

# यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी

(प्रयोगशाला नियमपुस्तिकेसह)

लेखक:

भंखर भरत गोकालदास

अनुवादक:

श्री. वासुदेव रघुनाथ उपाध्ये

पुनरावलोकनकर्ता:

रमेश वि. बंडगर



**KHANNA BOOK PUBLISHING CO. (P) LTD.**

PUBLISHER OF ENGINEERING AND COMPUTER BOOKS

4C/4344, Ansari Road, Darya Ganj, New Delhi-110002

Phone: 011-23244447-48

Mobile: +91-99109 09320

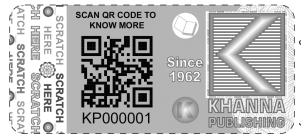
E-mail: [contact@khannabooks.com](mailto:contact@khannabooks.com)

Website: [www.khannabooks.com](http://www.khannabooks.com)

Dear Readers,

To prevent the piracy, this book is secured with HIGH SECURITY HOLOGRAM on the front title cover. In case you don't find the hologram on the front cover title, please write us to at [contact@khannabooks.com](mailto:contact@khannabooks.com) or whatsapp us at +91-99109 09320 and avail special gift voucher for yourself.

Specimen of Hologram on front Cover title:



Moreover, there is a SPECIAL DISCOUNT COUPON for you with EVERY HOLOGRAM.

How to avail this SPECIAL DISCOUNT:

Step 1: Scratch the hologram

Step 2: Under the scratch area, your “coupon code” is available

Step 3: Logon to [www.khannabooks.com](http://www.khannabooks.com)

Step 4: Use your “coupon code” in the shopping cart and get your copy at a special discount

Step 5: Enjoy your reading!

**ISBN:** 978-93-5538-052-4

**Book Code:** DIP173MA

## **Engineering Mechanics**

by Bhankhar Bharat Gokaldas

**[Marathi Edition]**

*Published by:*

**Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.**

Visit us at: [www.khannabooks.com](http://www.khannabooks.com)

Write us at: [contact@khannabooks.com](mailto:contact@khannabooks.com)

CIN: U22110DL1998PTC095547

To view complete list of books,  
Please scan the QR Code:



*Printed in India.*

### **Copyright © Reserved**

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior permission of the publisher.

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade, be lent, re-sold, hired out or otherwise disposed of without the publisher's consent, in any form of binding or cover other than that in which it is published.

**Disclaimer:** The website links provided by the author in this book are placed for informational, educational & reference purpose only. The Publisher do not endorse these website links or the views of the speaker/ content of the said weblinks. In case of any dispute, all legal matters to be settled under Delhi Jurisdiction only.



प्रो. अनिल डी. सहस्रबुद्धे  
अध्यक्ष  
Prof. Anil D. Sahasrabudhe  
Chairman



सत्यमेव जयते

अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्

(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)

(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)

नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली-110070

दूरभाष : 011-26131498

ई-मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION

(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)

(Ministry of Education, Govt. of India)

Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070

Phone : 011-26131498

E-mail : chairman@aicte-india.org

## प्रास्ताविक

शतकानुशतके भारतीय समाजाच्या प्रगती आणि विस्तारामध्ये अभियांत्रिकीने अत्यंत महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावली आहे. भारतीय उपखंडात उगम पावलेल्या अभियांत्रिकी संकल्पनांचा जगावर प्रभाव पडला आहे.

ऑल इंडिया कौन्सिल फॉर टेक्निकल एज्युकेशन (एआयसीटीई) 1987 मध्ये स्थापनेपासून तंत्रशास्त्राच्या विद्यार्थ्यांना शक्य त्या सर्व प्रकारे मदत करण्यात नेहमीच आघाडीवर असते. एआयसीटीईचे ध्येय तांत्रिक शिक्षणाला प्रोत्साहन देणे आणि त्याद्वारे उद्योगाला अधिक उंचीवर नेणे आणि शेवटी आपल्या प्रिय मातृभूमी भारताला आधुनिक विकसित राष्ट्र बनण्याचे आहे. येथे हे नमूद करणे योग्य ठरेल की अभियंते आधुनिक समाजाचा कणा आहेत – चांगले अभियंते, म्हणजे चांगले उद्योग आणि चांगले उद्योग म्हणजे चांगला देश.

NEP 2020 मध्ये प्रादेशिक भाषांमध्ये सर्वांना शिक्षणाची कल्पना मांडण्यात आली आहे, ज्यामुळे प्रत्येक विद्यार्थी पुरेसा सक्षम होईल आणि राष्ट्रीय विकासासाठी योगदान देण्याच्या स्थितीत येईल याची खाली होईल.

एआयसीटीई गेल्या काही वर्षांपासून अविरतपणे काम करत असलेल्या क्षेत्रांपैकी एक म्हणजे सर्व अभियांत्रिकी विद्यार्थ्यांना विविध प्रादेशिक भाषांमध्ये तयार केलेल्या आंतरराष्ट्रीय दर्जाची पुस्तके माफक किमतीमध्ये उपलब्ध करून देणे. ही पुस्तके सोप्या भाषेत, वास्तविक जीवनातील उदाहरणे, समृद्ध सामग्री आणि बदलत्या जगाच्या उद्योगाच्या गरजा लक्षात घेऊनच तयार केलेली आहेत. ही पुस्तके अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञानासाठी एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रम – 2018 नुसार आहेत.

संपूर्ण भारतातील प्रख्यात, उत्तम ज्ञान आणि अनुभव संपन्न प्राध्यापकांनी शैक्षणिक क्षेत्राच्या सोईसाठी ही पुस्तके लिहिली आहेत. एआयसीटीईला विश्वास आहे की ही पुस्तके त्यांच्या समृद्ध सामग्रीसह तांत्रिक विद्यार्थ्यांना अधिक सहजतेने आणि गुणवत्तेसह विषयांवर प्रभुत्व मिळविण्यात मदत करतील.

या अभियांत्रिकी विषयांना अधिक सुबक बनविण्याच्या प्रयत्नांसाठी एआयसीटीई मूळ लेखक, समन्वयक आणि अनुवादकांच्या मेहनतीचे कौतुक करते.

(Anil D. Sahasrabudhe)



## ऋणनिर्देश

---

डिप्लोमा विद्यार्थ्यांसाठी तांत्रिक पुस्तक प्रकाशित करण्यासाठी एआयसीटीईचे सूक्ष्मनियोजन आणि अंमलबजावणी केल्याबद्दल लेखक त्यांचे आभारी आहेत.

पुस्तकाचे समीक्षक श्री. पारेख दिव्यकुमार नरेंद्र यांचे अमूल्य योगदान आम्ही मनापासून स्वीकारतो, ज्यांनी हे पुस्तक विद्यार्थ्यांच्या अनुकूल बनवले आणि कलात्मक पद्धतीने त्यांनी ह्या पुस्तकाला अधिक चांगला आकार दिला.

आम्ही हे मोठ्या सन्मानाने सांगू इच्छितो की हे पुस्तक AICTE मॉडेल अभ्यासक्रमाशी आणि राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण (NEP) -2020 च्या मार्गदर्शक तत्वांनुसार संरेखित आहे. प्रादेशिक भाषांमधील शिक्षणाला चालना देण्यासाठी, या पुस्तकाचे अनुसूचित भारतीय प्रादेशिक भाषांमध्ये भाषांतर केले जात आहे.

प्रा. वासुदेव रघुनाथ उपाध्ये यांनी हे पुस्तक मराठीमध्ये अनुवादित केले आहे. त्यांनी केलेल्या योगदानाबद्दल आणि मराठी भाषेत समीक्षा केल्याबद्दल प्रा. रमेश व्ही. बंडगर यांचेही आम्ही आभार मानू इच्छितो.

श्री. बुद्धा चंद्रशेखर, CCO NEAT AICTE ज्यांचे AI आधारित अनुवादक साधन भाषांतराच्या उद्देशाने वापरले गेले त्यांचे आम्ही विनम्र अभिवादन करू इच्छितो.

शेवटी, आम्ही प्रकाशन गृह, मेसर्स खन्ना बुक पब्लिशिंग कंपनी प्रायव्हेट लिमिटेड, नवी दिल्ली यांचे मनापासून आभार व्यक्त करू इच्छितो, ज्याची संपूर्ण टीम प्रकाशनाच्या सर्व पैलूंवर सहकार्य करण्यास सदैव तत्पर होती जेणेकरून हा एक अद्भुत अनुभव असेल.

- भंखर भरत गोकाळदास



## प्रस्तावना

“यंलशास्त्र अभियांत्रिकी” हे पुस्तक माझ्या मूलभूत अभ्यासक्रमाच्या शिकवण्याच्या समृद्ध अनुभवाचा परिणाम आहे. हे पुस्तक लिहिण्याची सुरुवात म्हणजे यंलशास्त्र अभियांत्रिकीची मूलभूत तत्त्वे विद्यार्थ्यांना समजून देणे आणि तसेच विषयाची अंतर्दृष्टी विद्यार्थ्यांना मिळावी. ह्या पुस्तकामधील विस्तृत भाग अशा पद्धतीने घेतला आहे की सर्व अभ्यासक्रम आणि आवश्यक पूरक माहिती प्रदान करण्याच्या हेतू लक्षात घेऊन, मी संपूर्ण पुस्तकात एआयसीटीई मॉडेल अभ्यासक्रमानुसार विषय अतिशय व्यवस्थित पद्धतीने समाविष्ट केले आहेत. विषयाची मूलभूत संकल्पना सोप्या शक्य मार्गाने स्पष्ट करण्याचा प्रयत्न केला आहे.

हस्तलिखित तयार करण्याच्या प्रक्रियेदरम्यान, मूलभूत तत्त्वांच्या जलद पुनरावृत्तीसाठी व्याख्या, तांत्रिक अटी, कायदे आणि सूत्रांच्या व्यापक सारांशांवर देखील भर देण्यात आलेला आहे. पुस्तकात सर्व प्रकारच्या मध्यम आणि प्रगत स्तरावरील उदाहरणांचा समावेश आहे आणि या अतिशय तर्कशुद्ध आणि पद्धतशीर पद्धतीने ही उदाहरणे सादर केलेली आहेत. त्या उदाहरणांचे श्रेणीकरण अनेक वर्षांच्या विविध प्रकारच्या विद्यार्थ्यांसह अध्यापनाच्या चाचणीचा परिणाम आहे.

संबंधित विषयांच्या योग्य आकलनासाठी मी प्रत्येक पाठामध्ये असंख्य सोडवलेल्या उदाहरणांचा वापर करून पुस्तक समृद्ध केलेले आहे. हे लक्षात घेणे महत्त्वाचे आहे की या पुस्तकात मी प्रत्येक पाठाशी संबंधित प्रयोगशाळा समाविष्ट केलेल्या आहेत. याव्यतिरिक्त, “अधिक जाणून घ्या” या शीर्षकाखाली वापरकर्त्यासाठी काही आवश्यक माहिती व्यतिरिक्त आणि परिशिष्टातील काही आवश्यक मूलभूत माहिती स्पष्ट केली. सध्याच्या पुस्तकाचा “यंल अभियांत्रिकी” ह्या विषयाशी संबंध आहे, परंतु त्याचा अर्थ समाविष्ट केलेल्या विषयांवर लागू केलेल्या उपयोजित यंलशास्त्र ह्या विषयाच्या मूलभूत गोष्टींचे परिपूर्ण प्रशिक्षण प्रदान करणे हा आहे. हे पुस्तक विद्यार्थ्यांना एकविसाव्या शतकात आणि पुढे अभियांत्रिकी आव्हानांना सामोरे जाण्यासाठी यंलशास्त्र अभियांत्रिकीचे ज्ञान लागू करण्यासाठी आणि क्षेत्रातील कामाशी संबंधित प्रश्न सोडवण्यासाठी तयार करेल.

मला मनापासून आशा आहे की हे पुस्तक विद्यार्थ्यांना यंलशास्त्र अभियांत्रिकीच्या मूलभूत तत्त्वांमागील कल्पना जाणून घेण्यासाठी आणि त्यावर चर्चा करण्यासाठी प्रेरित करेल आणि या विषयाचा एक भक्कम पाया तयार करण्यात नक्कीच योगदान देईल. टिप्पण्या आणि सूचनांसाठी मी सर्व लाभार्थ्यांचा खूप आभारी आहे, जे या पुस्तकाच्या भविष्यातील आवृत्त्या सुधारण्यासाठी योगदान देतील. हे पुस्तक शिक्षक आणि विद्यार्थ्यांच्या हातामध्ये देताना मला खूप आनंद मिळत आहे. या पुस्तकात समाविष्ट असलेल्या विविध पैलूंवर काम करणे खरोखरच माझ्या करिता एक मोठा आनंद होता.

- भंखर भरत गोकाळदास





## परिणाम आधारित शिक्षण

परिणाम आधारित शिक्षण (OBE) तीन स्तंभांवर आधारित आहे; परिणाम आधारित अभ्यासक्रम (OBC), परिणाम आधारित शिक्षण अध्यापन (OBLT) आणि परिणाम आधारित मूल्यांकन (OBA). शिकण्याचे परिणाम कार्यक्रम स्तरावर (POs), अभ्यासक्रम स्तरावर (COs), अभ्यासक्रमातील पाठांच्या स्तरावर (UOs) आणि सल्ल स्तरावरील परिणाम (वर्ग शिक्षण, प्रात्यक्षिकांचे शिक्षण आणि इतर मूलभूत आणि प्रगत शैक्षणिक पद्धती वापरून) मिळू शकतात. PO आणि CO, तसेच CO आणि UO दरम्यानचे प्रती चित्रण पुस्तकात दिलेले आहे जेणेकरून विद्यार्थी कोणत्याही वेगळ्या स्तरावरील शिक्षण थेट कार्यक्रम स्तराच्या निकालांशी जोडू शकेल. मूल्यमापन हा शिक्षण देण्याच्या आणि शिक्षण घेण्याच्या प्रक्रियेचा एक अविभाज्य भाग आहे. म्हणून शिक्षण परिणामांचे मूल्यांकन करण्यासाठी, पुस्तकात दिलेली सोडविलेली उदाहरणे आणि न सोडवलेल्या उदाहरणांची अडचण पातळी एकक शिक्षण परिणामांच्या संज्ञानात्मक पातळीशी जुळत ठेवलेली आहे. अभ्यासक्रमाचे परिणाम, अभ्यासक्रमातील पाठांच्या स्तरावरील परिणाम आणि प्रात्यक्षिकांचे परिणाम ह्यांचा वापर करून मिळविता येतात. परिणामावर आधारित शिक्षणाच्या सहाय्याने चालणाऱ्या कार्यक्रमाच्या शेवटी, एक विद्यार्थी खालील कार्यक्रमाच्या परिणामांवर पोहोचू शकेल.

- PO-1: मूलभूत आणि शिस्तबद्ध विशिष्ट ज्ञान:** अभियांत्रिकी समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी मूलभूत गणित, विज्ञान आणि मूलभूत अभियांत्रिकी आणि अभियांत्रिकी विशेषज्ञतेचे ज्ञान लागू करणे.
- PO-2: समस्येचे विश्लेषण:** संहिताबद्ध मानक पद्धतीचा वापर करून चांगल्या परिभाषित अभियांत्रिकी समस्या ओळखणे आणि त्यांचे विश्लेषण करणे.
- PO-3: निराकरणाची रचना आणि विकास:** परिभाषित अभियांत्रिकी समस्यांसाठी योजना किंवा त्याचा आराखडा आणि त्यांचे उपाय आणि निर्दिष्ट गरजा पूर्ण करण्यासाठी प्रणाली घटक किंवा प्रक्रियांच्या रचनांमध्ये मदत करणे.
- PO-4: अभियांत्रिकी साधने, प्रयोग आणि चाचणी:** मानक चाचण्या आणि मोजमाप करण्यासाठी अभियांत्रिकीची आधुनिक साधने आणि योग्य तंत्राचा वापर करणे.
- PO-5: समाज, शाश्वतता आणि पर्यावरणासाठी अभियांत्रिकी पद्धती:** समाज, शाश्वतता, पर्यावरण आणि नैतिक पद्धतींच्या संदर्भात योग्य तंत्रज्ञान लागू करणे.
- PO-6: प्रकल्प व्यवस्थापन:** अभियांत्रिकी व्यवस्थापन तत्त्वे वैयक्तिकरित्या वापरणे, एका संघाचा सदस्य किंवा एका संघाचा नेता म्हणून प्रकल्प व्यवस्थापित करणे आणि प्रभावीपणे परिभाषित अभियांत्रिकी उपक्रमांबद्दल संवाद साधणे.
- PO-7: आयुष्यभर शिक्षण घेण्याची प्रवृत्ती प्रस्थापित करणे:** वैयक्तिक गरजांचे विश्लेषण करण्याची आणि तांत्रिक बदलांच्या संदर्भात अद्ययावत करण्याची क्षमता तयार करणे.



## अभ्यासक्रमाचे परिणाम

ह्या विषयाचा अभ्यासक्रम पूर्ण केल्यानंतर विद्यार्थी खालील प्रकारची प्रश्ने आणि उदाहरणे सोडवण्यास सक्षम होतील:

CO-1: यांत्रिकीच्या मुलतत्वांचा वापर करून वेगवेगळ्या परिस्थितीमधील उपलब्ध असलेल्या बलाचे प्रकार ओळखू शकतील.

CO-2: वेगवेगळ्या अभियांत्रिकी प्रणालीमधील माहिती नसलेले वेगवेगळी बल किंवा बले (forces) शोधून काढू शकतील.

CO-3: घर्षण आणि त्याची उपयुक्त तत्वे याचा वेगवेगळ्या हेतुकरिता वापर करू शकतील.

CO-4: वेगवेगळ्या अभियांत्रिकीतील प्रणाली मधील प्रकेंद्र (centroid) आणि गुरुत्व केंद्र (सेंटर ऑफ ग्राव्हिटी) शोधतील.

CO-5: अभियांत्रिकीशी संबंधित उचलल्या जाणाऱ्या यंत्रांच्या (मशिनस) हेतूचे विद्यार्थी निवड करू शकतील.

कोर्स आउटकॉम्स	कार्यक्रमाच्या परिणामांसह अपेक्षित मॅपिंग (1- कमकुवत सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7
CO-1	3	-	-	2	1	-	-
CO-2	2	3	3	3	2	-	-
CO-3	2	3	3	2	2	1	1
CO-4	2	3	2	2	2	1	1
CO-5	2	2	2	3	3	1	2

## संक्षिप्तरूपे आणि चिन्हे

### संक्षेपांची यादी

साध्या परिभाषा			
संक्षेप	पूर्ण रूप	संक्षेप	पूर्ण रूप
CG	प्रकेंद्र (Center of gravity)	RHS	उजव्या बाजूच्या दिशेने (Right Hand Side)
CO	विषयाचा परिणाम (Course Outcome)	UDL	समवितरित भार (Uniformly Distributed Load)
LHS	डाव्या बाजूच्या दिशेने (Left Hand Side)	UO	पाठाचा परिणाम (Unit Outcome)
MA	यांत्रिक फायदा (Mechanical Advantage)	VR	वेग गुणोत्तर (Velocity Ratio)
PO	शाखेचा परिणाम (Programme Outcome)		

वापरलेली एकेके			
संक्षिप्त रूपे	संपूर्ण रूप	संक्षिप्त रूपे	संपूर्ण रूप
cm	सेंटीमीटर	mm <sup>2</sup>	मिली मीटर वर्ग
GN	गिगा न्यूटन	mm <sup>3</sup>	मिली मीटर घन
kg	किलोग्राम	MN	मेगा न्यूटन
kN	किलो न्यूटन	N	न्यूटन
kN m	किलो न्यूटन मीटर	N m	न्यूटन
kN/m	किलो न्यूटन प्रति मीटर	N mm	न्यूटन
m	मीटर	°	डिग्री
mm	मिली मीटर		

### चिन्हांची यादी

चिन्ह	वर्णन	चिन्ह	वर्णन
A	क्षेत्रफळ	d	अंतर
C	केंद्र	k	Kilo / गतीज
E	समतोल बल	m	वस्तुमान / meter
F	बल / घर्षण बल	s	स्थैतिक
H	क्षैतिज	w	समवितरीत भाराची तीव्रता
L	लांबी	$(\bar{x}, \bar{y})$	प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून असलेले अंतर (CG)
M	बलाचे आघूर्ण	$\alpha$ (Alpha)	कोन / घर्षणाचा कोन
N	Newton / सामान्य प्रतिक्रिया	$\beta$ (Beta)	कोन
O	संदर्भीय अक्षांचा बिंदू	$\eta$ (Eta)	कार्यक्षमता
P	बल / परिश्रम बल	$\gamma$ (Gama)	कोन
R	प्रतिक्रिया बल / परिणामी बल	$\mu$ (Mu)	घर्षणाचा गुणांक
T	वेळ / ताणणारे बल	$\Theta, \phi$ (Phi)	कोन / स्थैर्य कोन
V	लंब दिशा / घनफळ	$\Sigma$ (Sigma)	बीजगणिताप्रमाणे बेरीज
W	भार/ बल/ वस्तूचे वजन	$\theta$ (Theta)	कोन
X, Y, Z	क्ष, य, ज्ञ असे अक्ष		

# आकृत्यांची यादी

आकृती क्रमांक	आकृतीचे शीर्षक	पृष्ठ क्रमांक
<b>युनिट 1: यंत्रशास्त्राची मुलतत्वे आणि बल प्रणाली</b>		
आकृती 1.1:	बलाची वैशिष्ट्ये	5
आकृती 1.2:	एक रेषीय बल प्रणाली	6
आकृती 1.3:	समतल आणि असमतल प्रणाली	7
आकृती 1.4:	समांतर बल प्रणाली	7
आकृती 1.5:	समवर्ती बलांची प्रणाली	8
आकृती 1.6:	असमवर्ती आणि असमांतरित प्रणाली	8
आकृती 1.7:	बलाचा समतोल कायदा	9
आकृती 1.8:	बलाच्या उच्चस्थानाचा सिद्धांत	9
आकृती 1.9:	दोन परस्पर लंब असलेले घटक	10
आकृती 1.10:	दोन परस्पर लंब नसलेले घटक	11
आकृती 1.11:	बलांचा समांतरवृत्तीचा कायदा	12
आकृती 1.12:	बलाच्या त्रिकोणाचा कायदा	13
आकृती 1.18:	बलाचे आघूर्ण	21
आकृती 1.19:	व्हेरिगनचे तत्व	22
<b>युनिट 2: समतोल</b>		
आकृती 2.1:	समतोल बल आणि समातोलक बल	49
आकृती 2.2:	सरचनेची मुक्त आकृती	50
आकृती 2.3:	साखळीवर बांधण्यात आलेला गोलक आणि उभी चर्षणविरहित भिंत	51
आकृती 2.4:	V आकाराच्या खाचेमध्ये ठेवलेला गोलक आणि तिरक्या चर्षणविरहित भिंती	52
आकृती 2.5:	लॅमीचे प्रमेय	52
आकृती 2.9:	भाराचे प्रकार	58
आकृती 2.10:	सरळ आधारित तुळई	60
आकृती 2.11:	प्रबाहु तुळई	61
आकृती 2.12:	प्रक्षेपित तुळई	62
आकृती 2.13:	टेकू दिलेला प्रबाहु	62
आकृती 2.14:	अनेकाधार तुळई	63
आकृती 2.15:	बद्ध तुळई	63
आकृती 2.25:	बो यांचे संकेतन	73
आकृती 2.26:	फनिक्युलर पॉलीगॉन आलेखी पद्धती	74

आकृती क्रमांक	आकृतीचे शीर्षक	पृष्ठ क्रमांक
<b>युनिट 3: घर्षण</b>		
आकृती 3.1:	घर्षण	89
आकृती 3.2:	सीमित घर्षण	90
आकृती 3.3:	F आणि P मधील फरक	91
आकृती 3.4:	घर्षणाचा कोन	91
आकृती 3.5:	स्थैर्य कोन	92
आकृती 3.6:	क्षैतिज प्रतलावर समांतर कललेले बाह्य बलाचा समतोल	95
आकृती 3.10:	क्षैतिज प्रतलावर कललेल्या वस्तूचा समतोल	100
<b>युनिट 4: प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र</b>		
आकृती 4.1:	गुरुत्व केंद्र	116
आकृती 4.2:	संदर्भीय अक्ष	117
आकृती 4.3:	सममिती अक्ष	118
<b>युनिट 5: वजन उचलण्याची साधी यंत्रे</b>		
आकृती 5.1:	यंत्राचा नियम	142
आकृती 5.2:	सिम्पल एक्सल आणि व्हील	149
आकृती 5.3:	भिन्न अक्षदंड आणि चाक	150
आकृती 5.4:	वर्म आणि वर्म व्हील	151
आकृती 5.5:	सिंगल परचेस क्रॅब विंच	152
आकृती 5.6:	डबल परचेस क्रॅब विंच	152
आकृती 5.7:	साधा स्कू जॅक	153
आकृती 5.8:	वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक	154
आकृती 5.9:	गिअर पुली ब्लॉक	155

## तक्त्यांची यादी

---

तक्ता क्रमांक	तक्त्याचे शीर्षक	पृष्ठ क्रमांक
तक्ता 1.1:	मुलभूत ँकके	4
तक्ता 2.1:	आधाराचे वर्गीकरण	57
तक्ता 3.1:	स्थिर आणि गतीज घर्षणाचे साधारणरित्या गुणांक	94
तक्ता 4.1:	मानक आकारांचे प्रकेंद्र [आयामी आणि द्विमितीय आकार]	118
तक्ता 4.2:	लिमितीय आकृत्यांचे गुरुत्व केंद्र	127



## शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

आउटकम बेस्ड एज्युकेशन (OBE) लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांचे ज्ञान स्तर आणि कौशल्य संच वाढवले पाहिजे. OBE च्या योग्य अंमलबजावणीसाठी शिक्षकांनी मोठी जबाबदारी स्वीकारली पाहिजे. OBE प्रणालीतील शिक्षकांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे असू शकतात:

- वाजवी मर्यादेत, त्यांनी त्यांचा वेळ सर्व विद्यार्थ्यांच्या फायद्यासाठी वापरला पाहिजे.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांच्या क्षमतेचे मूल्यांकन केवळ परिभाषित निकषावर आणि कोणत्याही पक्षपात आणि भेदभावाशिवाय केले पाहिजे.
- त्यांनी हे सुनिश्चित करण्याचा प्रयत्न केला पाहिजे की सर्व विद्यार्थ्यांना त्यांचे शिक्षण पूर्ण झाल्यानंतर पुरेसे दर्जेदार ज्ञान तसेच त्यांच्या मुख्य शिस्तीशी जुळणारी क्षमता प्राप्त होईल.
- त्यांनी विद्यार्थ्यांना त्यांची अंतिम कामगिरी क्षमता विकसित करण्यासाठी नेहमी प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी नवीन दृष्टीकोन एकत्रित करण्यासाठी गट कार्य आणि सांघिक कार्य सुलभ केले पाहिजे आणि प्रोत्साहित केले पाहिजे.
- त्यांनी मूल्यांकनाच्या प्रत्येक भागात ब्लूम वर्गीकरण पाळावे.

