचे मोजमाप न करता सर्व वर्तुळ समान आहेत.

(vii) वर्तुळाच्या समान जीवांना केंद्रस्थानी समान कोन मिळतात.

टीप :

1. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ समीकरणाला तीन स्थिरांक असतात, म्हणून वर्तुळाचे सामान्य समीकरण मिळवण्यासाठी किमान तीन स्थिरांक माहीत असावेत. याचा अर्थ असा होतो की एक वर्तुळ तीन एकरेषीय नसणाऱ्या बिंदूमधून जाते.
2. स्थिरांक म्हणून h, g, f, c आणि x, y चलनांमधील सामान्य द्वितीय घातांक समीकरण $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ असे लिहिले आहे. जर हे वर्तुळाचे प्रतिनिधित्व करते तर -

   x^2 चा सहगुणक = y^2 चा सहगुणक किंवा $a = b \neq 0$

   xy चा सहगुणक $= 0 \quad \therefore h = 0$

   $(g^2 + f^2 - c) \geq 0$ (वास्तव वर्तुळासाठी).

उदाहरण 9: एक पिझ्झाचा व्यास 10 इंच आहे. पिझ्झाची त्रिज्या किती आहे?

उत्तर: व्यास = 2 × त्रिज्या

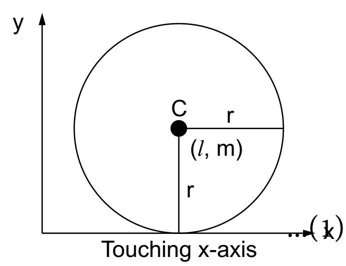
$$\therefore \quad \text{त्रिज्या} = \frac{10}{2} = 5 \text{ इंचेस}$$

3.3.3 दिलेल्या वर्तुळाचे समीकरण शोधा

I. केंद्र आणि त्रिज्या

II. वर्तुळावरील तीन बिंदू

III. व्यासाच्या शेवटच्या बिंदूंचे निर्देशक



आकृती 3.11: X-अक्षाला स्पर्श करणारे वर्तुळ

I. केंद्र आणि त्रिज्या

जर (l, m) केंद्र असेल आणि r वर्तुळाची त्रिज्या असेल तर

$$(x - l)^2 + (y - m)^2 = r^2$$

वर्तुळाचे समीकरण आहे.

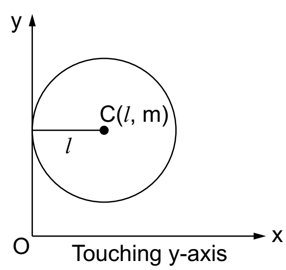
विशेष बाबी:

(i) जर केंद्र (0, 0) आणि त्रिज्या 'r' असेल तर (l) मध्ये दिलेल्या वर्तुळाचे समीकरण $x^2 + y^2 = r^2$ आहे.

(ii) जर वर्तुळाची त्रिज्या शून्य असेल तर वर्तुळाचे समीकरण $(x - l)^2 + (y - m)^2 = 0$ (शून्य/बिंदू वर्तुळ) असेल.

(iii) जेव्हा वर्तुळ x अक्षाला स्पर्श करते तर वर्तुळाचे समीकरण $(x - l)^2 + (y - m)^2 = m^2$ $(r = m)$ आहे. (आकृती 3.11)

(iv) जेव्हा वर्तुळ अशा प्रकारे काढले जाते की त्यातील एक भाग y – अक्षाला स्पर्श करत असेल, तेव्हा समीकरण

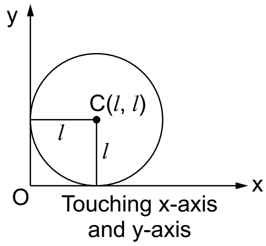


आकृती 3.12: Y-अक्षाला स्पर्श करणारे वर्तुळ

$(x-l)^2 + (y-m)^2 = l^2$ आहे. (आकृती 3.12)

(v) जेव्हा वर्तुळ दोन्ही अक्षांना (x-अक्षाला आणि y-अक्षाला) स्पर्श करते तेव्हा काढलेल्या वर्तुळाचे समीकरण

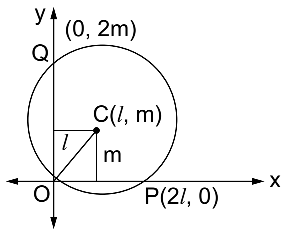
$(x-l)^2 + (y-l)^2 = l^2$ असते. (आकृती 3.13)



आकृती 3.13: X-अक्षाला आणि Y- अक्षाला दोन्हीला स्पर्श करणारे वर्तुळ

(vi) जेव्हा वर्तुळ आरंभबिंदूमधून जाते आणि केंद्र एका निश्चित बिंदू (l, m) वर असते, तेव्हा त्रिज्या $(l^2 + m^2)^{1/2} = r$ आणि x-अक्षावर केलेला इंटरसेप्ट $OP = 2l$ आणि y-अक्षावर केलेला इंटरसेप्ट $OQ = 2k$ असतो आणि म्हणून वर्तुळाचे समीकरण $(x-l)^2 + (y-m)^2 = l^2$ किंवा $x^2 + y^2 - 2lx - 2my$ आहे.

अभ्यासाच्या या टप्प्यावर हे लक्षात घेणे फार महत्वाचे आहे की वर्तुळाचे केंद्र कोणत्याही चरणात असू शकते, म्हणून l आणि m आधी $\pm$ चिन्ह वापरा. म्हणजे l आणि m चे गुणांक एक तर +1 किंवा – 1 आहेत.



आकृती 3.14: आरंभबिंदूमधून जाणारे वर्तुळ

टीप: जेव्हा वर्तुळाचे विस्तारित स्वरूप दिले जाते तेव्हा आपण त्याचे केंद्र आणि त्रिज्या शोधू शकतो.

वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आणि त्रिज्या शोधण्याचा नियम

वर्तुळाचे सामान्य समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ विचारात घेऊ.

(i) अशा बीजगणित स्वरूपात समीकरण लिहा जेणेकरून प्रत्येक समीकरणचे x^2 आणि y^2 गुणांक 1 असेल. जर तसे नसेल तर सामान्य समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना x^2 आणि y^2 गुणांकाने विभाजित करा, जे वर्तुळाच्या बाबतीत समान आहेत.

(ii) वर्तुळाचे केंद्रबिंदू निर्देशक $\left(-\frac{1}{2}\, x \text{ चा सहगुणक}, \frac{1}{2}\, y \text{ चा सहगुणक}\right)$ आहेत.

(iii) वर्तुळाची त्रिज्या $= \left[\left(\frac{1}{2}\, x \text{ चा सहगुणक}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} y \text{ चा सहगुणक}\right)^2 - \text{स्थिरांक}\right]^{1/2}$

वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या मुल्यांच्या आधारावर प्राप्त झालेल्या वर्तुळाचे स्वरूप (विभाग 3.4 पहा)

उदाहरण 10: आरंभबिंदूमधून जाणारे वर्तुळ $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 10 = 0$ आहे तर वर्तुळाच्या व्यासाचे समीकरण शोधा.

उत्तर: दिलेल्या वर्तुळाच्या केंद्र $C\left[-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(2)\right]$ or $(2, -1)$ आहे.

म्हणून व्यास म्हणजे आरंभबिंदू (0, 0) आणि केंद्र $C(2, -1)$ मधून जाणारी सरळ रेषा आहे

म्हणूनच $$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$y_1 = 0, y_2 = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$, च्या साठी

$$y - 0 = \frac{-1-0}{2-0}(x-0) \quad \text{किंवा} \quad y = \frac{-1}{2}x \quad \text{किंवा} \quad 2y = -x \quad \text{किंवा} \quad x + 2y = 0$$

उदाहरण 11: एक वर्तुळ (3, – 8) आणि (– 6, 6) बिंदूमधून जाते व त्या वर्तुळाचा केंद्र $2x - y = 7$ रेषेवर आहे तर वर्तुळाचे समीकरण शोधा.

उत्तर: सामान्य वर्तुळाचे समीकरण विचारात घेऊ.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ...(i)$$

जर हे (3, – 8) मधून गेले तर आपल्याकडे आहे

$$(3)^2 + (-8)^2 + 2g(3) + 2f(-8) + c = 0 \quad \text{किंवा} \quad 9 + 64 + 6g - 16f + c = 0$$

किंवा $$73 + 6g - 16f + c = 0 \qquad ...(ii)$$

जर हे (–6, 6) मधून गेले तर आपल्याकडे आहे, (*i*) वरून आपल्याला मिळेल

$$(-6)^2 + (6)^2 + 2g(-6) + 2f(6) + c = 0$$

$$36 + 36 - 12g + 12f + c = 0$$

$$-12g + 12f + c = -72 \qquad ...(iii)$$

केंद्रबिंदू $(-g, -f)$ हा $2x - y = 7$, रेषेवर आहे

$$\therefore \quad 2(-g) - (-f) = 7 \quad \text{किंवा} \quad -2g + f = 7 \qquad ...(iv)$$

(*ii*) आणि (*iv*) वरून आम्हाला मिळते

$$-13f + c = -52 \qquad ...(v)$$

(*iii*) आणि (*v*) वरून आम्हाला मिळते

$$6f + c = -114 \qquad ...(vi)$$

(*v*) मधून (*vi*) वजा केल्यास आम्हाला मिळते

$$\begin{array}{rcl} -13f + \cancel{c} & = & -52 \\ -6f + \cancel{c} & = & -114 \\ \hline - \quad\quad + & & \\ -19f & = & 62 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{-62}{19} = -3.3$$

म्हणून (*v*) वरून आम्हाला मिळते

$$c = -52 - 13 \times 3.3 = -52 - 42.9 = -94.9$$

म्हणून (*iv*) वरून आम्हाला मिळते

$$-2g - 3.3 = 7 \quad \Rightarrow \quad -2g = 7 + 3.3 = 10.3$$

$$\therefore \qquad g = \frac{-10.3}{2} = -5.1$$

आता आपल्याकडे, $f = -3.3, g = -5.1, c = -94.9$

म्हणून आवश्यक समीकरण आहे

$$x^2 + y^2 + 2(-5.1)x + 2(-3.3)y - 94.9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10.2x - 6.6y - 94.9 = 0$$

II. तीन दिलेल्या बिंदूंद्वारे वर्तुळाचे समीकरण

$L(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$ आणि $N(x_3, y_3)$ असे तीन दिलेल्या शिरोबिंदूंद्वारे वर्तुळाचे समीकरण काढण्यासाठी खालील वर्तुळाचे समीकरण घेऊ या.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ...(i)$$

$L(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$ आणि $N(x_3, y_3)$ हे तीन बिंदू (i) वर आहेत. त्यामुळे आपल्याकडे,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \qquad ...(ii)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \qquad ...(iii)$$

$$x_3^2 + y_3^2 + 2gx_3 + 2fy_3 + c = 0 \qquad ...(iv)$$

(i), (ii), (iii), आणि (iv) पासून g, f आणि c काढून खालील समीकरणे मिळतात.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

निष्कर्ष: जर चार बिंदू (x_r, y_r) येथे $r = 1, 2, 3, 4$ एका वर्तुळावर असतील तर

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 12: जे बिंदू $L(0, 1)$, $M(1, 0)$ आणि $N(3, 2)$ मधून जातात त्या वर्तुळाचे समीकरण शोधा. तसेच त्रिज्याचे मूल्य आणि केंद्राचे निर्देशांक शोधा.

उत्तर: समजा वर्तुळाचे सामान्य समीकरण दिले आहे

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad ...(i)$$

जर तो बिंदू $L(0, 1)$ मधून जात असेल तर

$$(0)^2 + (1)^2 + 2g(0) + 2f(1) + c = 0 \quad \text{किंवा} \quad 1 + 2f + c = 0 \quad \text{किंवा} \quad 2f + c + 1 = 0 \qquad ...(ii)$$

जर तो बिंदू $M(1, 0)$ मधून जात असेल तर

$$1^2 + 0^2 + 2g(1) + 2f(0) + c = 0 \quad \text{किंवा} \quad 1 + 2g + c = 0 \quad \text{किंवा} \quad 2g + c + 1 = 0 \qquad ...(iii)$$

जर तो बिंदू $N(3, 2)$, मधून जात असेल तर

$$3^2 + 2^2 + 2g(3) + 2f(2) + c = 0$$
$$9 + 4 + 6g + 4f + c = 0$$
$$6g + 4f + c + 13 = 0 \qquad ...(iv)$$

समीकरण (ii) आणि (iii) म्हणून विचार करू.

$$2f + c + 1 = 0$$
$$2g + c + 1 = 0$$

या दोघांकडून आपल्याला मिळते

$$2f = 2g \quad \text{किंवा} \quad f = g \qquad ...(v)$$

(iv) आणि (v) कडून, आम्हाला मिळते

$$6g + 4g + c + 13 = 0 \quad \text{किंवा} \quad 10g + c + 13 = 0 \qquad ...(vi)$$

(vi) मधून (iii) वजा केल्यास आपल्याला मिळते

$$8g = -12 \quad \text{किंवा} \quad g = -\frac{12}{8} = -1.5 \qquad ...(vii)$$

(v) कडून आम्हाला मिळते $f = g = -1.5$ आणि (ii) कडून आम्हाला मिळते

$$2(-1.5) + c + 1 = 0, \quad -3.0 + c + 1 = 0, \quad c = 3.0 - 1 = 2.0$$

म्हणून $f = g = -1.5$, $c = 2.0$ समीकरण (i) मध्ये टाकल्यावर वर्तुळाचे आवश्यक समीकरण प्राप्त होते.

$$x^2 + y^2 - 2(1.5)x - 2(1.5)y + 2.0 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

आता आपल्याला केंद्र c चे निर्देशांक ठरवायचे आहेत. $c\,(-g, -f) = (1.5, 1.5)$

$$\text{आणि त्रिज्या } r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(1.5)^2 + (1.5)^2 - 2} = \sqrt{2.25 + 2.25 - 2}$$
$$= \sqrt{4.50 - 2} = \sqrt{2.50} = 1.6$$

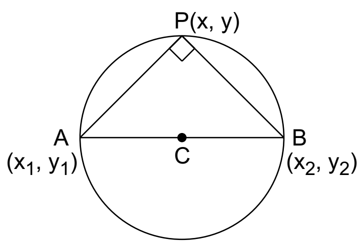
III. ***वर्तुळाचे व्यासरूपात समीकरण***

जर $A(x_1, y_1)$ आणि $B(x_2, y_2)$ वर्तुळाच्या व्यासाचे शेवटचे बिंदू आहेत आणि $P(x, y)$ हे वर्तुळावरील A आणि B व्यतिरिक्त परिघावरील बिंदू आहेत, तर भौमितिक पैलूवरून आम्हाला माहित आहे की

$\angle APB = 90°$

$\therefore \quad (PA \text{ चा चढ}) \times (PB \text{ चा चढ}) = -1$

$$\therefore \quad \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)\left(\frac{y - y_2}{x - x_2}\right) = -1$$



आकृती 3.15: व्यास स्वरूपात वर्तुळाचे समीकरण

$$\Rightarrow \quad (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

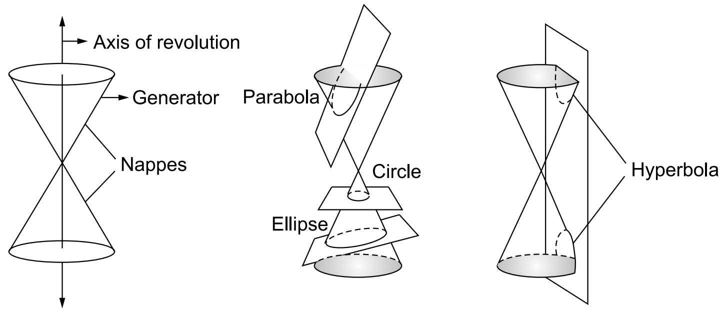
टिप्पणी: हे समीकरण (x_1, y_1) आणि (x_2, y_2) मधून कमीतकमी त्रिज्या असलेले वर्तुळ आहे.

3.4 कोनिक सेक्शन्स

शंकूच्या पृष्ठभागाच्या छेदनाने प्रतलासह मिळवलेले शंकू विभाग (किंवा फक्त कोनिक) वक्र आहेत. मुळात तीन प्रकारचे शंकू आहेत

(*i*) पॅराबोला (*ii*) हायपरबोला

(*iii*) इलिप्स (Ellipse) वर्तुळ इलिप्सचे एक विशेष भाग आहे.)



आकृती 3.16: शंकू आणि शंकू विभाग

अनुक्रमांक	प्रतल छेदतांना	मिळालेले कोनिक्स
(i)	निर्माण करणाऱ्या रेषेच्या समांतर आहे	पॅराबोला
(ii)	परिभ्रमण अक्षाला समांतर आहे	हायपरबोला
(iii)	अक्ष 90° व्यतिरिक्त छेदणे	इलिप्स
(iv)	परिभ्रमण अक्षाला लंब (90°) आहे	वर्तुळ

कोनिक सेक्शन किंवा कोनिक हा बिंदूचा संच जो प्रतलाभोवती फिरतो जेणेकरून त्याचे निश्चित बिंदूपासूनचे अंतर स्थिर सरळ रेषेपासून त्याच्या लंब अंतराच्या स्थिर गुणोत्तरामध्ये असते आणि हा निश्चित बिंदू एका निश्चित रेषेवर असत नाही. निश्चित बिंदूला फोकस म्हणतात. स्थिर गुणोत्तर एक्सेंट्रिसिटी (e द्वारे दर्शविले जाते) म्हणून ओळखले जाते. निश्चित सरळ रेषेला डायरेक्ट्रिक्स म्हणतात. त्याच्या फोकसमधून जाणारी आणि डायरेक्ट्रिक्सला लंब असलेल्या रेषेला परिभ्रमणचा अक्ष म्हणतात. आणि शंकूच्या त्याच्या परिभ्रमणच्या अक्ष्यासह छेदण्याच्या बिंदूला शिरोबिंदू म्हणतात.

कोनिकचे समीकरण

फोकस (s, t) आणि डायरेक्ट्रिक्स $lx + my + n = 0$ असलेल्या कोनिकचे समीकरण खाली दिले आहे

$$(l^2 + m^2)[(x - s)^2 + (y - t)^2] = e^2(lx + my + n)$$

$$\Rightarrow \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

जर $e > 1$, जर त्या कोनिकला हायपरबोला म्हणतात.

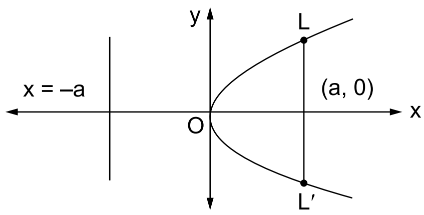
जर $e = 1$, त्या कोनिकला पॅराबोला म्हणतात.

जर $e < 1$, त्या कोनिकला इलिप्स म्हणतात.

3.4.1 पॅराबोला

पॅराबोला ही एक भौमितीय रचना आहे की जो बिंदूंचा संच असतो, जी भौमितिक प्रतलात फिरते जसे की एका निश्चित बिंदूपासून त्याचे अंतर नेहमी एका सरळ रेषेपासून (म्हणजे डायरेक्ट्रिक्स) त्याच्या अंतराच्या बरोबरीचे असते. पॅराबोलाचे समीकरण

$$y^2 = 4ax \qquad \text{...(1) आहे.}$$



आकृती 3.17: पॅराबोला

येथे x आणि y हे चल आहेत आणि a स्थिर आहे.

पॅराबोलाच्या समीकरण (1) तून आम्ही खालील संकल्पना शिकतो.

(i) शिरोबिंदू (vertex) (0, 0) आहे
(ii) फोकस (focus) (a, 0) आहे.
(iii) अक्ष $y = 0$
(iv) डायरेक्ट्रिक्स (directrix) $x + a = 0$ आहे.

काही महत्वाच्या अटी

(a) **फोकल अंतर (focal distance):** पॅराबोलावरील एका बिंदूची त्याच्या फोकसपासून लांबीला बिंदूचे फोकल अंतर म्हणतात.

(b) **फोकल जीवा (focal chord):** पॅराबोलाचा जीवा जो त्याच्या फोकसमधून फिरतो त्याला फोकल जीवा म्हणतात.

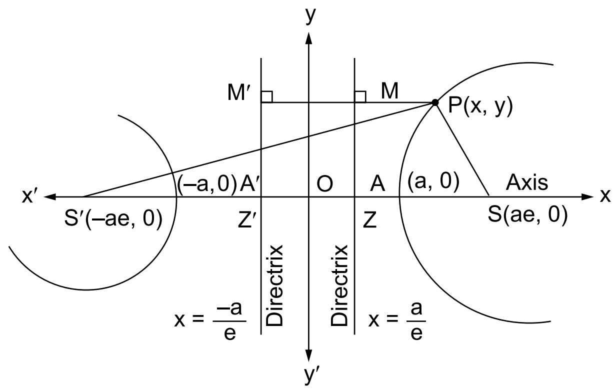
(c) **लॅटस रेक्टम (latus rectum):** जीवा फोकसमधून जाते आणि पॅराबोलाच्या अक्ष डायरेक्ट्रिक्सला लंब असतो त्याला लॅटस रेक्टम म्हणतात.

$y^2 = 4ax$, पॅराबोलासाठी आम्ही खालील अटी काढतो:

(i) लॅटस रेक्टमची लांबी = $4a$
(ii) सेमी लॅटस रेक्टमची लांबी = $2a$
(iii) लॅटस रेक्टमचे बिंदू = $L(a, 2a)$ आणि $L'(a, -2a)$ आहेत.

3.4.2 हायपरबोला

हायपरबोला शंकूपासून तयार होतो जेव्हा एक्सेंट्रिसिटी $e > 1$.



आकृती 3.18: हायपरबोला

व्याख्या: बिंदूंचा संच की ज्याची लांबी एका निश्चित बिंदूपासून (फोकस) निश्चित लांबीच्या एका निश्चित सरळ रेषेपासून (डायरेक्ट्रिक्स म्हणतात) हायपरबोला म्हणून परिभाषित केली जाते. म्हणून हायपरबोला हे $e > 1$ द्वारे दर्शविले जाते.

आता आम्ही हायपरबोलिक रचना गणितीय सूत्रात खालीलप्रमाणे व्यक्त करतो:

फोकस S चे निर्देशक $(ae, 0)$ आहेत आणि डायरेक्टरीक्स चे समीकरण $x = a/e$ आहे.

समजा $P(x, y)$ हायपरबोलावर कोणताही बिंदू असू द्या, मग आपल्याकडे $SP/PM = e$ किंवा $SP^2 = e^2 \times PM^2$ आहे.

किंवा $\quad (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2[x - (a/e)]^2$

किंवा $\quad (x - ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2$

किंवा $\quad (x^2)(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$

किंवा $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$ किंवा $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

येथे $b^2 = a^2(e^2 - 1)$, व $e > 1$, म्हणून $b^2 > 0$.

म्हणून हायपरबोलाचे सामान्य समीकरण (हायपरबोलाचे मुख्य समीकरण) आहे.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{(हायपरबोलाचे मुख्य समीकरण)}$$

येथे x आणि y हे चल आहेत. a आणि b स्थिर आहे व $b^2 = a^2(e^2 - 1)$. हायपरबोलाचे मुख्य समीकरणावरून आम्ही खालील संकल्पना शिकतो.

(i) या समीकरणात फक्त x आणि y चे सम घातांक असल्याने हायपरबोला दोन्ही अक्षांबद्दल सममितीय आहे.

(ii) हायपरबोला वास्तविक बिंदूंमध्ये y–अक्षाला छेदत नाही तर तो x–अक्षाला $(a, 0)$ आणि $(-a, 0)$ बिंदूत छेदतो.

(iii) $-a \le x \le a$, संबंधांसाठी y चे मूल्य काल्पनिक आहे. म्हणजे $x = -a$ ते $x = a$ या विभागात वक्र अस्तित्वात नाही.

(iv) जसे x वाढते, y देखील वाढते म्हणजे वक्र अनंतापर्यंत वाढते.

(v) जर c केंद्रातून केंद्रबिंदूची लांबी असेल तर हायपरबोलासाठी $c^2 = a^2 + b^2$ आणि $e = \dfrac{c}{a}$

काही महत्त्वाच्या व्याख्या

फोकाय आणि डायरेक्टॉ्यसेस: हायपरबोला y-अक्षाभोवती सममितीय आहे. म्हणून $S'(-ae,0)$ आणखी एक फोकस अस्तित्वात आहे. अशाप्रकारे असे आढळले की हायपरबोलाच्या भौमितिक रचनेमध्ये दोन फोकस $S(ae,0)$ आणि $S'(-ae,0)$ आहेत. समीकरणे $x = a/e$ आणि $x = -a/e$ असे दोन डायरेक्टॉ्यसेस फोकसशी संबंधित आहेत.

सेन्टर: C मधून हायपरबोलाची कोणतीही जीवा AB चा मध्यबिंदू C वर दुभाजक केला जाईल आणि म्हणून C ला हायपरबोलाचे सेन्टर म्हटले जाते. आम्ही हायपरबोला सर्व बिंदूंचा संच (x, y) म्हणून देखील समजावून देतो की (x, y) पासून फोकाय पर्यंतच्या लांबीचा फरक स्थिर आहे. शिरोबिंदू $(\pm a, 0)$, सह-शिरोबिंदू $(0, \pm b)$ आणि सेन्टर $(0, 0)$ असलेल्या हायपरबोलाचे समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ आहे.

3.4.3 इलिप्स

> **मजेशीर तथ्य:** वक्र (उदा. वर्तुळ, इलिप्स, पॅराबोला, हायपरबोला) हे कोनिक म्हणून ओळखले जातात कारण ते शंकूपासून प्राप्त केले जाऊ शकतात.

इलिप्सचे मुख्य समीकरण त्याच्या मुख्य अक्षांसह समन्वय अक्षांसह संदर्भित $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ आहे. येथे $a > b$ आणि $b^2 = a^2(1 - e^2)$

$$\Rightarrow \qquad a^2 - b^2 = a^2e^2$$

येथे e = एक्सेंट्रिसिटी $(0 < e < 1)$.

केंद्रबिंदू $F \equiv (ae, 0)$ आणि $F' \equiv (-ae, 0)$

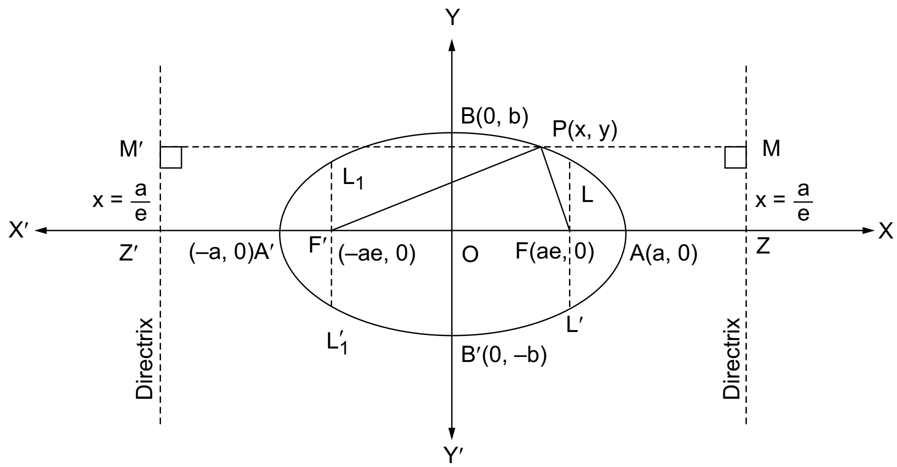
(1) शिरोबिंदू

$$A' \equiv (-a, 0) \text{ आणि } A \equiv (a, 0)$$

(2) डायरेक्ट्रायसेसचे समीकरण

$$x = \frac{a}{e} \text{ आणि } x = -\frac{a}{e}$$

(3) **मेजर अक्ष:** आकृतीत F' आणि F फोकाय हे $A'A$ आहेत. $A'A$ हा इलिप्सचा मेजर अक्ष $(a > b)$ आहे. मेजर अक्षाची लांबी $2a$ आहे. डायरेक्ट्रिक्स व मेजर अक्षांच्या छेदनबिंदू $\left(\pm\frac{a}{e}, 0\right)$ आहे. हा डायरेक्ट्रिक्सचा फुट आहे.



आकृती 3.19: इलिप्स

(4) **मायनर अक्ष:** y-अक्ष $B' \equiv (0, -b)$ आणि $B \equiv (0, b)$ बिंदूंमध्ये इलिप्सला छेदतो. $2b$ $(b < a)$ लांबीच्या रेषाखंड इलिप्सचा मायनर अक्ष आहे.

(5) **प्रिंसिपल अक्ष:** इलिप्सच्या मेजर आणि मायनर अक्षाला प्रिंसिपल अक्ष असे म्हणतात.

(6) **केंद्र:** ज्या बिंदूने $O \equiv (0, 0)$ शंकूच्या प्रत्येक जीवाला दुभाजक केले जाते त्याला शंकूचे केंद्र म्हणतात. आरंभबिंदूला इलिप्स $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ चे केंद्र म्हणतात.

(7) **लॅटस रेक्टम:** मेजर अक्षाला लंब असणाऱ्या फोकल जीवाला (focal chord) लॅटस रेक्टम म्हणतात.

(*i*) लॅटस रेक्टमची लांबी $(LL') = \dfrac{2b^2}{a}$ (*ii*) लॅटस रेक्टमचे समीकरण: $x = \pm ae$

(8) **फोकल त्रिज्या:** $SP = a - ex$ आणि $S'P = a + ex \Rightarrow SP + S'P = 2a =$ मेजर अक्ष

(9) **एक्सेंट्रिसिटी:** $e = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

टिप्पणी: इलिप्सवरील कोणत्याही बिंदूच्या फोकल लांबीची बेरीज नेहमी मेजर अक्षाच्या समान असते आणि $2a$ असते. (Fig.3.19)

टीप:

(*i*) जर इलिप्सच्या केंद्रापासून फोकसचे अंतर $= C$ तर $C = \sqrt{a^2 - b^2}$

(*ii*) जर इलिप्सचे समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ आहे आणि काहीही नमूद केलेले नसेल तर $a > b$. असे गृहीत धरले जाते.

(*iii*) इलिप्स हे दोन्ही समन्वय अक्षांच्या संदर्भात सममितीय आहे.

(*iv*) फॉसी नेहमीच मेजर अक्षांवर असतो.

उदाहरण 13: फोकस $(-2, 2)$, निर्देशांचे समीकरण $2x - 3y + 5 = 0$ आणि एक्सेंट्रिसिटी $1/3$ आहे तर इलिप्सचे समीकरण काढा.

उत्तर: समजा इलिप्सवर $P(x, y)$ बिंदू आहे. फोकस $(-2, 2)$ आहे आणि P बिंदूवरून त्याच्या डायरेक्ट्रिक्स $2x - 3y + 5 = 0$ वर PM लंब आहे. म्हणून $SP = ePM$ किंवा $SP^2 = e^2PM^2$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = e^2\left[\frac{2x-3y+5}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[\frac{2x-3y+5}{\sqrt{13}}\right]^2 = \frac{1}{(9\times 13)}(2x-3y+5)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{117}(2x-3y+5)^2$$

$$\Rightarrow \quad 117[x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4] = [4x^2 + 9y^2 - 12xy + 20x - 30y + 25]$$

$$\Rightarrow 113x^2 + 113y^2 + 12xy + 448x - 438y + 911 = 0$$

हे इलिप्सचे समीकरण आहे.

उदाहरण 14: जर इलिप्सचे लॅटस रेक्टम त्याच्या मायनर अक्षाच्या $1/2$ असेल तर खालीलपैकी 'e' ची किंमत काढा.

(*i*) $\dfrac{5}{2}$ (*ii*) $\dfrac{2}{5}$ (*iii*) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (*iv*) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

उत्तर: दिलेल्या माहितीनुसार $\frac{2b^2}{a} = \frac{2b}{2}$ (मायनर अक्ष = $2b$)

किंवा $\frac{2b^2}{a} = b$

$\Rightarrow$ $\frac{2b^2}{b} = a$

$\Rightarrow$ $2b = a$ ...(i)

(i) च्या दोन्ही बाजूचा वर्ग करू.

$$4b^2 = a^2$$

$\Rightarrow$ $4a^2(1 - e^2) = a^2$

$\Rightarrow$ $1 - e^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ $e^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ $e = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 15: $y^2 = 16x$ पॅराबोलाच्या फोकस, अक्ष, डायरेक्ट्रिक्सचे समीकरण आणि लॅटस रेक्टमचे निर्देशांक शोधा.

उत्तर: दिलेले समीकरणाची तुलना $y^2 = 4ax$ शी करू.

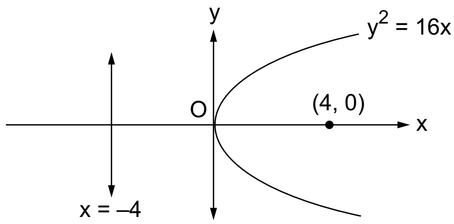
$\therefore$ $4a = 16$

$\Rightarrow$ $a = 4$

अशाप्रकारे पॅराबोलाचे फोकस (4,0) आहे. डायरेक्ट्रिक्सचे समीकरण

$x = -4$ आणि

लॅटस रेक्टम लांबीची $= 4a = 4 \times 4 = 16$ आहे.



आकृती 3.19: पॅराबोलाचे उदाहरण

उदाहरण 16: फोकस (4, 0) आणि निर्देशांचे समीकरण $x = -4$ असणाऱ्या पॅराबोलाचे समीकरण शोधा.

उत्तर: फोकस (4, 0) हा बिंदू x-अक्षावर आहे. x-अक्ष हा पॅराबोलाचा अक्ष आहे. म्हणून पॅराबोलाचे समीकरण $y^2 = 4ax$ किंवा $y^2 = -4ax$ असे आहे. परंतु हे दिले गेले आहे की डायरेक्ट्रिक्स $x = -4$ आणि फोकस (4, 0) आहे, पॅराबोला $y^2 = 4ax$ व $a = 4$ आहे.

$\therefore$ $y^2 = 4 \times 4 \times x \Rightarrow y^2 = 16x$ *समीकरण आहे*

उदाहरण 17: इलिप्स $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ चे फोकाय (केंद्रबिंदू), शिरोबिंदू, मेजर अक्ष, मायनर अक्षाची लांबी, एक्सेंट्रिसिटी आणि लॅटस रेक्टम शोधा.

उत्तर: ज्याअर्थी $9 > 4$

$\therefore$ मेजर अक्ष हा x अक्षावर आहे.

दिलेल्या समीकरणांची तुलना $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ करू. $a = 3, \quad b = 2$

$$\therefore \quad \text{एक्सेंट्रिसिटी } e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ फोकाय (केंद्रबिंदू) $(-\sqrt{5}, 0)$ आणि $(\sqrt{5}, 0)$; आहे; शिरोबिंदू $(-3, 0)$ आणि $(3, 0)$ आहेत.

मेजर अक्ष लांबी $= 2 \times a = 6$

मायनर अक्ष लांबी $= 2b = 4$

लॅटस रेक्टम लांबी $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 4}{3} = \frac{8}{3}$

उदाहरण 18: ज्याचे शिरोबिंदू $(\pm 10, 0)$ आणि फोकाय $(\pm 4, 0)$ आहे त्या इलिप्सचे समीकरण शोधा.

उत्तर: ज्याअर्थी शिरोबिंदू x-अक्षावर असल्याने इलिप्सचे समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ स्वरूपाचे असेल. उदाहरणातील माहितीनुसार $a = 10$, $c = 4$ आहे.

$\therefore \quad c^2 = a^2 - b^2$ चा उपयोग करून

$\Rightarrow \quad b = \sqrt{100-16}\,; \quad \Rightarrow b = \sqrt{84}$

$\therefore$ इलिप्सचे समीकरण $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{84} = 1$ आहे.

उदाहरण 19: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36} = 1$ हायपरबोलाचे फोकाय (केंद्रबिंदू – foci),शिरोबिंदू, एक्सेंट्रिसिटी आणि लॅटस रेक्टम लांबी, शोधा.

उत्तर: हायपरबोलाचे समीकरण $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36} = 1$ ...(1) आहे.

समीकरण (1) ची $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ तुलना करू.

$\therefore$ $a = 5$, $b = 6$ आणि $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$

$\therefore$ फोकाय $(\pm\sqrt{61}, 0)$ शिरोबिंदू $(\pm 5, 0)$

$$\text{एक्सेंट्रिसिटी } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

$$\text{लॅटस रेक्टम लांबी} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 36}{5} = \frac{72}{5}$$

> **मजेशीर तथ्य:** पॅराबोला आणि हायपरबोलाच्या संकल्पना ग्रीक गणितज्ञ अपोलोनिअसने 2000 पेक्षा जास्त वर्षांपूर्वी दिल्या होत्या.

उदाहरण 20: केंद्रबिंदू $(0, \pm 2)$ शिरोबिंदू $(0, \pm 1)$ असणाऱ्या हायपरबोलाचे समीकरण शोधा.

उत्तर: केंद्रबिंदू हा y- अक्षावर आहे म्हणून हायपरबोलाचे समीकरण $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ असेल.

शिरोबिंदू $(0, \pm 1)$, $a = 1$

केंद्रबिंदू $(0, \pm 2)$, $c = 2$

$\therefore \qquad b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$

$b^2 = 3$

$\therefore$ हायपरबोलाचे समीकरण $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} = 1$ म्हणून $9y^2 - x^2 = 9$ आहे.

समन्वय भूमितीचे अनुप्रयोग

- बांधकाम अंतर्गत इमारतीचे स्केच आराखड्यासाठी समन्वय भुमिती वापरता.
- गुगल नकाशे ही संकल्पना सर्वात लहान मार्ग सांगण्यासाठी वापरतात.
- MS पॉइंटमध्ये रेखांकन, वक्र आणि तिरकस रेषा वापरल्या जातात.
- ज्योतिष शास्त्रामध्ये, उदाहरणार्थ सूर्याभोवती ग्रहांची स्थिती जाणून घेणे (त्यांची कक्षा समान ग्रहण समतल आहे).
- रडार तंत्रज्ञानासह विमानांचे स्थान अचूकपणे निर्धारित करण्यासाठी उपयोग होतो.
- अक्षांश आणि रेखांश पूर्णपणे समन्वय भूमितीवर आधारित आहेत.
- लष्करी सेवा
- नकाशा अंदाज
- जमिनीचे मोजमाप इत्यादी

केस स्टडी

शेतकरी A ने खरेदी केलेल्या प्लॉटच्या सीमेचे निर्देशांक $x^2 + y^2 = 25$ समीकरण पूर्ण करतात. तर शेतकरी B ने खरेदी केलेल्या प्लॉटचे निर्देशांक $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ समीकरण पूर्ण करतात. आपण खालील उत्तर देऊ शकता?

1. शेतकरी A ने खरेदी केलेल्या भूखंडाचा आकार काय आहे?
2. शेतकरी A ने खरेदी केलेल्या प्लॉटच्या आकाराचे मापदंड सांगू शकाल का?
3. शेतकरी B ने खरेदी केलेल्या प्लॉटच्या सीमारेषेच्या समन्वयाने समाधानी वक्र आकार काय आहे?
4. तुम्ही शेतकरी B ने खरेदी केलेल्या प्लॉटचे मापदंड देऊ शकता का?
5. $(0, 0)$ हा बिंदू शेतकरी A च्या प्लॉटच्या सीमेवर आहे का?
6. शेतकरी B च्या प्लॉटच्या सीमेवर $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}}\right)$ हा बिंदू आहे का?

तपासा ! ! !

मॅटलॅबची मुलभूत माहिती शिकल्यानंतर, मॅटलॅबची विनामूल्य चाचणी आवृत्ती खालील URL वरून डाऊनलोड करा.

आणि युनिट 5 शिकल्यानंतर आपण खालील कोनिक्स प्लॉट करू शकता का ते तपासा

Math Works

1. $x^2 + y^2 = 1$
2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
3. $y^2 = 4ax$
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

सारांश

1. सरळ रेषा:

- अंतर सूत्र = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- विभाजनाचे सूत्र = $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1}, \frac{y_1 + ky_2}{k+1}\right)$
- त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$
- 2 बिंदू दिले असतांना चढ = $\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- जर रेषा

  (A) समांतर तर $m_1 = m_2$ आहे.

  (B) लंब तर $m_1 m_2 = -1$ आहे.
- दोन रेषांमधील कोन $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ आहे.

  जर $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ धन असेल तर θ तीव्र कोन ϕ विशाल कोन असेल.

  जर $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ऋण असेल तर θ विशाल कोन असेल.
- जर (A, B, C) बिंदू एकरेषीय असतील तर AB चा चढ = BC चा चढ असेल.

2. रेषेचे विविध समीकरणे

- स्लोप-पॉईंट फॉर्म (एक बिंदू व चढ दिलेला आहे.)

  $$y - y_0 = m(x - x_0)$$
- टू-पॉईंट फॉर्म (2 बिंदूचे निर्देशांक दिले आहेत.)

  $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- स्लोप-इंटरसेप्ट्स फॉर्म (चढ आणि इंटरसेप्ट दिले आहेत.)

  (A) y इंटरसेप्ट् c, $y = mx + c$

  (B) x इंटरसेप्ट् d, $y = m(x - d)$

- इंटरसेप्ट्स फॉर्म (x इंटरसेप्ट् a आणि y इंटरसेप्ट् b दिले आहे.)

  then, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

- स्लोप-इंटरसेप्ट्स फॉर्म (चढ आणि इंटरसेप्ट दिले आहेत.)

  (A) y इंटरसेप्ट् c, $y = mx + c$

  (B) x इंटरसेप्ट् d, $y = m(x - d)$

- इंटरसेप्ट्स फॉर्म (x इंटरसेप्ट् a आणि y इंटरसेप्ट् b दिले आहे.)

  then, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

- नॉर्मल फॉर्म (आरंभबिंदूपासून रेषा P मधील लंबाची लांबी आणि असा कोन θ जो नॉर्मलने x अक्षाच्या + दिशेला केलेला आहे)

  $x \cos \omega + y \sin \omega = P$

3. रेषेचे सामान्य समीकरण

is $Ax + By + C = 0$

- स्लोप - इंटरसेप्ट्स फॉर्म

  (A) $B \neq O$, $m = \frac{-A}{B}$ y-इंटरसेप्ट् $= \frac{-C}{B}$

  (B) $B = O$, $m =$ अपरिभाषित x-इंटरसेप्ट् $= \frac{-C}{A}$

- इंटरसेप्ट्स फॉर्म

  (I) $C \neq O$, x-इंटरसेप्ट् $= \frac{-C}{A}$ y-इंटरसेप्ट् $= \frac{-C}{B}$

  (II) $C = O$, अक्षांवर शून्य इंटरसेप्ट् (आरंभबिंदूमधून जाणारा)

- नॉर्मल फॉर्म $\frac{A}{\cos\theta} = \frac{B}{\sin\theta} = \frac{-C}{P}$

$$\cos\theta = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\theta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$P = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (P = +\text{ve})$$

4. **वर्तुळ:** वर्तुळाचे समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ येथे x, y चल आणि g, f, c हे स्थिरांक व केंद्र $(-g, -f)$ *i.e.*,

$$\left(-\frac{x \text{ चा सहगुणक}}{2}, \frac{-y \text{ चा सहगुणक}}{2}\right) \text{ आणि त्रिज्या } r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \text{ आहेत.}$$

- जर (l, m) केंद्रबिंदू आहे. आणि r ही वर्तुळाची त्रिज्या आहे तर वर्तुळाचे समीकरण $(x - l)^2 + (y - m)^2 = r^2$ आहे
- तीन दिलेल्या बिंदूंद्वारे वर्तुळाचे समीकरण: $\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$
- व्यास स्वरूपात वर्तुळाचे समीकरण: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

5. **पॅराबोला:** पॅराबोलाचे मुख्य

$$\boxed{y^2 = 4ax} \qquad \ldots(i) \text{ समीकरण आहे.}$$

येथे x आणि y चल आहेत व a हा स्थिरांक आहे.

पॅराबोलाच्या समीकरण (i) वरून आपण खालील निष्कर्ष काढतो:

(i) शिरोबिंदू $(0, 0)$ आहे.

(ii) फोकस $(a, 0)$ आहे.

(iii) अक्ष $y = 0$

(iv) डायरेक्ट्रिक्स $x + a = 0$ आहे.

6. **हायपरबोला:** हायपरबोलाचे मुख्य समीकरण $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ आहे.

येथे x आणि y चल आहेत व a आणि b स्थिरांक आहे व $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

जर c ही केंद्रबिंदूपासून फोसीची लांबी आहे तर $c^2 = a^2 + b^2$ आणि $e = \frac{c}{a}$

7. **इलिप्स:** इलिप्सचे समीकरण त्याच्या मुख्य अक्षांना निर्देशांक अक्षांसह खालीलप्रमाणे आहे. $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $= 1, a > b$ आणि $b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow a^2 - b^2 = a^2e^2$

- फोसी $F \equiv (ae, 0)$ आणि $F' \equiv (-ae, 0)$
- शिरोबिंदू - $A' \equiv (-a, 0)$ आणि $A \equiv (a, 0)$
- निर्देशांचे समीकरण - $x = \frac{a}{e}$ आणि $x = -\frac{a}{e}$
- जर C हे लंबवर्तुळाच्या केंद्रापासून फोकसचे अंतर आहे. तर $C = \sqrt{a^2 - b^2}$

सराव प्रश्न

विषय प्रश्न

Q.1. त्रिज्या 1 च्या पहिल्या चरणातील दोन्ही अक्षांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळाच्या समीकरणाचे काढा.

[**उत्तर.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$]

Q.2. जर दोन सरळ रेषांचा चढ 1/2 आणि 2 असेल तर दोन रेषांमधील छेदनबिंदूचा कोन शोधा. $\left[\textbf{उत्तर.}\ \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$

Q.3. $P(5, 3)$ आणि $Q(10, 2)$ हे दोन बिंदू आहेत तर PQ ला लंब असलेल्या रेषेचा उतार शोधा.

[**उत्तर.** चढ = 5]

Q.4. इलिप्सचे समीकरण $9x^2 + 25y^2 = 225$ आहे. केंद्रबिंदू आणि एक्सेंट्रिसिटी शोधा. $\left[\textbf{उत्तर.}\ \text{foci}(+4, 0); e = \frac{4}{5}\right]$

Q.5. केंद्रबिंदू $(\pm 1, 0)$ आणि एक्सेंट्रिसिटी 3/2 असलेल्या हायपरबोलाचे समीकरण शोधा. $\left[\textbf{उत्तर.}\ \frac{9x^2}{4} - \frac{9y^2}{5} = 1\right]$

Q.6. निर्देशांचे समीकरण $x = -6$ आणि केंद्रबिंदू (6, 0) तर पॅराबोलाचे समीकरण शोधा. [**उत्तर.** $y^2 = 24x$]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Q.1. बिंदू (5, 9) आणि (– 2, 5) मधून जाणाऱ्या रेषेचा चढ आहे.

(*a*) 5 (*b*) 9 (*c*) 4/7 (*d*) 0 [**उत्तर.** (*c*)]

Q.2. x-अक्षाच्या धन दिशेने 45° चा कोन बनवणाऱ्या रेषेचा चढ आहे.

(*a*) $\sqrt{3}$ (*b*) 1 (*c*) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*d*) ∞ [**उत्तर.** (*b*)]

Q.3. A, B, C हे तीन बिंदू xy- प्रतलात आहेत मग ते एकरेषीय असतील जर-

(*a*) OA चा चढ = BC चा चढ (*b*) AB चा चढ = BC चा चढ

(*c*) OC चा चढ = AB चा चढ (*d*) OB चा चढ = AC चा चढ [**उत्तर.** (*b*)]

Q.4. अक्षांना समांतर आणि (5, 8) मधून जाणाऱ्या रेषांचे समीकरण आहे.

(*a*) $x = 2, y = 8$ (*b*) $x = 5, y = 3$ (*c*) $x = 5, y = 9$ (*d*) $x = 5, y = 8$

[**उत्तर.** (*d*)]

Q.5. चढ 2 असणाऱ्या आणि (0, 1) बिंदूतून जाणाऱ्या रेषेचे समीकरण आहे.

(*a*) $y = 3x + 1$ (*b*) $2y = 2x + 1$ (*c*) $y = 2x + 1$ (*d*) $x = 3y + 1$

[**उत्तर.** (*c*)]

Q.6. केंद्र (0, 0) आणि त्रिज्या 5 असलेल्या वर्तुळाचे समीकरण आहे.

(*a*) $x^2 + y^2 = 9$ (*b*) $(x - 3)^2 + y^2 = 10$ (*c*) $x^2 + y^2 = 25$ (*d*) $x^2 + (y - 4)^2 = 9$

[**उत्तर.** (*c*)]

Q.7. इलिप्स म्हणजे प्रतलातील सर्व बिंदूंचा संच ज्याचे अंतर प्रतलातील दोन निश्चित बिंदूंपासून आहे

(*a*) स्थिरांक (*b*) चल (*c*) 0 (*d*) 1 [**उत्तर.** (*a*)]

Q.8. इलिप्सच्या लॅटस रेक्टम लांबी $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ आहे.

(*a*) $\frac{a^2}{2}$ (*b*) $\frac{b^2}{a}$ (*c*) $\frac{2b^2}{a}$ (*d*) 0 [**उत्तर.** (*c*)]

मिनी प्रकल्प

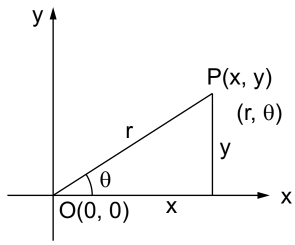
प्रत्येकी पाच विद्यार्थ्यांचा समावेश असलेले गट तयार करा. वर्तमानपत्रातून बनवलेल्या दहा उजव्या गोलाकार शंकूंमधून शंकू विभाग कापण्याचा प्रयत्न करा. प्रत्येक गटाने बनवलेल्या शंकू विभागाच्या प्रकार/संख्येसाठी एक टेबल बनवा. आपल्या निकालांची तुलना करा आणि आपल्या शिक्षकांना दाखवा.