### ब्लूम वर्गीकरण

स्तर	शिक्षकांनी तपासावे	विद्यार्थी सक्षम असावा	मूल्यांकनाची संभाव्य पद्धत
निर्माण करणे	विद्यार्थी तयार करण्याची क्षमता	डिझाइन करा किंवा तयार करा	सूक्ष्म प्रकल्प
मूल्यमापन	विद्यार्थ्यांचे औचित्य सिद्ध करण्याची क्षमता	वाद घालणे किंवा बचाव करणे	असाइनमेंट
विश्लेषण करणे	विद्यार्थ्यांमध्ये फरक करण्याची क्षमता	फरक किंवा भेद करा	प्रकल्प/प्रयोगशाळा पद्धती
अर्ज करणे	विद्यार्थ्यांची माहिती वापरण्याची क्षमता	चालवा किंवा प्रात्यक्षिक करा	तात्त्विक सादरीकरण/ प्रात्यक्षिक
समजून घेणे	विद्यार्थ्यांची कल्पना स्पष्ट करण्याची क्षमता	स्पष्ट करा किंवा वर्गीकृत करा	सादरीकरण / परिसंवाद
आठवणे	विद्यार्थ्यांची आठवण करण्याची क्षमता (किंवा लक्षात ठेवणे)	व्याख्या करा किंवा आठवा	प्रश्नमंजुषा

## विद्यार्थ्यांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे

---

OBE लागू करण्यासाठी विद्यार्थ्यांनी समान जबाबदारी घ्यावी. OBE प्रणालीतील विद्यार्थ्यांसाठी काही जबाबदाऱ्या (मर्यादित नाहीत) खालीलप्रमाणे आहेत:

- प्रत्येक कोर्समध्ये युनिट सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक UO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक CO ची चांगली माहिती असावी.
- अभ्यासक्रम सुरू होण्यापूर्वी विद्यार्थ्यांना प्रत्येक PO ची चांगली माहिती असावी.
- विद्यार्थ्यांनी योग्य चिंतन आणि कृतीसह गंभीर आणि वाजवी विचार केला पाहिजे.
- विद्यार्थ्यांचे शिक्षण व्यावहारिक आणि वास्तविक जीवनातील परिणामांशी जोडलेले आणि समाकलित केले पाहिजे.
- विद्यार्थी OBE च्या प्रत्येक स्तरावर त्यांची क्षमता जाणून घ्या.

## अनुक्रमणिका

प्रास्ताविक	iii
ऋणनिर्देश	v
प्रस्तावना	vii
परिणाम आधारित शिक्षण	ix
अभ्यासक्रमाचे परिणाम	xi
संक्षिप्तरूपे आणि चिन्हे	xii
आकृत्यांची यादी	xiv
तक्त्यांची यादी	xvi
शिक्षकांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे	xvii
विद्यार्थ्यांसाठी मार्गदर्शक तत्त्वे	xviii
<b>युनिट-1: यंत्रशास्त्राची मुलतत्त्वे आणि बल प्रणाली</b>	<b>1</b>
पाठाचा तपशील	1
तर्कसंगती	2
पूर्व अपेक्षित ज्ञान	2
पाठाचा परिणाम	2
पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण	2
1.1 यंत्रशास्त्राचे महत्त्व आणि समर्पकता	3
1.2 मुलभूत संकल्पना	3
1.3 अदिश आणि सदिश एकेके	4
1.4 मोजमापांची एकेके [एस आय एकेके (SI UNITS)]	4
1.5 बल	5
1.5.1 परिचय	5
1.5.2 एस आय प्रणालीतील बलाचे एकक	5
1.5.3 बलाची वैशिष्ट्ये	5
1.5.4 बलाचा प्रभाव	6
1.5.5 बलाच्या वेगवेगळ्या प्रणाली आणि वर्गीकरण	6
1.5.6 स्थिर बलांची तत्त्वे	8
1.6 समतल समवर्ती बले	10
1.6.1 बलांचा ठराव	10
1.7 बलांचे एकलीकरण (परिणामी बल)	11
1.7.1 समवर्ती बलाच्या प्रणालीसाठी विश्लेषणात्मक पद्धती	12

1.8 समतल असमवर्ती बले	21
1.8.1 बलाचे आघूर्ण	21
1.8.2 व्हेरिगनचे तत्व किंवा मोमेंटचे तत्व	22
1.8.3 समांतर बल प्रणालीसाठी विश्लेषणात्मक पद्धत	22
1.8.4 असमवर्ती बल प्रणालीची विश्लेषणात्मक पद्धत	25
सारांश	29
गृहपाठ	31
प्रात्यक्षिके	35
अधिक माहिती घ्या	46
संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन	46
<b>युनिट-2: समतोल</b>	<b>47</b>
पाठाचा तपशील	47
तर्कसंगती	47
पूर्व अपेक्षित ज्ञान	48
पाठाचा परिणाम	48
पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण	48
2.1 बलांचा समतोल आणि बलांची समतोलकता	48
2.1.1 समतोल असण्याच्या अटी	49
2.1.2 मुक्त संरचना आणि संरचनेची मुक्त आकृती	49
2.2 लॅमीचे प्रमेय	52
2.3 आधाराचे प्रकार, भाराचे आणि तुळईचे (बीमचे) प्रकार	56
2.3.1 आधाराचे प्रकार	56
2.3.2 भाराचे प्रकार	57
2.3.3 तुळईचे प्रकार	59
2.4 तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया	63
2.4.1. प्रबाहु तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया	63
2.4.2 सरळ आधारित तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया	66
2.4.3 प्रक्षेपित तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया	69
2.5 आलेखीय पद्धतिप्रमाणे तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया	73
2.5.1 रज्जु बहुभुज (Funicular Polygon) आलेखीय पद्धती	73
सारांश	76
गृहपाठ	78
प्रात्यक्षिके	82
अधिक माहिती घ्या	86
संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन	86

<b>युनिट-3: चर्षण</b>	<b>87</b>
पाठाचा तपशील	87
तर्कसंगती	87
पूर्व अपेक्षित ज्ञान	88
पाठाचा परिणाम	88
पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण	88
3.1 चर्षण	88
3.1.1 सीमित चर्षण	90
3.1.2 चर्षण गुणांक	91
3.1.3 चर्षणाचा कोन	91
3.1.4 स्थैर्य कोन	92
3.1.5 चर्षणाचे प्रकार	93
3.1.6 चर्षणाचे नियम	94
3.2 आडव्या (क्षैतिज) प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल वस्तू	94
3.2.1 क्षैतिज प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील प्रतलावर समांतर असलेल्या बाह्य बल लावल्यानंतर समतोल असलेली वस्तु	94
3.2.2 क्षैतिज प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील प्रतलावर कललेले बाह्य बल लावल्यानंतर समतोल असलेली वस्तु	95
3.3 वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल	99
3.3.1 वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील त्या प्रतलाला समांतर बलामुळे असलेला समतोल	100
सारांश	104
गृहपाठ	106
प्रात्यक्षिके	109
अधिक माहिती घ्या	113
संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन	113
<b>युनिट-4: प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र</b>	<b>114</b>
पाठाचा तपशील	114
तर्कसंगती	114
पूर्व अपेक्षित ज्ञान	115
पाठाचा परिणाम	115
पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण	115
4.1 परिचय	115
4.1.1 गुरुत्व केंद्र	115
4.1.2 प्रकेंद्र	116
4.1.3 गुरुत्व केंद्र आणि प्रकेंद्र ह्यातील फरक	116
4.1.4 प्रकेंद्राकरिता संदर्भ घेण्यासाठी घेतलेले अक्ष	117
4.1.5 सममिती अक्ष	117

4.2 मानक आकारांचे प्रकेंद्र	118
4.3 संमिश्र आकृत्यांचे प्रकेंद्र	121
4.3.1 संमिश्र आकृत्यांचे प्रकेंद्र शोधण्याची पद्धत	121
4.4 गुरुत्व केंद्र (घनाकृती आकृतींचे गुरुत्व केंद्र/ त्रिमितीय घटकांचे गुरुत्व केंद्र)	126
4.5 संमिश्र घनाकृती आकृतींचे गुरुत्व केंद्र	128
सारांश	132
गृहपाठ	132
प्रात्यक्षिके	135
अधिक माहिती घ्या	138
संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन	138
<b>युनिट-5: वजन उचलण्याची साधी यंत्रे</b>	<b>139</b>
पाठाचा तपशील	139
तर्कसंगती	139
पूर्व अपेक्षित ज्ञान	140
पाठाचा परिणाम	140
पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण	140
5.1 महत्वाच्या व्याख्या	140
5.2 साध्या उचलण्याच्या यंत्रांच्याबाबतची तांत्रिक बाबी	141
5.3 वेगवेगळ्या साध्या यंत्रांचे वेग गुणोत्तर	149
5.3.1 साधे अक्षदंड आणि चाक	149
5.3.2 भिन्न अक्षदंड व चाक	150
5.3.3 मळसूत आणि मळसूत चाक (वर्म आणि वर्म व्हील/ Worm and Worm Wheel)	151
5.3.4 सिंगल परचेस क्रॅब विंच	151
5.3.5 डबल परचेस क्रॅब विंच	152
5.3.6 साधा स्कू जॅक	153
5.3.7 वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक	154
5.3.8 गिअर पुली ब्लॉक	154
सारांश	159
गृहपाठ	160
प्रात्यक्षिके	162
अधिक माहिती घ्या	182
संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन	182

<b>परिशिष्ट</b>	<b>183-186</b>
परिशिष्ट – अ: प्रात्यक्षिकांसाठी सूचक नमुना	183
परिशिष्ट – ब: प्रात्यक्षिके/ प्रकल्प/ समूहातील क्रियांसाठी सूचक मूल्यमापन मार्गदर्शक तत्त्वे	185
परिशिष्ट – क: प्रात्यक्षिकेच्या नोंदी	186
<b>अनुपल: प्रयोगशाळेत काम करताना/ प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची सामान्य आणि विशेष खबरदारी</b>	<b>187</b>
<b>पुढील शिक्षणासाठी संदर्भ</b>	<b>188</b>
<b>CO आणि PO अटेन्मेंट टेबल</b>	<b>189</b>
<b>शब्दसूची</b>	<b>190</b>





# 1

## यंत्रशास्त्राची मूलतत्त्वे आणि बल प्रणाली

### पाठाचा तपशील

ह्या पाठामध्ये खालील भागांचे आपण अध्ययन करणार आहोत:

- यंत्रशास्त्राचे महत्त्व आणि समर्पकता
- यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी संबंधित मूलभूत संकल्पना
- मोजमापांसाठी वापरल्या जाणाऱ्या एककांचे प्रकार आणि मूलभूत एस. आय. एके
- बल, बलाचे एकक, बलाची वैशिष्ट्ये, बलाचा प्रभाव, बलांच्या वेगवेगळ्या प्रणाली आणि वर्गीकरण, आघूर्ण (मोमेंट) आणि त्याचे प्रकार
- स्थिर बलांची तत्त्वे: बलांचा समतोल नियम (Equilibrium law of Force), बलांचे अध्यारोपण तत्त्व (Principle of superposition of force), बलांचे पारेषण तत्त्व (Principle of transmissibility of force)
- बलांचा ठराव (रिझोल्यूशन ऑफ फोर्स) (दोन घटक तयार करणे)
- परिणामी बल शोधण्यासाठी विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धती

ह्या विषयाच्या संबंधित वापरल्या जाणाऱ्या वेगवेगळ्या सर्व बलांचे प्रकार आणि त्यांचे परिमाण ह्याची चर्चा आपण ह्या पाठामध्ये करणार आहोत. त्याचप्रमाणे ह्या पाठामध्ये संपूर्ण विषयाच्या अभ्यासक्रम चांगल्या पद्धतीने कळावा ह्यासाठी काही मूलभूत संकल्पना आपण पाहणार आहोत. विद्यार्थ्यांशी चर्चा करण्याव्यतिरिक्त इतर उदाहरणांशी संबंधित काही मूलभूत सरावदेखील गणना करण्यास प्रोत्साहित केले गेले आहे.

काही दैनंदिन उदाहरणांच्या मदतीने बलांच्या आघूर्णाबाबत चर्चा केलेली आहे, ज्यामुळे विद्यार्थी कार्यशील रहातील. पृष्ठांच्या निर्बंधामुळे, विषयाच्या मजकुराच्या प्रमाणाऐवजी गुणवत्तेला महत्त्व दिले आहे.

विद्यार्थ्यांमध्ये विषयाबद्दल अधिक उत्सुकता आणि सर्जनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच विद्यार्थ्यांची समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी पाठामध्ये प्रत्यक्ष व्यवहारातील उपयोगाची चर्चा केलेली आहे. ह्या पाठाच्या शेवटी प्रात्यक्षिकांची चर्चा झाल्यानंतर “अधिक माहिती घ्या” हा एक विभाग घेतलेला आहे, जो या पुस्तकाच्या वापरकर्त्यांच्या फायद्यासाठी पूरक माहिती मिळावी ह्या अनुषंगाने त्याची रचना केली गेलेली आहे. विद्यार्थ्यांमध्ये ह्या विषयाबद्दल उत्सुकता निर्माण व्हावी आणि त्यांच्यामध्ये सुधारणा व्हावी ह्या अनुषंगाने पाठाच्या शेवटी बहुपर्यायी प्रश्न आणि व्यक्तीनिष्ठ प्रश्न दिलेले आहेत.

## तर्कसंगती

ह्या पाठामध्ये यंत्रशास्त्राचे महत्त्व आणि त्याची प्रासंगिकता त्याचप्रमाणे गुणवत्तेचे प्रकार ह्याबाबत चर्चा करण्यात येणार आहे. कोणत्याही तंत्रज्ञाला किंवा अभियंत्याला वेगवेगळ्या पाठाच्या प्रणाली माहिती असणे अत्यंत महत्वाचे असते. वेगवेगळ्या युनिट्सच्या प्रणालीची मूलभूत माहिती आणि अदिश (स्केलर) व सदिश (वेक्टर) एकेके याची माहिती ह्या पाठामध्ये देण्यात येत आहे. त्याचप्रमाणे स्थिर (static) इमारती किंवा उपकरणे अशासंबंधीत उदाहरणे सोडवण्याकरीता लागणारी तत्वे (principles) ह्या पाठामध्ये सांगितली आहेत. ह्या विषयाचा अभ्यास करताना प्रत्यक्षत्वाने आपण एका प्रतलामध्ये (coplanar) काम करणाऱ्या बलांचा (फोर्ससचा) अभ्यास करणार आहोत. एका प्रतलामध्ये कार्य न करणाऱ्या बलांचा अभ्यास सदरच्या अभ्यासक्रमामध्ये नाही.

## पूर्व अपेक्षित ज्ञान

भौतिकशास्त्राचे मूलभूत ज्ञान आणि इयत्ता आठवी ते दहावीमधील गणित विषयाचे मूलभूत ज्ञान गरजेचे आहे.

## पाठाचा परिणाम

ह्या भागाचा अभ्यास पूर्ण झाल्यानंतर तुम्ही खालील गोष्टींकरिता सक्षम व्हाल.

U1-O1: यंत्र अभियांत्रिकीचे महत्त्व आणि प्रासंगिकता सांगू शकाल.

U1-O2: अदिश राशि (स्केलर क्वांटिटी) आणि सदिश राशि (वेक्टर क्वांटिटी) ह्यातील बदल समजू शकाल.

U1-O3: आंतरराष्ट्रीय SI प्रणालीनुसार युनिट स्पष्ट करू शकाल.

U1-O4: बल (फोर्स), बलाचे प्रकार आणि प्रणाली व त्याचे वर्गीकरण आणि सारांश.

U1-O5: बलाच्या पारेषणाच्या तत्त्वाचा (प्रिन्सिपल ऑफ ट्रान्समिसिबिलिटी ऑफ फोर्स) वापर करू शकाल.

U1-O6: बलाचे निराकरण आणि रचना (रीसोल्यूशन आणि काम्पोझिशन ऑफ फोर्स) सोडवू शकाल.

U1-O7: बलांचा त्रिकोणी नियम, बलांचा समांतर चौकोनी नियम, बलांचा बहुभूज नियम यांचा वापर

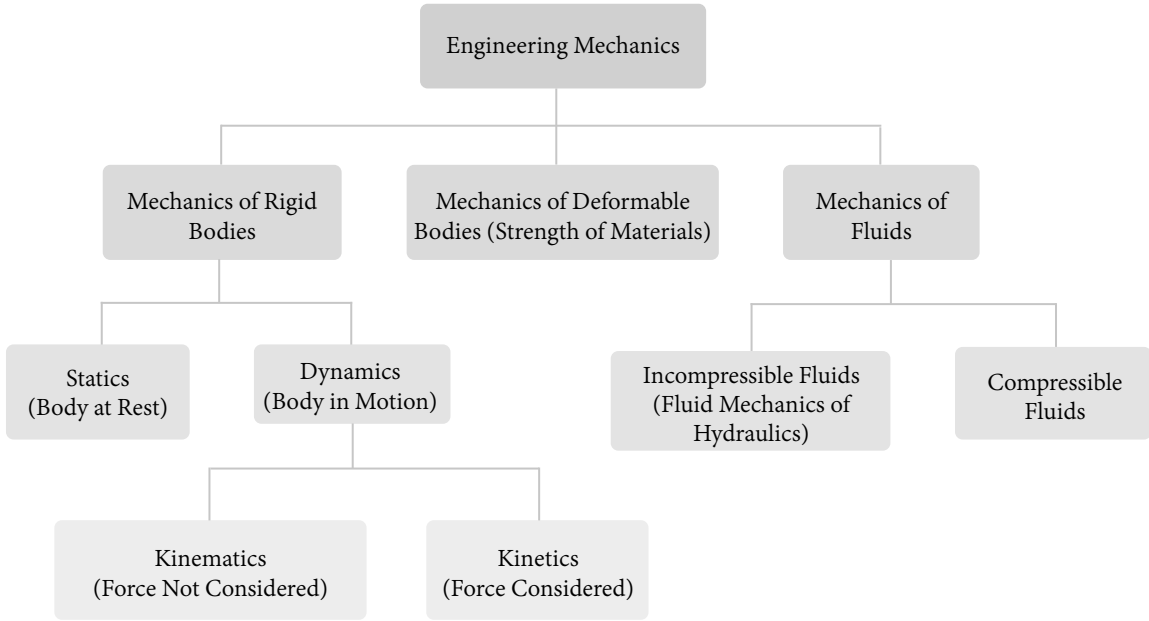
U1-O8: समतल संपाती बल पद्धती, समांतर बल पद्धती, असंपाती बल पद्धती अशा बल पद्धतींचे मूल्यमापन करू शकाल.

## पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण

युनिट-1 परिणाम	कोर्स आऊटकोम्ससह एक्सपेक्ट्ड मॅपिंग (1-दुर्बलसहसंबंध; 2-मध्यमसंबंध; 3-मजबूतसहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U1-O1	2	-	-	-	-
U1-O2	2	-	-	-	-
U1-O3	2	-	-	-	-
U1-O4	3	1	-	-	-
U1-O5	2	2	-	-	-
U1-O6	-	3	-	-	-
U1-O7	-	2	-	-	-
U1-O8	-	3	-	-	-

## 1.1 यंत्रशास्त्राचे महत्व आणि समर्पकता

यांत्रिकी ही विज्ञानाची शाखा म्हणून परिभाषित केली जाऊ शकते जी वेगवेगळ्या प्रकारच्या बलांमुळे यंत्रांचे होणारे वर्तन ह्याबाबतचा विचार करते. यांत्रिकी तत्वांचा वापर व्यावहारिक उपयोगात करून अभियांत्रिकी मधील वेगवेगळ्या समस्या सोडवणे शक्य होते. अभियांत्रिक यांत्रिकी ह्या विषयाला उपयोजित यांत्रिकी किंवा उपयोजित यंत्रशास्त्र अशी देखील नावे आहेत. अभियांत्रिकीमध्ये काम करताना आपल्याला तीन प्रकारच्या वस्तु आढळतात जसे की (अ) कठोर वस्तु (ब) लवचिक वस्तु (क) द्रवासारखी वस्तु.



## 1.2 मूलभूत संकल्पना

आपण यंत्रशास्त्राचा अभ्यास करण्यापूर्वी काही मूलभूत संकल्पना स्पष्टपणे समजून घेतल्या पाहिजेत.

**अंतरिक्ष (स्पेस):** हा एक प्रदेश किंवा त्रिमितीय क्षेत्र आहे जो सर्व दिशेने विस्तारलेला आहे आणि त्यामध्ये प्रत्येक गोष्ट सामावलेली आहे. उदाहरणार्थ: सूर्य, चंद्र, तारा, चांदण्या इत्यादी. सर्व प्रकारच्या वस्तू, यंत्रे इत्यादी ह्या अंतरिक्षामधील संदर्भ प्रणालीमध्ये स्थित असतात. जसे, अंतराळातील विमानाची स्थिती पृथ्वीच्या संदर्भात आढळते.

**वेळ (टाइम):** ही घटनांच्या कालक्रमानुसार अनुक्रमे मोजली जाते. वेळ ही सेकंद (second) आणि इतर माप किंवा एककात मोजली जाते. एखाद्या घटनेचे वर्णन बिंदूच्या स्थितीनुसार केले जाऊ शकते.

**वस्तुमान (मास):** हे कार्यप्रणालीतील असलेल्या पदार्थाचे प्रमाण दर्शवितात. ज्या वस्तूचे अधिक वस्तुमान म्हणजे त्यात अधिक पदार्थ असतो.

**लवचिक वस्तु (फ्लेक्झिबल बॉडी):** लागू केलेल्या बलाच्या प्रतिक्रियेत जेव्हा एखादी वस्तु आपले आकारमान बदलते त्यास लवचिक वस्तु (फ्लेक्झिबल बॉडी) असे म्हणतात.

**कठोर वस्तु (रिजिड बॉडी):** लागू केलेल्या बलाच्या प्रतिक्रियेत जेव्हा एखादी वस्तु आपले आकारमान बदलत नाही त्यास कठोर वस्तु (रिजिड बॉडी) असे म्हणतात.

### 1.3 अदिश आणि सदिश एकके

यांत्रिकीमधील भौतिकी प्रमाणे गणितानुसार खालील प्रकारातील असू शकतात:

**अदिश एकके (Scalar Quantity):** ज्या एककांचे (quantity) वर्णन हे फक्त परिमाणामार्फत (magnitude) केले जाते त्याला अदिश एकके (scalar quantity) असे म्हणतात. उदाहरणार्थ: वस्तुमान, लांबी, वेळ, आवाज, तापमान इत्यादी ही अदिश एकके आहेत.

**सदिश एकके (Vector Quantity):** ज्या एककांचे (quantity) वर्णन हे परिमाण (magnitude) आणि दिशा (direction) अशा दोन्हीही पद्धतीने केले जाते त्याला सदिश एकके (vector quantity) असे म्हणतात. उदाहरणार्थ: वेग, शक्ती, प्रवेग, गती इत्यादी ही सदिश एकके आहेत.

सदिश एकके बाणशीर्षासह सरळ रेषाने दर्शविली जातात. सरळ रेषाची लांबी सदिश एककांचे परिमाण दर्शवते तर रेषा दिशेने सदिश एककांची दिशा दर्शवते आणि बाणाची दिशा दिशेचा अंदाज दर्शवते.

### 1.4 मोजमापांची एकके [एस आय एकके (SI UNITS)]

**मूलभूत एकके (Fundamental units):** लांबी, वस्तुमान आणि वेळ ही मूलभूत परिमाणे आहेत आणि या परिमाणांची एकके मूलभूत एकके म्हणून ओळखली जातात.

**व्युत्पन्न एकके (Derived units):** मूलभूत परिमाणांव्यतिरिक्त इतरांची एकके व्युत्पन्न एकक म्हणून समजले जातात आणि ते मूलभूत एककांपासून संदर्भित किंवा काढले जाऊ शकतात.

उदाहरणार्थ: 1) क्षेत्रफळ हे दोन लांबीचे गुणाकार करून काढले जाते म्हणून त्याचे प्रमाण  $L^2$  असे, 2) वेग म्हणजे लांबीचा वेळाने केलेला भागाकार म्हणून एकक  $L/T$ , 3) बल (फोर्स) हा वस्तुमान आणि प्रवेग ह्यांचा गुणाकार म्हणून  $kg.m/sec^2$  [N] इत्यादी.

**एस आय एकके (SI units):** 1960 मध्ये आंतरराष्ट्रीय कराराद्वारे, एस.आय. एकके म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या युनिट्सची आंतरराष्ट्रीय प्रणाली स्वीकारली गेली आणि आता ती जगभरात वापरली जाते. वेगवेगळ्या देशातील अभियंते आणि व्यापार यामध्ये गोंधळ होण्याची कोणतीही शक्यता टाळण्यासाठी एसआय एककांची चिन्हे आणि त्यांची डेरिव्हेटिव्हज प्रमाणित केलेली आहेत.

तक्ता 1.1: मूलभूत एकके

अ. क्र.	मूलभूत एकके	एसआय एककाचे नाव	चिन्ह
1	लांबी (Length)	मीटर (Meter)	m
2	वस्तुमान (Mass)	किलोग्राम (Kilogram)	kg
3	वेळ (Time)	सेकंद (Second)	s
4	विद्युत प्रवाह (Electrical current)	एम्पिअर (Ampere)	A
5	तापमान (Temperature)	केल्विन (Kelvin)	K
6	चमकण्याची तीव्रता (Luminous intensity)	क्यांडेला (Candela)	cd

## 1.5 बल

### 1.5.1 परिचय

आपण आपल्या उच्च माध्यमिक स्तरावर आणि भौतिकशास्त्र ह्या विषयामध्ये देखील बल (फोर्स) चा अभ्यास केला आहे. चला बल (force) म्हणजे काय ते आठवायचा प्रयत्न करूया. समजा तुम्ही एखाद्या भिंतीत खिळे ठोकत आहात. स्वाभाविकच आपल्याला भिंतीमध्ये खिळे ढकलणे आवश्यक आहे. ह्यालाच बल / फोर्स म्हणायचे. आता आणखी एक परिस्थिती विचारात घ्या ज्यामध्ये आपण पिंप (इम) ट्रक मधून खाली उतरवत आहोत आणि आपण हे थांबवू इच्छित आहोत. मग स्वाभाविकच आपण त्याच्या गतीसाठी थोडा प्रतिकार लागू करू. हा प्रतिकार बलाशिवाय तर होणे शक्य नाही. म्हणूनच बल ही बाह्य प्रतिनिधी आहे जी वस्तूच्या अवस्थेत वेग किंवा दिशेत बदल निर्माण करू शकते तसेच विश्रांत (rest) परिस्थितीमध्ये आणूही शकते.

### 1.5.2 एस आय प्रणालीतील बलाचे एकक

बल हे न्यूटन (Newton) मध्ये मोजले जाते. एक न्यूटन बल म्हणून परिभाषित केले जाते तेव्हा 1 किलोग्राम वस्तुमान असलेल्या वस्तूमध्ये प्रति एक मीटर प्रति चौरस सेकंद ( $1 \text{ kg.m/second}^2$ ) प्रवेग (acceleration) वाढवते. बलांची वेगवेगळी मोठी एकके खालीलप्रमाणे आहेत:

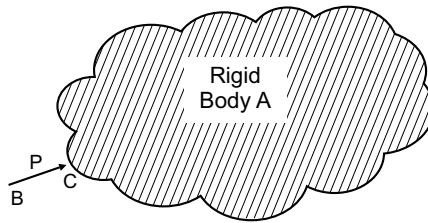
$$1 \text{ Kilo Newton (kN)} = 1000 \text{ Newton} = 10^3 \text{ N}$$

$$1 \text{ Mega Newton (MN)} = 1000 \times 1000 \text{ Newton} = 10^6 \text{ N}$$

$$1 \text{ Giga Newton (GN)} = 1000 \times 1000 \times 1000 \text{ Newton} = 10^9 \text{ N}$$

### 1.5.3 बलाची वैशिष्ट्ये

आपल्याला माहिती आहे की, बल हे एक सदिश प्रमाण आहे, याचा अर्थ, ते शोधण्यासाठी परिमाण आणि दिशा ह्या दोन्हीची माहिती असणे गरजेचे आहे. संपूर्णपणे बलाचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी चार घटकांचे अनुसरण करणे आवश्यक आहे जी बलाची वैशिष्ट्ये म्हणून ओळखली जातात. (अ) परिमाण (magnitude); (ब) दिशा (direction); (क) संवेदना (बलाचा प्रकार) (sense & type); (ड) बलाचे ठिकाण (Point of Application)



आकृती 1.1: बलाची वैशिष्ट्ये

आकृती 1.1 मध्ये A ही एक वस्तु आहे ज्यावर C बिंदूवर B इतके बल (फोर्स) दाखविलेले आहे ज्यामध्ये C हा बलाचा बिंदू आहे आणि BC हे बलाची (फोर्सची) दिशा दर्शवते. C हे बाणाचे डोके आहे, जे दर्शविते की त्या दिशेने ते बल (फोर्स) काम करीत आहे, ज्यामुळे बलाचा प्रकार लक्षात येतो.