क्रिया

समन्वय प्रणालीमध्ये सर्व प्रकारच्या शंकूच्या विभागांचे कटआउट वापरून $A3$ आकाराच्या शीटवर आपले स्वप्न घर स्केच करा. रंग देऊन आकर्षक बनवा. आपल्या ड्रीमहाऊस शीटसह (ऑनलाइन/ऑफलाइन) शाब्दिक सादरीकरण आपल्या शिक्षकांना शंकूच्या काही गुणधर्मांचे स्पष्टीकरण देखील द्या!

अधिक जाणून घेऊ या !

पोलर कॉ-ओर्डीनेट सिस्टीम



आकृती 3.21: ध्रुवीय निर्देशक प्रणाली

समजा P ह्या बिंदूचे (x, y) निर्देशक आहेत. आकृती 3.21

आता $x = r\cos\theta$ ...(1)

$y = r\sin\theta$ ...(2)

वरील रिलेशनला दोन्ही बाजूंचा वर्ग करा (1) आणि (2) वरून,

$$x^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$y^2 = r^2\sin^2\theta$$

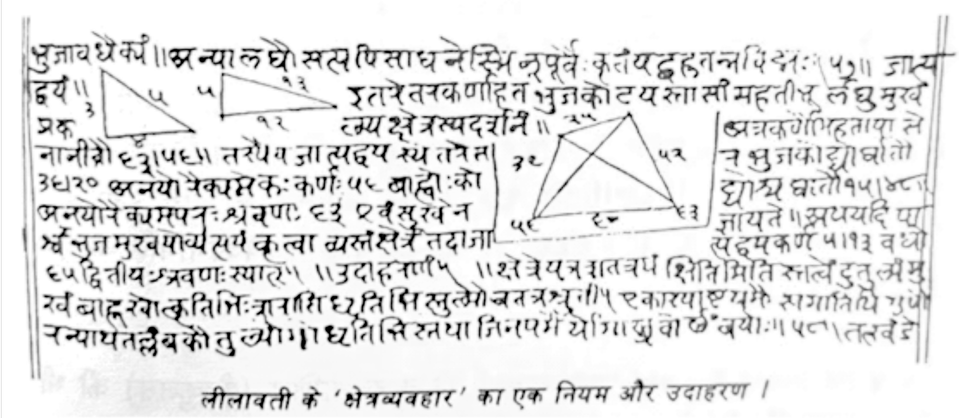
$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \qquad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

संदर्भ /सुचवलेले वाचन

- ***Loney S.L.(1895),*** The Elements of Coordinate Geometry part I, Cartesian coordinates, Cambridge University press.
- ***NCERT,*** Mathematics Text Book for Class XI.
- Vasishtha A.R. & Agrawal D.C. (2019)Analytical Geometry 2D, Krishna's educational Publishers.
- ***Ballabh Ram, Saran Raghunath (13th edition)*** Co-ordinate Geometry, Prakashan Kendra, Lucknow.
- ***Chatteerji P.N. (1998),*** Co-ordinate Geometry, Rajhans Publication, Meerut.



An excerpt from Bhaskaracharya's book 'Leelavati'
(**Source:** Muley Gunakar (1992), Sansaar ke Mahan Ganitagya, Raajkamal Prakashan)

4 व्हेक्टर अलजेब्रा

युनिट वैशिष्ट्ये

व्याख्या, नोटेशन आणि व्हेक्टरचे रेक्टँग्युलर रिझोल्युशन, व्हेक्टरची बेरीज आणि वजाबाकी, 2 व्हेक्टरचे स्केलर आणि व्हेक्टर प्रॉडक्ट, वर्क, मोमेंट आणि अँग्युलर व्हेलॉसिटीवरील उदाहरणे.

अभ्यासाचे औचित्य

व्हेक्टर अलजेब्रामध्ये सदिश राशी (vector quantity) म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या गणितीय वस्तूंचा अभ्यास असतो (ज्यामध्ये परिमाण आणि दिशा दोन्ही आहेत). बाबी सुलभ करण्यासाठी हे अनेक वर्षांमध्ये विकसित झाले आहे. भुमितीपेक्षा व्हेक्टर अलजेब्रामध्ये लागू करणे तुलनेने सोपे आहे आणि कमी नियमांचे ज्ञान आवश्यक आहे. आपण बेसिक अलजेब्रामध्ये लागू केलेले बरेच नियम व्हेक्टर अलजेब्रामध्ये देखील लागू केले जातात.

हे गणित, भौतिकशास्त्र, अभियांत्रिकी आणि इतर अनेक क्षेत्रांमध्ये मोठ्या प्रमाणावर वापरले जाते. विस्थापन, वेग, प्रवेग, शक्ती, वजन, विद्युत क्षेत्राची तीव्रता, गती इ. काही सदिश राशीची उदाहरणे आहेत. शक्ती, टॉर्क, वेग, प्रक्षेपण, लष्करी, गेमिंग, क्रिकेट इत्यादींमध्ये सदिशांचा मोठ्या प्रमाणावर वापर केला जातो. म्हणून सदिश हे अनेक जटिल मार्गांपेक्षा हाताळणे खूप सोपे आहे जे त्यांना खूप उपयुक्त बनवतात! सदिश व्यापक स्वरूपात वापरता येते.

पुर्व-ज्ञान

- बेसिक अलजेब्राचे ज्ञान.
- काम, काळ आणि कोनीय वेगांचे मुळ ज्ञान.

घटक परिणाम

या घटकाचे परिणाम खालीलप्रमाणे आहेत.

U4-O1: सदिशांची संकल्पना, त्याचे आयताकृती ठराव स्पष्ट करा.

U4-O2: सदिशांवर मुलभूत क्रिया जसे - बेरीज, वजाबाकी, स्केलर गुणाकार करणे.

U4-O3: दोन व्हेक्टरचा स्केलर प्रॉडक्ट आणि व्हेक्टर शोधणे.

U4-O4: व्हेक्टरच्या संदर्भात काम, काळ आणि कोनीय वेगांचे संबंधित सोप्या समस्या सोडवणे.

CO-UO मॅपिंग

युनिट-4: निष्पत्ती (UO)	अपेक्षित पाठ्यक्रम निष्पत्ती मॅपिंग (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U4-O1	-	-	1	3	1
U4-O2	-	-	1	3	1
U4-O3	1	-	1	3	1
U4-O4	1	-	-	3	1

4.1 परिचय

दररोज आपण अनेक भौतिक राशी अनुभवतो जसे की इमारतीची उंची मोजताना त्याचे मापन 10 मीटर असू शकते. येथे फक्त परिमाण (वास्तविक संख्या) समाविष्ट असते. अशा राशींना स्केलर (scalar) म्हणतात. जर आपण विचार केला की हॉकी खेळाडूने त्याच्या संघातील दुसऱ्या खेळाडूला पास कसा द्यावा, तर त्यात माप (ताकद) आणि दिशा (दुसऱ्या खेळाडूची स्थिती) दोन्ही समाविष्ट आहे. अशा राशींना व्हेक्टर (vector) म्हणतात. या युनिटमध्ये आपण व्हेक्टरबद्दल थोडक्यात अभ्यास करू. गणित, भौतिकशास्त्र, तांत्रिक शाखा इत्यादी विविध प्रकारच्या समस्या हाताळण्यासाठी व्हेक्टर वापरले जाऊ शकतात. ते परिमाणांव्यतिरिक्त दिशा असलेल्या अभ्यास सुलभ करतात. भौतिक राशी खालीलप्रमाणे विभागले गेले आहेत -

1. **सदिश राशी:** ज्या राशींना परिमाण आणि दिशा दोन्ही असतात. त्यांना सदिश राशी म्हणतात उदाहरणार्थ - विस्थापन, वेग, वजन, बल, कोनीय वेग, क्षण इ.
2. **अदिश राशी:** ज्या राशींना फक्त परिमाण आहे त्यांना अदिश राशी म्हणतात. उदाहरणार्थ – वस्तुमान, आकारमान, कामाचे तापमान इ.

उदाहरण 1: खालील स्केलर (अदिश) आणि व्हेक्टर (सदिश) म्हणून वर्गीकृत करा.

(a) 10 मी वायव्य (b) 10^{-10} कूलम्ब

(c) 20 किमी / तास दिशेने (d) पूर्व दिशेने 15 मी/से

(e) 100 न्यूटन

उत्तर: (a) हे दिशेसह अंतर आहे त्यामुळे ही व्हेक्टर आहे.

(b) हे एक विद्युत शुल्क आहे म्हणून स्केलर आहे.

(c) हे वेग आहे म्हणून व्हेक्टर आहे.

(d) ही एक वस्तूची गती आहे त्यामुळे ही व्हेक्टर आहे.

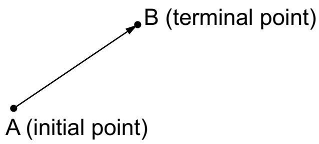
(e) ही एक शक्ती आहे त्यामुळे ही व्हेक्टर आहे.

मजेशीर तथ्य: 'व्हेक्टर' आणि 'स्केलर' या दोन्ही संज्ञा लॅटिनमधून आल्या आहेत. व्हेक्टर हे व्हेअरपासून आले आहे म्हणजे 'वाहून नेणे'; स्केलर हे स्केलेरियापासून आले आहे. स्केलेरिया म्हणजे 'शिडी'.

व्हेक्टर्सचे प्रतिनिधीत्व

आठवा: दोन शेवटच्या बिंदूंसह सरळ रेषेचा कोणताही भाग - आरंभिक (A) आणि शेवटचा (B) ला निर्देशित रेषाखंड म्हणतात (म्हणून $\overrightarrow{AB}$ दर्शविले आहे.)

निर्देशित रेषाखंडाला सदिश (vector) म्हणतात.



आकृती 4.1: व्हेक्टरचे प्रतिनिधित्व

प्रत्येक व्हेक्टरला (आकृती 4.1) मध्ये खालील तीन वैशिष्ट्ये आहेत-

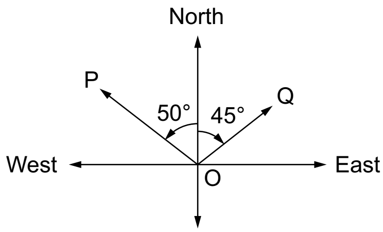
1. **लांबी (Length):** $\overrightarrow{AB}$ ची लांबी $|\overrightarrow{AB}|$ द्वारे दर्शवली जाते.
2. **सपोर्ट (Support):** अमर्यादित लांबीची रेषा ज्याचा व्हेक्टर $\overrightarrow{AB}$ भाग आहे त्याला त्याचे सपोर्ट म्हणतात.
3. **सेन्स (Sense):** हे त्याच्या प्रारंभिक बिंदूपासून शेवटच्या बिंदूपर्यंत आहे. म्हणजेच AB चा अर्थ A पासून B पर्यंत आहे आणि BA चा अर्थ B पासून A पर्यंत आहे.

टीप: सदिश हे (Vector) बाण लावून दर्शविले जातात जसे की $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OP}$ इ. कधीकधी ते एकाच लेटरने $\vec{a}$, $\vec{F}$ इत्यादीद्वारे देखील दर्शविले जाते.

उदाहरण 2: ग्राफिक रूपात प्रतिनिधित्व करा:

(i) 80 किमीचे विस्थापन, उत्तरेच्या पश्चिम 50°

(ii) उत्तर-पूर्व 30 किमीचे विस्थापन.



आकृती 4.2: व्हेक्टरचे ग्राफिकल उदाहरण

उत्तर: Fig.4.2 चा विचार करा.

(i) सदिश $\overrightarrow{OP}$ आवश्यक व्हेक्टरचे प्रतिनिधित्व करतो.

(ii) सदिश $\overrightarrow{OQ}$ आवश्यक व्हेक्टरचे प्रतिनिधित्व करतो.

टीपः परिमाण म्हणजेच व्हेक्टरच्या आरंभिक आणि शेवटच्या बिंदूमधील अंतर नेहमीच धन वास्तविक संख्या असते आणि म्हणून ते $|\overrightarrow{OA}|$ किंवा $|\vec{a}|$ किंवा a असते. जर $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$ असेल तर $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ने दर्शविली जाते.

4.2 व्हेक्टरचे आयताकृती रिझोल्यूशन

एखाद्या व्हेक्टरचे रिझोल्यूशन याचा अर्थ एखाद्या विशिष्ट दिशेने व्हेक्टरचा प्रभाव निश्चित करणे आणि म्हणून मिळविलेले विभाजन व्हेक्टरचे घटक म्हणून ओळखले जातात. दिलेल्या व्हेक्टरचे हे घटक एकमेकांना लंब (at 90°) असल्यास त्याला आयताकृती घटक

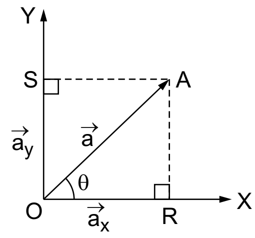
म्हणतात. आपण व्हेक्टर $\vec{a}$ चे आयताकृती रिझोल्यूशन शोधण्याच्या उदाहरणावर विचार करू या. Fig.4.3 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे व्हेक्टर $\vec{a}$ हे $\overrightarrow{OA}$ ने दर्शविली जाते. बिंदू O पासून दोन परस्पर लंब अक्ष X आणि Y बिंदू A वरून काढले आहेत. दोन लंब AR आणि AS अनुक्रमे X आणि Y अक्षावर आहेत. मग काटकोन त्रिकोण ORA चा विचार करा. येथे व्हेक्टर $\vec{a}$ हा X- अक्षाच्या धन दिशेने θ कोन बनवितो.

म्हणून आपल्याकडे $\cos\theta = \dfrac{OR}{OA}$ आहे.

$\Rightarrow \quad OR = OA\cos\theta$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_x = \vec{a}\cos\theta}$ ...(1)

त्याप्रमाणे, $\boxed{\vec{a}_y = \vec{a}\sin\theta}$ ...(2)



आकृती 4.3: व्हेक्टरचे आयताकृती रिझोल्युशन

अशाप्रकारे आपण व्हेक्टर $\vec{a}$ चे $\vec{a}_x$ आणि $\vec{a}_y$ दोन आयताकृती घटकांमध्ये अनुक्रमे X आणि Y अक्षांसह निराकरण केले आहे. $\vec{a}_x$ ला $\vec{a}$ चा x-घटक म्हणतात आणि $\vec{a}_y$ ला $\vec{a}$ चा y-घटक म्हणतात.

आता (1) आणि (2) कडून आम्हाला मिळते,

$$\cos\theta = \frac{a_x}{a} \quad \text{आणि} \quad \sin\theta = \frac{a_y}{a}$$

दोन्ही बाजूचा वर्ग करून बेरीज करु,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{a^2} \qquad ...(3)$$

परंतु $\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \quad (3) \Rightarrow \quad \dfrac{a_x^2 + a_y^2}{a^2} = 1$

$\Rightarrow \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2$

$\Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

यालाच $\vec{a}$ चे परिमाण (magnitude) म्हणतात.

टीप: जर $\hat{i}$ आणि $\hat{j}$ हे युनिट परिमाणांचे व्हेक्टर अनुक्रमे OX आणि OY अक्षांवर दर्शवत असतील तर $\vec{a}_x = a\cos\theta\hat{i}$ आणि $\vec{a}_y = a\sin\theta\hat{j}$.

म्हणून $\vec{a} = a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}$

टीप: युनिट व्हेक्टर (unit vector) $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ व्हेक्टर $\hat{a}$ च्या दिशेने मिळतो. त्याचे परिमाण (magnitude) 1 असते.

4.3 व्हेक्टरचा अलजेब्रा

सदिशांना (vector) परिमाण व दिशा असते, म्हणून त्यांचे बीजगणित वास्तविक संख्यांपेक्षा वेगळे असते.

(*a*) **दोन व्हेक्टरची बेरीज (Addition of two vectors):** समजा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ असे दोन व्हेक्टर प्रतला (plane) मध्ये आहेत आणि ते अनुक्रमे $\overrightarrow{OA}$ आणि $\overrightarrow{AB}$ दर्शविलेले आहेत. मग त्यांची बेरीज पुढील दोन मार्गांनी केले जाऊ शकते.

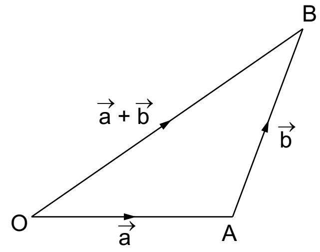
(1) **व्हेक्टर ॲडिशनचा ट्रँगल लॉ**

येथे $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ अशा दोन व्हेक्टरची बेरीज करायची आहे. या लॉ नुसार आम्ही fig.4.4 काढतो ज्यामध्ये प्रारंभिक बिंदू $\vec{b}$ हा शेवटचा बिंदू $\vec{a}$ शी जुळतो.

म्हणून $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

दोन व्हेक्टर ॲडिशनच्या या पद्धतीला व्हेक्टर ॲडिशनचा ट्रँगल लॉ म्हणतात.



आकृती 4.4: व्हेक्टर ॲडिशनचा ट्रँगल लॉ

टीप: बेरीज/रिझल्टंट

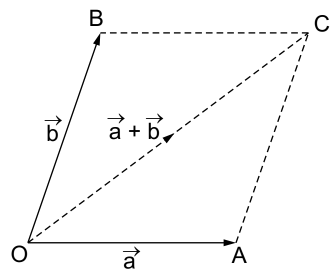
जर $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ व $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$

तर, $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j}$

(2) **व्हेक्टर ॲडिशनचा पॅरेलेलोग्राम लॉ:**

या लॉनुसार आपण व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ असे काढतो की दोन्ही सुरुवातीच्या बिंदूंशी जुळतो. मग आम्ही या दोन व्हेक्टरना समांतरभुजांच्या समीप (adjacent) बाजू मानतो. आम्ही समांतरभुज चौकोन (parallelogram) पूर्ण करतो. समांतर बिंदूद्वारे या समांतरभुजातून मिळवलेला कर्ण हा दाखवलेल्या दोन सदिशांची बेरीज देतो. (आकृती 4.5)

म्हणून $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$



आकृती 4.5: व्हेक्टर ॲडिशनचा पॅरेलेलोग्राम लॉ

दोन व्हेक्टर बेरजेच्या पद्धतीला व्हेक्टर ॲडिशनच्या पॅरेलेलोग्राम लॉ म्हणतात.

व्हेक्टर ॲडिशनचे गुणधर्म

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (कॉमिटेटिव्ह)

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (असोसिएटिव्ह)

(3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$ (ॲडिटीव्ह आयडेंटीटी)

(4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}$ (ॲडिटीव्ह इन्व्हर्स)

(*b*) **स्केलरद्वारे व्हेक्टरचे गुणाकार**: समजा $\vec{a}$ हा व्हेक्टर आणि m एक स्केलर आहे, तर $\vec{b} = m\vec{a}$ ला $|m\vec{a}|$ मॅग्निट्यूड म्हणून परिभाषित करतो. जर m पॉझिटिव्ह असेल तर व्हेक्टर $\vec{b} = m\vec{a}$ ची दिशा $\vec{a}$ च्या दिशेने असते. अन्यथा $\vec{a}$ विरुद्ध दिशेने असेल. या गुणाकाराला स्केलर गुणाकार म्हणतात.

उदाहरणार्थ, जर आपण (-1) ने $\vec{a}$ ला गुणले तर त्याची दिशा विरुध्द होते म्हणजेच $\vec{a}$ आणि $\vec{a}$ समान परिमाण आहेत परंतु विरुध्द दिशानिर्देश आहेत.

टीप: जर $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ असेल तर $m\vec{a} = (ma_1)\hat{i} + (ma_2)\hat{j}$

(c) **व्हेक्टरची वजाबाकी:** समजा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ दोन व्हेक्टर आहेत. मग या व्हेक्टरची वजाबाकी $\vec{a} - \vec{b}$ ही व्हेक्टरची बेरीज $\vec{a}$ आणि $(-\vec{b})$ म्हणून परिभाषित केली जाते. यासाठी आम्ही $\vec{b}$ ची दिशा उलट करतो आणि $\vec{a}$ शी बेरीज करतो. (आकृती 4.6)

टीप:

1. जर $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ आणि $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$ तर, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j}$
2. सुरुवातीच्या बिंदूंचा विचार न करता दोन व्हेक्टर समान आहेत असे म्हटले जाते जर त्यांच्याकडे समान परिमाण / घटक आणि समान दिशा असेल, उदाहरणार्थ: जर $\vec{x} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ आणि $\vec{y} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ आणि $\vec{x} = \vec{y}$ तर आणि तरच $a_1 = a_2$ व $b_1 = b_2$.

उदाहरण 3: जर $\vec{x} = a\hat{i} + 2\hat{j}$ आणि $\vec{y} = 4\hat{i} + b\hat{j}$ समान असतील तर a, b चे मॅग्निट्यूड काढा.

उत्तर: जर दोन व्हेक्टर समान असतात तर त्यांचे संबंधित घटक समान असतील.

अशा प्रकारे $\vec{x}$ आणि $\vec{y}$ समान असतील जर $a = 4$ आणि $b = 2$.

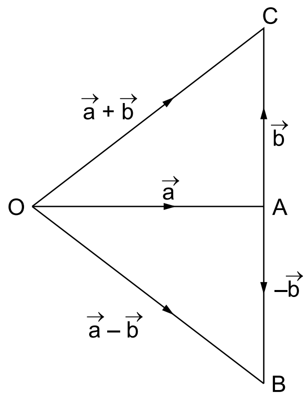
उदाहरण 4: समजा $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ आणि $\vec{b} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ आहे? व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ समान आहेत का?

उत्तर: We have $|\vec{a}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

आणि $|\vec{b}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

म्हणून $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

परंतु दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ समान नाहीत कारण त्यांचे संबंधित घटक वेगळे आहेत.



आकृती 4.6: व्हेक्टरची वजाबाकी

उदाहरण 5: $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ आणि $\vec{b} = 4\hat{i} + 5\hat{j}$ च्या बेरीजच्या दिशेने युनिट व्हेक्टर शोधा.

उत्तर: $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ ची बेरीज $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = 5\hat{i} + 7\hat{j}$

आहे म्हणून $|\vec{c}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

अशा प्रकारे आवश्यक युनिट व्हेक्टर

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{74}}[5\hat{i} + 7\hat{j}]$$

$$\Rightarrow \quad \hat{c} = \frac{5}{\sqrt{74}}\hat{i} + \frac{7}{\sqrt{74}}\hat{j}$$

मजेशीर तथ्य: व्हेक्टर ॲनॅलिसिस त्याच्या आधुनिक स्वरुपात मूलतः 1800 च्या उत्तरार्धात विद्युत आणि चुंबकीय क्षेत्रांसारख्या भौतिक प्रमाणांची गतिशीलता व्यक्त करण्यासाठी विकसित केले गेले.

उदाहरण 6: व्हेक्टर $\vec{b} = 4\hat{i}+9\hat{j}$ हा $\vec{a} = 3\hat{i}+20\hat{j}$ मधून वजा करा.

उत्तर: आपल्याला $\vec{a} - \vec{b}$ शोधायचे आहे

$$-\vec{b} = -4\hat{i}-9\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{a} - \vec{b} = (3-4)\hat{i}+(20-9)\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = -\hat{i}+11\hat{j}$$

प्रश्न 1: समान परिमाण असलेले दोन भिन्न व्हेक्टर लिहा.

प्रश्न 2: समान दिशा असलेले दोन भिन्न व्हेक्टर लिहा.

शेरा: त्रिमितीय सिस्टीममधील (three dimensional system) कोणताही व्हेक्टर $\vec{a}$ हा $\vec{a} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, च्या स्वरूपात लिहिता येतो. $\hat{i}$, $\hat{j}$ आणि $\hat{k}$ हे x-अक्ष, y-अक्ष आणि z-अक्षाला समांतर युनिट व्हेक्टर आहेत. $\vec{a}$ चे मॅग्निट्यूड $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4.4 व्हेक्टरचे प्रकार

1. **झिरो/नल व्हेक्टर:** ज्या व्हेक्टरचे परिमाण (magnitude) झिरो आहे त्याला झिरो व्हेक्टर म्हणतात आणि 0 द्वारे दर्शविले जाते.
2. **को-इनिशिअल व्हेक्टर:** समान प्रारंभिक बिंदू असलेल्या दोन किंवा अधिक व्हेक्टरना को-इनिशिअल वेक्टर म्हणतात.
3. **कोलिनिअर व्हेक्टर्स:** दोन किंवा अधिक व्हेक्टर्स त्यांच्या परिमाण आणि दिशानिर्देश यांचा विचार न करता त्याच रेषेच्या समांतर असतील तर ते कोलिनिअर व्हेक्टर्स असल्याचे म्हटले जाते.
4. **फ्री व्हेक्टर:** जर व्हेक्टरचे मूल्य केवळ त्याच्या लांबी आणि दिशेवर अवलंबून असेल आणि अंतराळात त्याच्या स्थानापासून स्वतंत्र असेल तर त्याला फ्री व्हेक्टर म्हणतात आणि अंतराळात त्याच्या स्थानापासून स्वतंत्र असेल तर त्याला फ्री व्हेक्टर म्हणतात.
5. **कोटर्मिनस व्हेक्टर:** V समान टर्मिनल पॉइंट्स (terminal points) असलेल्या व्हेक्टरना कोटर्मिनस व्हेक्टर म्हणतात.

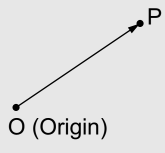
टीप: P ह्या बिंदूचा पोजिशन व्हेक्टर (आकृती 4.7) $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

येथे $\hat{i}$ - x-अक्षाचा युनिट व्हेक्टर

$\hat{j}$ - y-अक्षाचा युनिट व्हेक्टर

$\hat{k}$ - z-अक्षाचा युनिट व्हेक्टर

$$\therefore \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



आकृती 4.7: बिंदूचा पोजिशन व्हेक्टर

उदाहरण 7: दिलेल्या fig.4.8 मध्ये कोणते व्हेक्टर आहेत:

(*i*) कोलिनिअर

(*ii*) कोलिनिअर पण समान नाही

(*iii*) समान

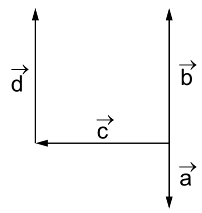
(*iv*) को-इनिशिअल आहेत.

उत्तर: (*i*) व्हेक्टर $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ कोलिनिअर आहेत.

(*ii*) $\vec{a}$ and $\vec{d}$ व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{d}$ कोलिनिअर आहेत पण समान नाही कारण त्यांच्या दिशा समान नाहीत.

(*iii*) व्हेक्टर $\vec{b}, \vec{d}$ हे समान आहेत.

(*iv*) व्हेक्टर $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ हे को-इनिशिअल आहेत.



आकृती 4.8: व्हेक्टरवरील उदाहरणे

4.5 दोन व्हेक्टरचा गुणाकार

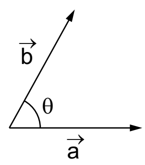
दोन व्हेक्टरचा गुणाकार दोन पद्धतींने काढले जातात.

1. डॉट प्रॉडक्ट किंवा स्केलर प्रॉडक्ट:

दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चा डॉट प्रॉडक्ट किंवा स्केलर प्रॉडक्ट हा

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad ...(1)$$

आहे. येथे a आणि b हे अनुक्रमे $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चे परिमाण आहेत आणि θ त्यांच्या दरम्यानचा कोन आहे (आकृती 4.9). स्केलर प्रॉडक्ट ही अदिश राशी (scalar quantity) आहे. स्केलर प्रॉडक्ट हा a च्या परिमाणाला b च्या a वर असणाऱ्या प्रोजेक्शनशी गुणाकार करून येतो ($ab \cos \theta$). परस्पर लंब असलेल्या दोन व्हेक्टरमधील स्केलर प्रॉडक्ट शून्य आहे ($\cos 90° = 0$)



आकृती 4.9: डॉट/स्केलर प्रॉडक्ट

टीप:

1. स्केलर प्रॉडक्ट कॉमिटेटिव्ह आहे.
   i.e., $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
   स्केलर प्रॉडक्ट डिस्ट्रीब्युटिव्ह आहे.
   i.e., $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
2. जर $\theta = 0$, तर $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$ and $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$
3. जर $\theta = \pi$, तर $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$
4. $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन θ ने दिला आहे $\cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$ (from (1))
   $$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right)$$

स्केलर प्रॉडक्ट घटकांच्या स्वरूपात

जर $\vec{a} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ आणि $\vec{b} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$

तर $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

विशेषतः $\quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$

उदाहरण 8: $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन ‘θ’ ची किंमत शोधा.

उत्तर: दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन $\cos \theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$ आहे.

म्हणून $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + ((-2) \cdot 3) = 1 + 2 - 6 = -3$

आणि $\quad a = |\vec{a}| = \sqrt{6}$

$$b = |\vec{b}| = \sqrt{14}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{2\times3\times7\times2}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left[\frac{-3}{2\sqrt{21}}\right]$$

उदाहरण 9: जर $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ आणि $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\hat{k}$, आणि $\vec{a} + \vec{b}$ व $\vec{a} - \vec{b}$ ऑर्थोगोनल आहेत. तर λ ची किंमत शोधा

उत्तर: $\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + (5+\lambda)\hat{k}$ आणि $\vec{a} - \vec{b} = -2\hat{j} + (5-\lambda)\hat{k}$

परंतू $(\vec{a} + \vec{b})$ आणि $(\vec{a} - \vec{b})$ ऑर्थोगोनल आहेत. (90°)

$$\therefore \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 0) + (0 \cdot (-2) + (5 + \lambda)(5 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 25 - \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \pm 5$$

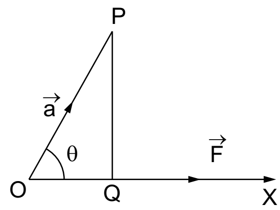
स्केलर प्रॉडक्टचे उपयोग

वर्क (कार्य) (मेकॅनिक्स)

जर वस्तू एखाद्या दिशेने विस्थापित (displaced) झाली व शक्तीला (force) लंब नसेल तर वस्तूवर कार्य करणारी शक्तीला वर्क (work) केले असे म्हटले जाते. ही स्केलर राशी आहे.

$\therefore$ वर्क = फोर्स × फोर्सच्या दिशेने विस्थापन (आकृती 4.10).

$\therefore \quad W = \vec{F} \cdot \vec{a} = Fa\cos\theta.$



आकृती 4.10

> **टिप्पणी:** बलाने (force) केलेले कार्य (work) हे अदिश राशी आहे. हे शक्तीच्या परिमाण आणि विस्थापन केलेल्या गुणाकाराच्या बरोबरीचे आहे. जर $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ हे वस्तूंवर कार्य करणारी शक्ती आहेत म्हणजेच या n फोर्सेस त्याच्या परिणामी बल $\vec{R}$ ने दाखवली जातात. तर वस्तूंच्या विस्थापन d दरम्यान n शक्तींनी केलेले कार्य $F_1 \cdot d, F_2 \cdot d, \ldots, F_n \cdot d$.

उदाहरण 10: फोर्स $\vec{F} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ने डिस्प्लेसमेंट $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ च्या दिशेने केलेले वर्क शोधा.

उत्तर: $\vec{F} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ आणि $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ वर्क, $\quad W = \vec{F} \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad W = 3 + 8 - 1 \quad \Rightarrow \quad W = 10$ युनिट्स

उदाहरण 11: फोर्स $\vec{F} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ हा A बिंदूवर आहे. फोर्सचा वापर बिंदू A पासून बिंदू A' पर्यंत जातो जिथे अनुक्रमे $2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ आणि $3\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ हे A आणि A' चे पोजिशन व्हेक्टर असतात. तर केलेले वर्क शोधा.

उत्तर: $\vec{F} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$

$$\text{पोजिशन व्हेक्टर } A = 2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$$

$$\text{पोजिशन व्हेक्टर } A' = 3\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$$

$$\therefore \quad \text{डिस्प्लेसमेंट } \vec{a} = \overrightarrow{AA}$$

$$(3\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k})-(2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}) = \hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad W = 2+5+4 \quad \Rightarrow \quad W = 11 \text{ units}$$

उदाहरण 12: समजा 10 N चा फोर्स एखाद्या वस्तूवर वरच्या दिशेने आहे आणि ती वस्तू 4m मधून अनुलंब खालच्या दिशेने विस्थापित होते. या विस्थापन दरम्यान शक्तीने केलेले वर्क शोधा.

उत्तर:

$$\text{W} = \vec{F}\cdot\vec{a} = Fa\cos\theta$$

जर फोर्स आणि डिस्प्लेसमेंट यांच्यातील कोन θ आहे

$$\theta = 180°$$

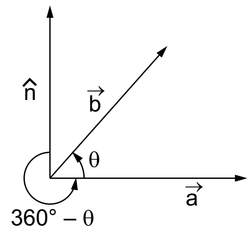
अशा प्रकारे

$$W = (10\text{ N})\,(4\text{m})\cdot\cos 180°$$

$$= -40 \text{ N-m} = -40 \text{ J}$$

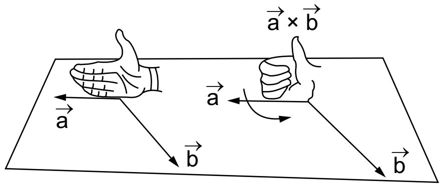
2. दोन व्हेक्टरचे क्रॉस प्रॉडक्ट किंवा व्हेक्टर प्रॉडक्ट

$\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चा क्रॉस प्रॉडक्ट किंवा व्हेक्टर प्रॉडक्ट हा $\vec{a}\times\vec{b}$ द्वारे दर्शविला जातो व $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ द्वारे परिभाषित व्हेक्टर आहे. या व्हेक्टरची परिमाण $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$ आहे.



आकृती 4.11: व्हेक्टरचे क्रॉस प्रॉडक्ट

जेथे a आणि b हे अनुक्रमे $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चे परिमाण आहेत आणि θ हे दोन व्हेक्टर मधील लहान कोन आहे. $\hat{n}$ हे $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ दोन्हीसाठी एकक व्हेक्टर लंब आहे. (Fig.4.11). $\vec{a}\times\vec{b}$ ची दिशा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ दोन्हीसाठी लंब आहे. अशा प्रकारे $\vec{a}$, $\vec{b}$ आणि $\hat{n}$ ही दिशा उजव्या हाताची प्रणाली (right-handed system) बनवते. (आकृती 4.12)



आकृती 4.12: उजव्या हाताची यंत्रणा

समजा $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ आणि $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

टिप्पणी:

1. जर $\theta = 0$ तर $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ म्हणजे $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ एकमेकांना समांतर (किंवा कोलिनिअर) आहेत.
2. जर $\theta = \frac{\pi}{2}$ तर $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\hat{n}$.
3. व्हेक्टर प्रॉडक्टच्या बाबतीत $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन $\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ आहे.
4. व्हेक्टर प्रॉडक्ट कॉमिटेटिव्ह नाही.
5. जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ समांतरभुजांच्या समीप बाजू दर्शवतात, तर त्याचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ आहे.
6. जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ समांतरभुजांच्या समीप बाजू दर्शवतात, तर त्याचे क्षेत्रफळ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ आहे.

उदाहरण 13: जर $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i}+3\hat{j}+8\hat{k}$ तर $|\vec{a} \times \vec{b}|$ शोधा.

उत्तर:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(8-12) - \hat{j}(16-12) + \hat{k}(6-3)$$
$$= -4\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+16+9}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{41}$$

उदाहरण 14: जर $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$. तर $(\vec{a}+\vec{b})$ आणि $(\vec{a}-\vec{b})$ साठी लंब युनिट व्हेक्टर शोधा.

उत्तर: जर
$$\vec{a}+\vec{b} = 3\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$
$$\vec{a}-\vec{b} = -\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

समजा $\vec{c}$ हा $\vec{a}+\vec{b}$ आणि $\vec{a}-\vec{b}$ ला लंब आहे.

$$\therefore \quad \vec{c} = (\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{c} = \hat{i}(4+6) - \hat{j}(3+3) + \hat{k}(-6+4)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{c} = 10\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\therefore \quad |\vec{c}| = \sqrt{100+36+4} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

मजेशीर तथ्य: व्हेक्टर ह्या संकल्पनेची आयरिश गणितज्ञ सर डब्ल्यू. आर. हॅमिल्टन यांनी ओळख करून दिली.

$\therefore$ युनिट व्हेक्टर

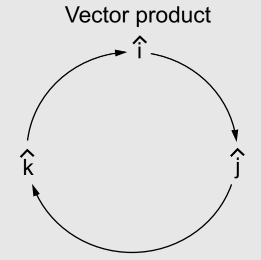
$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{5\hat{i}}{\sqrt{35}} - \frac{3\hat{j}}{\sqrt{35}} - \frac{\hat{k}}{\sqrt{35}} \text{ आहे.}$$

प्रश्न 3: जर $A(1, 1, 2)$; $B(1, 3, 1)$ आणि $C(2, 2, 2)$ हे त्रिकोणाचे शिरोबिंदू आहे तर त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ शोधा.

प्रश्न 4: जर $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ आणि $\vec{b} = \hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ समांतरभुज चौकोनचे समीप बाजू आहेत. तर समांतरभुज चौकोनचे क्षेत्रफळ शोधा.

लक्षात ठेवा:

1. $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$
   $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$
   $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$
   $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$
   $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$
   $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$
   $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$
   $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$
   $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$
2. कंस महत्वाचे आहेत उदाहरणार्थ: $(u \cdot v)w \neq u(v \cdot w)$



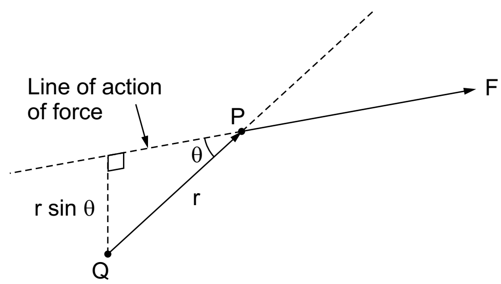
आकृती 4.13: युनिट व्हेक्टर प्रॉडक्ट सायकल

व्हेक्टर प्रॉडक्टचे उपयोग

व्हेक्टर प्रॉडक्टचे काही महत्वाचे उपयोग आहेत:

1. **फोर्सचा मोमेंट ($\vec{M}$):** हे लिनिअर फोर्सचे (linear force) रोटेशनल समतुल्य आहे याला टॉर्क ($\vec{\tau}$) किंवा रोटेशनल फोर्स किंवा टर्निंग इफेक्ट देखील म्हणतात. जसे दरवाजा त्याच्या बिजागरांभोवती फिरतो त्याप्रमाणे ही एक शक्ती आहे जी विशिष्ट बिंदू/अक्षाभोवती फिरते.

   समजा $\vec{F}$ हा फोर्स एखाद्या वस्तूवर P ह्या बिंदूवर लावला तर फोर्सचा मोमेंट M त्या बिंदूकडे वळवण्याची प्रवृत्ती मोजतो. जर रोटेशनची प्रवृत्ती घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने असेल तर फोर्सचा मोमेंट + (positive) असतो अन्यथा तो – (negative) असतो.



आकृती 4.14: फोर्सचा मोमेन्ट

   फोर्सचा मोमेंट $\vec{M}$ बिंदू O विषयी (आकृती 4.14) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$ आहे.

   येथे $\vec{F}$ = लावलेला फोर्स

   P = फोर्स लावलेला बिंदू

   Q = ज्या बिंदूबद्दल आम्हाला टॉर्कची गणना करायची आहे.

   $\vec{r}$ = ज्या बिंदूबद्दल आम्ही टॉर्क निर्धारित करू इच्छितो त्या संदर्भात फोर्स लागू करण्याच्या बिंदूचा पोजिशन व्हेक्टर

$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

Where θ = Q च्या संदर्भात फोर्सची दिशा आणि पोजिशन व्हेक्टर P मधील कोन

$r\sin\theta$ = बिंदू Q पासून फोर्सच्या क्रियेच्या रेषेचे लंबवत अंतर याला फोर्स आर्म असेही म्हणतात.

$F\sin\theta$ = $\vec{F}$ ला लंब $\vec{r}$ चे घटक

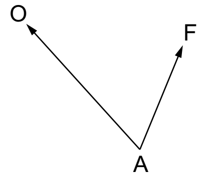
एखाद्या बिंदूबद्दलच्या फोर्सचा मोमेंट हा एक व्हेक्टर आहे आणि रोटेशनच्या प्रतलाला नेहमी लंब असतो. S.I. युनिट न्यूटन-मीटर (N-m) आहे.

उदाहरण 15: फोर्स $2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ हा (2, 1, – 1) ह्या बिंदूवर आहे तर फोर्स मोमेंट (1, 0, 1) ह्या बिंदूभोवती शोधा.

उत्तर: समजा $O \equiv (1, 0, 1)$

$A \equiv (2, 1, -1)$

आणि $\vec{F} = 2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ (आकृती 4.15)



आकृती 4.15: मोमेन्ट

मग, आम्हाला माहित आहे की O बद्दल फोर्स मोमेंट $\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ ने दिला आहे

येथे $\overrightarrow{OA} = (2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+\hat{k}) = \hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

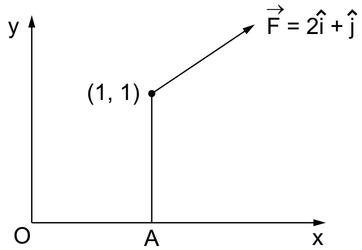
$$\therefore \quad \overrightarrow{OA}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(5+6)-\hat{j}(5+4)+\hat{k}(3-2) = 11\hat{i}-9\hat{j}+\hat{k}$$

उदाहरण 16: फोर्स $\vec{F}$ हा A बिंदूवर आहे तर फोर्स मोमेंट/टॉर्क बिंदू O भोवती शोधा. (आकृती 4.16)

उत्तर: बिंदू O बद्दल टॉर्क,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_0\times\vec{F},\ \vec{r}_0 = \hat{i}+\hat{j},\ \vec{F} = 2\hat{i}+\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = (\hat{i}+\hat{j})\times(2\hat{i}+\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(1-2) = -\hat{k}$$



आकृती 4.16: मोमेन्ट

बिंदू A बद्दल टॉर्क, $\vec{\tau} = \vec{r}_a\times\vec{F},\ \vec{r}_a = \hat{j}$

आणि $\vec{F} = 2\hat{i}+\hat{j}$

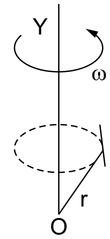
$\Rightarrow \quad \vec{\tau} = \hat{j}\times(2\hat{i}+\hat{j})$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}$$

2. **अँग्युलर व्हेलॉसिटी:**

गोलाकार हालचालीमध्ये एखाद्या वस्तूची अँग्युलर व्हेलॉसिटी ही काळाच्या संदर्भात त्याच्या अँग्युलर डिस्प्लेसमेंट (angular displacement) θ बदलाचा दर म्हणून परिभाषित केली जाते.

एका परिमाणात आपण रेषीय गती, रेखीय विस्थापन (x), रेषीय वेग (v) असतांना $v = \dfrac{dx}{dt}$. त्याचप्रमाणे दोन परिमाणांमध्ये जेव्हा आपण युनिट टाइमच्या संदर्भात गोलाकार हालचाली आणि θ अँग्युलर विस्थापन म्हणून बोलतो तेव्हा अँग्युलर व्हेलॉसिटी ओमेगा ω द्वारे दर्शविले जाते व $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$. अँग्युलर व्हेलॉसिटीचे S.I. युनिट रेडियन प्रति सेकंद आहे. बऱ्याचदा अँग्युलर व्हेलॉसिटी रिव्होल्यूशन प्रति सेकंद (rev/s). दिली जाते. रेडियन प्रति सेकंद मध्ये रूपांतर 1 रिव्होल्यूशन = 2π रेडियन वापरून केले जाऊ शकते.



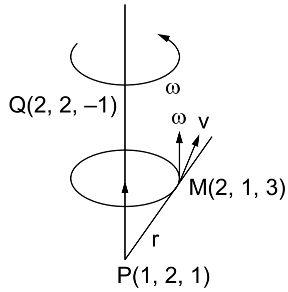
आकृती 4.17: कोनीय गती

लिनिअर व अँग्युलर व्हेलॉसिटीमधील संबंध: जेव्हा एखादी वस्तू एक निश्चित रेषा OY भोवती अँग्युलर व्हेलॉसिटी ω ने फिरते तेव्हा लिनिअर व्हेलॉसिटी v ही M वस्तूची $v = \omega \times r$ आहे.

येथे $r = \overrightarrow{OM}$ (O च्या संदर्भात वस्तूचा पोजिशन व्हेक्टर (Fig.4.17)

$\omega = |\omega| \times (OY$ सोबत युनिट व्हेक्टर)

उदाहरण 17: एका वस्तूची अँग्युलर व्हेलॉसिटी 4 rad/s असते आणि रोटेशनचा अक्ष बिंदू (1, 2, 1) आणि (2, 2,-1) मधून जातो. बिंदू M(2, 1, 3) वर वस्तूचा वेग शोधा.



आकृती 4.18: कोनीय वेगाचे उदाहरण

उत्तर: स्पष्टपणे

$$\overrightarrow{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OQ} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \hat{i} - 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

आणि $\quad \vec{r} = \overrightarrow{PM} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

आता, $|\omega| = 4$ rad/s आणि $\overrightarrow{PQ}$ च्या दिशेने युनिट व्हेक्टर $= \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$ (आकृती 4.18)

$\therefore \quad \omega = \dfrac{4}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{k})$

त्यामुळे, $\quad v = \omega \times \vec{r}$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}}[\hat{i}(-2) - \hat{j}(4) + \hat{k}(-1)]$$

$$v = \frac{4}{\sqrt{5}}(-2\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k})\,; \; v = \frac{-4}{\sqrt{5}}(2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})$$

व्हिडिओ संसाधन संदर्भ

Vectors and their representation

Vector Product

Scalar product of two vectors

Vector product-2

व्हेक्टर अलजेब्राचे उपयोग

- डॉट प्रॉडक्ट आणि क्रॉस प्रॉडक्टचा वापर अनुक्रमे वर्क आणि टॉर्क शोधण्यासाठी केला जातो.
- व्हेक्टर अलजेब्राचा उपयोग करून पॅरेलेलोपिपचे व्हॉल्युम (volume of parallelepiped) काढता येते.
- याचा उपयोग इलेक्ट्रोमॅग्नेटिझम, हायड्रोडायनामिक्स, रक्त प्रवाह, रॉकेट प्रक्षेपण, उपग्रहाचा मार्ग या अभ्यासात केला जातो.
- डॉट प्रॉडक्ट आणि क्रॉस प्रॉडक्टचा अंतराळातील दोन विमानांमधील अंतर आणि त्यांच्या मार्गांमधील कोन मोजण्यासाठी वापरले जातात.
- डॉट प्रॉडक्ट आणि क्रॉस प्रॉडक्टचा वापर सौर पॅनल्सच्या स्थापनेशी संबंधित छप्परांच्या झुकाव आणि सूर्याच्या दिशेच्या संदर्भात गणनासाठी केला जातो, जेणेकरून जास्तीत जास्त वीजनिर्मिती करता येईल.

केस स्टडी

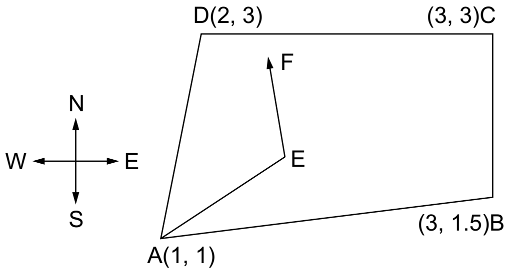
एका शेतकऱ्याकडे $ABCD$ शेत आहे व $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (3, 3)$, $D = (2, 3)$

एक मुलगा बिंदू $\vec{A}$ पासून खेळणी (कागदी विमान) उडवण्याचा प्रयत्न करतो, ज्याचा वेग पूर्वेकडे 100 सेमी/सेकंद आहे. पण उत्तरेकडे 40 सेमी/सेकंद वेगाने वारा वाहत आहे. ते खेळणे 30 सेकंद वेगाने $\overrightarrow{OP}$ दिशेने उडले. $\vec{E}$ ते $\vec{F}$ पर्यंत 100 सेमी/सेकंद वेगाने खेळणे 10 सेकंदांसाठी उडले आणि शेवटी $\vec{F}$ स्थानावर खाली आले.

वरील डेटाच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या-

1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ आणि $\overrightarrow{DA}$ चे पोजिशन व्हेक्टर शोधा.

2. $\vec{A}$ ते $\vec{F}$ पर्यंत परिणामी वेग (resultant velocity) किती आहे ?
3. $\vec{A}$ ते $\vec{F}$ मधील डिस्प्लेसमेंट (displacement) शोधा.
4. $\vec{E}$ ते $\vec{F}$ पर्यंत परिणामी वेग (resultant velocity) आणि डिस्प्लेसमेंट काय आहे?



आकृती 4.19: केस स्टडी

तपासा!!!