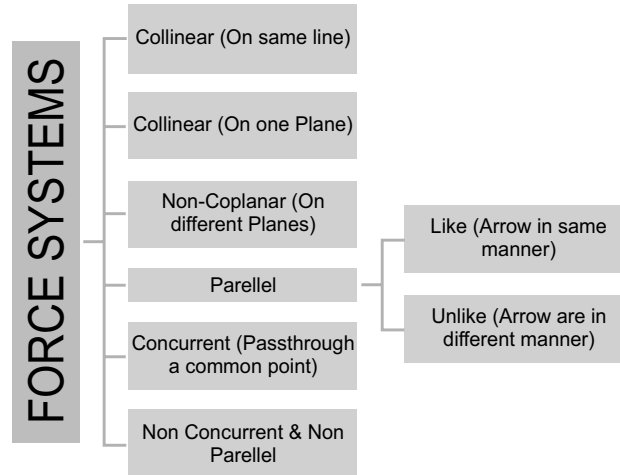
### 1.5.4 बलाचा प्रभाव

बल वा फोर्स कोणत्याही वस्तूवर उपयोजित वा प्रयुक्त केला जातो तेव्हा खालील प्रकारचे प्रभाव निर्माण होतात.

- अ) वस्तूच्या शांत किंवा गतीतील अवस्थेत बदल
- आ) वस्तूच्या प्रवेगात वाढ होणे किंवा कमी होणे
- इ) वस्तूच्या प्रकार आणि आकारामध्ये बदल होणे
- ई) वस्तु वळणे किंवा फिरवली जाणे
- उ) वस्तु समतोल परिस्थितीत रहाणे, इत्यादी.

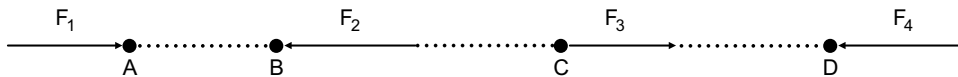
### 1.5.5 बलाच्या वेगवेगळ्या प्रणाली आणि वर्गीकरण

जेव्हा अनेक बले (फोर्सेस) किंवा बलांचा समूह वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करतो, तेव्हा ती वस्तु एका वैयक्तिक बलाच्या प्रणालीमध्ये काम करीत आहे असे समजले जाते. बलाच्या क्रियेची दिशा आणि बलाची व्यवस्था ह्यावरून बलाच्या वेगवेगळ्या प्रणाली आणि वर्गीकरण केले जाते त्या खालीलप्रमाणे आहेत.



#### एक रेषीय बल प्रणाली (कोलिनिअर फोर्स सिस्टीम/ Collinear force system)

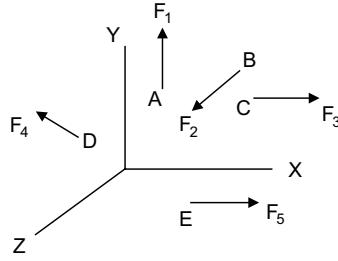
आकृती 1.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे जेव्हा सर्व बलांच्या रेखा त्याच सरळ रेषेत असतात त्या बल प्रणालीला एक रेषीय बल प्रणाली (कोलिनिअर फोर्स सिस्टीम) असे म्हणतात.



आकृती 1.2: एक रेषीय बल प्रणाली

#### समतल बल प्रणाली (कोप्लेनर फोर्स सिस्टीम/ Coplanar Force System)

आकृती 1.3 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  ही बले एकाच XY प्रतलामध्ये कार्य करीत आहेत अशा बलांच्या प्रणालीला समतल बल प्रणाली (कोप्लेनर फोर्स सिस्टीम) असे म्हणतात. अशा प्रणालीतील सर्व बले एका प्रतलामध्ये कार्य करतात.



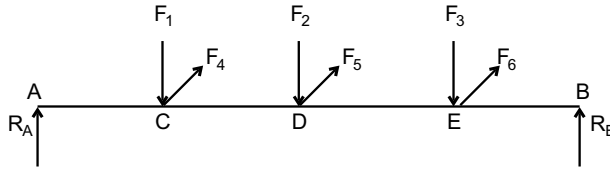
आकृती 1.3: समतल आणि असमतल प्रणाली

#### असमतल बल प्रणाली (नॉन कोप्लेनर फोर्स सिस्टीम/ Non coplanar force system)

आकृती 1.3 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे जर एका बलांच्या प्रणालीमधील बले (फोर्सेस) एका पातळीवर कार्य करीत नसतील अशा बल प्रणालीला असमतल बल प्रणाली असे म्हणतात. जसे आकृतीमध्ये  $F_1, F_3$  ही बले XY मध्ये आहेत परंतु  $F_2, F_4$  ही बले YZ आणि  $F_5$  हा बल ZX प्रतलामध्ये कार्य करीत आहेत.

#### समांतर बल प्रणाली (पॅरलल फोर्स सिस्टीम/ Parallel force system)

अशा प्रणालीमध्ये सर्व बलांची दिशा किंवा त्यांच्या क्रियेची रेषा एकमेकांना समांतर असतात आणि एकमेकांना छेदत नाहीत. सदर प्रणालीचे पुढे समतल समांतरित बल प्रणाली, आणि असमतल समांतरित बल प्रणाली असे वर्गीकरण करण्यात येते. जर समान दिशेने कार्य करणारी बले (फोर्सेस) एकमेकांशी समांतर असतील तर त्याला समतल समांतरित बल प्रणाली असे म्हणतात आणि जर ते उलट दिशेने कार्य करीत असतील आणि एकमेकांशी समांतर असतील तर ते असमतल समांतरित बल प्रणाली असे म्हणतात. आकृती 1.5 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे बल  $F_1, F_2$  आणि  $F_3$  समतल समांतरित बल प्रणाली आहेत आणि  $F_1, F_2, F_3, R_A, R_B$  हे बल ह्या प्रणालीमध्ये असमतल समांतरित बल प्रणाली असल्यासारखे आहेत.

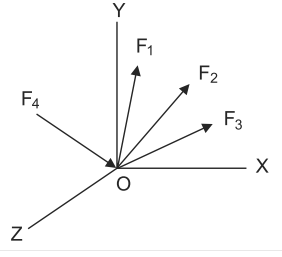


आकृती 1.4: समांतर बल प्रणाली

$F_1, F_2$  आणि  $F_3$  तसेच  $R_A, R_B$  ही बले एकाच प्रतलावर असल्यामुळे त्याला समतल समांतर बल प्रणाली म्हणता येईल परंतु जर आता  $F_4, F_5$  आणि  $F_6$  ही बले जर जोडली तर तयार होणाऱ्या प्रणालीला असमतल समांतर बल प्रणाली असे म्हणता येते.

#### समवर्ती बलांची प्रणाली

सर्व बलांना (फोर्सेसना) वेगळी दिशा असते परंतु त्यांची क्रिया रेषा (दिशा) एकाच सामान्य बिंदूतून जाते अशा प्रणालीला समवर्ती बलांची प्रणाली असे म्हणतात. ज्या बिंदूवर सर्व बलांच्या कृतीची ओळ पूर्ण होते त्याला बल प्रणालीचा समन्वय बिंदू (point of concurrency) म्हणून ओळखले जाते.

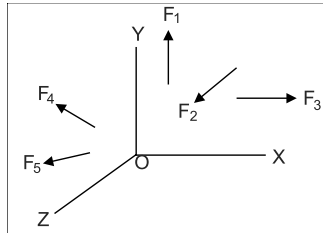


आकृती 1.5: समवर्ती बलांची प्रणाली

आकृती 1.5 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे फोर्सेसच्या प्रणालीमधील  $F_1$ ,  $F_2$  आणि  $F_3$  ही बले (फोर्सेस) एका  $O$  ह्या सामान्य बिंदूमध्ये एकत्र आहेत आणि ती बले एका  $XY$  प्रतलात आहेत. अशा प्रणालीला समांतर समवर्ती बलांची प्रणाली म्हणून ओळखले जाते. परंतु जर  $F_4$  हे बल ह्यामध्ये असेल तर तो वेगळ्या  $YZ$  ह्या प्रतलावर आहे. त्यामुळे आता  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  आणि  $F_4$  हे एकत्र कार्य करीत असतील तर त्यास असमांतर समवर्ती बल प्रणाली असे ओळखले जाते.

#### असमवर्ती आणि असमांतर बल प्रणाली

एखाद्या बल प्रणालीमधील बले एका ओळीत कार्यरत नसतील आणि एका सामान्य बिंदूमधूनसुद्धा कार्य करीत नसतील तसेच एकमेकाला समांतर नसतील तर अशा प्रणालीला असमवर्ती आणि असमांतर बल प्रणाली असे ओळखले जाते. जर सर्व बले एका प्रतलावर कार्यरत असतील परंतु एका सामान्य बिंदूमधून कार्यरत होत नसतील तर त्यास असमवर्ती आणि असमांतरित पण प्रतलीय असलेली प्रणाली असे ओळखले जाते. जर सर्व बले (फोर्सेस) वेगवेगळ्या प्रतलावर कार्य करीत असतील तर अशा प्रणालीला असमवर्ती, असमांतरित, अप्रतलीय बल प्रणाली असे ओळखले जाते.



आकृती 1.6: असमवर्ती आणि असमांतरित प्रणाली

आकृती 1.6 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे  $F_1$ ,  $F_2$  आणि  $F_3$  ही बले (फोर्सेस) एका ओळीत तसेच समांतरित नाहीत. त्याचप्रमाणे एका सामान्य बिंदूमधूनसुद्धा कार्य करीत नाहीत परंतु एका  $XY$  प्रतलात आहेत म्हणजे हे प्रतलीय परंतु असमवर्ती, असमांतरित प्रणालीचे उदाहरण आहे. ह्यामध्ये आता  $F_4$  आणि  $F_5$  असे दोन नवीन बल जोडले जे वेगळ्या  $YZ$  प्रतलात आहेत त्यामुळे आता हे सर्व  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  आणि  $F_5$  एकत्रपणे असमवर्ती, असमांतरित, अप्रतलीय बल प्रणाली तयार करतात.

#### 1.5.6 स्थिर बलांची तत्वे

खालील बलांबद्दलच्या कायद्यांचा किंवा तत्वांचा समतल समवर्ती बल प्रणालीमध्ये (कोप्लेनर कॉनकरंट फोर्स सिस्टीम) अभ्यास करणे गरजेचे आहे.

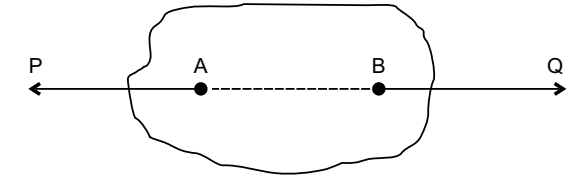
(अ) बलांचा समतोल नियम (Equilibrium law of Force),



- (ब) बलांचे अध्यारोपण तत्त्व (Principle of superposition of force),  
 (क) बलांचे पारेषण तत्त्व (Principle of transmissibility of force).

**(अ) बलांचा समतोल नियम**

दोन बले जर परिमाणात समान असतील आणि विरुद्ध दिशेने एकाच रेषेत काम करीत असतील तर ते समतोल (इक्विलिब्रियम मध्ये) असतात.

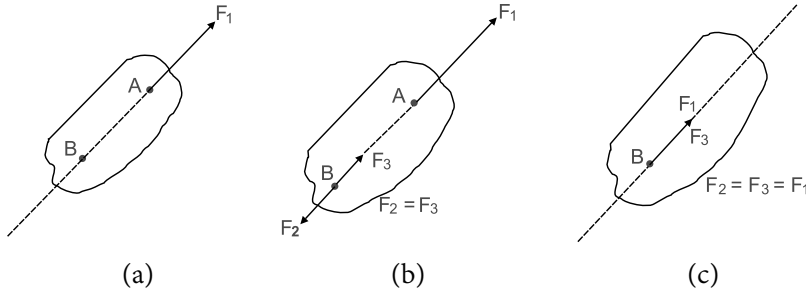


**आकृती 1.7:** बलाचा समतोल कायदा

आकृती 1.7 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे दोन P आणि Q ही बले एकाच AB दिशेत आहेत आणि त्यांचे परिमाण एकासारखे असून देखील विरुद्ध आहेत त्या कारणाने वस्तु बल P अथवा Q च्या दिशेत जागा सोडणार नाही किंवा बदल होणार नाही. ह्याचाच अर्थ सदरची वस्तु एका ठिकाणी स्थिर असेल किंवा त्यालाच सदरची वस्तु समतोल आहे असे म्हणता येईल. जर एखाद्या बलाचे प्रमाण मोठे असेल तर वस्तु त्याच्या दिशेत पुढे जाईल.

**(ब) बलांचे अध्यारोपण तत्त्व**

जर एका वस्तूवरील कार्यरत असलेल्या कोणत्याही बल प्रणालीमध्ये, समतोल होणारे दुसरे बल (फोर्स) किंवा दुसरी एक बल प्रणाली जोडली किंवा वजा केली तरीही त्याच्या क्रियेमध्ये बदल होत नाही.



**आकृती 1.8 :** बलाच्या उच्चस्थानाचा सिद्धांत

आकृती 1.8 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, सदरचे बल  $F_1$  हे AB रेषेमध्ये A बिंदूवर लावलेले आहे. आता जर (आकृती 1.8 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे) दुसऱ्या B ह्या बिंदूवर  $F_2 = F_3$  अशी दोन बले ज्यांचे प्रमाण सारखे आहे आणि ते एकमेकांविरुद्ध दिशेत असतील तर ते समतोल असतील आणि ते एकमेकांना रद्दबातल करतील आणि म्हणूनच  $F_1$  ह्या बलाचा परिणाम आधी जसा असेल तसाच राहील.

आता आकृती 1.8 (क) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे जर  $F_2 = F_3 = F_1$  ह्याचा परिणाम काय होईल ह्याचा विचार करूया. जर  $F_1$  आणि  $F_2$  समान परिमाण असलेले असतील आणि विरुद्ध दिशेत कार्यरत असतील तर ते एकमेकांना रद्दबातल करतील आणि B बिंदूवर

फक्त  $F_3$  कार्य करेल. आता जर  $F_3 = F_1$  असेल, म्हणजेच आता बिंदू B येथे  $F_1$  इतकेच बल कार्य करीत असेल. म्हणजेच ह्याचा अर्थ  $F_1$  ह्या बलाचा A बिंदूवर जागा असताना होणारा परिणाम जर त्याची जागा स्थानांतरीत करून B बिंदूवर आणली तरीही तो तसाच असेल.

### (C) बलांचे पारेषण तत्त्व

आकृती 1.8 (क) प्रमाणे वरील चर्चा किंवा घटनेप्रमाणे आता आपण बलाचे पारेषण करण्याच्या तत्त्वाबद्दल विधान करूया. एखाद्या वस्तूवर एखादे बल कार्य करीत असेल तर त्याचा अनुप्रयोग बिंदू त्याच्या कृतीच्या रेषेत बदलला तरीही त्या बलाचा प्रभाव बदलत नसतो. अशा प्रकारे बलाचे पारेषण करण्याचे तत्त्व हा बलांच्या अध्यारोपण तत्त्वामार्फत समजतो.

प्रत्यक्षात हे तत्व लागू करताना, आपण हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, जेव्हा वस्तूवरील बलाचा अनुप्रयोगाचा बिंदू बदलला जातो तरी देखील बलांचा बाह्य प्रभाव समान असतो, परंतु बलांच्या स्थितीत बदल केल्यानंतर अंतर्गत परिमाणांवर परिणाम करीत असतो जसे उदाहरणार्थ ताण (स्ट्रेस), स्ट्रेन इत्यादी. हा अभ्यास दुसऱ्या वर्षातील स्ट्रेंथ ऑफ मटेरीअल ह्या विषयात आपण करणार आहोत.

## 1.6 समतल समवर्ती बले

### 1.6.1 बलांचा ठराव

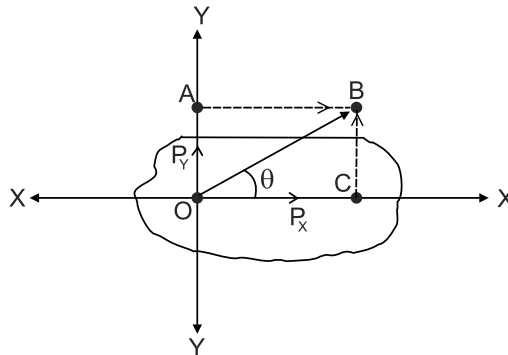
एक बल (फोर्स) दोन दिशांमध्ये अशाप्रमाणे विभागले जाऊ शकते की विभागलेल्या दोन बलांचा परिणाम हा आधी असलेल्या एका बलाच्या परिणामाप्रमाणेच असतो. अशा प्रकारे एका बलाचे तयार करण्यात आलेले दोन घटक मुख्य एका बलाच्या इतकाच परिणाम अथवा कार्य करीत असतात. ह्या कार्यपद्धतीला बलांचा ठराव करणे (रिझोल्यूशन ऑफ फोर्स) (दोन भाग तयार करणे) म्हणून ओळखले जाते. भाग तयार करून दोन वेगवेगळे तयार केलेल्या बलांना, बलाचे घटक असे म्हणतात.

एका बलाचे दोन घटकांमध्ये खालीलप्रमाणे निराकरण करता येऊ शकते:

- (अ) दोन परस्पर लंब असलेले (ऑर्थोगोनल) घटक
- (ब) दोन परस्पर लंब नसलेले (नॉन ऑर्थोगोनल) घटक

#### (अ) दोन परस्पर लंब असलेले घटक

साधारणपणे, बल अनुक्रमे दोन परस्पर लंब जसे क्षैतिज घटक (क्षितिजाला समांतर) आणि अनुलंब घटक (क्षितिजाच्या  $90^\circ$  लंब रेषेमध्ये) म्हणून ओळखले जाणारे को-ऑर्डिनेट अक्ष X आणि Y मध्ये आकृती 1.9 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे विभागले जातात.



आकृती 1.9: दोन परस्पर लंब असलेले घटक

आकृती 1.9 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे P हा एक बल वस्तूच्या O ह्या बिंदूवर कार्यरत आहे आणि X अक्षापासूनचा त्याचा कोन  $\theta$  (theta) (थेटा) इतका आहे. असे समजू की P बलाचे परिमाण (magnitude) आणि त्याची दिशा सदिश (vector) OB अशी आहे. बिंदू O मधून XX आणि YY असे दोन एकमेकांशी लंब अक्ष काढलेले आहेत. आता B पासून XX अक्षावर BC लंब, तसेच B पासून YY अक्षावर BA लंब काढूयात. आता त्रिकोण OBC मध्ये OB ही P बलाच्या परिमाणाचे प्रतिनिधित्व करते आणि त्याचा XX अक्षासोबत असलेला कोन  $\theta$  आहे. आता ह्यामध्ये OC आणि BC हे P बलाचे X आणि Y अक्षामधील दोन घटक, अनुक्रमे PX आणि PY असे घटक आहेत.

येथे,  $\cos \theta = \frac{OC}{OB}$  म्हणून  $OC = P_x = OB \cdot \cos \theta = P \cdot \cos \theta$

$\therefore P_x = P \cdot \cos \theta$  ... (i)

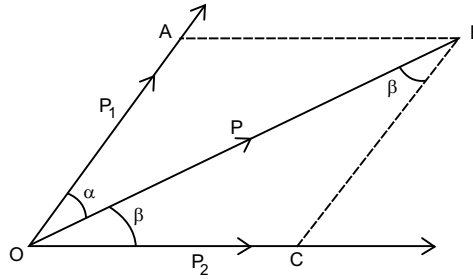
आणि,  $\sin \theta = \frac{BC}{OB}$  म्हणून  $BC = P_y = OB \cdot \sin \theta = P \cdot \sin \theta$

$\therefore P_y = P \cdot \sin \theta$  ... (ii)

समीकरणे (i) आणि (ii) हे बल P चे अनुक्रमे X आणि Y दिशेतील घटक देतात.

#### (ब) दोन परस्पर लंब नसलेले घटक

आकृती 1.10 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, येथे एका बलाचे (फोर्सचे) दोन परस्पर लंब नसलेल्या दिशेमधील घटकांचे निराकरण केलेले आहे. रेषा OB ही बल P चे प्रतिनिधित्व करते आणि त्या P बलाचे  $P_1$  आणि  $P_2$  हे त्याचे घटक असून त्यांचा OB संबंधी असलेला कोन अल्फा  $\alpha$  (Alpha) आणि बीटा  $\beta$  (Beta) असा आहे.



आकृती 1.10: दोन परस्पर लंब नसलेले घटक



## 1.7 बलांचे एकत्रीकरण (परिणामी बल)

जर एखाद्या वस्तुवरती कार्यरत असलेल्या बल प्रणालीमध्ये एकापेक्षा जास्त बले कार्यरत असतील, तर अशी अनेक बले आपण एका बलामध्ये पुनर्स्थित/ बदल करू शकतो ज्या अनुषंगाने त्या एका बलाचा त्या वस्तूवर होत असलेला परिणाम हा त्या बल प्रणालीतील सर्व बलांच्या इतका असू शकतो. अशा बल प्रणालीतील अनेक बलांचे एका बलामध्ये पुनर्स्थितीकरण केलेल्या बलाला परिणामी बल (resultant force) म्हणून ओळखले जाते आणि ज्या प्रक्रियेतून बलांचे पुनर्स्थितीकरण केले जाते त्या प्रक्रियेस बलांचे एकत्रीकरण (composition of forces) असे म्हणतात. परिणामी बल शोधण्यासाठी दोन पद्धतींचा वापर करू शकता येतो.

(1) विश्लेषणात्मक पद्धती (Analytical method) आणि (2) आलेखीय पद्धती (Graphical method). ह्यामधील आलेखीय पद्धती आपण प्रयोगशाळेत शिकणार आहोत.

### 1.7.1 समवर्ती बलांच्या प्रणालीसाठी विश्लेषणात्मक पद्धती

दिलेल्या बलांचे परिणामी बल खालील तीन पद्धतींद्वारे शोधिले जाऊ शकते:

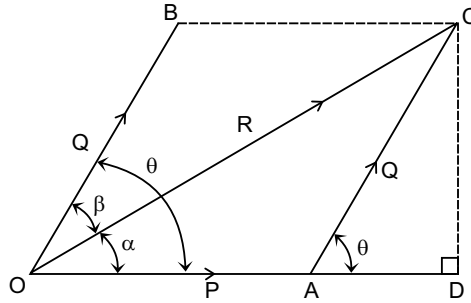
- (अ) बलांच्या समांतर चतुर्भुजाचा कायदा (Law of parallelogram of force)
- (ब) बलांच्या त्रिकोणाचा/ त्रिभुजाचा कायदा (Law of triangle of force)
- (क) बलांची निराकरणाची पद्धत (Method of resolution of forces)

#### 1.7.1.1 बलांच्या समांतर चतुर्भुजाचा कायदा (दोन समतल समवर्ती बलांचे परिणामी बल)

कोणत्याही वस्तूवर दोन समतल समवर्ती बले कार्य केल्यानंतर होणाऱ्या कृतीचा परिणाम शोधण्यासाठी ही पद्धत वापरली जाते. बलाचा समांतर चतुर्भुजाचा कायदा खालीलप्रमाणे आहे:

“कोणत्याही वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करणारी दोन बले, समांतरभुजेचा भुजेप्रमाणे दोन समीप बाजूंनी परिमाण आणि दिशानिर्देश दर्शविल्यास, दोन बलांच्या छेदनबिंदूच्या समांतरभुजेचे कर्ण, परिमाण आणि दिशेने परिणामी बलाचे प्रतिनिधित्व करते”.

आकृती 1.11 चा विचार करूया. बल P आणि Q हे सदरच्या एका वस्तूच्या O बिंदूवर काम करीत आहेत आणि त्या दोघांमधील कोन  $\theta$  इतका आहे. ह्या दोन्ही बलांचा परिणाम करणारे बल R असे दाखविले आहे. तरी हा R फोर्स गणिताने खालील पद्धतीने लिहिता येईल:



आकृती 1.11: बलांचा समांतरवृत्तीचा कायदा

परिणामी बलाचे परिमाण (Magnitude of resultant) ह्याद्वारे काढता येते  $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$  ... (iii)

परिणामाची दिशा (Direction of resultant ( $\alpha$ )) ह्या द्वारे काढता येते,  $\alpha = \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta}$  ... (iv)

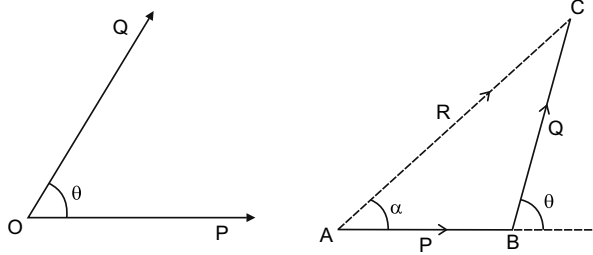
**हे करून पहा :** (1) वरील समीकरण (iv) मध्ये R आणि Q बलमधील R परिणामाचा कोन  $\alpha$  आपण शोधू शकतो, त्याचप्रमाणे परिणाम R आणि दुसरा फोर्स Q मधील कोन  $\beta$  तुम्हाला काढता येईल का?

(2) वरील समीकरण (iii) and (iv) मध्ये असलेली बले हे वस्तु खेचणाऱ्या पद्धतीचे आहेत. समजा, ह्यातील एक किंवा दोन्हीही बल ढकलणेसारखे असतील तर समीकरणामध्ये काय बदल होईल?

#### 1.7.1.2 बलांच्या त्रिकोणाचा कायदा

जेव्हा एखाद्या वस्तूवर फक्त दोनच बले एका सामान्य बिंदूवर कार्य करीत असतात तेव्हा त्या दोन बलांचे परिणामी बल (resultant force) आपण ह्या कायदानुसार शोधू शकतो. सदरचा कायदा असे सांगतो की “जर एखाद्या वस्तूवरील एका बिंदूवर कार्यरत

असलेल्या दोन बलांचे परिमाण (magnitude) आणि त्यांची दिशा (direction) त्रिकोणाच्या दोन बाजूंनी दर्शविलेल्या असतील (किंवा प्रतिनिधित्व करीत असतील) तर त्या त्रिकोणाच्या राहिलेल्या तिसऱ्या बाजूच्या उलटक्रमामध्ये ती तिसरी बाजू पहिल्या दोन बलांच्या परिणामी बलाचे (resultant force) परिमाण (magnitude) आणि त्याची दिशा (direction) यांचे प्रतिनिधित्व करते. आता आकृती 1.12 नुसार P आणि Q ही दोन बले एका वस्तूवरील O बिंदूवर कार्यरत आहेत आणि त्यांच्यामधील कोन  $\theta$  इतका आहे. ह्याचा जर पुढील आकृतेनुसार त्रिकोण तयार केला तर R हा परिणामी बलाचे प्रतिनिधित्व करेल. ह्या पद्धतीचा साधारणतः आलेखीय पद्धतीमध्ये वापर करतात ज्याचा अभ्यास आपण पुन्हा प्रयोगशाळेत करणार आहोत.