Math Works

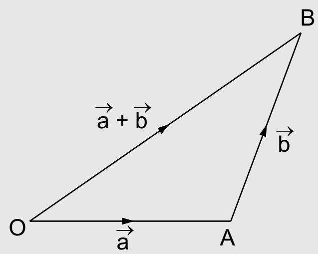
युनिट 5 नंतर मोफत चाचणी आवृत्ती शिकवली जाते आणि तुम्ही खालील ऑपरेशन्स $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}$ आणि $\vec{b} = \hat{i}+4\hat{j}$ वर करू शकता का ते तपासा

(*i*) $\vec{a}+\vec{b}$ (*ii*) $\vec{a}-\vec{b}$

(*iii*) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (*iv*) $\vec{a}\times\vec{b}$

सारांश

1. निर्देशित रेषाखंडाला व्हेक्टर म्हणतात.
2. जर $\vec{a} = x\hat{i}+y\hat{j}$ तर $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. व्हेक्टरच्या रिझोल्यूशनद्वारे एका विशिष्ट दिशेने व्हेक्टरचा प्रभाव निश्चित करणे आणि त्यामुळे मिळवलेले विभाजित व्हेक्टर हे व्हेक्टरचे घटक म्हणून ओळखले जातात.
4. व्हेक्टर ॲडिशनचा ट्रॅंगल लॉ
   जर $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}, \vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}$.
   तर, $\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}$



आकृती 4.20: ट्रॅंगल लॉ

5. **व्हेक्टर ॲडिशनचे गुणधर्म:**
   (1) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (कॉमिटेटिव्ह)
   (2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (असोसिएटिव्ह)
   (3) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a} = \vec{0}+\vec{a}$ (ॲडिटीव्ह आयडेंटीटी)
   (4) $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a})+\vec{a}$ (ॲडिटीव्ह इन्व्हर्स)
6. **स्केलरद्वारे व्हेक्टरचा गुणाकार:** $\vec{a}$ दिलेला व्हेक्टर आणि m स्केलर आहे. मग आम्ही $\vec{b} = m\vec{a}$ ची परिमाण $|ma|$ चे व्हेक्टर म्हणून परिभाषित करतो.

7. **व्हेक्टरची वजाबाकी:** जर $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}$, तर, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i}+(a_2 - b_2)\hat{j}$
8. **व्हेक्टरचे प्रकार:**
   - **झिरो/नल व्हेक्टर:** ज्या व्हेक्टरची परिमाण झिरो आहे त्याला झिरो/नल व्हेक्टर म्हणतात आणि 0 द्वारे दर्शविले जातात.
   - **को-इनिशिअल व्हेक्टर:** समान प्रारंभिक बिंदू असलेल्या दोन किंवा अधिक व्हेक्टरना को-इनिशिअल व्हेक्टर म्हणतात.
   - **कोलिनिअर व्हेक्टर्स:** दोन किंवा अधिक व्हेक्टर्स त्यांच्या परिमाण आणि दिशानिर्देशांकडे विचार न करता त्याच रेषेच्या समांतर असतील तर ते कोलिनिअर व्हेक्टर्स असल्याचे म्हटले जाते.
   - **फ्री व्हेक्टर:** जर व्हेक्टरचे मूल्य केवळ त्याच्या लांबी आणि दिशेवर अवलंबून असेल आणि अंतराळात त्याच्या स्थानापासून स्वतंत्र असेल तर त्याला फ्री व्हेक्टर म्हणतात.
   - **कोटर्मिनस व्हेक्टर:** समान टर्मिनल पॉइंट असलेल्या व्हेक्टरना कॉटर्मिनस व्हेक्टर म्हणतात.
9. एका बिंदूचे पोजिशन व्हेक्टर $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ आणि $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ मॅग्निट्यूड म्हणून दिले जाते.
10. डॉट प्रॉडक्ट किंवा स्केलर प्रॉडक्ट-दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चे डॉट प्रॉडक्ट किंवा स्केलर प्रॉडक्ट $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$ आहे.

    जर $\vec{a} = a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ आणि $\vec{b} = a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$, तर $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

    उपयोग: वर्क $W = \vec{F} \cdot \vec{a} = Fa\cos\theta$.
11. क्रॉस प्रॉडक्ट किंवा व्हेक्टर प्रॉडक्ट: $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$, चे व्हेक्टर प्रॉडक्ट $\vec{a} \times \vec{b}$, द्वारे दर्शविले जाते व $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$. द्वारे परिभाषित व्हेक्टर आहे. या व्हेक्टरची परिमाण $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\theta$ आहे.

    समजा, $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ आणि $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$. तर, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

    उपयोग:
    - O बिंदूभोवती मोमेंट फोर्स = $\overrightarrow{OA} \times \vec{F}$, A हा $\vec{F}$ वर कोणताही बिंदू आहे.
    - अँग्युलर व्हेलॉसिटी $v = \omega \times r$

सराव प्रश्न

विषय प्रश्न

Q.1. आयताकृती समन्वय प्रणालीमध्ये वस्तूची पोजिशन (3, 2, 5) आहे. त्याची पोजिशन व्हेक्टर शोधा.

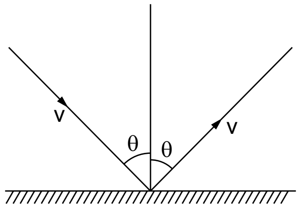
[**उत्तर.** $3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$]

Q.2. जर एखादी वस्तू बिंदू $P(2, 3, 5)$ पासून बिंदू $Q(3, 4, 5)$ पर्यंत जातो. त्याचे डिस्प्लेसमेंट व्हेक्टर शोधा.

[**उत्तर.** $\hat{i}+\hat{j}$]

Q.3. व्हेक्टर $A = \hat{i}+\hat{j}$ चा x-अक्षाशी केलेला कोन शोधा. [**उत्तर.** 45°]

Q.4. V m/s च्या वेगाने m kg ची वस्तू θ कोनावर भिंतीवर आदळते आणि त्याच वेगाने आणि त्याच कोनात पुन्हा उभी राहते. (Fig.4.21) वस्तूच्या मोमेंटममधील बदल काढा. [**उत्तर.** $2mv\cos\theta$]



आकृती 4.21: गतीमुळे पुनरागमन

Q.5. सिद्ध करा की तीन व्हेक्टर $\vec{A} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ आणि $\vec{C} = 2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$, काटकोन त्रिकोण तयार करतात.

Q.6. जर $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A} \cdot \vec{B}|$ असेल तर तुम्ही हे सिद्ध करू शकता की $\vec{A}$ आणि $\vec{B}$ मधील कोन 45° बरोबर आहे? कारणे द्या.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Q.1. फोर्स $\vec{F} = (2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})$ N हा $\vec{r} = (3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ m बिंदूवर आहे तर टॉर्क आहे

(*a*) $(3\hat{i}-6\hat{j}-13\hat{k})$ N.m (*b*) $(17\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k})$ N.m

(*c*) $(17\hat{i}-6\hat{j}-13\hat{k})$ N.m (*d*) 0 [**उत्तर.** (*c*) **Hint:** $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$]

Q.2. जर $\vec{a} = 3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ आणि $\vec{b} = 2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ तर $\vec{a} \times \vec{b} = ?$

(*a*) 0 (*b*) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

(*c*) $17\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}$ (*d*) $8\hat{i}-8\hat{j}-8\hat{k}$ [**उत्तर.** (*d*)]

Q.3. जर कोनीय वेग $\omega = 3\vec{k}$ आणि त्रिज्या $\hat{i} = 3\hat{j}$ असेल तर रेषीय वेग (linear velocity) आहे.

(*a*) $\hat{i}$ (*b*) 0

(*c*) $-9\hat{i}$ (*d*) $7\hat{i}$ [**उत्तर.** (*c*)]

Q.4. जर $\vec{F} = 2\hat{i}$, $\vec{r} = 3\hat{j}$, तर फोर्सचा मोमेंट (moment of a force) आहे.

(*a*) $3\hat{k}$ (*b*) 0

(*c*) $4\hat{j}$ (*d*) $-6\hat{k}$ [**उत्तर.** (*d*)]

Q.5. जर व्हेक्टर $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ आणि $\vec{b} = -4\hat{i}-6\hat{j}+\lambda\hat{k}$ एकमेकांना समांतर असतील तर λ चे मूल्य आहे-

(*a*) 0 (*b*) 4

(*c*) −9 (*d*) 2 [**उत्तर.** (*d*)]

Q.6. जर व्हेक्टर $2\hat{i}+3\hat{j}+8\hat{k}$ वेक्टर $4\hat{j}-4\hat{i}+\alpha\hat{k}$ ला लंब असेल तर α चे मूल्य आहे

(*a*) 1 (*b*) 1/3

(*c*) 1/2 (*d*) 3 [**उत्तर.** (*c*)]

Q.7. $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ व्हेक्टरची परिमाण अनुक्रमे 3, 4 आणि 5 एकके आहे. जर $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$, तर $\vec{A}$ आणि $\vec{B}$ मधील कोन आहे

(*a*) 60° (*b*) 90°

(*c*) 0° (*d*) 45° [**उत्तर.** (*b*)]

Q.8. जर व्हेक्टर $\vec{P}, \vec{Q}$ आणि $\vec{R}$ ची परिमाण (magnitudes) 5, 12 आणि 13 एकके (units) आणि $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ असेल तर $\vec{Q}$ आणि $\vec{R}$ मधील कोन आहे.

(*a*) $\cos^{-1}\frac{3}{5}$ (*b*) $\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$

(*c*) $\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ (*d*) $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ [**उत्तर.** (*b*)]

Q.9. व्हेक्टर $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ आणि $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, मध्ये कोणते व्हेक्टर जोडले जाणे आवश्यक आहे, जेणेकरून रिझल्टंट व्हेक्टर x-अक्षांवर युनिट वेक्टर असेल?

(*a*) $(-2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ (*b*) $\hat{j}+\hat{k}$

(*c*) $3\hat{i}+\hat{k}$ (*d*) $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ [**उत्तर.** (*a*)]

Q.10. जर $\vec{A}=4\hat{i}-3\hat{j}$ आणि $\vec{B}=6\hat{i}+8\hat{j}$ आणि $\vec{A}+\vec{B}$ ची परिमाण (magnitude) व दिशा (direction) अनुक्रमे $5\sqrt{5}$ आणि $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ असेल. [**उत्तर.** True]

मिनी-प्रोजेक्ट

प्रत्येकी पाच विद्यार्थ्यांचा गट बनवा. व्हेक्टरवर कोलाज बनवा ज्यात खालील गोष्टींचा समावेश असणे आवश्यक आहे-

(*a*) योग्य उदाहरणांसह व्हेक्टरची चित्रात्मक व्याख्या.

(*b*) व्हेक्टर बेरीज, वजाबाकी, डॉट प्रॉडक्ट आणि क्रॉस प्रॉडक्टचे तपशीलवार दृश्य स्पष्टीकरण.

(*c*) व्हेक्टर (2 डी) च्या आयताकृती ठरावाचे दृश्य सादरीकरण.

तुमचे विषय शिक्षक मूल्यमापन करतील आणि सर्वोत्तम कामगिरी करणाऱ्या गटाला कौतुक पत्र देतील!

क्रियाकलाप

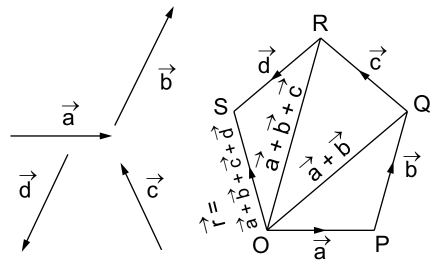
आपल्या घराजवळील आपले आवडते ठिकाण. त्या ठिकाणी जा. आता आपल्या स्ट्रोलचे स्केल केलेले व्हेक्टर आकृती तयार करा. आपल्या पहिल्या व्हेक्टरचा प्रारंभिक बिंदू प्रारंभ बिंदू असावा म्हणजे आपले घर. प्रत्येक सलग व्हेक्टरचे प्रारंभिक बिंदू मागील

व्हेक्टरच्या टर्मिनल बिंदूशी कनेक्ट करा. प्रत्येक दिशात्मक अंतर व्हेक्टर बनवावा जेणेकरून कागदावर फिट होईल. प्रारंभिक बिंदूपासून शेवटच्या बिंदूपर्यंत रिझल्टंट व्हेक्टर (resultant vector) शोधा.

अधिक जाणून घेऊ या !

व्हेक्टर एडिशनचा पॉलीगोन लॉ - त्यात असे म्हटले आहे की जर एका वेळी वस्तूवर कार्य करणाऱ्या व्हेक्टरांची संख्या एकाच क्रमाने घेतलेल्या पॉलीगोनच्या विविध बाजूंनी परिमाण आणि दिशेने दर्शविली गेली तर त्यांचे रिझल्टंट बंद बहुभुजाची बाजू परिमाण आणि दिशेने दर्शविले जातात व उलट क्रमाने घेतात. हा व्हेक्टर ॲडिशनचा ट्रॅंगल लॉ चा विस्तार आहे. भौमितिकदृष्ट्या, ते आकृतीमध्ये दर्शविले आहे.

रिझल्टंट $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ ($\overrightarrow{OS}$)



आकृती 4.22: व्हेक्टर एडिशनचा पॉलीगोन लॉ

संदर्भ ग्रंथ व सुचविलेले वाचन

- Narayan Shanti, Mittal P.K. (1954) ,Vector Algebra , S. Chand & Co.
- NCERT (2007), Mathematics Text book XII Part II.
- Chatterji P.N. (1998) ,Vector Algebra, Rajhans Press.
- Spiegel R Murray (1974), Vector Analysis, Schaum's Outline Series McGraw-Hill.

An excerpt of initial 12 verses "Brahmasphutasiddhanta" authored by Brahmagupta. It has a total of 24 chapters and 1008 verses (on Mathematics and Astrology). (**Source:** Muley Gunakar (1992), Sansaar ke Mahan Ganitagya, Raajkamal Prakashan)

5 डिफरंशिअल इक्वेशन

युनिट वैशिष्ट्ये

हे युनिट प्रथम ऑर्डर व प्रथम डिग्री डिफरंशिअल इक्वेशनचे व्हेरीएबल सेपरेबल मेथडने सोल्युशनबद्दल चर्चा करते. MATLAB वर प्राथमिक परिचय योग्य सचित्र उदाहरणांसह दिला आहे.

अभ्यासाचे औचित्य

विज्ञान आणि अभियांत्रिकी, भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र, जीवशास्त्र, अर्थशास्त्र आणि इतर विषयांशी संबंधित विविध प्रणालींच्या गणितीय मॉडेलिंगमध्ये डिफरंशिअल इक्वेशन (differential equation) खुप महत्त्वाची आहेत. ज्या सिस्टीम डायनॅमिक आहेत म्हणजेच वेळ (t) इत्यादी संदर्भात बदलतात, ते अधिक वेळा गणितीय मॉडेलिंगमध्ये वापरले जातात. तसेच डेरिव्हेटिव्हज हे बदलाच्या दराला समानार्थी आहेत आणि म्हणूनच डेरिव्हेटिव्ह्ज आणि व्हेरिएबल्समधील संबंधाला डिफरंशिअल इक्वेशन म्हणतात. त्यानुसार मॉडेल करणे सोपे आहे. डिफरंशिअल इक्वेशनमध्ये आपल्या सभोवतालच्या घटनांचा अंदाज घेण्याची उल्लेखनीय क्षमता असते.

मॅटलॅब (MATLAB) हे एक संगणकीय व्यासपीठ आहे जे जगभरातील तांत्रिक तज्ञ, अभियंते, शास्त्रज्ञ आणि गणितज्ञ वापरतात. यात अनेक वैशिष्ट्ये आणि फंक्शन्स (functions) आहेत, ज्याचा आपण त्याच्या टूलबॉक्सद्वारे लाभ घेऊ शकतो. हे टूलबॉक्स वापरकर्त्यांना विशेष तंत्रज्ञान शिकण्याची आणि लागू करण्याची परवानगी देतात. मॅटलॅब एक अतिशय विकसित प्लॅटफॉर्म आहे आणि त्याचवेळी युजर फ्रेंडली इंटरफेस आहे त्यामुळे जास्त उपयोगी आहे.

आम्ही या युनिटमध्ये डिफरंशिअल इक्वेशन आणि मॅटलॅबबद्दल थोडक्यात अभ्यास करू.

पुर्व-ज्ञान

- कॅल्क्युलसचे ज्ञान
- संगणकांची मूलभूत माहिती

घटक परिणाम

या घटकाचे परिणाम खालीलप्रमाणे आहेत.

U5-O1: डिफरंशिअल इक्वेशनची संकल्पना; डिफरंशिअल इक्वेशनची ऑर्डर व डिग्री शोधणे.

U5-O2: व्हेरिएबल सेपरेबल मेथडसह प्रथम ऑर्डर आणि प्रथम-डिग्री डिफरंशिअल इक्वेशन सोडवणे.

U5-O3: मॅटलॅब समजून घेणे व मॅटलॅबच्या वैशिष्ट्यांविषयी समज विकसित करणे.

U5-O4: मॅटलॅबच्या मुलभूत गोष्टी आत्मसात करणे व मॅटलॅबचे फायदे आणि तोटे समजून घेणे.

CO-UO मॅपिंग

युनिट-5: निष्पत्ती (UO)	अपेक्षित पाठ्यक्रम निष्पत्ती मॅपिंग (1-कमकुवत सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U5-O1	-	1	-	3	-
U5-O2	-	1	-	3	-
U5-O3	1	-	-	-	3
U5-O4	-	-	-	-	3

5.1 डिफरंशिअल इक्वेशन

आपण समीकरणाच्या संकल्पनेशी परिचित आहात जे समान मुल्यांसह दोन अभिव्यक्तींमधील "समान" चिन्हासह एक गणितीय विधान आहे. उदाहरणार्थ: $x^2 + 2x + 1 = 0$; $4 \sin x + \tan x = 0$, $3x + 2y = 4$ इ. आम्ही या युनिटमध्ये अभ्यास करू ज्यात व्हेरिएबल्स व्यतिरिक्त डेरिव्हेटिव्ह्ज त्यांच्या टर्म्स (terms) म्हणून समाविष्ट आहेत. अशा समीकरणांना डिफरंशिअल इक्वेशन म्हणतात. डिफरंशिअल कॅल्क्युलसमधून तुम्ही फंक्शनचे डेरिव्हेटिव्ह्ज कसे शोधायचे ते शिकलात आणि इंटिग्रल कॅल्क्युलसमधून तुम्हाला असे फंक्शन कसे शोधावे हे माहित आहे ज्याचे डेरिव्हेटिव्ह्ज दिले आहे. तर याचा अभ्यास करून आपण डिफरंशिअल इक्वेशन संबंधित काही मुलभूत संकल्पनांचा अभ्यास करू.

5.2 मुलभूत परिभाषा/संकल्पना

ज्या इक्वेशनमध्ये डिपेंडन्ट व्हेरिएबलचा डेरीवेटीव्ह हा इंडिपेंडेंट व्हेरिएबलच्या संदर्भात असतो त्याला डिफरंशिअल इक्वेशन म्हणून ओळखले जाते. आम्ही इंडिपेंडेंट व्हेरिएबल लक्षात घेऊन त्यांना खालीलप्रमाणे वर्गीकृत करू शकतो-

(*i*) ***ऑर्डीनरी डिफरंशिअल इक्वेशन***

अशा समीकरणांमध्ये फक्त एका डिपेंडन्ट व्हेरिएबलचा डेरीवेटीव्ह हा इंडिपेंडेंट व्हेरिएबलच्या संदर्भात असतो. उदाहरणार्थ: $\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$.

येथे डिपेंडन्ट व्हेरिएबल y आणि इंडिपेंडेंट व्हेरिएबल x आहे.

(*ii*) ***पार्शल डिफरंशिअल इक्वेशन***

अशा समीकरणांमध्ये दोन किंवा अधिक डिपेंडन्ट व्हेरिएबलचा डेरीवेटीव्ह हा इंडिपेंडेंट व्हेरिएबलच्या संदर्भात असतो. उदाहरणार्थ: $\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} = 10$.

येथे z हे डिपेंडन्ट व्हेरिएबल आहे आणि x, y इंडिपेंडेंट व्हेरिएबल आहेत. या युनिटमध्ये प्रथम ऑर्डर आणि प्रथम डिग्री ऑर्डीनरी डिफरंशिअल इक्वेशनचा अभ्यास करू.

टीप: सर्वसाधारणपणे खालील नोटेशन डेरिव्हेटिव्ह्जसाठी वापरले जातात:

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ किंवा } y_1;\ \frac{d^2y}{dx^2} = y'' \text{ किंवा } y_2;\ \frac{d^3y}{dx^3} = y''' \text{ किंवा } y_3 \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = y_n.$$

5.2.1 डिफरंशिअल इक्केशनची ऑर्डर आणि डिग्री

डिफरंशिअल इक्केशनची ऑर्डर ही त्या इक्केशनमध्ये असणाऱ्या उच्चतम किंवा सर्वाधिक डेरीवेटीव्हची ऑर्डर असते. जर इक्केशनमध्ये रॅडिकल साइन व फ्रॅक्शन्स (radical sign and fractions) नसतील तर डिफरंशिअल इक्केशनची डिग्री ही बहुपद समीकरणात असणाऱ्या उच्चतम किंवा सर्वाधिक ऑर्डरच्या डेरीवेटीव्हचा घातांक असतो.

मजेशीर तथ्य: डिफरंशिअल इक्केशनचे उत्तर हे संख्येऐवजीं फंक्शन असल्याने ते विशेष आहे.

उदाहरणार्थ:

अनुक्रमांक	डिफरंशिअल इक्केशन	ऑर्डर	डिग्री
1.	$\frac{dy}{dx}+y=e^x$	1	1
2.	$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=\sin x$	2	1
3.	$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\frac{d^2y}{dx^2}+y=10x$	3	2
4.	$\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{d^3y}{dx^3}$	3	2
5.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\cos^2 y=0$	1	2

टिप्पणी: डिफरंशिअल इक्केशनची ऑर्डर आणि डिग्री धन पूर्णांक असतात.

उदाहरण 1: खालील डिफरंशिअल इक्केशनची ऑर्डर आणि डिग्री (परिभाषित असल्यास) शोधा.

(1) $\frac{dy}{dx}+4y=\sin x$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}+2y=0$

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}+\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+y=\cos x$ (4) $\sqrt{\frac{dy}{dx}}=\frac{d^3y}{dx^3}$.

उत्तर:

(1) $\frac{dy}{dx}$ सर्वोच्च ऑर्डर डेरीवेटीव्ह आहे. म्हणून ऑर्डर एक आहे. हे $\frac{dy}{dx}$ मधील बहुपद समीकरण आहे आणि $\frac{dy}{dx}$ ची सर्वोच्च ऑर्डर एक आहे. म्हणून डिग्री एक आहे.

(2) येथे सर्वोच्च ऑर्डर डेरीवेटीव्ह = $\frac{d^2y}{dx^2}$ आणि ऑर्डर = 2 आणि ते डेरीवेटीव्हचे बहुपद समीकरण आहे आणि $\frac{d^2y}{dx^2}$ ची पॉवर (घातांक) एक आहे. म्हणून डिग्री एक आहे.

(3) येथे सर्वोच्च ऑर्डर डेरिव्हेटिव्ह् = $\frac{d^3y}{dx^3}$ $\therefore$ ऑर्डर = 3 परंतु ते डेरिव्हेटिव्ह्जचे बहुपद समीकरण नाही. कारण $\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ पद उपस्थित आहे. म्हणून डिग्री परिभाषित केलेली नाही.

(4) दिलेले डिफरंशिअल इक्वेशन रॅडिकल साइन पासून मुक्त करू. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$.

येथे सर्वोच्च ऑर्डर डेरिव्हेटिव्ह्ज = $\frac{d^3y}{dx^3}$ $\therefore$ ऑर्डर = 3 आणि ते डेरिव्हेटिव्ह्जचे बहुपद समीकरण आहे. तसेच $\frac{d^3y}{dx^3}$ ची पॉवर (घातांक) दोन आहे म्हणून डिग्री = 2.

5.2.2 ऑर्डीनरी डिफरंशिअल इक्वेशन सोडवणे

कोणतेही फंक्शन /कर्व (function/curve) हे इक्वेशन सत्य करत असल्यास त्याला डिफरंशिअल इक्वेशनचे सोल्युशन म्हणतात. [म्हणजे जर डाव्या हाताची बाजू समीकरणाच्या उजव्या हाताच्या बरोबरीची असेल (L.H.S. = R.H.S.) ज्या सोल्युशनमध्ये आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स आहेत त्याला जनरल सोल्युशन (general solution) म्हणतात. तर ज्या सोल्युशनमध्ये आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्सनसतात त्याला पर्टीक्युलर सोल्युशन (particular solution) म्हणतात. डिफरंशिअल इक्वेशनमध्ये एकमेव किंवा अनेक किंवा कोणतेही सोल्युशन नसते. n^{th} ऑर्डर डिफरंशिअल इक्वेशनच्या जनरल (किंवा कम्प्लिट-complete) सोल्युशनमध्ये n आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स असतील.

उदाहरण 2: पाचव्या ऑर्डरच्या डिफरंशिअल इक्वेशनच्या जनरल सोल्युशनमध्ये आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स संख्या आहेत:

(*a*) 0 (*b*) 3 (*c*) 4 (*d*) 5

उत्तर: जनरल सोल्युशनमध्ये आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स संख्या = डिफरंशिअल इक्वेशनची ऑर्डर = 5 **उत्तर.** (*d*)

उदाहरण 3: ऑर्डर 10 च्या डिफरंशिअल इक्वेशनच्या पर्टीक्युलर सोल्युशनमध्ये आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्सची संख्या शोधा.