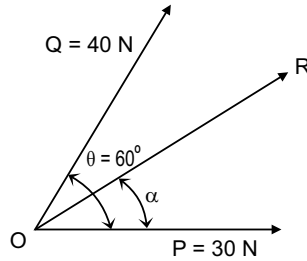


आकृती 1.12: बलाच्या त्रिकोणाचा कायदा



## काही सोडविलेली उदाहरणे

**उदाहरण 1:** आकृती 1.13 मध्ये दर्शविलेल्या 30 N आणि 40 N ह्या दोन एकमेकांमध्ये  $60^\circ$  कोनमध्ये असलेल्या बलांचे परिणामी बल (resultant Force) शोधा.



आकृती 1.13

**उत्तर:**  $P = 30 \text{ N}$ ,  $Q = 40 \text{ N}$  आणि (P आणि Q मधील) कोन  $\theta = 60^\circ$ .

ह्या किंमती समीकरणामध्ये ठेवले असता परिणामाचे परिमाण आणि दिशा खालीलप्रमाणे काढता येतील.

(i) परिमाण 
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

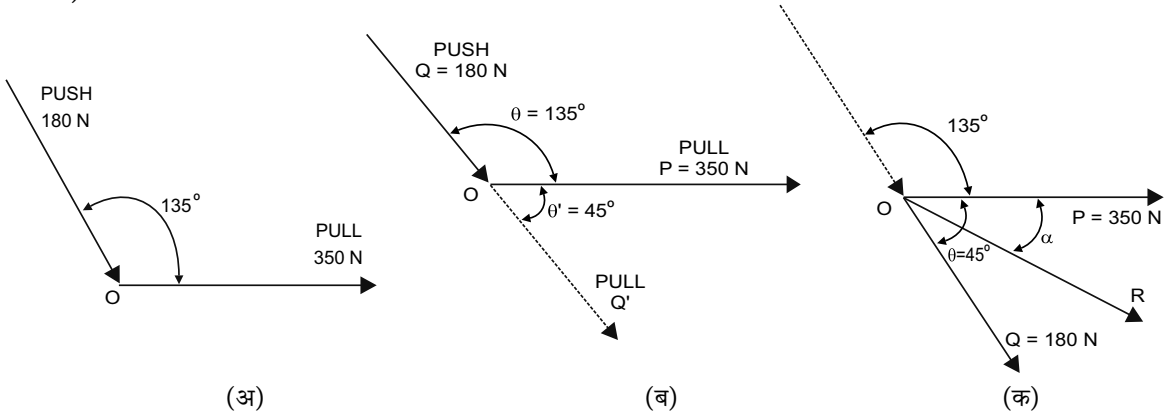
$$R = \sqrt{(30)^2 + (40)^2 + 2 \times 30 \times 40 \times \cos 60} = \sqrt{3700}$$

म्हणून, परिणामाचे परिमाण  $R = 60.83 \text{ N}$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) दिशा} \quad \tan \alpha &= \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta} \\
 &= \frac{40 \times \sin 60}{30 + (40 \times \cos 60)} = \frac{34.64}{50} = 0.6928
 \end{aligned}$$

म्हणून,  $\alpha = 34.71^\circ$  P बलाच्या पासून

**उदाहरण 2:** खालील आकृती 1.14 मध्ये 180 N चा एक ढकलणारा आणि तसेच 350 N इतका ओढणारा अशी दोन बले एका बिंदूवर कार्य करिताना दाखविलेले आहेत आणि त्या दोन बलांच्या मधील कोन  $135^\circ$  इतका आहे. ह्यांचे परिणामी बल (resultant force) शोधा.



**आकृती 1.14:** (अ) दिलेली माहिती (ब) दोन्ही बले एका दिशेने (क) परिणामी बल

**उत्तर:** आकृती 1.14 (अ) प्रमाणे,  $P = 350$  N (खेचणारा);  $Q' = 180$  N (ढकलणारा); कोन  $\theta' = 135^\circ$  असे दाखविलेले आहे. ह्यामध्ये बल Q ला ढकलणाराच्या विरुद्ध त्याच्या कृतीची रेष बदलून जात ती खेचणाऱ्या पद्धतीत बदल करवून आणली तर आकृती 1.14 (ब) प्रमाणे P आणि Q ह्या दोन बलांतील कोन  $45^\circ$  होवू शकतो आणि त्यानंतर येथे बलांच्या समांतर चतुर्भुजाचा कायद्याचा वापर करता येईल. म्हणून, दोन बलांच्या एकत्रित परिणामी बल खालीलप्रमाणे असेल.

$$\begin{aligned}
 \text{(i) परिमाण} \quad R &= \sqrt{P^2 + Q'^2 + 2PQ \cos \theta'} \\
 R &= \sqrt{(350)^2 + (180)^2 + (2 \times 350 \times 180 \times \cos 45^\circ)} = \sqrt{243982} \\
 R &= 493.96 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\text{(ii) दिशा} \quad \tan \alpha = \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta} = \frac{180 \sin 45^\circ}{350 + 180 \cos 45^\circ} = \frac{127.26}{477.26} = 0.26667$$

Hence  $\alpha = 14.93^\circ$  बल P पासून

**प्रयत्न करा:** वरील उदाहरणामध्ये परिणामी बलाची दिशा  $\alpha$  ही P पासून शोधलेली आहे. ती तुम्ही परिणामी बल R आणि बल Q ह्यातील कोन  $\beta$  शोधा.

**उदाहरण 3:** P आणि 2P अशी दोन बले (फोर्सेस) अनुक्रमे एका कणावर (पॉइंटवर) कार्य करीत आहेत. जेव्हा पहिले बल हे 120 Newton ने वाढविले आणि दुसरे बल त्याच्या दुप्पट पद्धतीने वाढविले तरी परिणामी बलाची (resultant force) दिशा ही दोन्हीही प्रकरणामध्ये तीच रहात असेल तर P ह्या फोर्सेचे मूल्य शोधा.

**उत्तर:** भाग (i)  $P_1 = P$ ;  $Q_1 = 2P$ ;  $\theta_1 = \theta$ ;  $\alpha_1 = \alpha$

भाग (ii)  $P_2 = P + 120$ ;  $Q_2 = 4P$ ;  $\theta_2 = \theta$ ;  $\alpha_2 = \alpha$

ह्यामध्ये आपण दोन्हीही परिणामी बलाची दिशा त्याच दिशेने आहे ह्या अटाचा वापर करूया.

For भाग (i) 
$$\tan \alpha_1 = \frac{Q_1 \sin \theta_1}{P_1 + (Q_1 \cos \theta_1)} = \frac{2P \sin \theta}{P + (2P \cos \theta)} = \tan \alpha$$

भाग (ii) 
$$\tan \alpha_2 = \frac{Q_2 \sin \theta_2}{P_2 + (Q_2 \cos \theta_2)} = \frac{4P \sin \theta}{(P + 120) + (4P \cos \theta)} = \tan \alpha$$

ही समीकरणे एकत्र करून,

$$\begin{aligned} \frac{2P \sin \theta}{P + (2P \cos \theta)} &= \frac{4P \sin \theta}{(P + 120) + (4P \cos \theta)} \\ \frac{2P \sin \theta}{4P \sin \theta} &= \frac{P + (2P \cos \theta)}{(P + 120) + (4P \cos \theta)} \\ \frac{1}{2} &= \frac{P + (2P \cos \theta)}{(P + 120) + (4P \cos \theta)} \\ (P + 120) + (4P \cos \theta) &= 2P + (4P \cos \theta) \\ P + 120 &= 2P \\ P &= 120 \text{ N} \end{aligned}$$

**उदाहरण 4:** दोन समान बले (फोर्सेस) ज्यांचे परिमाण (magnitude) P आहे ते एका कणावर कार्य करीत आहेत. (अ) जर ह्या दोन फोर्सेसचा परिणाम (resultant) 1.5 P इतका असेल तर त्या दोन फोर्समधील कोन शोधा. (ब) R चे जास्तीत जास्त मूल्य (value) किती आणि कोठे असू शकेल?

**उत्तर:** भाग (i)  $P = P$ ;  $Q = P$ ;  $R = 1.5P$ ;  $\theta = ?$

बलाचा/ फोर्सचा समांतरवृत्तीच्या कायद्याचा वापर करून

$$\begin{aligned} \text{Magnitude } R &= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta} \\ (1.5P)^2 &= P^2 + P^2 + (2PP \cos \theta) \\ 2.25P^2 &= 2P^2 + 2P^2 \cos \theta \\ 2.25P^2 &= 2P^2 (1 + \cos \theta) \\ \frac{2.25}{2} &= (1 + \cos \theta) \\ \cos \theta &= 0.125 \\ \theta &= 82.81^\circ \end{aligned}$$

भाग (ii) जास्तीत जास्त  $R = ?$ ;  $\theta_{\max} = ?$

(a) जास्तीत जास्त परिणाम (Resultant)  $\cos \theta$  जेव्हा जास्त असेल, तेव्हा असेल जे की  $\cos \theta = 1$ .

$$R^2 = P^2 + Q^2 + (2PQ \cos \theta)$$

$$R^2 = P^2 + P^2 + (2 \cdot P \cdot P \cdot 1)$$

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 = 4P^2$$

$$\text{म्हणून जास्तीत जास्त परिणाम } R = 2P$$

(b) आता येथे, जास्तीत जास्त  $\cos \theta = 1$  असेल तर  $\theta = 0^\circ$  असेल

म्हणून दोन समान  $P$  बलांचा (फोर्सेसचा) जास्तीत जास्त परिणाम (Resultant)  $2P$  असेल आणि तो दोन बलांमधील कोन  $0^\circ$  असताना असेल.

### 1.7.1.3 ठरावाची पद्धत

दोन बलापेक्षा जास्त बले वस्तूच्या एका ठिकाणी कार्य करीत असतील तर बलाचा समांतर चतुर्भूजीच्या कायद्याची पद्धत वापरणे थोडी जास्त आणि कठीण प्रक्रिया होते. अशावेळी ठरावाची पद्धत ही पद्धत अशा बलांच्या प्रणालीचा परिणाम (resultant) निश्चित करण्यासाठी उपयुक्त ठरते. ही ठरावाची पद्धत (Method of resolution) ही आता खालीलप्रमाणे सांगितली आहे.

**भाग 1:** गरज असल्यास पहिल्यांदा बलांच्या (फोर्सेसच्या) दिशेची पुनर्रचना करून त्यांना एकतर खेचणाऱ्या प्रकारची बले किंवा ढकलणाऱ्या प्रकारची बले अशी पुनर्रचना करा आणि त्या सर्व बलांना पॉझिटिव्ह  $X$  अक्षापासून अँटीक्लॉकवाइझ (anticlockwise) दिशेने  $F_1, F_2, \dots$  इत्यादी संकेत द्या. तसेच अँटीक्लॉकवाइझ पद्धतीने सकारात्मक एक्स अक्षांसह सर्व बलांचे (फोर्सेसचे) कोन मोजा.

**भाग 2:** बीजगणिताच्या नियमानुसार बलांच्या (फोर्सेसच्या) क्षैतिज घटकांची (आडवा अक्ष) संबंधित चिन्हाचा विचार करून बेरीज करा आणि त्याला  $\Sigma H$  असे चिन्ह द्या. [सकारात्मक (+ve) as:  $\rightarrow$  and नकारात्मक (-ve) as:  $\leftarrow$ ]

**भाग 3:** बीजगणिताच्या नियमानुसार बलांच्या (फोर्सेसच्या) अनुलम्बातील (उभा अक्ष) घटकांची संबंधित चिन्हाचा विचार करून बेरीज करा आणि त्याला  $\Sigma V$  असे चिन्ह द्या. [सकारात्मक (+ve) as:  $\uparrow$  and नकारात्मक (-ve) as:  $\downarrow$ ]

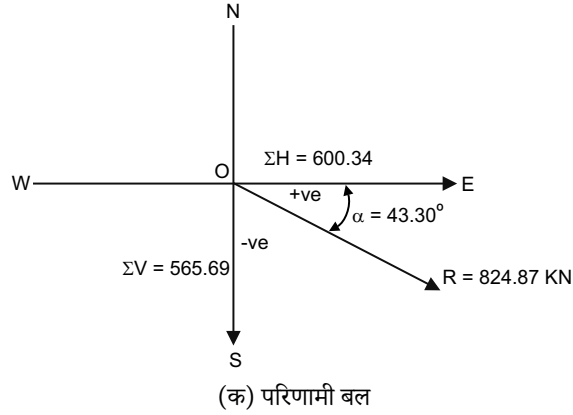
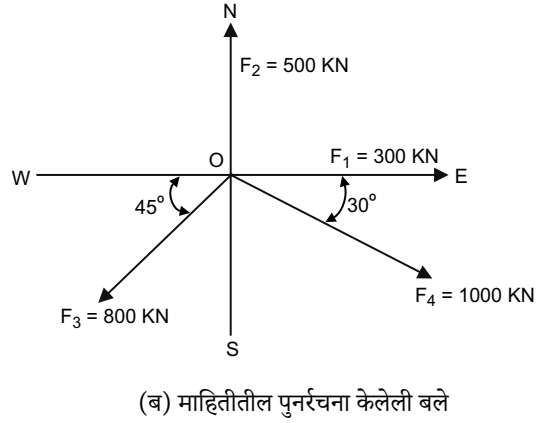
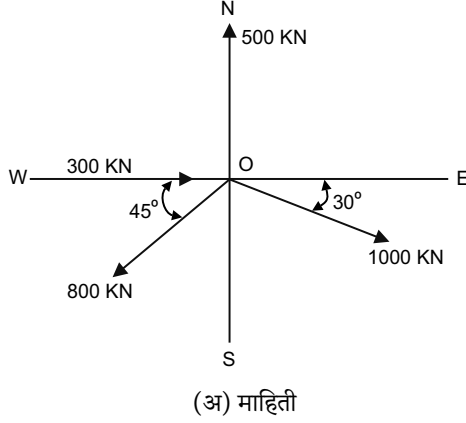
**भाग 4:** आता समीकरण वापरून परिणामी बल (resultant force)  $R$  चा परिमाण (magnitude) शोधा.  $R^2 = \Sigma H^2 + \Sigma V^2$ .

**भाग 5:** आता समीकरणाद्वारे क्षैतिज असलेल्या परिणामी बलाचा कोन ( $\alpha$ ) शोधा.  $\tan \alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$

**उदाहरण 5:** खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे एका प्रणालीमध्ये चार समतल समवर्ती बले (कोप्लेनर कॉनकरंट फोर्सेस) कार्य करीत आहेत. ह्या प्रणालीच्या परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा.

1. उत्तर दिशेमध्ये कार्य करणारे बल 500 kN
2. पूर्वकडून दक्षिणेकडे  $30^\circ$  कोनात असलेले बल 1000 kN
3. दक्षिणेकडून पश्चिमेकडे 800 kN बल
4. दक्षिणेकडे कार्य करणारे 300 kN बल





#### आकृती 1.15

**उत्तर :** सुरुवातीला दिलेल्या माहितीप्रमाणे बलांची (फोर्ससची) आकृती 1.15 (अ) प्रमाणे काढा.

**भाग 1:** ह्या उदाहरणामध्ये, 300 kN हे बल वस्तूला ढकलण्याच्या प्रकारचे आहे आणि बाकीची तीनही बले वस्तूला खेचण्याच्या प्रकारची आहेत. ह्या कारणामुळे आकृती 1.15 (ब) मध्ये दाखविल्याप्रमाणे 300 kN बलाची त्याच्या क्रिया करण्याच्या रेषेत पुनर्रचना करून त्याला खेचण्याच्या प्रकारात बदलण्यात आलेले आहे.

**भाग 2 आणि 3:** आता बलांची क्षैतिज घटकांची (आडवा अक्ष) आणि अनुलम्बातील (उभा अक्ष) घटकांची गणिते खालील प्रमाणे सारणी स्वरूपात करणे सोपे जाते.

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (kN)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (kN)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (kN)
1	$F_1 = 300$	$0^\circ$	$300 \cos 0^\circ = 300.00$	$300 \sin 0^\circ = 0.00$
2	$F_2 = 500$	$90^\circ$	$500 \cos 90^\circ = 0.00$	$500 \sin 90^\circ = 500.00$
3	$F_3 = 800$	$180 + 45 = 225^\circ$	$800 \cos 225^\circ = -565.69$	$800 \sin 225^\circ = -565.69$
4	$F_4 = 1000$	$360 - 30 = 330^\circ$	$1000 \cos 330^\circ = 866.03$	$1000 \sin 330^\circ = -500.00$
Algebraic Sum			$\Sigma H = +600.34 \rightarrow \text{kN}$	$\Sigma V = -565.69 \text{ kN}$

**भाग 4:** समीकरणानुसार परिणामी बलाचे परिमाण

$$R^2 = \Sigma H^2 + \Sigma V^2 = (600.34)^2 + (-565.69)^2 = 680413.2917$$

$$R = 824.87 \text{ kN}$$

**भाग 5:** R ह्या परिणामी बलाचा X अक्षाशी झालेला  $\Sigma H$  आणि  $\Sigma V$  च्या चिन्हाप्रमाणे होणारा कोन  $\alpha$ ,

$$\tan \alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H} = \frac{-565.69}{600.34} = -0.9423$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-0.9423)$$

$\therefore$

$$\alpha = 43.30^\circ \text{ (पूर्व दिशेकडून) } \Sigma V \downarrow \text{ (दक्षिण दिशेकडे)}$$

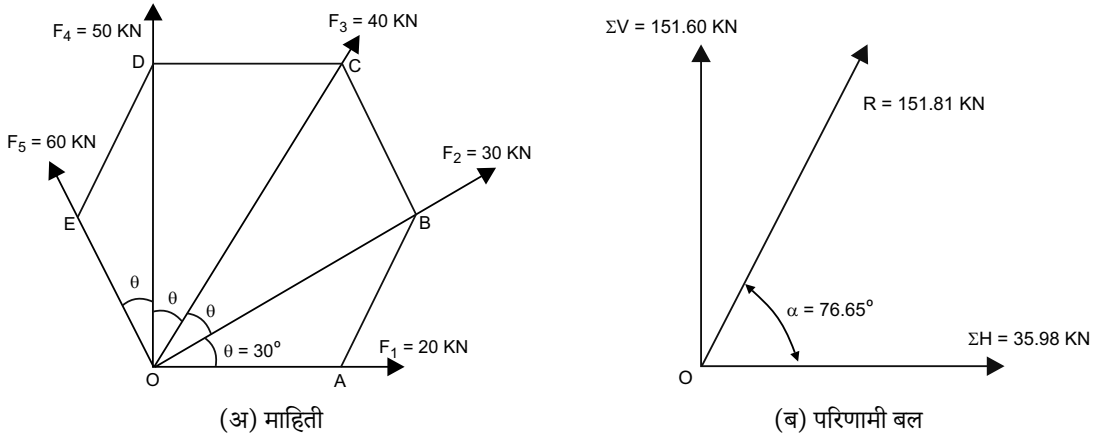
$$\text{किंवा } \alpha = (360^\circ - 43.30^\circ)$$

$$= 316.70^\circ \text{ (+ X अक्षाकडून घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने)}$$

आकृती 1.15 (क) मध्ये परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा (magnitude and direction of resultant) R आणि त्याचे  $\Sigma H$  आणि  $\Sigma V$  हे घटक दर्शविलेले आहेत.

**उदाहरण 6:** पाच वेगवेगळी बले (फोर्सेस) ज्यामध्ये 20 kN, 30 kN, 40 kN, 50 kN and 60 kN आहेत ती, षटकोनाच्या एका कोन बिंदूवर क्रमाने घेतलेल्या इतर पाच कोनात्मक बिंदूंच्या दिशेने कार्य करित आहेत. ह्या प्रणालीच्या परिणामी बलाचे (resultant force) परिमाण आणि दिशा शोधा.

**उत्तर:**



**आकृती 1.16**

प्रथम खाली षटकोनी आकृती काढा आणि कोनात्मक बिंदूवर कार्यरत असलेली बले (फोर्सेस) काढा. कोणत्याही बहुभुजासाठी अंतर्गत कोनांची बेरीज  $[(2n - 4) \times 90^\circ]$  ज्यामध्ये  $n$  = नियमित बहुभुजेच्या बाजूंची संख्या असते. षटकोनासाठी  $n = 6$ , त्यामुळे अंतर्गत कोनांची बेरीज  $= (2 \times 6 - 4) \times 90 = 720^\circ$  इतकी असेल. त्यामुळे

$$\therefore \text{प्रत्येक अंतर्गत कोनाचे मूल्य} = \frac{720}{6} = 120^\circ$$

$$\text{म्हणून दोन समीप असलेल्या बलांचे कोन} = \theta = \frac{120}{4} = 30^\circ$$

**भाग 1:** येथे सर्व पाचही बले (फोर्सेस) आकृती 1.16 (अ) मध्ये O ह्या बिंदूवर ओढणाऱ्या प्रकारची दर्शविली आहेत.

**भाग 2 आणि 3:** आता बलांची क्षैतिज घटकांची (आडवा अक्ष) आणि अनुलम्बातील (उभा अक्ष) घटकांची गणिते खालील प्रमाणे सारणी स्वरूपात करावीत.

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (kN)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (kN)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (kN)
1	$F_1 = 20$	$\theta = 0^\circ$	$20 \cos 0^\circ = 20.00$	$20 \sin 0^\circ = 0.00$
2	$F_2 = 30$	$\theta = 30^\circ$	$30 \cos 30^\circ = 25.98$	$30 \sin 30^\circ = 15.00$
3	$F_3 = 40$	$2\theta = 60^\circ$	$40 \cos 60^\circ = 20.00$	$40 \sin 60^\circ = 34.64$
4	$F_4 = 50$	$3\theta = 90^\circ$	$50 \cos 90^\circ = 00.00$	$50 \sin 90^\circ = 50.00$
5	$F_5 = 60$	$4\theta = 120^\circ$	$60 \cos 120^\circ = -30.00$	$60 \sin 120^\circ = 51.96$
बीजगणिताप्रमाणे बेरीज			$\Sigma H = +35.98 \rightarrow \text{kN}$	$\Sigma V = +151.60 \uparrow \text{kN}$

**भाग 4:** समीकरणानुसार परिणामी बलाचे परिमाण (magnitude of resultant force) R खालीलप्रमाणे:

$$R^2 = \Sigma H^2 + \Sigma V^2 = (35.98)^2 + (151.60)^2 = 24277.58$$

$\therefore$

$$R = 151.81 \text{ kN}$$

**भाग 5:** R ह्या परिणामी बलाचा X अक्षाशी झालेला  $\Sigma H$  आणि  $\Sigma V$  च्या चिन्हाप्रमाणे होणारा कोन  $\alpha$ ,

$$\tan \alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H} = \frac{151.60}{35.98} = 4.21345$$

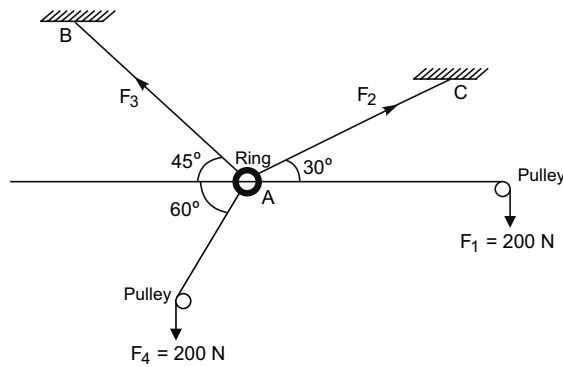
$$\alpha = \tan^{-1} (4.21345)$$

$\therefore$

$$\alpha = 76.65^\circ \text{ from } \Sigma H \rightarrow (\text{पूर्व दिशेकडून}) \Sigma V \uparrow (\text{उत्तर दिशेकडे})$$

किंवा  $\alpha = 76.65^\circ$  (+X अक्षाकडून घड्याळाचे काटे फिरतात त्याच्याविरुद्ध दिशेने)

**उदाहरण 7:** खालील आकृतीमध्ये दाखविलेल्या AB आणि AC ह्या दोन तारांवरील ताणाचे बल (tensile force) ची किंमत काढा. सर्व ठिकाणी चरणी (पुली) घर्षणविरहित असल्याचे समजावे.



आकृती: 1.17

उत्तर:

बलाच्या प्रणालीमुळे ही स्थिती समतोल (equilibrium) मध्ये आहे. म्हणजेच असे म्हणता येईल की  $R = 0$  किंवा  $\Sigma H = 0$  आणि  $\Sigma V = 0$ . आता सर्व बलाच्या X आणि Y घटक खालील सारणी प्रमाणे असतील.

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (N)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (N)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (N)
1	$F_1 = 200$	$0^\circ$	$200 \cos 0^\circ = 200.00$	$200 \sin 0^\circ = 0.00$
2	$F_2 = ?$	$30^\circ$	$F_2 \cos 30^\circ = 0.866 F_2$	$F_2 \sin 30^\circ = 0.50 F_2$
3	$F_3 = ?$	$180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$	$F_3 \cos 135^\circ = -0.707 F_3$	$F_3 \sin 135^\circ = 0.707 F_3$
4	$F_4 = 200$	$180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$	$200 \cos 240^\circ = -100.00$	$200 \sin 240^\circ = -173.20$
बीजगणिताप्रमाणे बेरीज			$\Sigma H = 0 \text{ kN}$	$\Sigma V = 0 \text{ kN}$

खालील  $\Sigma H = 0$  आणि  $\Sigma V = 0$  ह्या दोन परिस्थिती आणि सारणीतील बलांचे आधार घेऊन;

(a)  $\Sigma H = 0$

$$\therefore 200 + 0.866 F_2 - 0.707 F_3 - 100.00 = 0.0$$

$$\therefore 0.866 F_2 - 0.707 F_3 + 100.00 = 0.0 \quad \dots(a)$$

(b)  $\Sigma V = 0$

$$\therefore 0 + 0.5 F_2 + 0.707 F_3 - 173.20 = 0.0$$

$$\therefore 0.5 F_2 + 0.707 F_3 - 173.20 = 0.0 \quad \dots(b)$$

(c) समीकरण (a) आणि (b) चा वापर करून,  $F_2$  ची किंमत काढता येईल.

$$\therefore (0.866 + 0.5) F_2 + (-0.707 + 0.707) F_3 + (100.00 - 173.20) = 0.0$$

$$\therefore 1.366 F_2 - 73.20 = 0.0$$

$$\therefore F_2 = \frac{73.20}{1.366}$$

$$\therefore \text{AC ह्या तारेवरील ताणाचे बल} = F_2 = 53.44 \text{ N}$$

(d)  $F_2$  ची किंमत समीकरण (a) मध्ये टाकल्यास,

$$(0.866 \times 53.44) - 0.707 F_3 + 100.00 = 0.0$$

$$\therefore 0.707 F_3 = 46.28 + 100.00 = 146.28$$

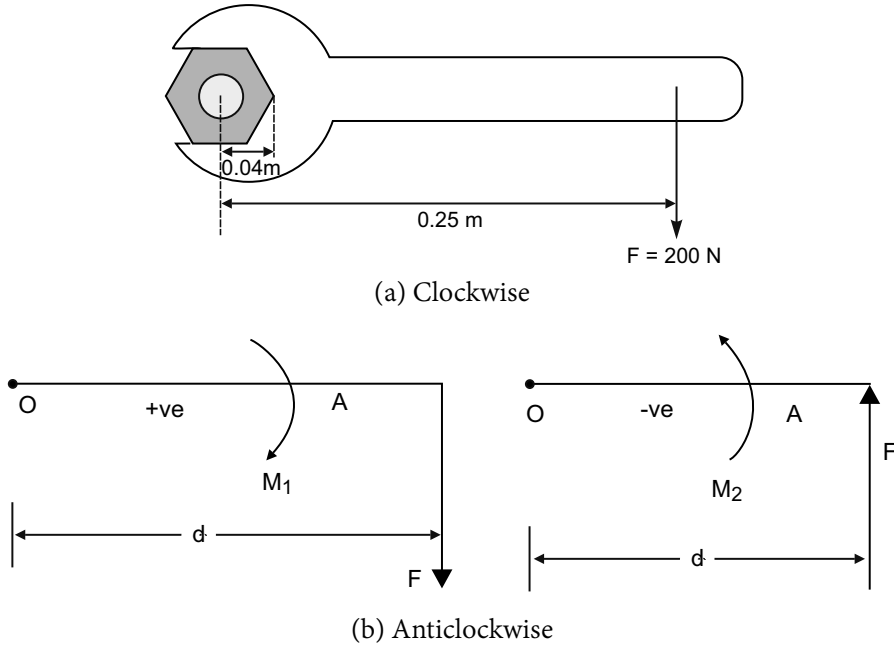
$$\therefore F_3 = \frac{146.28}{0.707}$$

$$\therefore \text{AB ह्या तारेवरील ताणाचे बल} = F_3 = 206.90 \text{ N}$$

## 1.8 समतल असमवर्ती बले

### 1.8.1 बलाचे आघूर्ण

जेव्हा एखाद्या वस्तूवर बल लावले जाते तेव्हा ती वस्तू त्या बलाच्या दिशेने सरकते किंवा सरकण्याचा प्रयत्न करते. तथापि जर बल बिंदुपासून काही अंतरावर कार्य करते तेव्हा ते आघूर्ण (मोमेंट) तयार करते जे की त्या वस्तूला परिभ्रमण किंवा वळविण्याचा (रोटेट करायचा) प्रयत्न करते. उदाहरणार्थ, खालील 1.18 ह्या आकृतीमधील पान्यावर (स्पॅनर) बल लावल्यास खिळ्याला (बोल्टला) घट्ट करण्याचे किंवा उघडण्याचे कार्य करेल.