उत्तर: ऑर्डर 10 च्या डिफरंशिअल इक्वेशनच्या पर्टीक्युलर सोल्युशनमध्ये आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्सची संख्या = 0

> **मजेशीर तथ्य:** जेव्हा जर्मन गणितज्ञ Gottfried Wilthelm Leibnitz यांनी ब्लॅक आणि व्हाईट आयडेंटिटी $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$ शोधली म्हणजे 11 नोव्हेंबर 1675 तारखेला डिफरंशिअल इक्वेशन शोधले. त्यांनी स्वतः 'method of separation of variables', 'method of solving the homogeneous differential equation of the first order', and 'method of solving linear differential equation of the first order' फक्त २५ वर्षात केले.

उदाहरण 4: फंक्शन $y = A \sin x + B \cos x$ हे डिफरंशिअल इकवेशन $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ चे जनरल सोल्युशन आहे हे तपासा. (A, B हे आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स आहेत.)

उत्तर: दिलेले डिफरंशिअल इकवेशन $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ आहे. ...(1)

$\therefore$ $y = A \sin x + B \cos x$ (1) चे जनरल सोल्युशन असेल जर त्याची सब्स्टिट्यूशन L.H.S. = R.H.S. असेल.

डिफरेन्शिएटिंग $y = A \sin x + B \cos x$ ...(2)

आम्हाला मिळते $$\frac{dy}{dx} = A \cos x - B \sin x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -A \sin x - B \cos x \qquad ...(3)$$

y आणि $\frac{d^2y}{dx^2}$ ची मूल्ये म्हणजे (2) आणि (3) हे (1) मध्ये टाकू.

$$\text{L.H.S.} = -A \sin x - B \cos x + A \sin x + B \cos x$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$ त्यामुळे सत्य झाले.

आठवा:

1. फंक्शन हा एक संबंध आहे ज्यात डोमेनचा प्रत्येक घटक सह-डोमेनच्या अगदी एका घटकाशी संबंधित असतो.
2. जर इनपुट बदलले तर फंक्शन कसे बदलते हे डेरिव्हेटिव्ह मोजते.

5.2.3 जनरल सोल्युशन दिले असतांना डिफरंशिअल इक्वेशन तयार करणे

समजा जनरल सोल्युशन

$$f(x, y, a) = 0$$ ...(1) आहे.

येथे a एक आर्बिट्ररी कॉंस्टंट् आहे, x हा इंडिपेंडेंट व्हेरिएबल आहे आणि y हा डिपेंडन्ट व्हेरिएबल आहे. संबंधित डिफरंशिअल इक्वेशन प्राप्त करण्यासाठी आपल्याला a ला वगळावे लागेल, ज्यासाठी आम्हाला दोन समीकरणे आवश्यक आहेत. प्रथम समीकरण (1) आहे. दुसरे समीकरण (2) आपल्याला (1) चा डेरीवेटीव्ह करून मिळेल.परिणामी आम्हाला $g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ प्राप्त होते जे आवश्यक डिफरंशिअल इक्वेशन आहे. [ते वक्रांच्या कुटुंबाचे (family of curves) प्रतिनिधित्व करते].

त्याचप्रमाणे इच्छित डिफरंशिअल इक्वेशन मिळवण्यासाठी आम्ही वरील पद्धती दोन, तीन आणि अधिक आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स वाढवू शकतो. (आम्हाला आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स संख्येइतकी समीकरणे हवी आहेत) येथे प्राप्त झालेल्या डिफरंशिअल इक्वेशन ऑर्डर ही आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स संख्येइतकी असतात.

उदाहरण 5: जर a आर्बिट्ररी कॉंस्टंट्स आहे तर $y = ax$ कर्व फॅमिलीचे डिफरंशिअल इक्वेशन तयार करा.

उत्तर: दिलेले समीकरण

$$y = ax$$ ...(1) आहे.

(1) ला x ने डिफरेन्शिएटिंग करू.

$$\frac{dy}{dx} = a \qquad ...(2)$$

$\therefore$ (1) आणि (2) वरून आपल्याला मिळेल,

$$y = x\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} - y = 0$$ जे आवश्यक डिफरंशिअल इक्वेशन आहे.

5.3 व्हेरिएबल सेपरेबल मेथडने प्रथम ऑर्डर व प्रथम डिग्रीचे डिफरंशिअल इक्वेशन सोडवणे

प्रथम ऑर्डर व प्रथम डिग्रीचे डिफरंशिअल इक्वेशन विचारात घेऊ.

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y) \qquad ...(1)$$

प्रकार (1) च्या डिफरंशिअल इक्वेशन सोडवण्यासाठी अनेक पद्धती आहेत. येथे आपण फक्त व्हेरिएबल सेपरेबल मेथड या एका पद्धतीचा तपशीलवार अभ्यास करणार आहोत. जर (1) हे $f(x)dx = g(y)dy$ ....(2) स्वरूपात लिहिले जाऊ शकते तर आपण म्हणतो की व्हेरिएबल्स सेपरेबल करण्यायोग्य आहेत. आपण असे डिफरंशिअल इक्वेशन दोन्ही बाजूंनी इंटिग्रेशन करून सोडवतो.

म्हणजेच $\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$

येथे c इंटिग्रेशन आर्बिट्री कॉंस्टंट्स आहे.

उदाहरण 6: सोडवा $(1 + x^2)dy = (1 + y^2)dx$.

उत्तर: दिलेले डिफरंशिअल इक्वेशन $(1 + x^2)dy = (1 + y^2)dx$ आहे.

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{(व्हेरिएबल्स वेगळे करणे)}$$

आता दोन्ही बाजूंना इंटिग्रेशन करून आम्हाला मिळते,

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} + c \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$$

उदाहरण 7: सोडवा: $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-2y} + x^4 e^{-2y}$.

उत्तर: दिलेले डिफरंशिअल इक्वेशन

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-2y} + x^4 e^{-2y} = (e^x + x^4)e^{-2y}$$

आता व्हेरिएबल वेगळे करू.

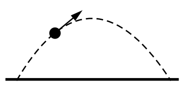
आपल्याला मिळते $(e^x + x^4)dx = e^{2y}dy$

दोन्ही बाजूचे इंटीग्रेशन (Integration) घेऊ.

$$\int (e^x + x^4)dx = \int e^{2y} dy + c$$

$$\Rightarrow \quad e^x + \frac{x^5}{5} = \frac{e^{2y}}{2} + c$$

FUN FACT



The path followed by a projectile launched from a cannon follows a curve determined by an ordinary differential equation that is derived from Newton's second law.

उदाहरण 8: $\log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = a_1 x + a_2 y$.

उत्तर: दिलेले डिफरंशिअल इक्वेशन $\log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = a_1 x + a_2 y$ आहे.

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = e^{a_1x + a_2y}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{e^{a_2y}} = e^{a_1x}dx \text{ (सेपरेटिंग व्हेरिएबल)}$$

दोन्ही बाजूचे इंटीग्रेशन (Integration) घेऊ $\int \frac{dy}{e^{a_2y}} = \int e^{a_1x}dx + c$

$$\Rightarrow \qquad \frac{e^{-a_2y}}{-a_2} = \frac{e^{a_1x}}{a_1} + c \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{a_1x}}{a_1} + \frac{e^{-a_2y}}{a_2} + c = 0$$

उदाहरण 9: सोडवा: $5xdy - 2ydx = 2x^2dy$.

उत्तर: दिलेले डिफरंशिअल इक्वेशन $5xdy - 2ydx = 2x^2dy$ आहे.

$$(5x - 2x^2)dy = 2ydx \text{ (सेपरेटिंग व्हेरिएबल)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x(5-2x)} \quad \Rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{x} + \frac{2}{5-2x}\right]dx$$

दोन्ही बाजूचे इंटीग्रेशन (Integration) घेऊ.

$$\int \frac{dy}{2y} = \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{x} + \frac{2}{5-2x}\right]dx + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\log y = \frac{1}{5}\left[\log x + \frac{2}{-2}\log(5-2x)\right] + \log c$$

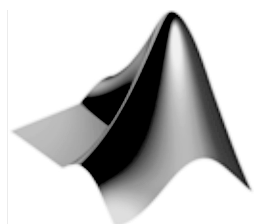
$$\Rightarrow \qquad \log\sqrt{y} = \frac{1}{5}\left[\log\left(\frac{x}{5-2x}\right)\right] + \log c$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{y} = c\left(\frac{x}{5-2x}\right)^{1/5}$$

5.4 मॅटलॅबची ओळख

मॅटलॅब (MATLAB) म्हणजे MATrix LABoratory. मॅटलॅब ही उच्चस्तरीय बहु-प्रतिमान भाषा आहे जी तांत्रिक आणि गणिती गणनेसाठी आहे. सुरुवातीला 1970 च्या दशकात गणिताचे अध्यापन साधन म्हणून हे क्लीव्ह मोलर (Cleve Moler) यांनी तयार केले होते, नंतर 1980 मध्ये मॅटलॅब एक व्यावसायिक उत्पादन म्हणून प्रसिद्ध झाले. यात परस्परसंवादी वातावरण आहे ज्यामध्ये शेकडो अंतर्निर्मित तांत्रिक गणना, ग्राफिकल मल्टी डोमेन सिम्युलेशन, ॲनिमेशन इत्यादीसाठी मॅटलॅब विशेषत: अभियंते, शास्त्रज्ञ, तंत्रज्ञ डेटाचे विश्लेषण करण्यासाठी, अल्गोरिदम विकसित करण्यासाठी आणि मॉडेल तयार करण्यासाठी जगभरात वापरला जातो.

Logo of MATLAB



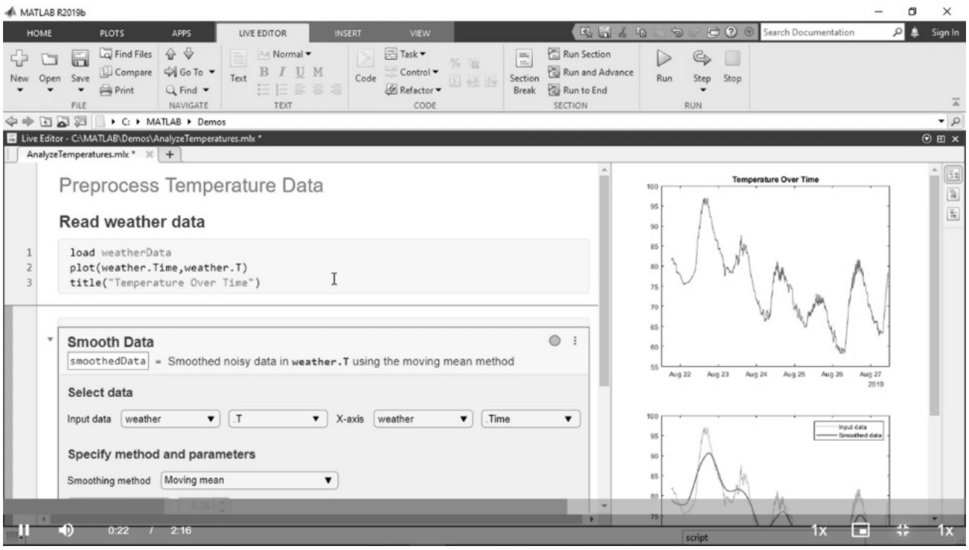
[Source: www.mathworks.com]

The MATLAB logo is a three-dimensional L-shaped membrane. It is an eigenfunction of the wave equation. (The wave equation is a fundamental model in mathematical physics that describes how a disturbance travels through matter.)

5.4.1 मुख्य वैशिष्ट्ये

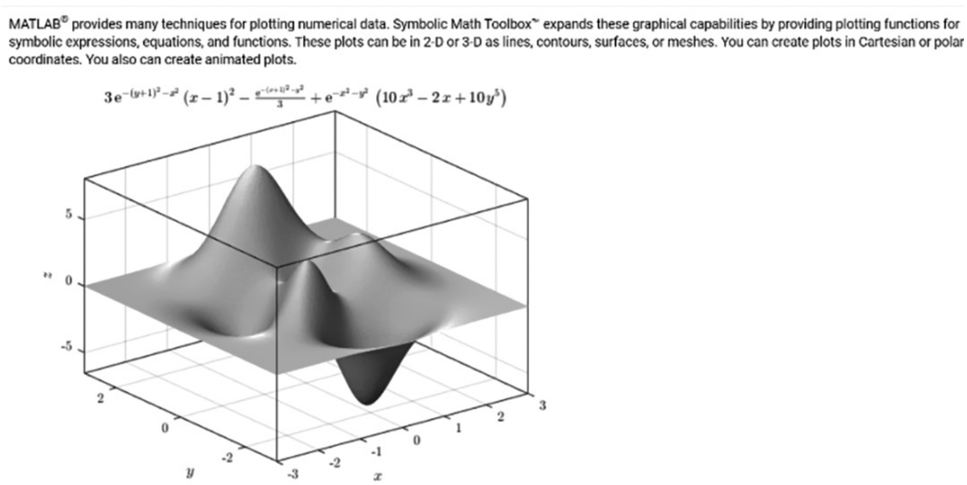
MATLAB ची काही ठळक वैशिष्ट्ये-

- मॅटलॅबचा मुलभूत बिल्डिंग ब्लॉक हा मॅट्रिक्स आहे.
- लाइव्ह एडिटर (Live Editor) - यात एक्झिक्युटेबल नोटबुकमध्ये कोड, आउटपुट आणि फॉरमॅट केलेला टेक्स्ट एकत्र करून स्क्रिप्ट तयार करण्यासाठी लाइव्ह एडिटर आहे.



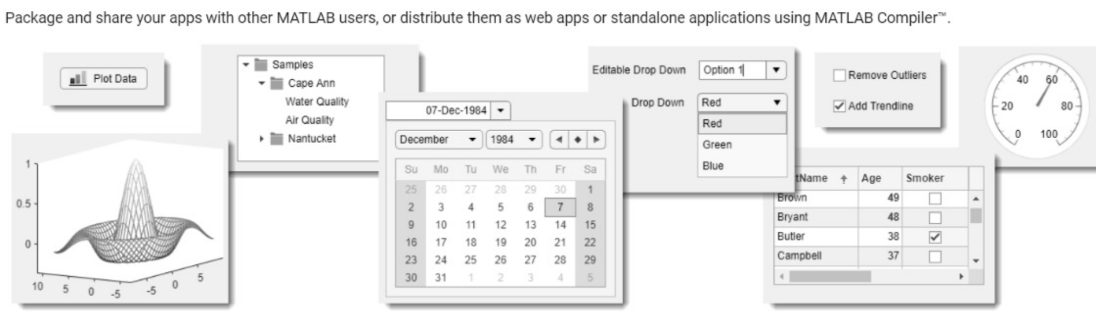
आकृती 5.1: लाईव्ह एडीटर
(*source:www.mathworks.com*)

- **स्वतंत्र इंडिपेंडेंट प्लॅटफॉर्म:** हे विंडोज, मॅकिंटोश, लिनक्स, युनिक्स इत्यादीद्वारे समर्थित आहे.
- मॅटलॅबमध्ये यापैकी कोणत्याही प्लॅटफॉर्मवर लिहिलेला प्रोग्राम दुसऱ्यावरही चालवला जाईल.
- त्याच्या टूलबॉक्स व्यावसायिकरित्या विकसित आणि पूर्ण दस्तऐवजीकरण आहेत.
- मॅटलॅबमध्ये परस्परसंवादी ॲप्स आहेत ज्याद्वारे आम्ही इच्छित परिणाम प्राप्त होईपर्यंत आम्ही आमच्या डेटाची पुनरावृत्ती करू शकतो, त्यानंतर आमच्या कामाशी संबंधित मॅटलॅबम प्रोग्राम स्वयंचलितपणे तयार करतो.
- हे एखाद्याचे विश्लेषण मोजते आणि कोड पुनर्लेखन करण्याची किंवा बिग डेटा प्रोग्रामिंग शिकण्याची गरज नाही (किंवा जटिल तंत्रे लक्षात ठेवा.)
- **डेटा विश्लेषण:** मॅटलॅबमधील हजारो प्रीबिल्ट फंक्शन्स (prebuilt functions) फायनान्स, मेडिकल इत्यादी विविध क्षेत्रांमध्ये जटिल डेटा सेट (जे आयात केले जाऊ शकतात!) आयोजित, स्वच्छ आणि विश्लेषित करण्यासाठी वापरले जाऊ शकतात. त्यानंतर मॅटलॅब लाइव्ह एडिटरचा वापर करून दस्तऐवजीकरण केले जाऊ शकते आणि पीडीएफ, एमएस वर्ड, लेटेक्स आणि एचटीएमएल स्वरूपात निर्यात केले जाऊ शकते.
- **ग्राफिक्स:** आम्ही मॅटलॅबमधील अंगभूत प्लॉट वापरून डेटाची कल्पना करू शकतो. हे मुळ नमुने आणि ट्रेंड ओळखण्यात मदत करते. हे निर्यात आणि शेअर केले जाऊ शकते!



आकृती 5.2: ग्राफिक्स
(*source:www.mathworks.com*)

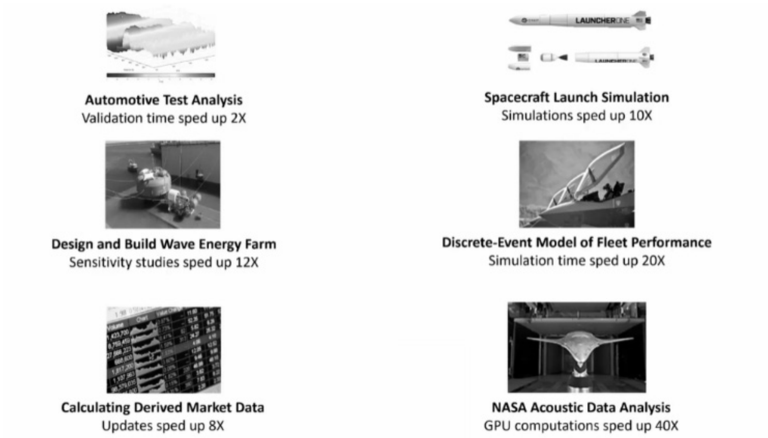
- **अल्गोरिदम डेव्हलपमेंट (Algorithm development):** हे आम्हाला C, C++ किंवा फोरट्रान (Fortran) सारख्या इतर भाषांपेक्षा आमच्या कल्पनांना अल्गोरिदममध्ये अधिक वेगाने रूपांतरित करण्यासाठी साधने प्रदान करते. हे अल्गोरिदम चाचणी आणि सत्यापित, सामायिक आणि वितरित केले जाऊ शकतात तसेच मोठ्या प्रणालींमध्ये तैनात केले जाऊ शकतात.
- **ॲप बिल्डिंग (App Building):** मॅटलॅबमधील ॲप डिझायनर व्यावसायिक सॉफ्टवेअर डेव्हलपर न होता व्यावसायिक ॲप (डेस्कटॉप आणि वेब ॲप्स) तयार करू शकतो. हे ॲप्स (रॉयल्टी मुक्त) देखील सामायिक केले जाऊ शकतात!



आकृती 5.3: ॲप तयार करणे
(*source:www.mathworks.com*)

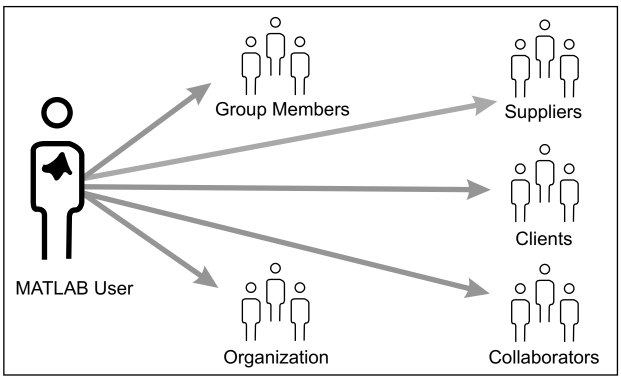
- मॅटलॅब ही C, C ++, Fortran, Java, Python, COM घटक आणि ॲप्लिकेशन्स (.NET) इत्यादींसह इतर भाषांसह देखील वापरता येते. हे वैशिष्ट्य टीम वर्क कामात मदत करते. कारण विविध प्रोग्रामिंग भाषा वापरणारे टीम एकत्र काम करू शकतात.

- **समांतर संगणन (Parallel computing):** हा टूलबॉक्स मल्टीकोर डेस्कटॉप, ग्राफिक प्रोसेसिंग युनिट (GPUs), कॉम्प्युटर क्लस्टर वापरून मोठ्या प्रमाणावर गणना करण्यास मदत करतो. ज्या साधनांना काही महिने लागतात, या साधनाद्वारे काही दिवसात होते.



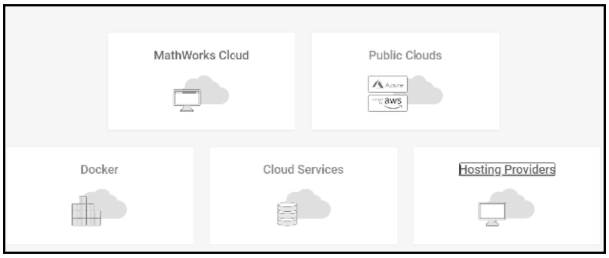
आकृती 5.4: काही समांतर कॉम्पुटिंग टूलबॉक्स
(*source:www.mathworks.com*)

- **क्लाउडमध्ये मॅटलॅब वापरा (Use MATLAB in the cloud):** एखादे सॉफ्टवेअर इन्स्टॉल, कॉन्फिगर किंवा व्यवस्थापित केल्याशिवाय मॅटलॅब वेब ब्राउझरमध्ये वापरू शकतो. मॅटलॅब ड्राइव्ह कोठूनही फाईल्स संचयित, प्रवेश आणि कार्य करण्यास मदत करते.



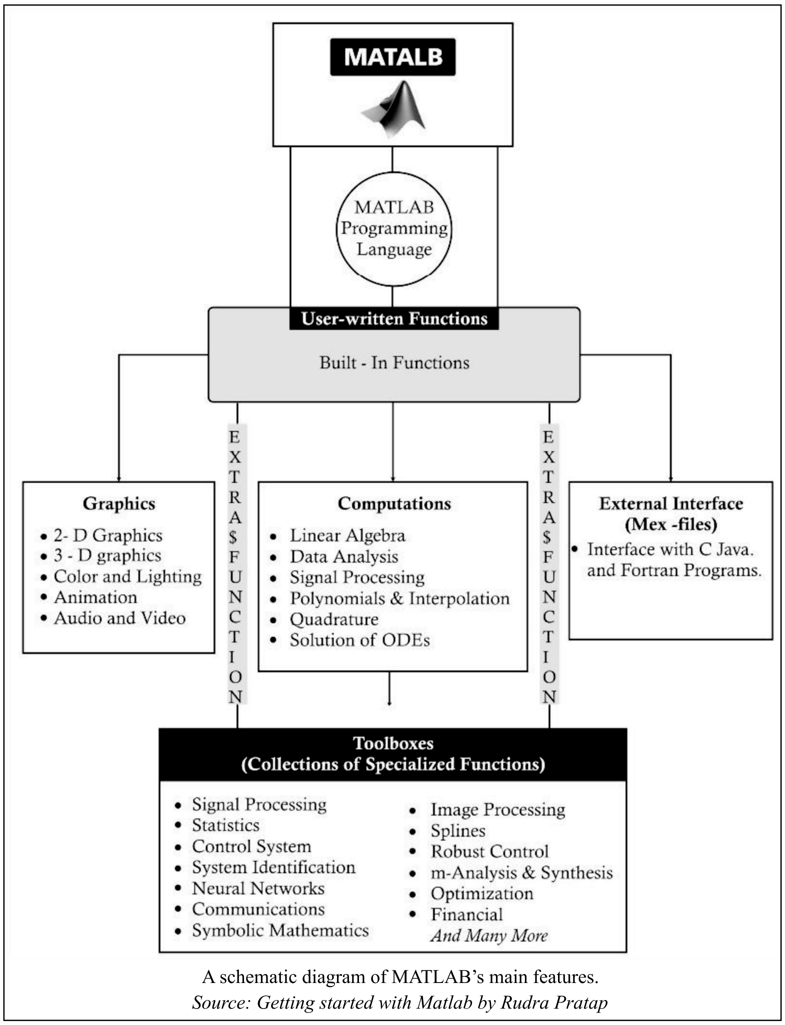
आकृती 5.5: Use of application deployment to share MATLAB programs
(*source:www.mathworks.com*)

- **क्लाउडमध्ये मॅटलॅब वापरा (Use MATLAB in the cloud):** एखादे सॉफ्टवेअर इन्स्टॉल, कॉन्फिगर किंवा व्यवस्थापित केल्याशिवाय मॅटलॅब वेब ब्राउझरमध्ये वापरू शकतो. मॅटलॅब ड्राइव्ह कोठूनही फाईल्स संचयित, प्रवेश आणि कार्य करण्यास मदत करते.