आकृती 1.18: बलाचे आघूर्ण

आघूर्णाचे प्रकार (अ) घड्याळाच्या दिशेने (ब) घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने येथे बल  $F$  हे  $O$  बिंदुपासून  $d$  अंतरावर प्रयुक्त किंवा लावलेले आहे जो आघूर्ण तयार करीत आहे आणि त्यामुळे बोल्टचे रोटेशन होत आहे. बल  $F$  आणि बलाच्या क्रियेच्या ओळीचे बिंदू  $O$  पासूनचे लंब अंतर (आर्म)  $d$  ह्याचा गुणाकार केल्यास फोर्सचे मोमेंटची किंमत मिळते.

गणितामध्ये  $\text{Moment} = M = \text{Force (F)} \times \text{Perpendicular distance (d)}$  म्हणून,  $M = F \cdot d$

फोर्सच्या मोमेंटच्या एककामध्ये बल आणि अंतर अशा दोन परिमाणांचा समावेश असतो. बल आणि अंतर ह्या दोघांच्या एककाचा वापर केल्यास आघूर्णाचे (मोमेंटचे) एकक (Unit) Newton . metre (N.m) असे होते.

मोमेंटचे प्रकार: आकृती 1.18 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे पान्याला (स्पॅनरला) लावण्यात आलेले बल खिळ्याला (बोल्टला) घड्याळाच्या दिशेने (clockwise direction) फिरविण्याचा परिणाम करीत आहे परंतु आकृती 1.18 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे जर बलाची दिशा बदलली तर खिळ्याला घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने फिरविण्याचा परिणाम करेल. म्हणून बलाच्या आघूर्णाचे (मोमेंटचे) खालीलप्रमाणे दोन प्रकार आणि संकेत चिन्हे असतात.

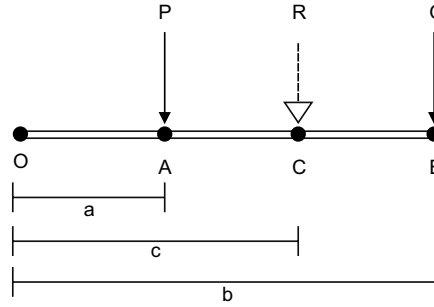
(अ) घड्याळाच्या दिशेने असलेले धन (clockwise moment: as positive) (+ve) आणि (ब) घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने असलेले ऋण (anticlockwise moment: as negative) (-ve)

**हे करण्याचा प्रयत्न करा:** वेगवेगळ्या लांबीच्या पान्यांचा वापर करून बोल्ट उघडण्याचा किंवा बंद करण्याचा प्रयत्न करा. बोल्ट उघडणे किंवा बंद करणे मोठ्या लांबीच्या पान्याने करणे सोपे जाते असे का घडते ते स्पष्ट करा.

**हे करण्याचा प्रयत्न करा:** दरवाजा त्याच्या मध्यातून ढकलून आणि नंतर दाराच्या हँडलचा वापर करून बंद करण्याचा किंवा उघडण्याचा प्रयत्न करा. कोणते सोपे आहे आणि तसे का आहे हे सांगण्याचा प्रयत्न करा.

### 1.8.2 व्हॅरिग्रनचे तत्व किंवा मोमेंटचे तत्व

व्हॅरिग्रनचे तत्व असे सांगते की, “एका बिंदू सोबत असलेला एका बलाचे आघूर्ण हे त्या बलाच्या सर्व घटकांच्या त्याच बिंदूसोबत घेतलेल्या आघूर्णांच्या बेरजे इतका असतो”. हे तत्व गैर- समवर्ती आणि समांतर (non-concurrent and parallel) बल प्रणालीसाठी त्याच्या परिणामी बलाची जागा (position of resultant force) काढण्याकरिता वापरता येते. व्हॅरिग्रनचे तत्व समजून घेण्याकरिता आकृती 1.19 पहा.



आकृती 1.19: व्हॅरिग्रनचे तत्व

समजा आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे बल P आणि Q हे बिंदू A आणि B येथे कार्यरत आहेत आणि ते एका प्रतालावर आणि समांतर आहेत. बल R हे ह्या दोन बलांचे परिणामी (resultant) बल आहे. बल P, Q आणि R चे बिंदू O पासूनचे अनुक्रमे अंतर a, b आणि c इतके आहे.

**व्हॅरिग्रनच्या तत्वाचा वापर करून:**

R ह्या बलाचा बिंदू O भोवती असलेले आघूर्ण = P ह्या बलाचे बिंदू O भोवती असलेले आघूर्ण + Q ह्या बलाचे बिंदू O भोवती असलेले आघूर्ण,  $R \cdot c = P \cdot a + Q \cdot b$

समांतर बल प्रणाली तसेच समवर्ती नसलेल्या समांतर नसलेल्या बल प्रणालीसाठी परिणामी बलाची स्थिती/ जागा शोधण्यासाठी व्हॅरिग्रनचा सिद्धांत अत्यंत उपयुक्त आहे.

### 1.8.3 समांतर बल प्रणालीसाठी विश्लेषणात्मक पद्धत

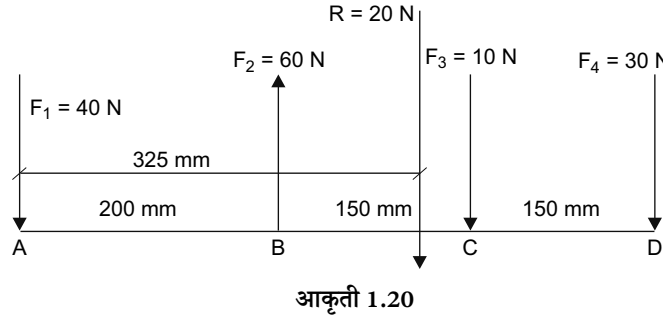
आपण फोर्स सिस्टीममधील समांतर बल प्रणालीचा अभ्यास आधीच केलेला आहे. आपण असे म्हणू शकतो की समांतर बल प्रणाली हा समवर्ती नसलेल्या बल प्रणालीचा एक विशेष भाग आहे. समांतर बल प्रणालीमध्ये ज्या रेषेमध्ये वेगवेगळी बले कार्य करीत असतात त्या रेषा एकमेकांशी समांतर असतात परंतु त्यांना दोन वेगवेगळ्या गटांमध्ये उपविभाजित केले जाते.

- (अ) सम समांतर बल प्रणाली ज्यामध्ये सर्व बले (फोर्सेस) एकसारखे असतात आणि सर्व एकतर खेचणारे किंवा ढकलणारे असतात.  
 (ब) असम समांतर बल प्रणाली ज्यामध्ये सर्व बले (फोर्सेस) एकसारखे असतात आणि त्यातील काही खेचणारे आणि राहिलेले ढकलणारे असतात.

**समांतर बल प्रणालीचे परिणामी बल (Resultant) खालीलप्रमाणे शोधता येतो:**

- (अ) **परिमाण (Magnitude):** बीजगणितातील बेरीजेप्रमाणे सर्व बलांची (फोर्सेसची) त्यांच्या चिन्हांचा वापर करून (+ve : वरच्या दिशेने (पुल) आणि -ve खालच्या दिशेने (पुश)) ह्याची बेरीज केल्यास परिमाण (Magnitude) मिळेल.  
 (ब) **परिणामाची दिशा:** बीजगणितातील बेरीजेच्या क्रियेच्या ओळीप्रमाणे परिणामाची दिशा असेल.  
 (क) **परिणामाचा कार्य करण्याचा बिंदू:** व्हेरिग्रन्सच्या तत्वाचा वापर करून परिणामाचा कार्य करण्याचा बिंदू शोधता येईल.  
 वरील क्रिया समजून घेण्याकरिता आपण काही खालील उदाहरणे बघूयात.

**उदाहरण 8:** खालील आकृती 1.20 मधील समांतर बल प्रणालीचा परिणामी (resultant) बल शोधा.



**उत्तर:**

पुढील चिन्हांचा वापर करूया: +ve ↓ (खालच्या दिशेसाठी) and -ve ↑ (वरच्या दिशेसाठी)

(i) परिणामी बलाचे परिमाण =  $R = \sum F$

$$\therefore R = 40 - 60 + 10 + 30 = 20 \text{ N}$$

$$\therefore \text{परिमाण } R = 20 \text{ N}$$

(ii) परिणामाची दिशा ही वापर केलेल्या चिन्हेप्रमाणे +ve म्हणजे ↓ (खालच्या दिशेने)

(iii) व्हेरिग्रन्सच्या तत्वाचा वापर करून परिणामाचा कार्य करण्याचा बिंदू:

बिंदू A सोबत आघूर्ण घेऊन : घड्याळाच्या दिशेने +ve

$$(40 \times 0) - (60 \times 200) + (10 \times 350) + (30 \times 500) = (R \times X)$$

$$\therefore 0 - 12000 + 3500 + 15000 = (20 \times X)$$

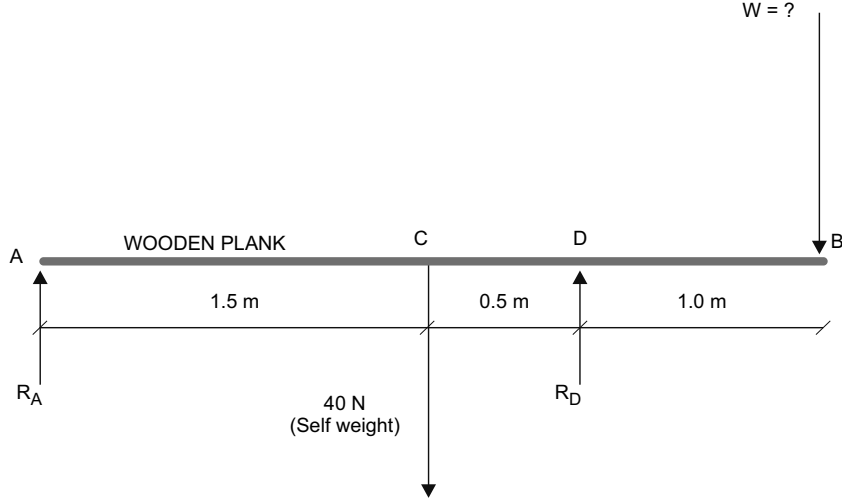
$$\therefore 6500 = (20 \times X)$$

$$\therefore \text{परिणामाचा कार्य करण्याचा बिंदू : } X = 325 \text{ mm A}$$

**उदाहरण 9:** खालील लाकडी फळी AB ची लांबी 3m आणि वजन 40 N आहे. त्याला एका बाजूचा A आणि D येथे टेकू देऊन आकृती 1.21 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आधार दिलेला आहे. दुसऱ्या बाजूला B येथे किती जास्तीत जास्त वजन W ठेवले जाऊ शकेल जेणेकरून लाकडी फळी कलंडून पडणार नाही?



उत्तर:



आकृती 1.21

फळीचे स्वतःचे वजन हे फळीच्या मध्य बिंदूवर असेल. जेव्हा फळीच्या A येथील प्रतिक्रिया (संतुलित अभिक्रिया)  $R_A$  ही ज्यावेळी शून्य असेल त्यानंतर फळी कलंडेल.

म्हणून, फळीचे स्वतःचे वजन आणि B येथील W चे वजन यांचा D येथे आघूर्ण घेऊन, बिंदू D येथे आघूर्ण घेऊन, आपल्याला W ची किंमत मिळते.

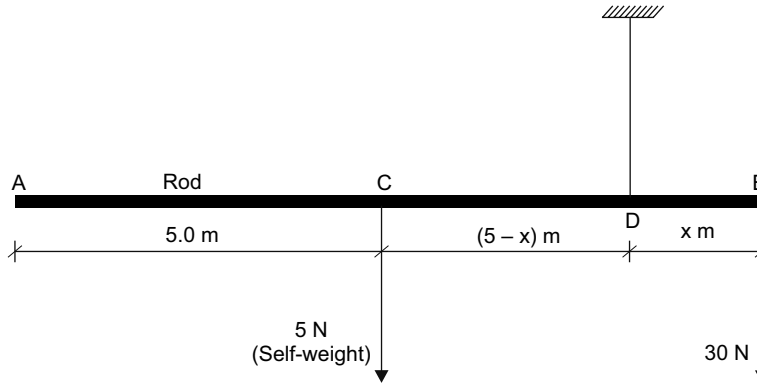
$$(\cup) W \times 1 = 40 \times 0.5 (\cup)$$

$\therefore$

$$W = 20 \text{ N}$$

**उदाहरण 10:** एक क्षितिजाला समांतर असलेली 10m लांबीची आणि 5 N वजन असलेली सळई आकृती 1.22 मध्ये दर्शविलेली आहे. सळईच्या एका बाजूस 30 N वजन बांधलेले आहे. सळईला अशा कोणत्या x ठिकाणी टांगून ठेवता येईल की सळई समांतर असेल?

उत्तर:



आकृती 1.22



असे गृहीत करू की सळई D येथे B पासून  $x$  अंतरावर निलंबित केलेली आहे जेथे 30 N वजन लावलेले आहे. सळई क्षितीज समांतर राहण्याकरिता, सर्व वजनाचा D येथे असलेला मोमेंट शून्य असणे गरजेचे आहे.

घड्याळाच्या दिशेतील (clockwise  $\cup$ ) आघूर्णाला +ve धरवून खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$\begin{aligned} (30 \times x) - [5 \times (5 - x)] &= 0 \\ \therefore (30 \times x) - 25 + (5 \times x) &= 0 \\ \therefore (35x) &= 25 \\ \therefore x &= 25/35 = 0.714 \text{ m} \end{aligned}$$

म्हणून सळई क्षितीज समांतर राहण्याकरिता B जेथे 30 N हे वजन लावलेले आहे त्यापासून 0.714 m अंतरावर D येथे निलंबित करावी लागेल.

#### 1.8.4 असमवर्ती बल प्रणालीची विश्लेषणात्मक पद्धत

एखाद्या बल प्रणालीची बले एका रेषेत नसतील किंवा एकमेकांशी समांतर नसतील किंवा एका बिंदूवर कार्यरत नसतील तर त्या बल प्रणालीला असमवर्ती आणि असमांतर बल प्रणाली किंवा फक्त असमवर्ती बल प्रणाली असे म्हणतात. अशा प्रणालीचे परिणामी बल शोधण्याकरिता खालील पद्धत वापरली जाते:

**भाग 1:** प्रत्येक बलाला पारिभाषिक शब्दावली/ चिन्हे द्या आणि सर्व बलांचे  $x$  अक्षापासून घड्याळाच्या उलट दिशेने +ve असे समजून त्यांचे कोन शोधा.

**भाग 2:** आता सर्व बलांचे क्षैतिज/ आडवे आणि अनुलंब/ उभे घटक मोजा आणि सारणीमध्ये लिहा.

**भाग 3:** समीकरण  $R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2}$  ह्याचा वापर करून परिणामाचे परिमाण शोधा.

**भाग 4:** परिणामी बलाचा कोन पुढील समीकरण वापरून शोधा.  $\alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$

**भाग 5:** परिणामी बल जेथे कार्यरत आहे असे स्थान व्हॅरियन्सच्या तत्वाचा वापर करून शोधा.

पुढील पद्धतीचा वापर करून आपण आता काही उदाहरणे समजून घेऊत.



**उदाहरण 11:** पुढील चार परिमाण असलेली बले (फोर्सेस) 10 N, 20 N, 30 N आणि 40 N, आकृती 1.23 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे 'a' इतक्या बाजूच्या चौरसामध्ये अनुक्रमे AB, BC, CD, DA ह्या रेषेत कार्यरत आहेत. ह्यांचे परिणामी बल आणि त्याचा A पासूनचे अंतर शोधा.

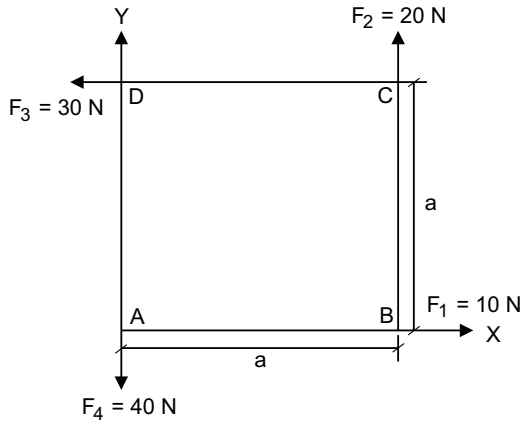
**उत्तर:**

**भाग 1:** आकृती 1.23 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे a आकाराचा चौरस ABCD काढा आणि 10 N, 20 N, 30 N & 40 N ही बले अनुक्रमे AB, BC, CD, DA ह्या कडेकडेच्या बाजूने दाखवा.

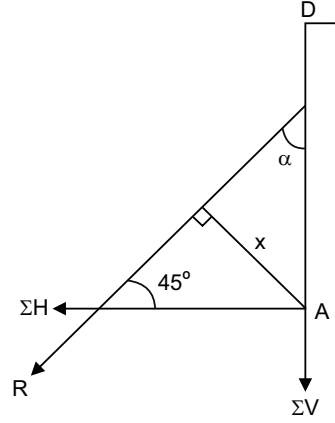
**भाग 2:** आता सर्व बलांचे क्षैतिज/ आडवे घटक  $F_x$  आणि अनुलंब/ उभे घटक  $F_y$  मोजा आणि सारणीमध्ये लिहा.

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (N)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (N)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (N)
1.	10	$0^\circ$	$10 \cos 0^\circ = 10.00$	$10 \sin 0^\circ = 00.00$
2.	20	$90^\circ$	$20 \cos 90^\circ = 0.00$	$20 \sin 90^\circ = 20.00$

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (N)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (N)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (N)
3.	30	$180^\circ$	$30 \cos 180^\circ = -30.00$	$30 \sin 180^\circ = 0.00$
4.	40	$270^\circ$	$40 \cos 270^\circ = 0.00$	$40 \sin 270^\circ = -40.00$
बीजगणिताप्रमाणे बेरीज			$\Sigma H = -20.0 \text{ N} \leftarrow$	$\Sigma V = -20.0 \text{ N} \downarrow$



(अ) माहिती



(ब) परिणामी बल

आकृती 1.23

भाग 3: समीकरण  $R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2}$  ह्याचा वापर करून परिणामाचे परिमाण शोधा.

$$R = \sqrt{(-20)^2 + (-20)^2} = \sqrt{800}$$

∴

$$R = 28.28 \text{ N}$$

भाग 4: परिणामी बलाचा कोन पुढील समीकरण वापरून शोधा.  $\tan \alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$

$$\tan \alpha = \frac{-20}{-20} = 1.0$$

∴

$$\alpha = 45^\circ \text{ from W - S}$$

भाग 5: आता परिणामी बल जेथे कार्यरत आहे असे स्थान व्हेरिग्नसच्या तत्वाचा वापर करून शोधा. फोर्सेसचे मोमेंटस काढण्याकरिता A बिंदू येथे घड्याळाच्या दिशेने  $\odot$  (clockwise) +ve गृहीत धरून,

$$\Sigma M_A = 0$$

$$[(10 \times 0) - (20 \times a) - (30 \times a) + (40 \times 0)] = -(R \times x)$$

∴

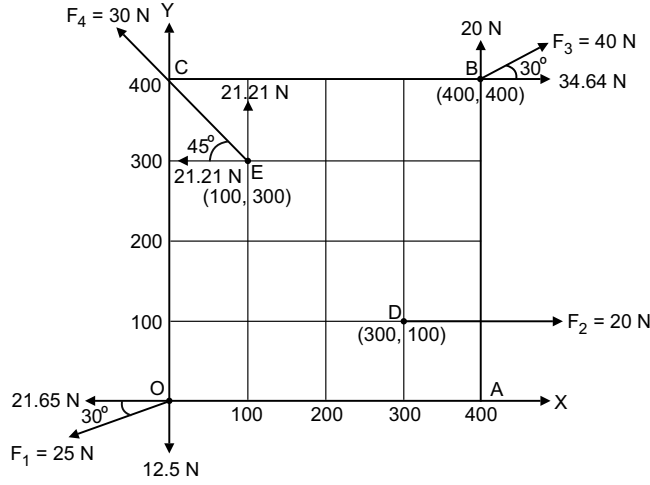
$$-50a = -28.28 \times x$$

∴

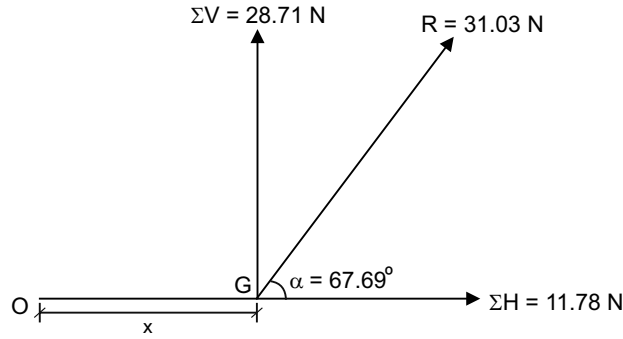
$$x = \frac{50a}{28.28} = 1.768 a$$

आकृती 1.23 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे परिणामी बल  $R = 28.28 \text{ N}$ , त्याचा कोन  $\alpha = 45^\circ$  आणि त्याचे स्थान A पासून  $1.768 \text{ a}$  येथे असेल.

**उदाहरण 12:** आकृती 1.24 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे चार बले (फोर्सेस)  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  चौरस जाळीवर कार्यरत आहेत. ह्यांचे परिणामी बल आणि त्याचे O ह्या बिंदूपासून असलेले अंतर शोधा.



(अ) माहिती



(ब) परिणामी बल

आकृती 1.24

**भाग 1:** चौरस जाळीमध्ये सर्व बले काढा. त्या सर्वे बलांचे घटक देखील काढा.

**भाग 2:** आता सर्व बलांचे क्षैतिज/ आडवे घटक  $F_x$  आणि अनुलंब/ उभे घटक  $F_y$  मोजा आणि सारणीमध्ये लिहा.

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (N)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (N)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (N)
1	$F_1 = 25$	$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$	-21.65	-12.5
2	$F_2 = 20$	$0^\circ$	20.00	00.00

अ. क्र.	बलाचे परिमाण (N)	X अक्षासोबत असलेला कोन	आडवा घटक $F_x = F \cos \theta$ (N)	उभा घटक $F_y = F \sin \theta$ (N)
3	$F_3 = 40$	$30^\circ$	34.64	20.00
4	$F_4 = 30$	$180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$	-21.21	21.21
बीजगणिताप्रमाणे बेरीज			$\Sigma H = 11.78 \text{ N} \rightarrow$	$\Sigma V = -20.0 \uparrow$

भाग 3: समीकरण  $R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2}$  ह्याचा वापर करून परिणामाचे परिमाण शोधा.

$$R = \sqrt{(11.78)^2 + (28.71)^2} = \sqrt{963.03}$$

∴

$$R = 31.03 \text{ N}$$

भाग 4: परिणामी बलाचा कोन पुढील समीकरण वापरून शोधा.  $\tan \alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$

$$\tan \alpha = \frac{28.71}{11.78} = 2.4372$$

∴

$$\alpha = 67.69^\circ \text{ पूर्वकडून उत्तर दिशेत}$$

भाग 5: आता परिणामी बल जेथे कार्यरत आहे असे स्थान व्हॅरिगन्सच्या तत्वाचा वापर करून शोधा. ह्या उदाहरणामध्ये सर्व घटकांचे आघूर्ण घेतले तर परिणामी बल जेथे कार्यरत आहे ते काढणे सोपे जाईल. आघूर्ण काढण्याकरिता A बिंदू येथे घड्याळाच्या दिशेने  $\cup$  (clockwise) +ve गृहीत धरून,

(a) सर्व बलाच्या घटकांचे आघूर्ण:

$$\begin{aligned} \Sigma M_O &= (-21.65 \times 0) - (12.50 \times 0) + (20.0 \times 100.0) + (34.64 \times 400) - (20 \times 400) - (21.21 \times 300) - (21.21 \times 100) \\ &= 0 + 0 + 2000 + 13856 - 8000 - 6363 - 2121 = -628 \text{ N} \cdot \text{mm} \cup \text{ (घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने) } \dots(a) \end{aligned}$$

(b) परिणामी बलाच्या घटकांचे आघूर्ण:

सर्व घटकांचा आघूर्ण ही घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने असल्या कारणामुळे परिणामी बल R ची आघूर्ण देखील तशीच असेल. येथे R हे परिणामी बल हे O बिंदूपासून उजवीकडे असल्यामुळे O सोबत त्याचा आघूर्णसुद्धा घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने असेल. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे असे गृहीत धरू की R हे परिणामी बल x-अक्षामध्ये G बिंदूला O बिंदूपासून x अंतरावर भेटते. R चे आडवे आणि उभे घटक वापरून आणि त्यांचे O बिंदूवर आघूर्ण घेऊन,

$$\begin{aligned} \Sigma M_O &= (\Sigma H \times 0) + (\Sigma V \times x) = (11.78 \times 0) - (28.71 \times x) \\ &= (-28.71 \times x) \dots(b) \end{aligned}$$

(a) and (b) मध्ये शोधून काढलेले आघूर्ण बरोबर दाखवून आपल्याला x अंतर शोधता येईल.

$$28.71 \times x = 628$$

∴

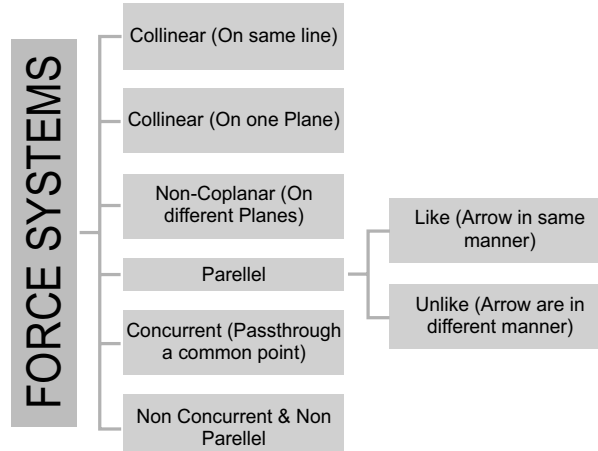
$$x = 21.87 \text{ mm O बिंदूपासून x-अक्षावर}$$

उत्तर: परिणामी बलाचे परिमाण  $R = 31.03 \text{ N}$  आणि त्याचा कोन  $\alpha = 67.69^\circ$  x - अक्षाच्या +ve दिशेने G बिंदूवर आणि O आणि G ह्या दोन बिंदूमधील अंतर  $x = 21.87 \text{ mm}$  असे आहे.