आकृती 5.6: (Runs in various cloud environments)
(*source:www.mathworks.com*)

- A figure of some features of MATLAB is give below:

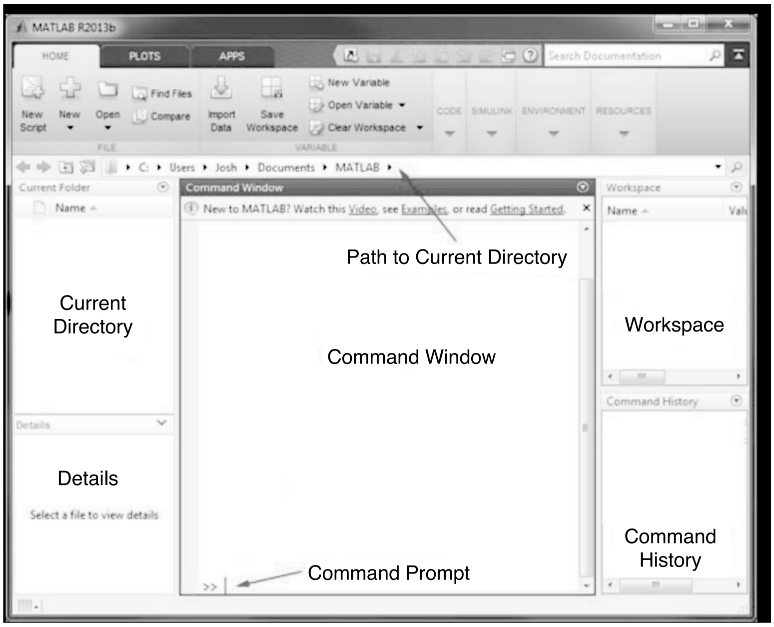


आकृती 5.7: मॅटलॅब मेन फिचरची स्केमॅटिक आकृती
(source:www.mathworks.com))

5.4.2 मॅटलॅबच्या मुलभूत संकल्पना

जवळजवळ सर्व प्लॅटफॉर्मवर MATLAB खालील मुलभूत गोष्टींद्वारे कार्य करते:-

1. **मॅटलॅब डेस्कटॉप:** हा काम करण्याचा मुख्य प्लॅटफॉर्म आहे जेथे आपण काम करतो. यात खालील सब विंडो असतात:
   (*a*) **कमांड विंडो:** ही मुख्य विंडो आहे आणि मॅटलॅब प्रॉम्प्टवर (>>) या विंडोमध्ये सर्व कमांड टाइप केल्या आहेत.
   (*b*) **करंट डिरेक्टरी पेन:** येथे करंट डिरेक्टरीतील सर्व फायली सूचीबद्ध आहेत.
   (*c*) **डिटेल (फाइल) पेन:** हे करंट डिरेक्टरी पेनच्या खाली आहे आणि करंट डिरेक्टरी पेनच्या निवडलेल्या फाईलचे तपशील दर्शवते.
   (*d*) **वर्कस्पेस पेन:** हे युजरने तयार केलेल्या सर्व चलांची यादी करते.
   (*e*) **कमांड हिस्ट्री पेन:** कमांड विंडोमधील सर्व कमांड प्रकार इथे रेकॉर्ड होतात.



आकृती 5.8: मॅटलॅब डेस्कटॉप
(Source: www.mathworks.com)

2. **फिगर विंडो:** कमांड विंडोमध्ये टाइप केलेल्या सर्व ग्राफिक्स कमांडचे आउटपुट येथे साठवले जातात.
3. **एडीटर विंडो:** येथे युजर M – फाइल्स नावाच्या फाइल्समध्ये प्रोग्राम लिहू, एडीट , तयार आणि सेव्ह करू शकतो.
4. **ऑनलाईन मदत:** मॅटलॅबला त्याच्या सर्व कार्यासाठी मदत पर्याय आहे आणि त्याची वैशिष्ट्ये स्पष्ट करण्यासाठी प्रात्यक्षिक कार्यक्रम देखील आहेत.
5. **इनपुट – आउटपुट:** हे परस्परसंवादी गणनेला (interactive computation) समर्थन देते. मॅटलॅबमधील मुलभूत डेटा प्रकार अॅरे/मॅट्रिक्स आहे. मॅट्रिक्सच्या परिमाणांचा उल्लेख करणे आवश्यक नाही. मॅटलॅब केस सेन्सिटिव्ह आहे. प्रत्येक निर्देशाचे आउटपुट स्क्रीनवर दाखवले जाते जोपर्यंत ते अन्यथा निर्देशित केले जात नाही.

6. **फाईलचे प्रकार:** मॅटलॅब अनेक प्रकारच्या फाइल्स वाचतो आणि लिहितो. आम्ही येथे पाच प्रकारांचा अभ्यास करतो -
   (*i*) **M–फाइल्स:** त्यांना .m एक्स्टेंशन (extension) आहे आणि ते दोन प्रकारचे आहेत –
   (a) स्क्रिप्ट फाइल्स आणि (b) फंक्शन फाइल. बहुतेक प्रोग्राम्स M - फायली म्हणून सेव्ह केले जातात.
   (*ii*) **मॅट– फाइल्स:** त्यांच्याकडे .mat एक्स्टेंशन (extension) आहे. तेथे मॅटलॅबद्वारे फाइल्स तयार केल्या जातात जेव्हा युजर 'सेव्ह' कमांडसह डेटा सेव्ह करतो.
   (*iii*) **फिग–फाइल्स:** त्यांना .fig एक्स्टेंशन (extension) आहे. या स्वरूपात एक आकृती सेव्ह करून हे तयार केले आहेत.
   (*iv*) **P–फाइल्स:** त्यांच्याकडे .p एक्स्टेंशन (extension) आहे. या संकलित M - फाइल्स आहेत.
   (*v*) **मेक्स–फाइल्स:** त्यांच्याकडे .mex एक्स्टेंशन (extension) आहे.
7. **क्विटिंग मॅटलॅब:** मॅटलॅबसेशन समाप्त करण्यासाठी कमांड विंडोमध्ये क्विट टाइप करा किंवा डेस्कटॉप मुख्य मेनूमधील "एक्झिट" मॅटलॅब फाइल निवडा.
8. मॅटलॅबवर विस्तृत तपशीलांसाठी मॅथवर्कची (Mathworks) अधिकृत वेबसाइट पहा.

रिमार्क: मॅटलॅबचे टूलबॉक्स: हे मॅटलॅब संगणकीय वातावरणावर असलेल्या असंख्य फंक्शनचा संग्रह आहे. जसे - कर्व फिटिंग टूलबॉक्स (curve fitting toolbox) 2 डी प्लॉट तयार करा, फोरिअर ट्रान्सफॉर्म (Fourier Transform) इ.

उदाहरण 10: अरे (array) मध्ये स्केलर मिळवण्याचे उदाहरण द्या.

उत्तर: अरे A तयार करा आणि त्यात स्केलर 4 मिळवा.

$$>> A = [0, 2; 2, 0]$$

$$>> C = A + 4$$

$$C = \begin{matrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{matrix}$$

A च्या प्रत्येक नोंदीमध्ये स्केलर मिळवले जाते.

उदाहरण 11: अँपेंडींग स्ट्रिंग्सचे उदाहरण द्या.

उत्तर: दोन 1 बाय 3 स्ट्रिंग्स अरे तयार करा आणि नंतर अरेमध्ये त्याचप्रमाणे स्ट्रिंग्स मिळवा.

>>$a1$ = ["White" "Black" "Brown"]

$a1$ = 1 × 3 string

"White" "Black" "Brown"

>> $a2$ = ["Flower" "Vase" "Table"]

$a2$ = 1 × 3 string

"Flower" "Vase" "Table"

>> $a = a1 + a2$

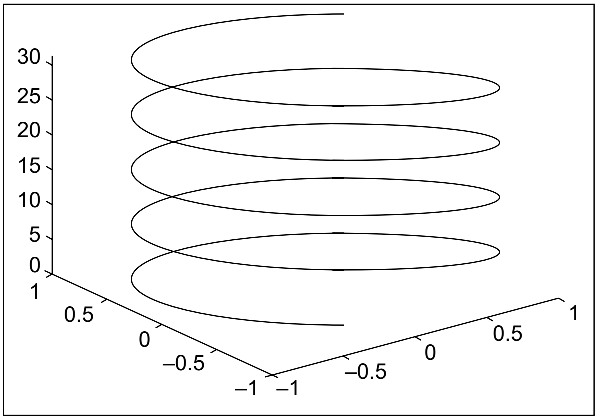
$a = 1 \times 3$ string

"White Flower" "Black Vase" "Brown Table"

उदाहरण 12: 3 - डी हेलिक्स काढा.

उत्तर: 0 आणि 10π दरम्यानच्या मूल्यांचे व्हेक्टर म्हणून t ची व्याख्या करा. साइन (sine) आणि कोसाइन (cosine) मूल्यांचे व्हेक्टर म्हणून st आणि ct ची व्याख्या करा. नंतर खालीलप्रमाणे st, ct आणि t प्लॉट करा-

```
>> t = θ; pi/50:10*pi;
>> st = sin (t);
>> ct = cos(t);
>> plot3 (st, ct, t)
```



आकृती 5.9: 3-D हेलिक्स
(*source:www.mathworks.com*)

5.4.3 मॅटलॅबचे फायदे

- मॅटलॅब हे अनेक प्रकारे वापरले जाऊ शकते. जसे- स्थिर प्रतिमांवर प्रक्रिया करणे , सिम्युलेशन व्हिडिओ तयार करणे, गणना करणे, प्रोग्रामिंग करणे इत्यादी.
- यात प्रि-डिफाइन फंक्शन आहे जे वापरणे सोपे असते.
- हे अनेक वेगवेगळ्या प्लॅटफॉर्मवर सपोर्ट करते.
- यात तांत्रिक बाबीं कल्पना करण्यासाठी उत्कृष्ट टूल्स आहेत.
- यात असे टूल्स आहेत जी युजरच्या प्रोग्रामसाठी ग्राफिकल यूजर इंटरफेस (GUI) इंटरएक्टिव्हपण डिझाइन करू शकतात.
- याचे मेमरी व्यवस्थापन स्वयंचलित आहे.
- एक्स्टर्नल लायब्ररी कॉल करण्याची क्षमता आहे.
- मॅटलॅब डायमेन्शन स्टेटमेण्टमध्ये पॉइंटर्स आवश्यक नाहीत.
- यात उत्तम ऑनलाइन ट्युटोरिअल्स आहेत.

5.4.4 मॅटलॅबचे तोटे

- हे तांत्रिक आणि गणिती गणनेसाठी आहे. म्हणून हे इतर क्षेत्रांसाठी लागू नाही.
- ही एक व्याख्या केलेली भाषा आहे आणि म्हणून कधीकधी ती इतर भाषेपेक्षा अधिक हळू चालते. परंतु प्रोग्रामच्या योग्य रचनेद्वारे ते तपासले जाऊ शकते.
- मोठ्या आकडेमोडीसाठी पुरेशी मेमरी असलेला वेगवान संगणक आवश्यक आहे.

5.4.5 मॅटलॅबसाठी काही कीबोर्ड शॉर्टकट

Action	Keyboard Shortcut
पुढील दिसणाऱ्या पॅनेलवर जाणे.	Ctrl + Tab
मागील दिसणाऱ्या पॅनेलवर जाणे.	Ctrl + Shift + Tab
पॅनेलमधील पुढील टॅबवर जाणे.	Ctrl + Page Down
पॅनेलमधील मागील टॅबवर जाणे.	Ctrl + Page Up
ओपन टूलला ॲक्टिव्ह टूल बनवा.	• Command Window: Ctrl+0 • Command History: Ctrl+1 • Current Folder: Ctrl+2 • Workspace: Ctrl+3 • Profiler: Ctrl+4 • Figure Palette: Ctrl+6 • Plot Browser: Ctrl+7 • Property Editor: Ctrl+8 • Editor: Ctrl+Shift+0 • Figures: Ctrl+Shift+1 • Web browser: Ctrl+Shift+2 • Variables Editor: Ctrl+Shift+3 • Comparison Tool: Ctrl+Shift+4 • Help browser: Ctrl+Shift+5 On macOS systems, use the Command key instead of the Ctrl key.
वर्तमान क्रिया रद्द करणे.	Esc (escape) उदाहरणार्थ, आपण एडीट मेनूच्या नावावर क्लिक केल्यास संपूर्ण मेनू दिसेल. Esc दाबल्याने मेनू पुन्हा लपतो.

Action	Keyboard Shortcut
	फंक्शन ब्राउझर मध्ये तीन पर्यंत Esc दाबून वेळा खालील परिणाम आहेत: 1. सर्च इतिहास डिसमिस करा. 2. सर्च फील्ड साफ करा. 3. फंक्शन ब्राउझर बंद करा.

(*source:www.mathworks.com*)

व्हिडिओ संसाधन संदर्भ

Differential Equations: General and Particular Solution

Get started with MATLAB .Retrieved from

Live editor. Retrieved from

Data Analysis. Retrieved from

MATLAB Graphics

Algorithm development

App Designer.

MATLAB with other languages

Parallel Computing

Desktop and web Deployment

MATLAB in the cloud

डिफरंशिअल इक्वेशन आणि मॅटलॅबचा वापर

1. कधीकधी वेगळ्या वैज्ञानिक क्षेत्रांच्या विविध समस्यांमध्येही समान डिफरंशिअल इक्वेशन मिळतात. हे आम्हाला विविध घटनांमागील एकीकरण तत्त्व स्पष्ट करते. जसे- वातावरणात प्रकाश आणि ध्वनीचा प्रसार आणि तलावाच्या पृष्ठभागावर लाटा- सर्व एकाच दुसऱ्या ऑर्डरच्या पार्शल डिफरंशिअल इक्वेशनद्वारे वर्णन केले जाऊ शकते.
2. किरणोत्सर्गी क्षय मॉडेलिंग, लोकसंख्या वाढ, शिकार-शिकारी मॉडेल इत्यादी डिफरंशिअल इक्वेशनची संकल्पना वापरतात.

3. डिफरंशिअल इक्केशन भौतिकशास्त्र, संगणक ग्राफिक्स आणि दृष्टी, गेमिंग वैशिष्ट्ये, रोबोटिक्स मध्ये वापरले जातात. कालांतराने गुंतवणूक परताव्यामध्ये बदल, बँक व्याज, प्रवाह समस्या, भूकंपाच्या लाटा यांचा अंदाज लावण्यासाठी; वैद्यकीय क्षेत्रात जसे की कॅन्सर वाढ किंवा रोगाचा प्रसार इ.साठी वापरतात.
4. डिफरंशिअल इक्केशनचा वापर न्यूटनच्या गतीचा दुसरा नियम,वस्तूंचे तापमान आणि त्याच्या सभोवतालच्या शीतकरण नियमात देखील होतो.
5. मॅटलॅबचे उद्योगात तसेच शैक्षणिक क्षेत्रात बरेच उपयोग आहेत. हे वॉशिंग मशीन, प्रिंटर, ऑटोमोबाईल, औद्योगिक मशीन इत्यादी सॉफ्टवेअर घटकांमध्ये वापरले जाते एका बटणाच्या दाबाने, मॅटलॅब कोड तयार करते आणि हार्डवेअर चालवते.
6. मॅटलॅब हे असे आहे की कोडिंगच्या काही सोप्या ओळींसह युजर तज्ञ नसताना मॉडेल तयार करू शकतो.
7. तांत्रिक व्यावसायिक मोठ्या डेटाचा अभ्यास करण्यासाठी मॅटलॅब वापरतात.
8. वरील व्यतिरिक्त, मॅटलॅबचे रोबोटिक्स, कॉम्प्युटेशनल बायोलॉजी, कॉम्प्युटेशनल फायनान्स, मेकॅट्रोनिक्स इत्यादी विस्तृत क्षेत्रात बरेच अनुप्रयोग आहेत.

केस स्टडी

एका गावाची लोकसंख्या 1000 आहे. सर्व ग्रामस्थांना संगणक साक्षर करण्यासाठी शासनाने योजना सुरू केली. यासाठी एक गावकरी प्रमुख व्यक्ती संगणक साक्षर करून म्हणून निवडला जातो. जर संगणक साक्षरता प्रसार संगणक-साक्षर ग्रामस्थ आणि उर्वरित ग्रामस्थांच्या संख्येच्या प्रमाणात असेल आणि 10 दिवसानंतर 100 संगणक-साक्षर लोक असतील-तर, खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या-

Q.1. जर $c(t)$ संगणक साक्षर विद्यार्थ्यांची संख्या दर्शवित असेल तर अनुक्रमे $c(t)$ चे कमाल आणि किमान मूल्य आहे

(*a*) 50 आणि 2 (*b*) 100 आणि 1 (*c*) 1000 आणि 1 (*d*) 0

Q.2. $c(10)$ मूल्य आहे

(*a*) 50 (*b*) 100 (*c*) 1000 (*d*) 10

Q.3. दिलेल्या माहितीच्या आधारे तुम्ही लोकसंख्येच्या संगणक साक्षरतेशी संबंधित गणिती मॉडेल बनवू शकता का? जर होय, तर ते आपल्या शिक्षकाद्वारे सत्यापित करा.

तपासा!!!

मॅटलॅबची विनामूल्य चाचणी आवृत्ती डाउनलोड करा.
आता आपल्याला मॅटलॅबबद्दल माहिती आहे. मॅटलॅबकडून टूलबॉक्स वापरून खालील डिफरंशिअल इक्केशनचे निराकरण मिळू शकते का ते तपासा. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. आपले उत्तर सत्यापित करा!

Math Work

सारांश

1. ज्या इक्वेशनमध्ये डिपेंडन्ट व्हेरिएबलचा डेरीवेटीव्ह हा इंडिपेंडेंट व्हेरिएबलच्या संदर्भात असतो त्याला डिफरंशिअल इक्वेशन म्हणून ओळखले जाते.
2. डिफरंशिअल इक्वेशनची ऑर्डर ही त्या इक्वेशनमध्ये असणाऱ्या सर्वाधिक डेरीवेटीव्हची ऑर्डर असते.
3. डिफरंशिअल इक्वेशनची डिग्री ही बहुपद समीकरणात असणाऱ्या सर्वाधिक ऑर्डरच्या डेरीवेटीव्हचा घातांक असतो जर ते इक्वेशनमध्ये रॅडिकल साइन व फ्रॅक्शन्स (radical sign and fractions) नसतील.
4. डिफरंशिअल इक्वेशनची ऑर्डर आणि डिग्री धन पूर्णांक असतात.
5. **व्हेरिएबल सेपरेबल मेथड:** I जर डिफरंशिअल इक्वेशन $f(x)dx = g(y)dy$ फॉर्ममध्ये लिहिले जाऊ शकते तर आपण असे म्हणतो की व्हेरिएबल्स वेगळे करण्यायोग्य आहेत आणि त्याचे उत्तर $\int f(x)dx = \int g(y)dy + c$ आहे, येथे c हा स्थिरांक आहे.
6. MATLAB म्हणजे MATrix LABoratory.
7. मॅटलॅब ही उच्च स्तरीय बहु-प्रतिमान भाषा आहे जी तांत्रिक आणि गणिती गणनेसाठी आहे.
8. हे 1970 च्या दशकात क्लीव्ह मोलर यांनी तयार केले होते.
9. 1980 मध्ये मॅटलॅब एक व्यावसायिक उत्पादन म्हणून प्रसिद्ध झाले.
10. **मॅटलॅब डेस्कटॉप:** हे मुख्य ठिकाण आहे जिथे आपण काम करतो. यात पाच सब विंडो असतात- कमांड विंडो, करंट डिरेक्टरी पेन, डिटेल्स (फाइल) पेन, वर्कस्पेस पेन, कमांड हिस्ट्री पेन.

सराव प्रश्न

व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न

Q.1. डिफरंशिअल इक्वेशनची ऑर्डर व डिग्री उदाहरणासहित स्पष्ट करा.

Q.2. सोडवा: $(1 - x)dy - (1 + y)dx = 0$ [**उत्तर:** $y - x - xy = c$]

Q.3. डिफरंशिअल इक्वेशन $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$ चे जनरल सोल्युशन शोधा.

[**उत्तर:** $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$]

Q.4. डिफरंशिअल इक्वेशन $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ चे पर्टिक्यूकलर सोल्युशन शोधा जेव्हा $x = 0$ आणि $y = 1$

[**उत्तर:** $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + e - 1$]

Q.5. मॅटलॅबच्या मूलभूत गोष्टी स्पष्ट करा.

Q.6. मॅटलॅब म्हणजे काय? त्याचे फायदे व तोटे लिहा.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

Q.1. जे फंक्शन डिफरंशिअल इक्वेशन $x^3dx + (y + 1)^2dy = 0$ सत्य करते ते ______ आहे.

(*a*) $y = x + c$ (*b*) $4x^4 + 5(y + 1)^2 = c$

(*c*) $3x^4 + 4(y + 1)^3 = c$ (*d*) $3x^2 + 4y^2 + c^2 = 0$ [**उत्तर.** (*c*)]

Q.2. जर $x = 1$ आणि $y = 2$ तर $(1 + x^3)dy - x^2ydx = 0$ चे पर्टिक्यूकलर सोल्युशन आहे.

(*a*) 2 (*b*) $y^2 = 4(1 + x^2)$ (*c*) 3 (*d*) $y^3 = 4(1 + x^3)$

[**उत्तर.** (*d*)]

Q.3. डिफरंशिअल इक्वेशन $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/3} = 0$ ची ऑर्डर आहे.

(*a*) 2 (*b*) 3 (*c*) 1/3 (*d*) 0 [**उत्तर.** (*b*)]

Q.4. डिफरंशिअल इक्वेशन $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \frac{dy}{dx} + y = \sin x$ डिग्री आहे.

(*a*) 2 (*b*) 3 (*c*) 1 (*d*) 4 [**उत्तर.** (*d*)]

Q.5. डिफरंशिअल इक्वेशन $\frac{dy}{dx} = \frac{(\log y)^2}{(\log x)^2}$ व्हेरिएबल सेपरेबल फॉर्ममध्ये आहे.

(*a*) खरे (*b*) खोटे [**उत्तर.** (*a*)]

Q.6. MATLAB चा संक्षेप म्हणजे ________. [**उत्तर.** MATrix LABoratory]

Q.7. जोड्या जुळवा.

	मॅटलॅबच्या फाईल्स		एक्स्टेंशन
1.	P-files	(*a*)	.m
2.	Fig-files	(*b*)	.mat
3.	M-files	(*c*)	.fig
4.	Mat-files	(*d*)	. p

[**उत्तर.** 1-(*d*); 2-(*c*); 3-(*a*); 4-(*b*)]

Q.8. मॅटलॅब हे अनेक बिल्ट इन फंक्शनचा (built in function) __________ आहे. [**उत्तर.** टूलबॉक्स]

Q.9. मॅटलॅबचा बेसिक बिल्डिंग ब्लॉक ________ आहे. [**उत्तर.** मॅट्रिक्स]

Q.10. मॅटलॅबचा शोध ________ यांनी लावला

(*a*) मरे (*b*) बिल गेट्स (*c*) क्लीव्ह मोलर (*d*) मायक्रोसॉफ्ट

[**उत्तर.** (*c*)]

मिनी प्रोजेक्ट

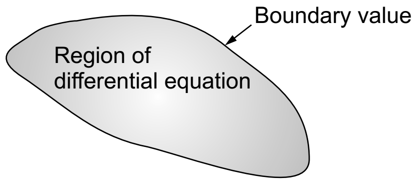
प्रत्येकी पाच विद्यार्थ्यांचा गट तयार करा. आपल्या गटासाठी मॅटलॅब टूलबॉक्स निवडा. या टूलबॉक्सचा वापर करून त्या टूलबॉक्सची किमान 10 वैशिष्ट्ये त्याच्या उदाहरणांसह स्पष्ट करणारे सादरीकरण करा.

क्रियाकलाप

आपल्या विभागाच्या गणिती मॉडेलिंग पुस्तकातून किंवा ऑनलाइन स्रोतांमधून कोणतेही शिकार-शिकारी मॉडेल निवडा. त्या मॉडेलमधील डिफरंशिअल इक्वेशनचे महत्त्व स्पष्ट करा. आपल्या शिक्षकाला शाब्दिक सादरीकरण द्या!

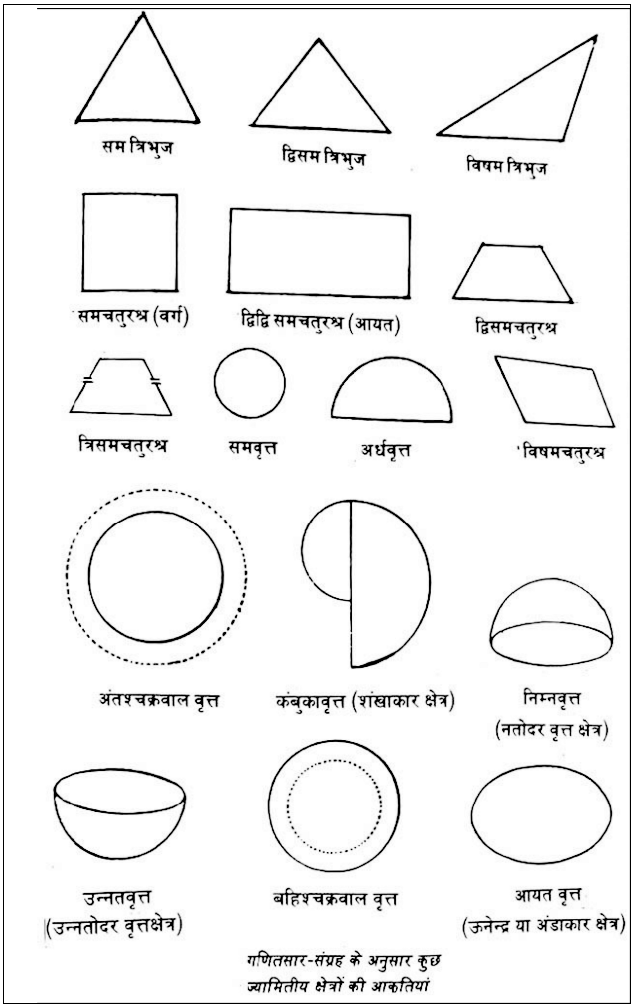
अधिक जाणून घ्या !

- प्रथम ऑर्डर प्रथम डिग्री डिफरंशिअल इक्वेशन सोडवण्यासाठी व्हेरिएबल-सेपरेबल करण्याव्यतिरिक्त इतर पद्धती-
  (a) होमोजिनिअस इक्वेशन
  (b) लेबनिझ लिनिअर इक्वेशन
  (c) बर्नोली इक्वेशन
  (d) एक्झॅक्ट डिफरंशिअल इक्वेशन
  (e) एक्झॅक्ट डिफरंशिअल इक्वेशन नसलेले एक्झॅक्ट डिफरंशिअल इक्वेशनमध्ये रूपांतरित करणे.
- डिफरंशिअल इक्वेशनचे बॉउंडरी व्हॅल्यू प्रॉब्लेम (boundary value problem) मध्ये अतिरिक्त मर्यादांचा संच असतो (constraints), ज्याला सीमा अटी (boundary conditions).म्हणतात. बॉउंडरी व्हॅल्यू प्रॉब्लेमचे निराकरण हे डिफरंशिअल इक्वेशनचे उत्तर आहे जे सीमा अटी देखील पूर्ण करते.



संदर्भ व सुचविलेले वाचन

- Murray A, Daniel (1992), Introductory course in Differential Equations, Radha Publishing House, Calcutta.
- NCERT (2007), Mathematics Textbook for Class XII (Part II).
- Ayres Jr. Frank (1981), Differential Equations, Schaum's Outline Series, Mc-Graw Hill Book.
- Ross L Shepley (Third Edition), Differential Equations,WILEY.
- Pratap Rudra (2010),Getting started with MATLAB, OXFORD University Press.
- www.mathworks.com



An excerpt from *"Ganitsaar-Sangraha"* written by Indian Mathematician *Mahaveeracharya.*
(**Source:** Muley Gunakar (1992), Sansaar ke Mahan Ganitagya, Raajkamal Prakashan)

परिशिष्ट

परिशिष्ट-A: गणित प्रयोगशाळा

विद्यार्थ्यांमध्ये गणिताची जाणीव जागृत करण्यासाठी, गणिताची प्रयोगशाळा विद्यार्थ्यांना शिक्षकांच्या योग्य मार्गदर्शनाखाली स्वतः ज्ञान निर्माण करण्याची उत्तम संधी देते.

सिद्धांतापासून अमुर्ततेपर्यंत गणिताचे आकलन विद्यार्थ्यांना सुलभ करण्यासाठी काही उपक्रम खाली दिले आहेत. गणिताच्या प्रयोगशाळेद्वारे विद्यार्थी गणिताची तत्त्वे चांगल्या प्रकारे शिकतात आणि त्याचा आनंद घेतात.

गणित प्रयोगशाळेच्या व्यवस्थापन आणि देखरेखीसाठी स्वतंत्र व्यवस्था इष्ट आहे. परंतु जरी नियमांनुसार नसले तरीही, साध्या क्रियाकलाप वर्गातच सहज करता येतात.

प्रयोग 1:

ध्येय

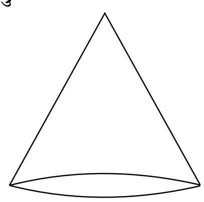
शंकूच्या विभागांचे विविध प्रकार तयार करणे.

साहित्य

पारदर्शक पत्रक, कात्री, हार्डबोर्ड, चिकट, काळा कागद.

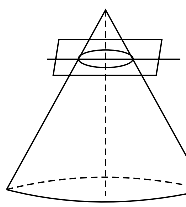
कृती

1. सोयीस्कर आकाराचे हार्डबोर्ड घ्या आणि त्यावर एक काळा कागद पेस्ट करा.
2. वर्तुळाच्या सेक्टरच्या आकारात एक पारदर्शक पत्रक कापून घ्या आणि आकृतीमध्ये (आकृती a.1) दाखवल्याप्रमाणे योग्य वर्तुळाकार शंकू मिळवण्यासाठी तो दुमडा.

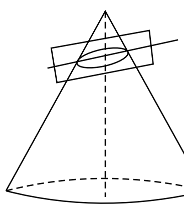


आकृती a.1

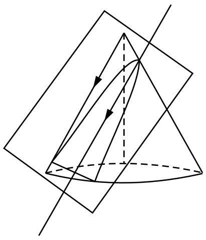
3. पारदर्शक पत्रकाचा वापर करून समान आकाराचे आणखी 4 शंकू तयार करा. हे शंकू हार्डबोर्डवर ठेवा.
4. आकृतीमध्ये (आकृती a.2, a.3, a.4, a.5) दाखवल्यानुसार या शंकूंना पारदर्शक सपाट पत्रकासह वेगवेगळ्या स्थितीत कट करा.



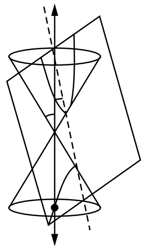
आकृती a.2



आकृती a.3



आकृती a.4



आकृती a.5

निरीक्षणे

1. आकृतीमध्ये (आकृती a.2) पारदर्शक सपाट पत्रक शंकूला अशा प्रकारे कापते की पत्रक शंकूच्या पायाशी समांतर आहे. त्यामुळे प्राप्त झालेला शंकू विभाग एक वर्तुळ आहे.
2. आकृतीमध्ये (आकृती a.3) सपाट पत्रक शंकूच्या अक्षांकडे किंचित कलते आहे, म्हणून प्राप्त केलेला शंकू विभाग इलिप्स आहे.
3. आकृतीमध्ये (आकृती a.4) सपाट पत्रक शंकूच्या जनरेटरला समांतर आहे, म्हणून प्राप्त केलेला शंकू विभाग हा पॅराबोला आहे.
4. आकृतीमध्ये (आकृती a.5) सपाट शंकूच्या अक्षाला समांतर आहे, म्हणून प्राप्त झालेले विभाग हायपरबोलाचा भाग आहेत.

परिणाम

1. आकृतीमध्ये (आकृती a.2) पारदर्शक सपाट पत्रक शंकूच्या पायापर्यंत ____________ आहे आणि प्राप्त केलेला विभाग _________ आहे
2. आकृतीमध्ये (आकृती a.3) सपाट पत्रक ________ कडे कललेले आहे आणि प्राप्त केलेला शंकू विभाग ______ आहे.
3. आकृतीमध्ये (आकृती a.5) सपाट पत्रक __________ च्या समांतर आहे आणि त्यामुळे प्राप्त केलेला शंकू विभाग ___________ आहे.
4. आकृतीमध्ये (आकृती a.5) सपाट पत्रक __________ अक्षावर आहे आणि त्यामुळे मिळवलेला शंकू विभाग ___________ चा एक भाग आहे.

निष्कर्ष

ही क्रियाकलाप विविध प्रकारचे शंकू विभाग समजून घेण्यात मदत करते ज्यांचे वास्तविक जीवनातील परिस्थिती आणि समकालीन विज्ञानांमध्ये व्यापक अनुप्रयोग आहेत.

प्रयोग 2:

ध्येय

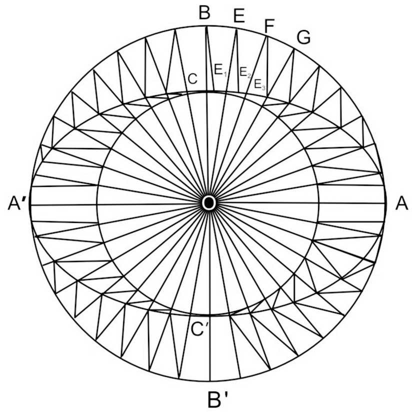
दिलेल्या मेजर आणि मायनर अक्षांसह इलिप्सची (ellipse) रचना करणे.

साहित्य

एक हार्डबोर्ड, काळा कागद, धागा, गोंद, चार्ट पेपर.

कृती

1. योग्य आकाराच्या हार्डबोर्डची आयताकृती शीट घ्या आणि त्यावर काळा कागद चिकटवा.
2. त्यावर O बिंदू चिन्हांकित करा. लंबवर्तुळाच्या सेमि-मेजर आणि सेमि-मायनर अक्ष म्हणून मध्य O आणि त्रिज्यासह दोन केंद्रीत वर्तुळे काढा. मोठ्या वर्तुळाच्या व्यासापैकी एकाला AOA′ म्हणून चिन्हांकित करा आणि त्याला क्षैतिज रेषा म्हणा.



आकृती b.1

3. वर्तुळांची त्रिज्या अशा प्रकारे काढा की सलग दोन त्रिज्यामधील कोन 14° (म्हणा) समान असेल.
4. C वर लहान वर्तुळ कापणाऱ्या मोठ्या वर्तुळाची कोणतीही त्रिज्या OB घ्या. C द्वारे एक क्षैतिज रेषा काढा आणि B पासून या क्षैतिज रेषेवर एक लंब (उभ्या रेषा) काढा आणि E_1 बिंदू मिळवा. (आकृती b.1 पहा)
5. मोठ्या वर्तुळाच्या सर्व त्रिज्या OE, OF वगैरेसाठी ही क्रिया पुन्हा करा आणि E_2, E_3, ... वगैरे बिंदू मिळवा.
6. E. E_1, E_2, E_3, ... या बिंदूंवर नखे निश्चित करा आणि नखांच्या पायांना दोऱ्याने जोडा आणि वक्र मिळवा. (आकृती b.1)

निरीक्षणे

1. त्यामुळे प्राप्त वक्र एक इलिप्स (ellipse) आहे.
2. इलिप्सचा मेजर अक्ष AOA′ आहे आणि इलिप्सचा मायनर अक्ष BOB′ आहे, जेथे BOB′ व्यास AOA′ च्या लंब असलेल्या लहान वर्तुळाचा व्यास आहे.

परिणाम

(*i*) OA = ________ OB = ________

(*ii*) OC = ________ OC′ = ________

(*iii*) इलिप्सचा मेजर अक्ष ________. इलिप्सचा मायनर अक्ष = ________

(*iv*) बिंदू E_1, E_2 ________ वर आहेत ________.

निष्कर्ष

हा क्रियाकलाप धागा, नखे वापरून इलिप्सच्या डिझाईन बनवण्यासाठी आणि इलिप्सच्या मेजर आणि मायनर अक्षांसारख्या संकल्पनांच्या स्पष्टीकरणात वापरला जाऊ शकतो.

परिशिष्ट-B: मुल्यांकन ब्लूमच्या पातळीवर संरेखित

प्रश्नपत्रिका रचनेसाठी सुचविलेले तक्ता

युनिट क्र.	युनिट शीर्षक	अध्यापन तास	सिद्धांत गुणांचे वितरण			
			R पातळी	U पातळी	A पातळी	एकुण गुण
1.	डिटर्मिनन्ट्स आणि मॅट्रायसेस	11	5	6	5	16
2.	इंटिग्रल कॅल्क्युलस	9	5	4	5	14
3.	निर्देशक भुमिती	10	4	5	5	14
4.	व्हेक्टर अलजेब्रा	8	4	4	4	12
5.	डिफरंशिअल इक्वेशन आणि मॅटलॅबची मुलभूत माहिती	10	4	5	5	14
		48 तास	22	24	24	70

लेजंड्स (Legends): R = लक्षात ठेवा; U = समजून घ्या. A = लागू करा आणि वरील (ब्लूमची वर्गीकरण)

टीप: हे स्पेसिफिकेशन टेबल विद्यार्थ्यांना शिकण्यासाठी आणि शिक्षकांना UO च्या प्राप्तीसंदर्भात शिकवण्यासाठी आणि मुल्यांकन करण्यासाठी सामान्य मार्गदर्शक तत्त्वे प्रदान करते. प्रश्नपत्रिकेतील वेगवेगळ्या वर्गीकरण स्तरावर (R, U आणि A) गुणांचे वास्तविक वितरण वरील सारणीपेक्षा भिन्न असू शकते.

परिशिष्ट (Annexure)

परिशिष्ट (Annexure-1)

लॉगरिथम:

व्याख्या

जर a, x, y या तीन संख्या आहेत व $a^x = y$, तर x ला बेस a असलेल्या y चा लॉगरिथम म्हणून ओळखले जाते. म्हणून एका संख्येचा काही बेसमध्ये लॉगरिथम हा घातांक आहे ज्याद्वारे ती संख्या मिळवण्यासाठी ती संख्या मिळवण्यासाठी पाया हा घातांक असतो. आपण लघुगणक स्वरूपात $a^x = y$ हे संबंध खालीलप्रमाणे लिहू शकतो.

$$\log_a y = x, \text{ म्हणून } a^x = y \log_a y = x$$

टीप: हे स्पेसिफिकेशन टेबल विद्यार्थ्यांना शिकण्यासाठी आणि शिक्षकांना UO च्या प्राप्तीसंदर्भात शिकवण्यासाठी आणि मुल्यांकन करण्यासाठी सामान्य मार्गदर्शक तत्त्वे प्रदान करते. प्रश्नपत्रिकेतील वेगवेगळ्या वर्गीकरण स्तरावर (R, U आणि A) गुणांचे वास्तविक वितरण वरील सारणीपेक्षा भिन्न असू शकते.

1. प्रत्येक धन वास्तविक संख्या y हे घातांक स्वरूपात व्यक्त केले जाऊ शकते कारण $a^x = y$ होते. 'a' देखील एकपेक्षा वेगळी धन संख्या आहे आणि त्याला बेस म्हणतात आणि 'x' ला घातांक म्हणतात.
2. लॉगरिथमची मर्यादा: $\log_a y$ ची व्याख्या तेव्हाच केली जाते जेव्हा:

   (i) $y > 0$ (ii) $a > 0$ (iii) $a \neq 1$
3. शून्याचे लॉगरिथम अस्तित्वात नाही.
4. y च्या दिलेल्या किमतीसाठी $\log_a y$ एक किंमत आहे.
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_y y = 1$
7. $\log y = -1 = \log_y \dfrac{1}{y}$
8. $y = a^{\log_a y}$
9. $\log_y \dfrac{1}{y} = -1$

लॉगरिथमचे गुणधर्म

जर m, n कोणत्याही धन संख्या आहेत व $a > 0$, $a \neq 1$ तर लॉगरिथमचे काही ठळक गुणधर्म आहेत-

1. मुलभूत लॉगरिथम आयडेंटिटी

   $a^{\log_a m} = m$
2. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$
3. $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

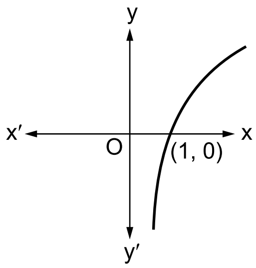
4. बेस बदलण्याचे प्रमेय–

त्यात असे नमूद केले आहे की दोन संख्यांच्या लॉगरिथमचा भाग त्यांच्या सामान्य बेसपासून स्वतंत्र आहे.

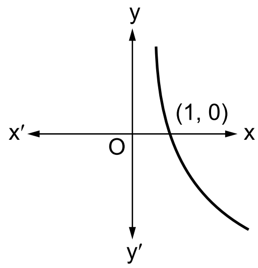
चिन्ह स्वरूपात, $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$ येथे $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

लॉगरिथमिक फंक्शनचा आलेख

$y = \log_a x$



where a > 1



where 0 < a < 1

कॅरॅक्टरिस्टिक आणि मँटिसा

दिलेल्या y संख्यासाठी लघुगणक $\log_a y$ = पूर्णांक + अपूर्णांक म्हणून व्यक्त केले जाऊ शकते. पूर्णांक भागाला कॅरॅक्टरिस्टिक आणि अपूर्णांक भागाला मँटिसा म्हणतात. जेव्हा $\log n$ चे मूल्य दिले जाते, तेव्हा 'n' चे अंक शोधण्यासाठी आपण फक्त मँटिसा भाग वापरतो. अविभाज्य भागातील अंकांची संख्या मोजण्यासाठी (जर $n \geq 1$) किंवा दशांश नंतर शून्यांची संख्या आणि प्रथम शून्य नसलेल्या संख्येपूर्वी (जर $0 < n < 1$) असेल तर कॅरॅक्टरिस्टिकचा वापरले जाते.

टीप:

(*i*) संख्येच्या लॉगरिथमचा मँटिसा भाग नेहमी धन ($0 \leq m < 1$) असतो.

(*ii*) $\log_{10} y$ चे कॅरॅक्टरिस्टिक n असल्यास y मधील अंकांची संख्या $(n + 1)$ आहे

(*iii*) $\log_{10} y$ कॅरॅक्टरिस्टिक $(-n)$ असल्यास y मध्ये दशांशानंतर $(n - 1)$ शून्य अस्तित्वात आहेत.

अँटिलॉगरीथम

जर $\log n = m$ तर धन रिअल नंबर 'n' ला m अँटिलॉगरीथम म्हणतात.

अशा प्रकारे, $\log n = m \Leftrightarrow n = \text{antilog}\ m$.

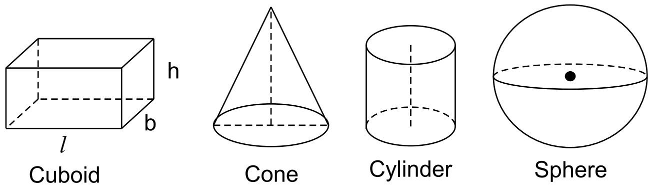
परिशिष्ट (Annexure-2)

घन

वर्णन करण्यासाठी तीन आयामांची आवश्यकता आहे

(*a*) घन पदार्थांचा पृष्ठभाग - घन भागाला बांधलेले सपाट क्षेत्र उदा. सहा आयताकृती विटांनी बांधलेले चेहरे. पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ चौरस एककांमध्ये मोजले जाते.

(*b*) घन पदार्थाचे घनफळ - घनाने व्यापलेली जागा क्यूबिक युनिटमध्ये मोजली जाते.



इष्टिकाचिती

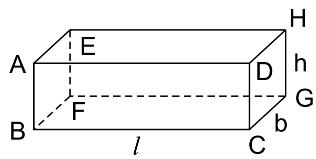
आयताकृती आकाराचे घन ज्याला इष्टिकाचिती असेही म्हणतात (उदा. मॅच बॉक्स, वीट)

(*a*) सहा आयताकृती पृष्ठभाग आहेत ज्यांचे विरुद्ध पृष्ठभाग समांतर आणि समरूप आहेत.

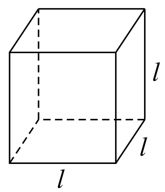
(*b*) बारा कडा आहेत (कडा - रेषाखंड जिथे दोन समीप पृष्ठभाग मिळतात).

(*c*) शिरोबिंदू नावाच्या बिंदूवर तीन समीप पृष्ठभाग मिळतात आणि इष्टिकाचितीमध्ये आठ शिरोबिंदू असतात.

(*d*) पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ: $A = 2[l \times b + b \times h + h \times l]$ चौरस एकक



(*e*) घनफळ: $V = l \times b \times h$ घन एकक



घन

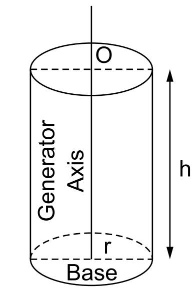
क्यूबॉइडचे विशेष प्रकरण सर्व बाजू समान आहेत.

घनाचे पृष्ठफळ = $6l^2$; घनाचे घनफळ = l^3 unit cube: बाजू $l = 1$

व्हॉल्यूम 1 क्यूबिक युनिट आहे (या क्यूबिक युनिटमधून मिळवले आहे)

वृत्तचिती

पार्श्व (वक्र) पृष्ठभाग आणि दोन समरूप वर्तुळाकार क्रॉस सेक्शन असणे. (उदा. जार, वर्तुळाकार खांब, ड्रम, पाईप्स इ.)



(*a*) अक्ष - दोन वर्तुळाकार क्रॉस सेक्शनच्या केंद्रांना जोडणारी रेषा.

(*b*) उजवा वर्तुळाकार सिलेंडर - जेव्हा अक्ष गोलाकार क्रॉस सेक्शनला लंब असतो.

(*c*) जनरेटर - अक्षांना समांतर आणि बाजूकडील पृष्ठभागावर रेषा.

(*d*) बेस - उभ्या स्थितीत सिलेंडरसह, खालचा गोलाकार शेवट बेस आहे.

(*e*) उंची (h) - दोन वर्तुळाकार पृष्ठभागामधील अंतर.

(*f*) त्रिज्या (r) - पाया किंवा वरच्या वर्तुळाची त्रिज्या.

(*g*) एकूण पृष्ठभाग क्षेत्र = बेस क्षेत्र + वक्र पृष्ठभाग क्षेत्र

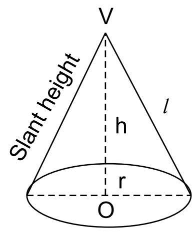
$2\pi r^2 + 2\pi rh = 2r(h + r)$ (दोन वर्तुळाकार टोकांसह).

गोलाकार टोकांशिवाय (पोकळ सिलेंडर) = 2

(*h*) वृत्तचितीचे घनफळ - $V = \pi r^2 h$

शंकू

आकृतीमध्ये असलेल्या शंकूचा वक्र पृष्ठभाग शिरोबिंदू (V) आणि गोलाकार बेस त्रिज्या r आणि केंद्र (O) आहे.



Cone

(*a*) अक्ष - रेषा जोडणारी शिरोबिंदू आणि बेस सर्कलचे केंद्र (VO)

(*b*) शंकूची उंची (h) - VO ची लांबी.

(*c*) तिरकी उंची (l) - मूळ वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूपासून शिरोबिंदूचे अंतर.

$l = \sqrt{r^2 + h^2}$

(*d*) उजवा गोलाकार शंकू - जेव्हा अक्ष पायाला लंब असतो.

(*e*) पायाला समांतर असलेल्या शंकूचा क्रॉस सेक्शन हे एक वर्तुळ आहे आणि पायाला लंब एक समद्विभुज त्रिकोण आहे.

(*f*) घनफळ - $(1/3)\pi r^2 h$ (शंकूचे घनफळ हे समान उंची आणि बेस त्रिज्या असलेल्या सिलेंडरच्या घनफळच्या 1/3 आहे.)

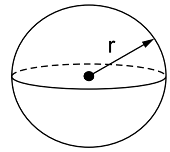
(*g*) वक्र पृष्ठभाग क्षेत्र: πrl

(*h*) एकूण पृष्ठभाग क्षेत्र: $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$

(*i*) काटकोन त्रिकोण त्याच्या काटकोन बनवण्याच्या बाजूने फिरवून उजवा वर्तुळाकार शंकू तयार केला जाऊ शकतो.

गोल

ज्या पृष्ठभागावरील सर्व बिंदू त्याच्या केंद्रापासून समान अंतरावर असतात त्याला गोल म्हणतात. समान अंतराला त्रिज्या (r) म्हणतात आणि पृष्ठभागावर शेवटच्या बिंदूंसह मध्यभागी जाणारी कोणतीही रेषा व्यास म्हणतात.

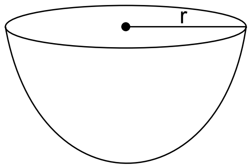


(*a*) घनफळ $V = (4/3)\pi r^3$

(*b*) पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $A = 4\pi r^2$

अर्धगोल

मध्यभागी जाणाऱ्या प्रतलाने एक गोल दोन अर्धगोलांमध्ये विभागला जातो.



(*a*) घनफळ $V = (2/3)\pi r^3$

(*b*) वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $S = 2\pi r^2$

(*c*) एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $A = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

CO आणि PO प्राप्ती सारणी

या कोर्ससाठी विषय निष्पत्ती (CO) कोर्स पूर्ण झाल्यानंतर प्रोग्रामच्या निष्पत्ती सह (PO) मॅप केले जाऊ शकतात आणि प्राप्तीमधील अंतरांचे विश्लेषण करण्यासाठी PO च्या निष्पत्ती सहसंबंध (correlation) तयार केला जाऊ शकतो. या विश्लेषण नंतर प्राप्तीमधील अंतर दूर करण्यासाठी आवश्यक उपाययोजना केल्या जाऊ शकतात.

CO आणि PO प्राप्ती सारणी

कोर्स निष्पत्ती (Course Outcomes)	**प्रोग्राम निष्पत्ती (Programme Outcomes) प्राप्ती** (1-दुर्बल सहसंबंध; 2-मध्यम सहसंबंध; 3-मजबूत सहसंबंध)						
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7
CO-1							
CO-2							
CO-3							
CO-4							
CO-5							

गॅप विश्लेषण करण्यासाठी सारणीमध्ये संकलित माहितीचा वापर केला जाऊ शकतो.

शब्दसूची