## सारांश (लक्षात ठेवण्याचे मुद्दे)

- **अदिश एकके:** जे प्रमाण फक्त परिमाणामार्फत (only magnitude) सांगता किंवा वापरता येवू शकते त्यास अदिश एकके असे ओळखले जाते.
- **सदिश एकके:** जे प्रमाण सांगण्याकरिता किंवा वापरण्याकरिता परिमाण (magnitude) आणि दिशा अशा दोन्हीची आवश्यकता असते अशा परिमाणास सदिश एकके असे ओळखले जाते.
- **मूलभूत एकके:** लांबी, वस्तुमान आणि वेळ ही मूलभूत एकके आहेत आणि सदरच्या परिमाणाना (युनिट्सना) मूलभूत एकके असे ओळखले जाते.
- **व्युत्पन्न झालेले एकके:** मूलभूत एकके सोडून इतर एकके जे मूलभूत एककांचा उपयोग करून तयार केलेले असतात अशा एककांना व्युत्पन्न झालेली (derived) एकके असे संदर्भिले जाते.
- **एसआय एकके:** इ. स. 1960 मध्ये आंतरराष्ट्रीय कराराद्वारे, एस.आय. एकके म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या आंतरराष्ट्रीय युनिट्सची आंतरराष्ट्रीय प्रणाली स्वीकारली आणि जगभर वापरली जाते.
- **बल (Force):** बल हे एक बाह्य साधन आहे जे वस्तूची स्थिती स्थिर किंवा हालचालीत बदलू शकते.
- **बलाची वैशिष्ट्ये:** (अ) परिमाण (ब) दिशा (क) संवेदना (बलाचा प्रकार) आणि (ड) क्रिया करण्याचे ठिकाण.
- **बलाचे प्रभाव:** (अ) वस्तूची स्थिरता किंवा गती यामध्ये बदल करणे (ब) प्रवेग/ गती देणे किंवा गती मंद करणे (क) वस्तूचा आकार आणि माप यामध्ये बदल करणे (ड) वस्तु वळणे किंवा फिरवणे (इ) वस्तु समतोल परिस्थितीत ठेवणे.

बलाच्या (फोर्सच्या) प्रणाली आणि त्याचे वर्गीकरण:



स्थिर बलांची (फोर्सची) तत्त्वे

- **बलाचा समतोल कायदा:** दोन बलाचे परिमाण समान असतील आणि ही दोन बले (फोर्सस) विरुद्ध दिशेने परंतु एकाच ओळीत क्रिया करीत असतील तर ती दोन बले (फोर्सस) हे समतोल असतील.
- **बलाच्या (फोर्ससच्या) उच्चस्थानाचे सिद्धांत:** एखाद्या वस्तूवर जी बलाची प्रणाली (फोर्स) लावलेले आहे त्यामध्ये जर दुसरी बलाची प्रणाली जोडली किंवा त्यामधून वजा केली तरीही वस्तूच्या क्रियेमध्ये बदल होत नाही.

- **बलाचे (फोर्सेसचे) हस्तांतरण करण्याचा सिद्धांत:** एखाद्या वस्तूवर जे बल (फोर्स) लावलेले आहे त्याचा कार्य करण्याच्या बिंदूमध्ये त्याच रेषेत बदल केल्यास त्याचा प्रभाव बदलत नाही.
- **बलाचा (फोर्सचा) ठराव:** एक बल (फोर्स) दोन वेगवेगळ्या दिशेतील बलामध्ये विभागले जावू शकतात ज्याप्रमाणे अशा दोन बलांचा (फोर्सेसचा) परिणाम हा आधीच्या एका बला (फोर्स) इतकाच असतो अशा प्रक्रियेस रिझोल्यूशन ऑफ फोर्स म्हणतात.
- **काटकोनामधील (ऑर्थोगोनल) घटक:** साधारणपणे एका बलाचे (P फोर्सचे) दोन परस्पर लंब असलेल्या कोऑर्डिनेट X - अक्ष आणि Y - अक्ष (एक्सिस एक्स आणि वाई) मध्ये जर विभाजित केले तर त्याला क्षैतिज घटक (Px) आणि अनुलंब घटक (Py) म्हणून ओळखले जाते. ह्यामधील  $\theta$  हा कोन X - अक्षाशी मोजला जातो.  

$$P_x = P \cdot \cos \theta \text{ and } P_y = P \cdot \sin \theta$$
- **फोर्सचा मोमेंट:** जेव्हा फोर्स एका वस्तूवर एका अंतरातून कार्य करीत असल्यास तो फोर्स मोमेंट तयार करते ज्यामुळे ती वस्तू आसाभोवती फिरते.
- **मोमेंटचे एकक:** मोमेंटचे एकक Newton . meter (N.m) हे आहे.
- **मोमेंटचे प्रकार:** (अ) घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत असलेला मोमेंट धन (+ve) आणि (ब) घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने कार्यरत असलेला मोमेंट ऋण (-ve).
- **व्हरिग्रनचे तत्व किंवा मोमेंटचे तत्व:** कोणत्याही बिंदूबद्दल बलांचे मोमेंट समान बिंदूबद्दल बल असलेल्या घटकांच्या मोमेंटच्या बेरजेइतके असतात.
- **बलांची रचना (बलांचे परिणामी बल):** जर एखाद्या वस्तूवरती कार्यरत असलेल्या बल (फोर्स) प्रणालीमध्ये एकापेक्षा जास्त बले (फोर्सेस) असतील, तर अशी अनेक बले (फोर्सेस) आपण एका बलामध्ये पुनर्स्थित/ बदल करू शकतो ज्या अनुषंगाने त्या एका बलाचा त्या वस्तूवर होत असलेला परिणाम हा त्या बल प्रणालीतील सर्व बलांच्या इतका असू शकतो. अश्या बल प्रणालीतील अनेक बलांचे एका बलामध्ये पुनर्स्थितीकरण केलेल्या बलाला परिणामी बल (resultant force) म्हणून ओळखले जाते आणि ज्या प्रक्रियेतून बलांचे पुनर्स्थितीकरण केले जाते त्या प्रक्रियेस बलाचे एकत्रीकरण (composition of forces) असे म्हणतात.

#### समवर्ती बल प्रणालीसाठी विश्लेषणात्मक पद्धती:

- **बलाचा/ फोर्सचा समांतरवृत्तीचा कायदा:** कोणत्याही वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करणारी दोन बले/ फोर्सेस, समांतरभुजच्या दोन समीप बाजूनी परिमाण आणि दिशानिर्देश दर्शविल्यास, दोन बलांच्या/ फोर्सेसच्या छेदनबिंदूच्या समांतरभुजचे कर्ण परिमाण आणि दिशेने परिणामी बलाचे/ फोर्सचे प्रतिनिधित्व करते.
- **ठरावाची पद्धत:** दोन बलापेक्षा (फोर्सेस) जास्त बले वस्तूच्या एका ठिकाणी कार्य करीत असतील तर बलाचा / फोर्सचा समांतरवृत्तीचा कायद्याच्या पद्धतीचा वापर करणे (law of parallelogram of forces) थोडी जास्त आणि कठीण प्रक्रिया होते. अशावेळी ठरावाची पद्धत (Method of resolution) ही पद्धत अशा बलांच्या प्रणालीचा (फोर्सेसचा) परिणाम (resultant) निश्चित करण्यासाठी उपयुक्त ठरते.

#### समांतर बल प्रणालीसाठी विश्लेषणात्मक पद्धत

- (a) **परिमाण (Magnitude):** बीजगणितातील बेरीजेप्रमाणे सर्व बलांची (फोर्सेसची) त्यांच्या चिन्हांचा वापर करून (+ve: वरच्या दिशेने (पुल) आणि -ve खालच्या दिशेने (पुश)) ह्याची बेरीज केल्यास परिमाण (Magnitude) मिळेल.

- (b) परिमाणाची दिशा: बीजगणितातील बेरीजेच्या क्रियेच्या ओळीप्रमाणे परिमाणाची दिशा असेल.
- (c) परिमाणाचा कार्य करण्याचा बिंदू: व्हेरिग्रन्सच्या तत्वाचा वापर करून परिमाणाचा कार्य करण्याचा बिंदू शोधता येईल.
- समवर्ती नसलेल्या बल प्रणालीची विश्लेषणात्मक पद्धत परिणामी बल शोधण्याकरिता खालील पद्धत वापरली जाते:**
- भाग 1:** प्रत्येक फोर्सला पारिभाषिक शब्दावली/ चिन्हे द्या आणि सर्व फोर्सेसचे x अक्षापासून घड्याळाच्या उलट दिशेने +ve असे समजून त्यांचे कोन शोधा.
- भाग 2:** आता सर्व बलांचे (फोर्सेसचे) क्षैतिज/ आडवे आणि अनुलंब/ उभे घटक मोजा आणि सारणीमध्ये लिहा.
- भाग 3:** समीकरण  $R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2}$  ह्याचा वापर करून परिणामाचे परिमाण (magnitude of resultant force) शोधा.
- भाग 4:** परिणामी बलाचा कोन पुढील समीकरण वापरून शोधा.  $\alpha = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$
- भाग 5:** परिणामी बल जेथे कार्यरत आहे असे स्थान व्हेरिग्रन्सच्या तत्वाचा वापर करून शोधा.
- समांतर बल प्रणालीसाठी परिणाम बल शोधण्यासाठी रेखांकन पद्धत:**
- (a) बलाच्या (फोर्सेसच्या) लिकोणाचा कायदा: जर एखाद्या वस्तूवरील एका बिंदूवर कार्यरत असलेल्या दोन फोर्सेसचे परिमाण (magnitude) आणि त्यांची दिशा (direction) लिकोणाच्या दोन बाजूंनी प्रतिनिधित्व केलेले असेल (दर्शवली असेल) तर त्या लिकोणाच्या राहिलेल्या तिसऱ्या बाजूच्या उलटक्रमामध्ये पहिल्या दोन फोर्सेसच्या परिणामी बलाचे परिमाण (magnitude) आणि त्याची दिशा (direction) यांचे प्रतिनिधित्व करते.
- (b) बलाचा/ फोर्सचा समांतरवृत्तीचा कायदा: कोणत्याही वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करणारी दोन बले/ फोर्सेस, समांतरभुजच्या दोन समीप बाजूंनी परिमाण आणि दिशानिर्देश दर्शविल्यास, दोन बलांच्या/ फोर्सेसच्या छेदनबिंदूच्या समांतरभुजचे कर्ण परिमाण आणि दिशेने परिणामी बलेचे/ फोर्सचे प्रतिनिधित्व करते.
- (c) बलाच्या बहुभुजेचा कायदा: जर एका वस्तूवर वेगवेगळ्या परिमाणाची आणि वेगवेगळ्या दिशेने अनेक बले कार्य करीत असतील तर त्यांना बहुभुजेच्या एका क्रमाने बाजूवर दाखविले असता तर सुरुवातीच्या बिंदूपासून शेवटच्या बिंदूपर्यंत जर रेषा तयार केली तर ती रेषा त्या सर्व बलांच्या परिणामी बलाचा परिमाण आणि दिशा देते.

## गृहपाठ

### (अ) वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- S.I. प्रणालीमध्ये बलाचे (फोर्सेचे) एकक \_\_\_\_\_ हे आहे.  
 (अ) kilogram (ब) newton  
 (क) watt (ड) joule
- खालील कोणत्या प्रकारच्या बले कार्य करणाऱ्या रेषा भेटल्यानंतर त्या बलांना समवर्ती बले म्हणतात.  
 (अ) एका बिंदूवर (ब) दोन बिंदूवर  
 (क) एका प्रतलामध्ये (ड) वेगवेगळ्या प्रतलामध्ये

3. खालील कोणते विधान बलांच्या बहुभुजाचा कायद्याबद्दल (Law of polygon of forces) योग्य आहे.
  - (अ) एखाद्या बिंदूवर कार्य करणारी कितीही बले क्रमाने घेतल्या गेलेल्या बहुभुजाच्या बाजूने दर्शविल्या जाऊ शकतात तर बलांनी समतोल ठेवलेला आहे.
  - (ब) एखाद्या बहुभुजेच्या बाजूने बिंदूवर कार्य करणारी कितीही बले दिशानिर्देश आणि परिमाणामध्ये दर्शविली जाऊ शकते तर बलांनी समतोल ठेवलेला आहे.
  - (क) एखाद्या बिंदूवर कार्य करणाऱ्या कोणत्याही बलांची संख्या दिशेने व परिमाणामध्ये प्रतिनिधित्व केली जाऊ शकते अशा बहुभुजाच्या बाजूने क्रमाने घेतली तर बलांनी समतोल ठेवलेला आहे.
  - (ड) एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या बलाचे प्रतिनिधित्व करणारे बहुभुज बंद असतील तर बलांनी समतोल ठेवलेला आहे.
4. बलाचा प्रभाव खालीलपैकी कशावर अवलंबून असतो
  - (अ) परिमाण
  - (ब) दिशा
  - (क) बलाचा प्रकार
  - (ड) ह्यापैकी सर्व
5. जर दोन P परिमाणाची बले  $90^\circ$  कोनात कार्यरत असतील तर त्याच्या परिणामी बलाचे परिमाण किती असेल.
  - (अ)  $2P$
  - (ब)  $\sqrt{2} P$
  - (क)  $\frac{P}{2}$
  - (ड)  $2\sqrt{P}$
6. जर दोन P परिमाणाची बले  $180^\circ$  कोनात कार्यरत असतील तर त्याच्या परिणामी बलाचे परिमाण किती असेल.
  - (अ) P
  - (ब)  $\sqrt{2} P$
  - (क) 0
  - (ड)  $2\sqrt{P}$
7. खालील कोणती एककेही अदिश एकके नाहीत?
  - (अ) त्वरण
  - (ब) वेळ
  - (क) वस्तुमान
  - (ड) घनता
8. खालील कोणती एकके ही सदिश एकके आहेत?
  - (अ) उर्जा
  - (ब) वस्तुमान
  - (क) गती
  - (ड) वेग
9. वस्तूचे वजन खालील कोणत्या गोष्टींमुळे असते.
  - (अ) पृथ्वीच्या अभिकेंद्री बलामुळे (centripetal force of earth)
  - (ब) पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणामुळे (gravitational pull exerted by the earth)
  - (क) वस्तूच्या कणांनी अनुभव केलेय आकर्षण शक्तीमुळे (force of attraction by the particles)
  - (ड) पृथ्वीच्या मध्यभागी गुरुत्वाकर्षण शक्तीच्या आकर्षणामुळे (gravitational force of attraction towards the center of the earth)
10. वस्तूच्या एका बिंदूवर वेगवेगळी बले कार्यरत असतील तेव्हा ते कधी समतोल असतील
  - (अ) जेव्हा सराव बलांची बेरीज शून्य असेल.
  - (ब) बलांचे दोन काटकोनातील अक्षात वियोजन केल्यानंतर त्यांची बेरीज समान असेल



- (क) बलांचे दोन काटकोनातील अक्षात वियोजन केल्यानंतर दोन्हीही कोनातील वियोजित बलांची बेरीज शून्य असेल  
 (ड) सर्व बलांचा कल एकसारखाच असेल
11. दोन एका रेषेत नसलेले समांतर समान बले उलट दिशेने कार्य करतात  
 (अ) एकमेकांना संतुलित करतील (ब) मोमेंट तयार करतील  
 (क) कपल तयार करतील (ड) परिणामी मोमेंट तयार करतील

[उत्तर: (1-अ), (2-अ), (3-क), (4-ड), (5-ब), (6-क), (7-अ), (8-क), (9-ई), (10-इ), (11-ड)]

### (ब) व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न

- एककांच्या एस. आय. प्रणालीचे महत्त्व सांगा.
- यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकीची व्याख्या लिहा आणि त्याचे वेगवेगळे विभाग विषद करा.
- खालील परिमाणाच्या एस. आय. प्रणालीनुसार एकेके लिहा.  
 (1) बल (2) वेग (3) त्वरण (4) मोमेंट (आघूर्ण) (5) कार्य
- वस्तूचे वजन ही सदिश राशी/ प्रमाण (व्हेक्टर) आहे ह्याचे समर्थन करा.
- व्याख्या लिहा: (1) बल (2) दृढ वस्तु/ दृढ संरचना (3) लवचिक वस्तु/ लवचिक संरचना (4) अदिश प्रमाण (5) सदिश प्रमाण (6) मुलभूत एकेके (7) साधित केलेली एकेके (8) बलाचे पृथःकरण (9) बलांचे घटक (10) बलाचा मोमेंट (आघूर्ण).
- बलांची लक्षणे किंवा गुणवैशिष्ट्ये लिहा आणि स्पष्ट करा.
- बलांच्या वेगवेगळ्या प्रणाली लिहा आणि रेखांकित करून पूर्णपणे स्पष्ट करा.
- व्याख्या लिहा: (1) एकरेषीय बल पद्धती (2) संपाती बल पद्धती (3) समांतरबल पद्धती (4) समतल बल पद्धती (5) अ-समतल बल पद्धती (6) अ-संपाती बल पद्धती.
- एक दगड टेकडीवरून बल अनुप्रयोगाशिवाय खाली पडत आहे. त्या दगडावर काही बल कार्य करीत असेल काय? असल्यास त्या बलाचा प्रकार किंवा नाव सांगा.
- खालील गोष्टींचे स्पष्टीकरण करा: (1) समतोल बलाचा नियम (2) बलाचे अद्यारोपण तत्व (3) बलाचे पारेषण/ हस्तांतरण क्षमतेचे तत्व (4) व्हेरिग्रॉनचे तत्व (5) बलाच्या समांतर चतुर्भूजेचा नियम (6) बलाच्या त्रिकोणाचा नियम (7) बलांच्या बहुभूजेचा नियम.
- बलाचा मोमेंट म्हणजे काय? रेखांकित करून मोमेंटचे प्रकार सांगा.
- बलांच्या समांतर चतुर्भुज नियमाचा उपयोग करून परिणामी बल शोधण्यासाठी वापरण्यात येणारे समीकरण लिहा.
- निराकरण करण्याच्या पद्धतीचा परिणामी बल शोधण्यासाठीच्या पद्धतीची यादी करा.
- अ-संपाती समतोल बल पद्धतीचा परिणामी बल शोधण्यासाठीच्या पद्धतीची यादी करा.
- व्हेरिग्रॉनचे तत्व परिणामी बलाची स्थिती शोधण्याकरिता उपयुक्त कसे आहे?
- 240 N आणि 200 N ही दोन बले एका बिंदूवर एकमेकावरील  $60^\circ$  ह्या कोनात कार्यरत आहेत. ह्या दोन बलांचे परिणामी बल शोधा.  
 [उत्तर:  $R = 381.57$  N आणि पहिल्या बलापासून  $27^\circ$  च्या कोनात]

17. दोन बरोबर असलेल्या  $60^\circ$  च्या कोनात कार्यरत असलेल्या बलांचे परिणामी बल  $30\sqrt{3}$  N इतके असल्यास त्या बलाचे परिमाण शोधा. [उत्तर :  $F = 30$  N]
18. दोन 100 kN इतकी बले ह्या कोनमध्ये कार्यरत असतील तर त्यांच्या परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. [उत्तर :  $R = 184.77$  kN आणि  $22.5^\circ$  दोन्ही बलांच्या कोनामध्ये]
19. 1500 N and 800 N ही दोन बले एका बिंदूवर एकमेकावरील  $75^\circ$  ह्या कोनात कार्यरत आहेत. ह्या दोन बलांचे परिणामी बल शोधा. [उत्तर:  $R = 1873.81$  N पहिल्या बलापासून  $24.35^\circ$  च्या कोनात]
20. 2P, 3P and 4P ही तीन बले अनुक्रमे समभूज त्रिकोणाच्या भूजेमध्ये कार्यरत असतील तर त्या तीन बलांचे परिणामी बल आणि त्याची दिशा शोधा. [उत्तर:  $1.732$  P आणि  $210^\circ$ ]
21. ABC ही तार ज्याची लांबी 50 cm आहे ती समान पातळीवरील A आणि C ह्या दोन बिंदूवर बांधली आहे. 500 N हे वजन A पासून 30 cm अंतरावर B बिंदू येथे कार्यरत आहे आणि त्याच ठिकाणी आडव्या दिशेने खेचणारे P इतके बल कार्यरत आहे. B बिंदू A आणि C च्या पातळीतून 15 cm खाली असल्यास P बलाचे परिमाण शोधा. असे गृहीतधरा की B च्या दोन्ही बाजूंच्या तारांमधील ताण एकसारखा आहे. [उत्तर:  $P = 82$  N]
22. खालील एका बिंदूवर कार्यरत असलेल्या बल प्रणालींमधील परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. (1) दक्षिण दिशेमधील 30 N बल (2) पूर्वेकडून उत्तरेमध्ये  $30^\circ$  कडे कार्यरत असलेले 30N बल (3) दक्षिण दिशेकडून पश्चिमे  $60^\circ$  कडे कार्यरत असलेले आणि ढकलणारे 10 N बल (4) पश्चिमेकडे कार्यरत असलेले 20 N बल. [उत्तर:  $R = 13.68$  N + X अक्षाकडून  $150^\circ$  दिशेमध्ये]
23. खालील एका बिंदूवर कार्यरत असलेल्या बल प्रणालींमधील परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. (1) पूर्वेकडून उत्तरेमध्ये  $30^\circ$  कडे कार्यरत असलेले 200 kN बल (2) उत्तर दिशेकडे कार्यरत असलेले 250 kN बल (3) दक्षिण दिशेकडून पश्चिमे  $40^\circ$  कडे कार्यरत असलेले 350 kN बल (4) वायव्य दिशेमध्ये कार्यरत असलेले 300 kN बल. [उत्तर:  $R = 456$  kN पश्चिमेकडून उत्तरेकडे  $47.7^\circ$  दिशेने]
24. खालील एका बिंदूवर कार्यरत असलेल्या तीन बलांच्या प्रणालीचा परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. (1) + Y अक्षावर 10 N (2) + X अक्षापासून  $210^\circ$  कोनात कार्यरत 20 N (3) + X अक्षापासून  $315^\circ$  कोनात कार्यरत 30 N. [उत्तर:  $R = 21.56$  N + X अक्षाकडून  $280.39^\circ$  दिशेमध्ये]
25. खालील एका बिंदूवर कार्यरत असलेल्या चार बलांच्या प्रणालीचा परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. (1) 100 N ओढणारे N  $30^\circ$  E (2) 125 N ढकलणारे N  $45^\circ$  W (3) 60 N ढकलणारे S  $60^\circ$  W (4) 50 N दक्षिणेकडे ओढणारे. [उत्तर: 143.16 N ढकलणारे  $11.36^\circ$  कोनामध्ये]
26. ABCD हा 10 cm अशी बाजू असलेला चौरस आहे. 4 kN, 9 kN, 7 kN & 5 kN ही चार बले अनुक्रमे AB, BC, CD आणि DA ह्या दिशेत कार्यरत आहेत. ह्या बलांचा परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. [उत्तर:  $R = 5$  kN , दिशा W  $53^\circ$  N आणि A पासूनचे 22.5 cm आडवे अंतर]
27. पुढील पाच 2N,  $\sqrt{3}$  N, 5 N,  $\sqrt{3}$  N आणि 2N बले नियमित षटकोनाच्या कोन बिंदूवरती एकाक्रमाने इतर पाच टोकांच्या बिंदूकडे कार्यरत आहेत. ह्यांचा परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा शोधा. [उत्तर:  $R = 10$  N आणि कोन  $60^\circ$ ]

## प्रात्यक्षिके

### प्रात्यक्षिक 1: यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी प्रयोगशाळेतील उपकरणे

#### 1.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी प्रयोगशाळेतील वेगवेगळ्या उपकरणांचा अभ्यास करणे.

#### 1.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी प्रयोगशाळेतील संबंधित वेगवेगळ्या उपकरणांची कार्यपद्धती समजून घेणे. यंत्र अभियांत्रिकी विषयातील प्रयोगशाळेतील मॅन्युअलमध्ये सर्व प्रात्यक्षिकामध्ये हे मानक वापरलेले आहे.

#### 1.3 संबंधित पाठ

[पाठ 1.1 ते 1.4 ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 1.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO)

हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी प्रयोगशाळेतील वेगवेगळी सर्व उपकरणे/ साधने समजून घेणे.

#### 1.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

सर्व विद्यार्थ्यांनी त्यांच्या यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी प्रयोगशाळेत भेट घ्यायची आहे आणि त्या प्रयोगशाळेत उपलब्ध असलेल्या सर्व उपकरणांची/ साधनांची यादी तयार करायची आहे.

#### 1.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा

#### 1.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

प्रयोगशाळेत प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची सर्वसाधारण खबरदारी:

- तयार रहा: कोणतेही प्रात्यक्षिक सुरु करण्याआधी प्रयोगशाळा मॅन्युअलमध्ये दिलेली कार्यपद्धतीचे वाचन करा.
- सुरक्षिततेचा विचार करा: काळजीपूर्वक आणि सावकाश काम करा.
- सर्व विद्यार्थ्यांवर देखरेख ठेवा: कधीही एकट्याने काम करू नका.
- विशिष्ट उपकरणे किंवा यंत्रासाठी आवश्यक असणारी पूर्वकाळजी माहिती करून घ्या: प्रयोगशाळेतील मॅन्युअल आणि/ किंवा अध्यापक कोणतेही प्रात्यक्षिक सुरु करण्याआधी त्या प्रात्यक्षिकासाठी घ्यायच्या सुरक्षिततेच्या पूर्वसूचना सांगेल.
- सर्व विद्यार्थ्यांनी प्रयोगशाळेत येताना योग्य तो पोशाख वापरावा: साध्या चपला, सैल कपडे इत्यादी वापरू नयेत, दागिने काढून ठेवावेत आणि लांब केस पाठीमागे बांधावेत.

- **सुरक्षिततेला कोणत्याही प्रकारचा धोका जाणवल्यास त्वरित कळवा:** काही सांडल्यास, उपकरण बिघडल्यास, दुखापत झाल्यास किंवा इतर कोणताही धोका निर्माण झालेला असल्यास तुमच्या अध्यापक/ प्रयोगशाळा सहाय्यक यांना लगेच कळवा.
- सर्व विद्यार्थ्यांनी सुरक्षिततेची उपकरणे वापरावीत. उदा. शूज.
- प्रयोगशाळेत खान्याचे किंवा पिण्याचे कोणतेही पदार्थ नेऊ नयेत.
- तुमची कार्यजागा स्वच्छ ठेवा.

### 1.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

प्रत्येक यंत्र/ उपकरण हे विशिष्ट प्रात्यक्षिकासाठी वापरले पाहिजेत. काही यंत्रे/ उपकरणे ही एकापेक्षा अधिक प्रात्यक्षिकासाठी वापरली जाऊ शकतात. ह्याची चर्चा खोलवर केली पाहिजे.

### 1.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

साधनाचे/ उपकरणाचे/ यंत्राचे नाव	ज्या प्रात्यक्षिकामध्ये हे साधन/ उपकरण/ यंत्र वापरले जाणार आहे त्याचा क्रमांक	शेरा

#### 1.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

प्रत्येक प्रात्यक्षिकामध्ये मिळालेले परिणाम आणि त्याचे अर्थ तुम्हाला येथे लिहायचे आहेत.

#### 1.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

प्रात्यक्षिकावरून काढलेले निष्कर्ष/ वैधता तुम्हाला येथे लिहायचे आहेत.

#### 1.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

इथे तुम्हाला प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्नांची उत्तरे वेगळ्या कागदावर लिहायची आहेत.

#### 1.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

**1.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय**

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

**1.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत**

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

**प्रात्यक्षिक 8 आणि 9: बलाच्या बहुभूजेचा कायदा (विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धती)**

**8.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य**

समवर्ती बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे, बलाच्या बहुभूजेचा कायदा वापरून परिणामी बल शोधणे.

**8.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व**

फोर्स टेबलचा वापर करून समवर्ती बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे, बलाच्या बहुभूजेचा कायदा वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने परिणामी बल शोधणे.

**8.3 संबंधित पाठ**

- बलाचा ठराव:** एक बल (फोर्स) दोन वेगवेगळ्या दिशेतील बलामध्ये विभागले जावू शकतात ज्याप्रमाणे अशा दोन बलांचा (फोर्सेसचा) परिणाम हा आधीच्या एका बला (फोर्स) इतकाच असतो अशा प्रक्रियेस रिझोल्यूशन ऑफ फोर्स म्हणतात.
- बलांचे एकत्रीकरण:** अनेक बलांचे एका बलामध्ये पुनर्स्थितीकरण केलेल्या बलाला परिणामी बल म्हणून ओळखले जाते आणि ज्या प्रक्रियेतून बलांचे पुनर्स्थितीकरण केले जाते त्या प्रक्रियेस बलांचे एकत्रीकरण असे म्हणतात.
- बलाच्या बहुभूजेचा कायदा:** जर एका वस्तूवर वेगवेगळ्या परिमाणाची आणि वेगवेगळ्या दिशेने अनेक बले कार्य करीत असतील तर त्यांना बहुभूजेच्या एका क्रमाने बाजूवर दाखविले असले तर सुरुवातीच्या बिंदुपासून शेवटच्या बिंदूपर्यंत जर रेषा तयार केली तर ती रेषा त्या सर्व बलांच्या परिणामी बलाचा परिमाण आणि दिशा देते.

**गृहीतके:**

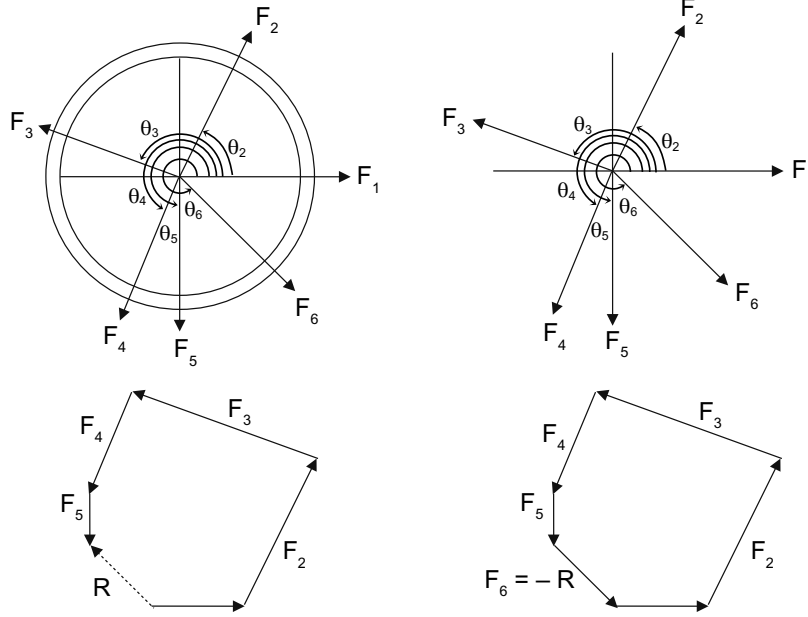
- असे गृहीत धरलेले आहे की पुली घर्षणमुक्त आहेत.
- असे गृहीत धरलेले आहे की दोऱ्यांचे स्वतःचे वजन उपेक्षणीय/ नगण्य आहे.

#### 8.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: बलाच्या बहुभूजेचा कायदा समजून घेणे.

PrO2: विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने परिणामी बल शोधणे.

#### 8.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना



#### 8.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	युनिव्हर्सल फोर्स टेबल	1		
2.	स्पीरीट लेवल	1		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच आणि त्याला बांधण्यासाठी आलंब	4 ते 6		
4.	पूली आणि त्याचे स्थिर करण्यासाठीची साधने	4 ते 6		
5.	3 ते 5 सेंटीमीटर व्यासाच्या स्टीलची रिंग	1		
6.	नायलॉनच्या दोऱ्या	4 ते 6		

#### 8.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

- कार्यरत बले समतोल परिस्थितीच्या टप्प्यावर असताना सेंट्रल स्टील रिंग फोर्स टेबलच्या मध्यभागी असली पाहिजे.
- प्रत्येक हँगरचे वजन अशा प्रकारे समायोजित करा की तुम्हाला योग्यरित्या समतोल स्थिती मिळेल.

## 8.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. दिलेल्या उपकरणाचा अभ्यास करा आणि त्याच्या मुख्य वैशिष्ट्यांचे रेखाचित्र काढा.
2. स्पीरीट लेवल आणि फूट स्कूचा वापर करून युनिव्हर्सल फोर्स टेबलचा वरचा भाग भूपृष्ठाला समांतर करा.
3. युनिव्हर्सल फोर्स टेबलच्या बाजूंवर चार किंवा आवश्यकतेनुसार पुली स्थिर करा जेणेकरून लावलेली बले समतोल स्थितीमध्ये ठेवणे शक्य होईल.
4. जितक्या पुली वापरलेल्या आहेत तितक्या नायलॉनच्या दोऱ्या घ्या.
5. या सर्व दोऱ्या एका बाजूने स्टीलच्या रिंगला अशा पद्धतीने जोडा की दोरी आणि स्टीलची रिंग ह्यामध्ये हालचाल होऊ शकेल.
6. ह्या प्रत्येक दोरीच्या दुसऱ्या बाजूला खाच असलेले वजन बांधा आणि ती दोरी एका कोणत्याही पुलीवरून पुढे टांगून घ्या.
7. आता लावलेली बले (वजने) अशा पद्धतीने जुळवून घ्या (समायोजित करा) जेणेकरून स्टीलची रिंग युनिव्हर्सल फोर्स टेबलच्या मध्यभागी येईल जेणेकरून वापरलेली बल प्रणाली समतोल परिस्थितीमध्ये राहील.
8. आता ह्या बल प्रणालीमधील प्रत्येक बलाचे परिमाण आणि त्याची दिशा (त्याचा कोन) निरीक्षण तक्त्यामध्ये लिहा.
9. आता पुलींचे ठिकाण किंवा स्थितीमध्ये बदल करा जेणेकरून बल प्रणालीमधील बलांची दिशा बदलेल आणि त्याप्रमाणे 4 ते 8 मधील गोष्टी पुन्हा तीन ते चार वेळेस करण्याचा प्रयत्न करा.
10. आता विश्लेषणात्मक पद्धतीद्वारे परिणामी बलाचे परिमाण आणि दिशा ह्याची गणना करा.

### प्रात्यक्षिक 9: आलेखीय पद्धती

समवर्ती बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे आलेखीय पद्धतीचा वापर करून परिणामी बल शोधणे.

11. योग्य रेषीय प्रमाणात आणि योग्य बलांच्या प्रमाणात आलेख कागदावर अंतराळ आकृती आणि सदिश आकृती काढा.
12. आता ह्या बहुभूजेच्या सुरुवातीच्या बिंदुपासून शेवटच्या बिंदूपर्यंत जर त्याच्या विरुद्ध दिशेने रेखा तयार केली तर ती रेखा त्या सर्व बलांच्या परिणामी बलाचा परिमाण आणि दिशा देते.
13. विश्लेषणात्मक पद्धतीद्वारे आणि आलेखीय पद्धतीद्वारे शोधलेल्या परिणामी बलांच्या परिमाण आणि दिशा ह्यांची तुलना करा.

### 8.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

[illegible]

नमुना गणना

$$(1) \Sigma H = F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 + F_3 \cos \theta_3 + F_4 \cos \theta_4 + F_5 \cos \theta_5$$

$$(2) \Sigma V = F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \theta_3 + F_4 \sin \theta_4 + F_5 \sin \theta_5$$

$$(3) \text{ परिणामी बल: (a) } R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2} \quad (b) \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\Sigma V}{\Sigma H} \right)$$

#### 8.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

#### 8.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

#### 8.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. बंध असलेला बहुभुज आणि बंध नसलेला बहुभुज ह्याची तुलना करा.
2. दिलेल्या बल प्रणालीतील बलांचे बहुभुज काढा. दिलेली तीन बले एका बिंदूवर बाहेर ढकलत आहेत आणि त्यांचे परिमाण 2 kN, 3kN आणि 4 kN असून ते प्रत्येकापासून 120° कोनावर आहेत.

#### 8.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

#### 8.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

.....

.....

#### 8.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.



विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

### 9.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

## प्रात्यक्षिक 10: समांतर बल प्रणालीचे परिणामी बल (विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धती)

### 10.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

समांतर बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने परिणामी बल शोधणे.

### 10.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

दिलेल्या सरळ आधारित तुळईच्या (सिम्पली सपोर्टेड बीमच्या) संतुलित अभिक्रियांची विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने शोधणे आणि त्याची पडताळणी करणे.

### 10.3 संबंधित पाठ

**बलाचे आघूर्ण:** जेव्हा लावलेले बल त्या वस्तूला परिभ्रमण करण्याचा किंवा वळविण्याचा प्रयत्न करते त्याला त्या बलाचे आघूर्ण (मोमेंट ऑफ फोर्स) असे म्हणतात.

बीजगणितामध्ये, आघूर्ण = बलाचे परिमाण  $\times$  काटकोनातील त्याचे अंतर,

**समतल असमवर्ती बलांच्या समतोल अटी:** जेव्हा समतल असमवर्ती बल प्रणाली समतोल असते तेव्हा ह्या सर्व बलांच्या परस्पर लंब असलेल्या घटकांची बीजगणिताप्रमाणे केलेली बेरीज शून्य असते आणि तसेच ह्या सर्व बलाच्या कोणत्याही बिंदूसोबत घेतलेल्या आघूर्णांची बीजगणिताप्रमाणे केलेली बेरीज शून्य असते. म्हणजे,

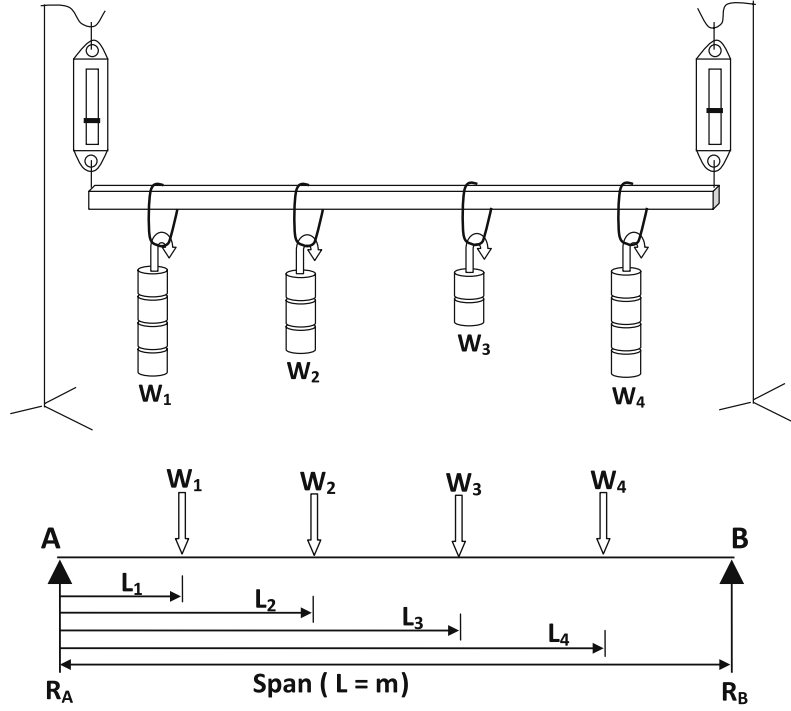
( $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$  आणि  $\Sigma M = 0$ )

### 10.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: समांतर बल प्रणालीचे समतोल अटी समजून घेणे.

PrO2: विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने ह्यातील संबंध आणि अर्थ समजून घेणे.

### 10.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना



### 10.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	हुकसह घोडा	2		
2.	स्पीरीट लेवल	1		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच आणि त्याला बांधण्यासाठी आलंब	4 ते 6		
4.	स्प्रिंग तुला	2		
5.	अंतर चिन्हांकासह 1 ते 1.5 मीटर लांब लाकडी तुळई	1		
6.	नायलॉनच्या दोऱ्या	4 ते 6		

### 10.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

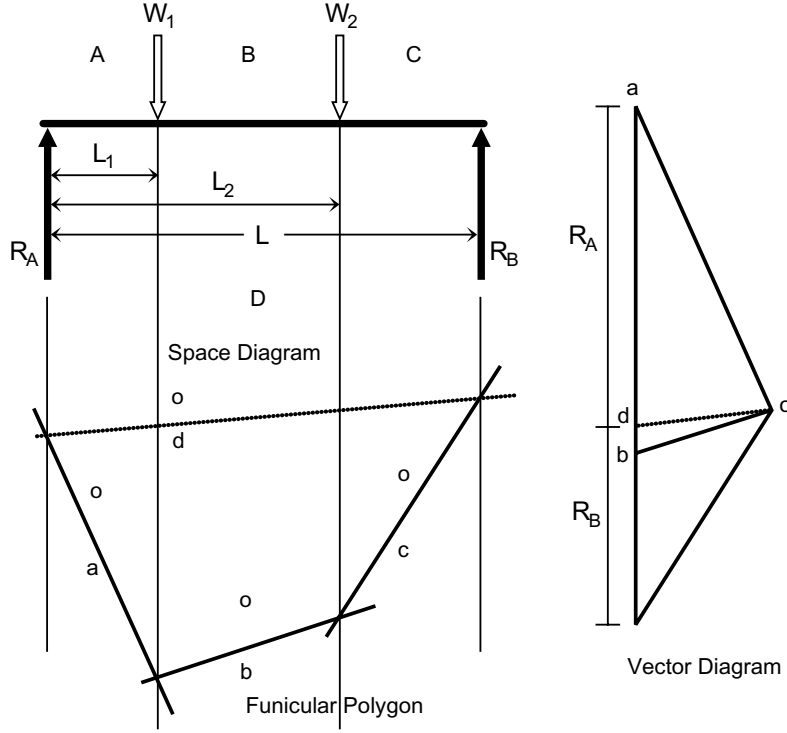
1. स्प्रिंग तुलाचे मोजमाप करताना काळजीपूर्वक करावे.
2. बलाचे अंतर काळजीपूर्वक मोजावे.

### 10.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे स्प्रिंग तुला हुकसह घोड्यावर व्यवस्थितपणे ठेवावी.
2. आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे लाकडी तुळई स्प्रिंग तुलाच्या खालच्या शेवटीच्या जागी व्यवस्थितपणे ठेवावी.
3. दोन्ही घोडे अशा अंतरावर ठेवावेत की लाकडी तुळईची लांबी आणि घोड्यांमधील अंतर (L) एकसारखे असावे.
4. स्पिरीट लेवलचा वापर करून लाकडी तुळई ही भूपृष्ठाला समांतर करून घ्या.
5. आता लाकडी तुळईवर खाच असलेले वजनाचे (बल) संच A ह्या डाव्या बाजूच्या आधारापासून ठराविक अंतरावर अडकवा.
6. स्प्रिंग तुल्यावरील डाव्या आणि उजव्या बाजूच्या आधारावरील प्रतिक्रिया  $R_A$  आणि  $R_B$  मोजा आणि निरीक्षण तक्त्यात लिहा.
7. आता बलांची ठिकाणे आणि त्यांचे परिमाण बदला आणि वरील 5 आणि 6 प्रमाणे पुन्हा नोंदी घ्या.
8. वेगवेगळी निरीक्षणे घेऊन लावलेल्या बलांचे परिमाण, त्यांची स्थिती आणि डाव्या आणि उजव्या बाजूच्या आधारावरील विश्लेषणात्मक पद्धतीने शोधलेल्या आणि स्प्रिंग तुल्यावर मोजलेल्या प्रतिक्रिया निरीक्षण तक्त्यात लिहा.
9. विश्लेषणात्मक पद्धतीने शोधलेल्या आणि स्प्रिंग तुल्यावर मोजलेल्या प्रतिक्रिया ताडून पहा.

### आलेखीय पद्धतीने शोधण्याच्या आधारावरील प्रतिक्रिया

1. तुळईवर (वस्तूवर) कार्यरत असलेले सर्व भार त्यांचे ठिकाण, परिमाण आणि दिशा ह्यादेखील लक्षात घेऊन अंतराळ आकृती काढा. ह्यासाठी योग्य रेखीय प्रमाण निवडा. बो चे संकेतन वापरून आता बल दिशेच्या दोन्ही बाजूंना वर्णमालेतील अभिन्न ठळक अक्षरे द्या. प्रतिक्रिये बले ही देखील बलासारखेच गृहीत करा.
2. सर्व भार जसे  $W_1$  आणि  $W_2$  सदिश रीतीने एका नंतर एक ab आणि bc अशा पद्धतीने काढून सदिश आकृती तयार करा. ह्यामध्ये त्या भारांचे परिमाण लांबीने दाखवली जाते आणि परिमाण आणि ठिकाण काढण्यासाठी योग्य बलांच्या प्रमाण घ्या.
3. एक सोयीस्कर बिंदू O घेऊन त्यावर सदिश आकृतीमधील सर्व बिंदू O बिंदूशी जोडा.
4. अंतराळ आकृतीच्या खाली बलांच्या कृतीची रेषा वाढवा.
5. अंतराळ आकृतीला समांतर A, B आणि C ह्या बिन्दुवरून रेषा काढा आणि फनिक्युलर पोलीगोन (बहुभुज) काढा.
6. आता ठीपकी रेषा D पर्यंत काढून बहुभुज बंद करा.
7. फनिक्युलर पोलीगोनमधील ad चे अंतर ही डावीकडील आधार A ची प्रतिक्रिया  $R_A$  आणि dc चे अंतर ही उजवीकडील आधार B ची प्रतिक्रिया  $R_B$  देते.



### 10.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

अ. क्र.	बल/ भार (N) किंवा (kN) मध्ये				डावा आधार (A) पासून बलांचे अंतर (cm) किंवा (m) मध्ये				स्प्रिंगवरील मिळालेल्या प्रतिक्रिया (N) किंवा (kN) मध्ये		आधारावरील प्रतिक्रिया (N) किंवा (kN) मध्ये			
	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$R_A$	$R_B$	$R_A$	$R_B$	$R_A$	$R_B$
1.														
2.														
3.														
4.														
5.														

नमुना गणना:

$\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन, आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन साध्या पद्धतीने B आधारावरील प्रतिक्रिया  $R_B$  शोधा.

$$R_B \times L - W_1 \times L_1 - W_2 \times L_2 - W_3 \times L_3 - W_4 \times L_4 = 0$$

$\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन, आधार B येथे आघूर्ण (moment) घेऊन साध्या पद्धतीने B आधारावरील प्रतिक्रिया  $R_A$  शोधा.

$$R_A \times L - W_1 \times (L - L_1) - W_2 \times (L - L_2) - W_3 \times (L - L_3) - W_4 \times (L - L_4) = 0$$

#### 10.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

#### 10.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

#### 10.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. सरळ आधारित तुळईची लांबी 4 m इतकी आहे आणि त्यावर 5kN, 2kN आणि 3kN ही तीन संकेंद्रित भार डाव्या बाजूच्या आधारावरून 1m, 2m आणि 3m इतक्या अंतरावर आहेत. ह्या तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रियेचे भार शोधा.
2. वरील प्रश्न आलेखीय पद्धतीने सोडवा.

#### 10.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ - कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

#### 10.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

#### 10.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

### अधिक माहिती घ्या

- समांतरभुज चौकोन नियमानुसार असलेल्या समीकरणाचा वापर करून परिणामी बल खालील कोणत्या प्रणालीमध्ये वापरता येतील (अ) बलांचे वियोजन करण्याची पद्धत (ब) समांतर बल प्रणाली
- विश्लेषण पद्धतीने परिणामी बल शोधण्यासाठी सोडविलेल्या वेगवेगळ्या उदाहरणांची उत्तरे आलेखीयपद्धतीचा वापर करून तपासा आणि निष्कर्ष शोधा

### संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन

- D.S.Bedi, "Engineering Mechanics"; Khanna publications, New Delhi.
- Khurmi RS, "Applied Mechanics"; S. Chand & Co, New Delhi.
- Ramamrutham, "Engineering Mechanics"; S. Chand & Co, New Delhi.
- Bansal RK, "A text book of Engineering Mechanics"; Laxmi publications, New Delhi.
- Dhade, Jamadar & Walawelkar, "Fundamentals of Applied Mechanics"; Pune Vidhyarthi Gruh, Pune
- Meriam JL, Kraige LG, "Engineering Mechanics- statics –Vol.-I"; Wiley publication, New Delhi.
- Beer, Johnson, Mazurek, Cornwell & Sanghi, "Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics"; Tata McGraw Hill, New Delhi.
- <https://nptel.ac.in/courses/112/106/112106286/>
- <https://nptel.ac.in/courses/122/104/122104015/>
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLC3A601B6060658D3>

# 2

## समतोल

### पाठाचा तपशील

ह्या पाठामध्ये खालील भागांचे आपण अध्ययन करणार आहोत:

- बलांचा समतोल आणि बलांची समतोलकता
- समतोल असण्याच्या अटी
- मुक्त संरचना आणि संरचनेची मुक्त आकृती
- लॅमीचे प्रमेय
- आधाराचे प्रकार, भाराचे आणि तुळईचे (बीमचे) प्रकार
- विश्लेषणात्मक पद्धतीने वेगवेगळ्या प्रकारच्या तुळईच्या संतुलित अभिक्रिया
- आलेखीय पद्धतीने समांतर बल प्रणालीमध्ये कार्यरत बल असलेल्या तुळईच्या संतुलित अभिक्रिया

ह्या पाठामध्ये चर्चा केलेल्या काही मूलभूत संकल्पना विद्यार्थी/ हा विषयाचा अभ्यास करणाऱ्या सर्वांसाठी त्यांच्या भविष्यातील अभ्यासक्रमाकरिता खूप महत्वाच्या आहेत. आधाराचे प्रकार, भाराचे आणि तुळईचे (बीमचे) प्रकार ह्याच्या संकल्पना त्यांच्या भविष्यातील अभ्यासक्रमांसाठी देखील खूप महत्वाच्या आहेत. अभ्यासक्रमांच्या चांगल्या स्पष्टतेसाठी या संकल्पना येथे स्पष्ट केलेल्या आहेत.

उदाहरणे स्पष्ट करित असताना पृष्ठांच्या निर्बंधामुळे, विषयाच्या मजकुराच्या प्रमाणाऐवजी गुणवत्तेला महत्त्व दिले आहे.

विद्यार्थ्यांमध्ये विषयाबद्दल अधिक उत्सुकता आणि सर्जनशीलता निर्माण करण्यासाठी तसेच विद्यार्थ्यांची समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्यासाठी पाठांमध्ये प्रत्यक्ष व्यवहारातील उपयोगाची चर्चा केलेली आहे. ह्या पाठाच्या शेवटी प्रात्यक्षिकांची चर्चा झाल्यानंतर “अधिक माहिती घ्या” हा एक विभाग घेतलेला आहे, जो या पुस्तकाच्या वापरकर्त्यांच्या फायद्यासाठी पूरक माहिती मिळावी ह्या अनुषंगाने त्याची रचना केली गेलेली आहे. विद्यार्थ्यांमध्ये ह्या विषयाबद्दल उत्सुकता निर्माण व्हावी आणि त्यांचामध्ये सुधारणा व्हावी ह्या अनुषंगाने पाठाच्या शेवटी बहुपर्यायी प्रश्न आणि व्यक्तीनिष्ठ प्रश्न दिलेले आहेत.

### तर्कसंगती

ह्या भागामध्ये आपण बलांचा समतोल आणि वस्तूंवर लावलेल्या बलांची समतोलकता ह्याबाबत चर्चा करणार आहोत. वस्तूंवर बल कार्यरत असताना वस्तु समतोल असेल तर अभियांत्रिकीचा अभ्यास करताना वेगवेगळे प्रश्न सोडविण्यासाठी लॅमी यांचे प्रमेय

उपयुक्त आहे. ह्या विभागामध्ये आपण वेगवेगळ्या आधारांचे प्रकार (types of supports), वेगवेगळ्या भारांचे प्रकार (types of loads), तुळईचे (बीमचे) प्रकार (types of beams) ह्याचा देखील अभ्यास करणार आहोत. विश्लेषण (analytical method) पद्धतीचा आणि आलेखीय (graphical method) पद्धतीचा वापर करून बीमच्या आधारांवरील कार्यरत होणाऱ्या संतुलित अभिक्रिया कशा शोधाव्यात ह्याचादेखील अभ्यास आपण करणार आहोत.

## पूर्व अपेक्षित ज्ञान

यंत्रशास्त्र अभियांत्रिकी ह्या सदर पुस्तकातील पहिल्या पाठाचे ज्ञान अथवा सर्व माहिती असणे आवश्यक आहे.

## पाठाचा परिणाम

ह्या भागाचा अभ्यास पूर्ण झाल्यानंतर तुम्ही खालील गोष्टींकरिता सक्षम व्हाल.

U2-O1: बलांचा समतोल आणि बलांची समातोलकता ह्यांचा सहयोग किंवा संबंध.

U2-O2: लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून अभियांत्रिकीमधील सांख्यिक उदाहरणे.

U2-O3: आधारांचे प्रकार (types of supports), भारांचे प्रकार (types of loads), तुळईचे (बीमचे) प्रकार (types of beams) समजू शकाल.

U2-O4: विश्लेषण (analytical) पद्धतीचा वापर करून बीमच्या आधारांवरील कार्यरत होणाऱ्या संतुलित अभिक्रिया शोधू शकाल.

U2-O5: आलेखीय (graphical) पद्धतीचा वापर करून बीमच्या आधारांवरील कार्यरत होणाऱ्या संतुलित अभिक्रिया शोधू शकाल.

## पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचिह्न

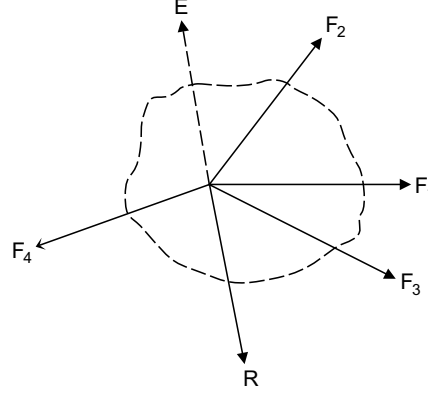
युनिट-2 परिणाम	कोर्स आऊटकोम्ससह एक्सपेक्ट्ड मॅपिंग (1-दुर्बलसहसंबंध; 2-मध्यमसंबंध; 3-मजबूतसहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U2-O1	2	3	-	-	-
U2-O2	1	3	-	-	-
U2-O3	1	2	-	-	-
U2-O4	1	3	-	-	-
U2-O5	1	3	-	-	-

### 2.1 बलांचा समतोल आणि बलांची समातोलकता

जर एका वस्तूवर कार्यरत असलेल्या सर्व बलांचे परिणामी बल आणि परिणामी आघूर्ण (मोमेंट) हे दोन्हीही, वस्तूच्या कोणत्याही बिंदूवर बेरीज केल्यास जर शून्य असतील तर ती वस्तु समतोलात (equilibrium) आहे असे म्हणता येईल. ह्या परिस्थितीमध्ये ती वस्तु विराम (rest) अवस्थेत असेल किंवा एका स्थिरांक वेगाने (constant velocity) कार्य करीत असेल. जर परिणामी बल किंवा परिणामी मोमेंट दोन्हीपैकी कोणतेही शून्य नसेल तर ती वस्तु समतोल नसेल आणि अशा अवस्थेमध्ये त्या वस्तूला समतोल



करण्याकरिता जे बल वस्तूवर लावावे लागेल त्याला समतोलक बल (equilibrant force) असे म्हणतात. समतोलक बलाचे परिमाण (equilibrant force) त्या वस्तूवर कार्यरत असलेल्या बल प्रणालीच्या परिणामी बलाच्या परिमाणाइतकेच आणि त्याच रेषेत असते परंतु त्याची दिशा विरुद्ध दिशेत असते.



आकृती 2.1: समतोल बल आणि समतोलक बल

आकृती 2.1 मध्ये एका वस्तूवर कार्यरत असलेली काही बले दाखवलेली आहेत. ह्या बलांचे परिणामी बल  $R$  हे जर शून्य असेल तर ती वस्तु स्थितीक समतोल (static equilibrium) परिस्थितीमध्ये असेल. परंतु परिणामी बल  $R$  हे जर शून्य नसेल तर वस्तु स्थितीक समतोल परिस्थितीमध्ये आणण्याकरिता आपल्याला त्याच्या रेषेत त्याच्या एवढेच परंतु त्याच्या विरुद्ध दिशेमध्ये  $E$  ( $E = R$ ) हे बल लावावे लागेल जेणेकरून त्या वस्तूस स्थितीक समतोल परिस्थितीमध्ये आणता येईल. ह्या बलाला समतोलक बल असे म्हणतात. परिणामी बल  $R$  शून्य नसेल तर  $E$  हे समतोलक बल वस्तूस स्थितीक समतोल परिस्थितीत आणतील जेणेकरून परिणामी बल  $R$  शून्य होईल.

### 2.1.1 समतोल असण्याच्या अटी

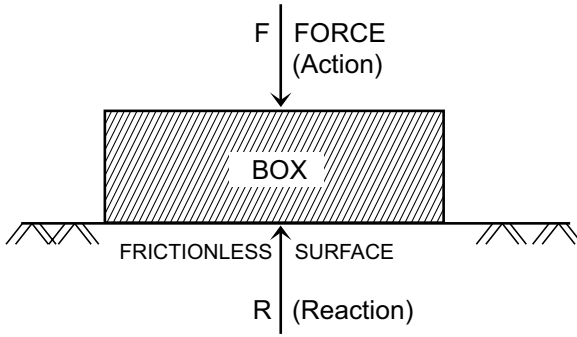
समतल बल प्रणालीचा अभ्यास आपण पहिल्या पाठामध्ये पूर्वीच केलेला आहे. ह्यामधील पुढील वेगवेगळ्या प्रणाली खालील प्रमाणे आहेत:

(अ) एकरेषीय बलप्रणाली (Collinear) (ब) संपाती बलप्रणाली (Concurrent) (क) समांतर बलप्रणाली (Parallel) (ड) असमांतरी असंपाती बलप्रणाली (Non Concurrent Non Parallel). वरील सर्व प्रकारच्या बलप्रणालीसाठी आपण असे म्हणू शकतो की जेव्हा सर्व बलांचा एकूण परिणाम शून्य असल्यास वस्तु समतोल असेल. गणितानुसार असे लिहिता येईल की (1)  $\sum H = 0$  (2)  $\sum V = 0$  आणि (3)  $\sum M = 0$ . ही तीन समीकरणे विश्लेषण (analytical) पद्धतीच्या वस्तु समतोल असण्याच्या अटी आहेत. तसेच आलेखीय (graphical) पद्धतीचा वापर करण्याकरिता बलांचा बहुभुजाचे रेखांकन केले असल्यास सर्व बलांचे रेषा शेवटी सर्व बाजूनी एकत्र येवून मिळणे ही आलेखीय (graphical) पद्धतीची वस्तु समतोल असण्याची शर्त आहे.

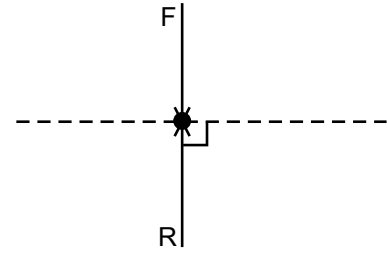
### 2.1.2 मुक्त संरचना आणि संरचनेची मुक्त आकृती

संरचनेच्या समतोलासाठी संरचनेची मुक्त आकृती (free body diagram) त्याच्या सभोवतलातील इतर भाग आणि वेगवेगळे आधार (supports) बाजूला करून रेखांकित केली जाते. त्या वस्तूवर कार्यरत असलेली सर्व बले, बाह्यरित्या लागू करण्यात आलेली बले, त्यांचे परिमाण, दिशा आणि त्यांची जागा किंवा स्थिती त्यातील वस्तूचे वजन, आधावर तयार होणाऱ्या संतुलित अभिक्रिया

(reactions at the supports), त्यांचे परिमाण आणि कोन अशा सर्व बाबी त्या आकृतीमध्ये दाखविलेल्या असतात. जर एखाद्या संरचेवर संपाती बलप्रणाली कार्यरत असेल तर अशा संरचनेला बिंदूद्वारे दर्शविले जाते. संरचनेची मुक्त आकृती काढताना आधारावर तयार होणाऱ्या संतुलित प्रतिक्रियांचा प्रकार कसा असेल हे लक्षात घेणे गरजेचे आहे. आकृती 2.2 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, एका पेटीवर  $F$  हे बल कार्यरत आहे आणि पेटी ही एका घर्षणविरहीत पृष्ठभागावर ठेवण्यात आलेली आहे आणि त्यावरील क्रिया आणि प्रतिक्रिया दाखविण्यात आलेली आहे ज्याचे दोन्ही बल दर्शविलेले आहेत, येथे पेटीचे स्वतःचे वजन दुर्लक्षित केलेले आहे. येथे घर्षणविरहीत पृष्ठभागाने तयार केलेली संतुलित अभिक्रिया पृष्ठभागाच्या काटकोनात लंब दिशेने कार्यरत आहे. पृष्ठभाग क्षितिजाला समांतर आडवा किंवा उतरण असलेल्या स्थितीतला असू शकतो. संरचनेच्या मुक्त आकृतीमुळे वस्तूवर कार्यरत असलेल्या बलांचे, वस्तूच्या समतोल असण्याच्या कोणत्या शर्ती वापरून अभियांत्रिकीमधील तांत्रिक समस्या सोडवणे शक्य आहे हे समजते किंवा समजणे सोपे जाते. आकृती 2.2 (अ) मध्ये दाखविलेल्या संरचनेची आकृती 2.2 (ब) मध्ये संरचनेच्या मुक्त आकृतीद्वारे दर्शविली आहे. येथे पेटीला एक बिंदू असे गृहीत धरलेले आहे आणि कार्यरत असलेली दोन बले दर्शविली आहेत. येथे जेव्हा संरचनेची मुक्त आकृती काढत असताना बलांचे प्रकार जसे अंतर्गत बल आणि बाह्य बल हे समजून घेणे गरजेचे आहे.



(अ) संरचनेची अवकाश आकृती



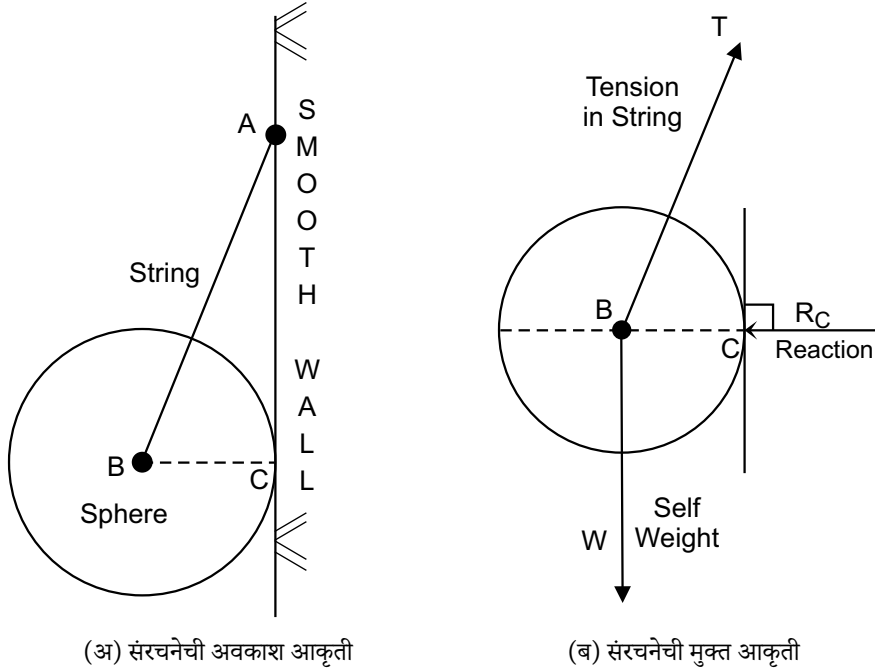
(ब) संरचनेची मुक्त आकृती

### आकृती 2.2: संरचनेची मुक्त आकृती

त्यावरील क्रिया आणि प्रतिक्रिया दाखविण्यात आलेली आहे ज्याचे दोन्ही बल दर्शविलेले आहेत, येथे पेटीचे स्वतःचे वजन दुर्लक्षित केलेले आहे. येथे घर्षणविरहीत पृष्ठभागाने तयार केलेली संतुलित अभिक्रिया पृष्ठभागाच्या काटकोनात लंब दिशेने कार्यरत आहे. पृष्ठभाग क्षितिजाला समांतर आडवा किंवा उतरण असलेल्या स्थितीतला असू शकतो. संरचनेच्या मुक्त आकृतीमुळे वस्तूवर कार्यरत असलेल्या बलांचे, वस्तूच्या समतोल असण्याच्या कोणत्या शर्ती वापरून अभियांत्रिकीमधील तांत्रिक समस्या सोडवणे शक्य आहे हे समजते किंवा समजणे सोपे जाते. आकृती 2.2 (अ) मध्ये दाखविलेल्या संरचनेची आकृती 2.2 (ब) मध्ये संरचनेच्या मुक्त आकृतीद्वारे दर्शविली आहे. येथे पेटीला एक बिंदू असे गृहीत धरलेले आहे आणि कार्यरत असलेली दोन बले दर्शविली आहेत. येथे जेव्हा संरचनेची मुक्त आकृती काढत असताना बलांचे प्रकार जसे अंतर्गत बल आणि बाह्य बल हे समजून घेणे गरजेचे आहे. अंतर्गत बल हे वस्तूच्या बिंदूना एकत्रित ठेवण्याचे कार्य करते जेणेकरून ती वस्तु हळू वस्तुसारखी (rigid body) कार्य करते म्हणजेच विरूपण क्षम (deformable) होत नाही. जर एकपेक्षा जास्त वस्तु एकत्र कार्य करीत असतील तर अंतर्गत बल ह्या सर्व वस्तूंना एकत्रित ठेवते.

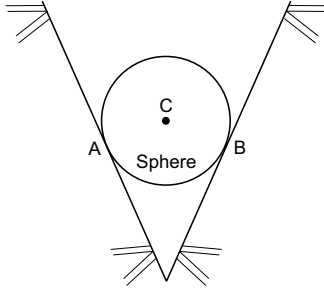
बाह्यबल हे वस्तूच्या बाह्य बाजूने कार्यरत करते. वस्तूवर बाह्यरित्या कार्य करणारी बले ही दुसऱ्या एखाद्या वस्तूवरून त्या वस्तूवर कार्य करणारी बले दर्शवितात जसे भिंती, फरश्या, आधारी बले इत्यादी. वरील बाबी स्पष्ट करण्यासाठी काही उदाहरणांचा विचार करूया: (1) आकृती 2.3 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एक गोलकाचे (sphere) वजन  $W$  साखळी (string) मधून बांधण्यात आलेले आहे आणि खाली उभ्या गुळगुळीत/घर्षणविरहीत (smooth) भिंतीवर लावण्यात आलेले आहे. ह्या व्यवस्थेमध्ये कार्य करणारी बले (अ) गोलकाचे स्वतःचे वजन  $W$  जे त्याच्या  $B$  ह्या केंद्रबिंदूमधून गुरुत्वबलाच्या खालील दिशेने कार्य करीत आहे (ब) गोलकाच्या  $C$  ह्या संपर्क बिंदूजवळ भिंतीकडून कार्य करणारे संतुलित अभिक्रियेचे बल  $R_C$  हे भिंतीच्या काटकोनात कार्यरत आहे. (क)  $B$  पासून  $A$  दिशेमध्ये साखळीच्या दिशेने साखळीमध्ये निर्माण होणारा ताण कार्य करीत आहे.

ह्यामध्ये गोलक समतोल असल्याकारणाने, सदरची तिन्ही बले संपाती बल प्रणालीसारखे कार्य करीत आहेत असे असेल आणि ह्या संरचनेची मुक्त आकृती ही आकृती 2.3 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे असेल.

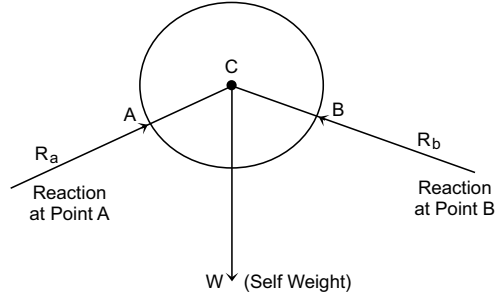


आकृती 2.3: साखळीवर बांधण्यात आलेला गोलक आणि उभी घर्षणविरहित भिंत

(2) आकृती 2.4 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एक गोलक  $V$  आकाराच्या खाचेमध्ये विरामकालीन अवस्थेत ठेवला आहे. ह्या व्यवस्थेमध्ये कार्य करणारी बले (अ) गोलकाचे स्वतःचे वजन  $W$  जे त्याच्या  $C$  ह्या केंद्रबिंदूमधून गुरुत्वबलाच्या खालील दिशेने कार्य करीत आहे, (ब) गोलकाच्या  $A$  ह्या संपर्क बिंदूजवळ भिंतीकडून कार्य करणारे संतुलित अभिक्रियेचे बल  $R_A$  हे  $OA$  ह्या भिंतीच्या तिरक्या दिशेच्या काटकोनात कार्यरत आहे आणि (क) गोलकाच्या  $B$  ह्या संपर्क बिंदूजवळ भिंतीकडून कार्य करणारे संतुलित अभिक्रियेचे बल  $R_B$  हे  $OB$  ह्या भिंतीच्या तिरक्या दिशेच्या काटकोनात कार्यरत आहे. ह्यामध्ये गोलक समतोल असल्याकारणाने, ही तीनही बले  $C$  ह्या एका केंद्रबिंदूवर कार्यरत असतील ह्या संरचनेची मुक्त आकृती (free body diagram) ही आकृती 2.4 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे असेल.



(अ) संरचनेची अवकाश आकृती (Space Diagram)



(ब) संरचनेची मुक्त आकृती (FBD)

**आकृती 2.4:** V आकाराच्या खाचेमध्ये ठेवलेला गोलक आणि तिरक्या घर्षणविरहित भिंती

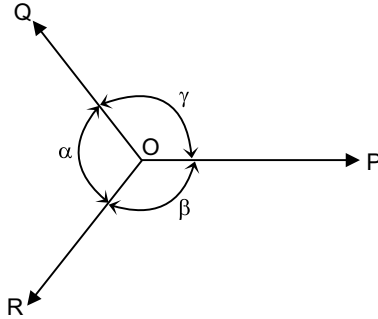
## 2.2 लॅमीचे प्रमेय

आता एक विशेष भाग म्हणून एका वस्तूबाबत चर्चा करूया. ह्यामध्ये एका वस्तूवर तीन वेगवेगळी बले एका बिंदूवर कार्यरत आहेत आणि ती वस्तु समतोल आहे असे गृहीत धरूया. ह्यामध्ये एखाद्या माहिती नसलेल्या बलाचा परिमाण किंवा त्याची दिशा मोजण्यासाठी लॅमीचे प्रमेय हे खूप उपयुक्त आहे. लॅमीचे प्रमेय असे म्हणते की “एखाद्या वस्तूच्या कोणत्याही बिंदूवर जर समतल आणि संपाती बलप्रमाणे तीन बले कार्यरत असतील आणि ती वस्तु समतोल असेल तर त्यातील प्रत्येक बल हे राहिलेल्या दोन बलाच्या कोनाच्या साइन मध्ये प्रमाणित असते”. समजा P, Q आणि R अशी तीन बले वस्तूच्या एका बिंदूवर आकृती 2.5 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कार्यरत असतील आणि जर ती वस्तु समतोल असेल तर त्या तीन बलांचे आकृती 2.5 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ABC ह्या त्रिकोणाच्या तीन बाजूंनी त्यांचे प्रतिनिधित्व करता येईल. त्रिकोण ABC मध्ये साईन नियमाचा वापर करून खालील समीकरण लिहिता येईल. हे समीकरण वापरून एकूण सहा राशीपैकी दोन अज्ञात राशि शोधता येतील.

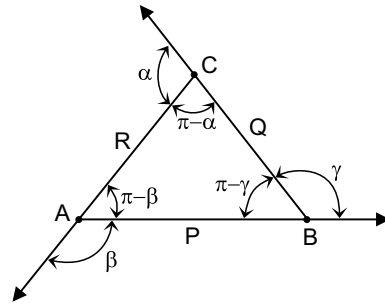
$$\frac{AB}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{BC}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{CA}{\sin(\pi - \gamma)}$$

∴

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$



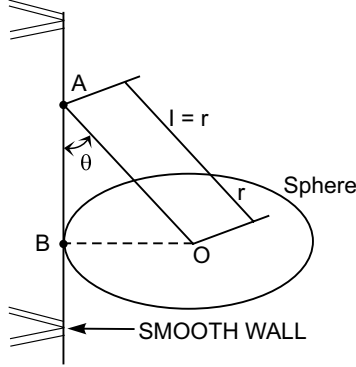
(अ) संरचनेची अवकाश आकृती



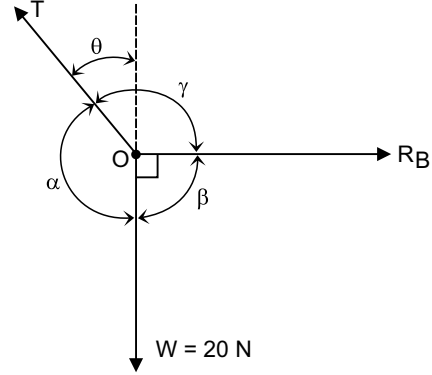
(ब) संरचनेचा सदिश आरेख

**आकृती 2.5:** लॅमीचे प्रमेय

**उदाहरण 1:** एक गुळगुळीत गोलकाची त्रिज्या (radius)  $r = 150 \text{ mm}$  इतकी आहे आणि त्याचे वजन  $W = 20 \text{ N}$  इतके आहे. सदरील गोलकास (sphere) साखळी (string) मधून बांधण्यात आलेले आहे ज्याची लांबी  $L$  ही गोलकाच्या त्रिज्येच्या दुप्पट इतकी आहे आणि गोलकास उभ्या गुळगुळीत (smooth) भिंतीवर लावण्यात आलेले आहे. गोलकाच्या B ह्या संपर्क बिन्दुजवळ भिंतीकडून कार्य करणारे संतुलित अभिक्रियेचे बल  $R_B$ , O पासून A दिशेमध्ये साखळीच्या दिशेने साखळीमध्ये निर्माण होणारा ताण आणि त्याचा आनती कोन (inclination) शोधा.



(अ) संरचनेची अवकाश आकृती (Space Diagram)



(ब) संरचनेची मुक्त आकृती

आकृती 2.6:

**उत्तर:**

- (i) आकृती 2.6 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे संरचनेची अवकाश आकृती (Space Diagram) दिलेल्या माहिती वरून काढा.

त्रिकोण ABO प्रमाणे,

$$\sin \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{r}{2r} = 0.5$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

- (ii) आता लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून आकृती 2.6 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे संरचनेची मुक्त आकृती (FBD) काढा. त्यावरून खालील समीकरण लिहिता येईल.

$$\frac{R_B}{\sin \alpha} = \frac{T}{\sin \beta} = \frac{W}{\sin \gamma}$$

ह्यामध्ये  $\alpha = 180 - \theta = 150^\circ$ ;  $\beta = 90$  and  $\gamma = 90 + \theta = 120$  and  $W = 20 \text{ N}$ .

ह्या किमती लॅमीच्या प्रमेयामध्ये वापरून समीकरण खालील प्रमाणे तयार होईल.

$$\frac{R_B}{\sin 150^\circ} = \frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin 120^\circ}$$

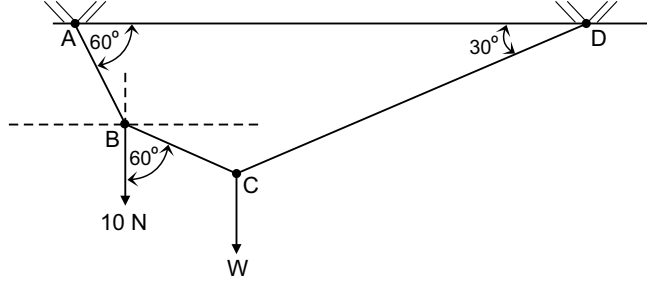
$$\therefore R_B = 11.55 \text{ N}$$

$$\therefore T = 23.10 \text{ N}$$

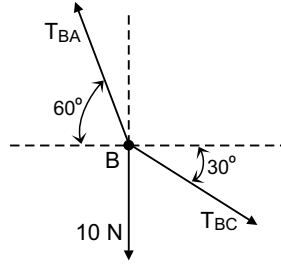


Lami's Theorem

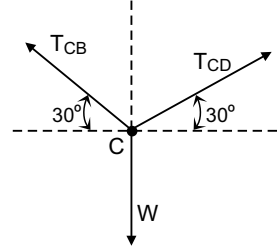
**उदाहरण 2:** खालील आकृती 2.7 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे टांगून ठेवलेल्या हलक्या वजनाच्या साखळी ABCD मधील W चे मूल्य शोधा.



(अ) माहिती



(ब) B बिंदूवरील मुक्त आकृती



(क) C ह्या बिंदूवरील मुक्त आकृती

आकृती 2.7:

**उत्तर:**

B आणि C ह्या बिंदूवरील मुक्त आकृत्या, आकृती 2.7 (ब) आणि (क) येथे दाखविलेल्या आहेत.

(a) आकृती 2.7 (ब) मध्ये B बिंदूवर लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून

$$\frac{T_{BC}}{\sin (90+60)^{\circ}} = \frac{10}{\sin (180-60+30)^{\circ}}$$

$$\therefore T_{BC} = \frac{10 \times \sin 150^{\circ}}{\sin 150^{\circ}} = 10 \text{ N}$$

(b) आकृती 2.7 (क) मध्ये C बिंदूवर लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून

आणि

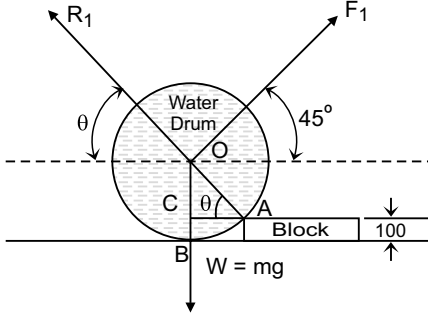
$$T_{BC} = T_{CB} \text{ ह्याचा विचार करून}$$

$$\frac{W}{\sin (150-30-30)^{\circ}} = \frac{T_{CB}}{\sin (90+30)^{\circ}} = \frac{T_{BC}}{\sin (120)^{\circ}}$$

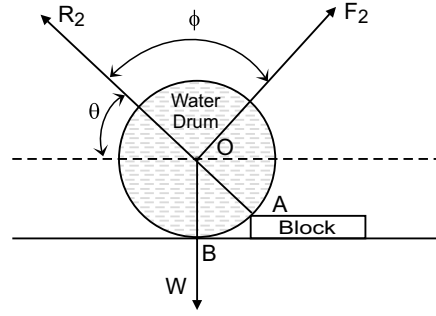
$$\therefore W = \frac{T_{BC} \times \sin (120)^{\circ}}{\sin (120)^{\circ}}$$

$$\therefore W = 10 \text{ N}$$

**उदाहरण 3:** खालील आकृती 2.8 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एक दंडगोलाकार (cylindrical) पाण्याचे पिंप (ड्रम) ज्याचा व्यास 500 mm आहे आणि त्याची लांबी 1.5 m इतकी आहे. 100 मिमी उंचीच्या लाटीवरून (ब्लॉकवर) वरच्या बाजूला वरती उचलायचे आहे. (1) ओढण्यासाठी मध्यभागी आडव्यापासून 45 कोनात मध्यभागी लागणारे बल  $F_1$  (2) कमीतकमी आवश्यक असलेला ओढण्यासाठी लागणारे बल  $F_2$  आणि त्याची दिशा, (3) दोन्हीही प्रकारामध्ये लाटीवरील (ब्लॉकवरील) संतुलित अभिक्रियेचे बल (reaction)  $R$  शोधा. पाण्याचे वस्तुमान  $1000 \text{ kg/m}^3$  इतके घ्या. ड्रमचे वजन घेतले नाही तरी चालेल.



आकृती 2.8: (a) प्रकार (1)



आकृती 2.8: (b) प्रकार

**उत्तर:**

पहिल्यांदा आपण प्राथमिक गोष्टी शोधूत जसे दंडगोलाकार पाण्याच्या पिंपचे वजन  $W$  आणि संतुलित प्रतिक्रियेच्या (reaction) बलाची दिशा  $\theta$ .

(i) पाण्याच्या पिंपाचे वजन  $W$  [त्रिज्या =  $r = 250 \text{ mm}$  आणि लांबी =  $h = 1.5 \text{ m}$ ]

$$(a) \text{ घनफळ} = V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left[ \frac{250}{1000} \right]^2 \cdot [1.5] \text{ m}^3$$

$$(b) \text{ पाण्याचे वस्तुमान} = m = V \cdot [1000] \text{ kg}$$

$$(c) \text{ पाण्याच्या पिंपाचे वजन} = W = m \cdot g$$

$$\therefore W = \pi \cdot [0.250]^2 \cdot [1.5] \cdot [1000] \cdot 9.8 \text{ N}$$

$$\therefore W = 2886.34 \text{ N}$$

(ii) संतुलित अभिक्रियेच्या (reaction) बलाची क्षैतिज (आडव्या) दिशेतील दिशा  $\theta$

$$[\text{आकृती (a)}] \text{ त्रिकोण OAC चा वापर करून } \sin \theta = \frac{OC}{OA} = \frac{OB - BC}{OA} = \frac{250 - 100}{250}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{150}{250} = 0.6$$

$$\therefore \theta = 36.87^\circ \text{ क्षितिज समांतरापासून}$$

**प्रकार (1):** पिंपाच्या केंद्रावर तयार कार्यरत असलेली वेगवेगळी बले: [आकृती (a)]

$$(a) \text{ पाण्याच्या पिंपाचे वजन} = W = 2886.34 \text{ N} (\downarrow)$$

$$(b) \text{ ओढण्यासाठी मध्यभागी आडव्यापासून } 45^\circ \text{ कोनात मध्यभागी लागणारे बल } F_1 (\nearrow)$$

$$(c) \text{ लाटीवरील (ब्लॉकवरील) संतुलित अभिक्रियेचे बल (reaction) } R_1 \text{ आडव्या दिशेतील दिशा } (\nwarrow)$$

(i) लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून;

$$\frac{W}{\sin(180^\circ - 45^\circ - \theta)} = \frac{F_1}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{R_1}{\sin(90^\circ + 45^\circ)}$$

(ii) W चे मूल्य लक्षात घेऊन,  $W = 2886.34 \text{ N}$  आणि  $\theta = 36.87$ , समीकरण मिळते

$$\frac{2886.34}{\sin 98.13^\circ} = \frac{F_1}{\sin 126.87^\circ} = \frac{R_1}{\sin 135^\circ}$$

(iii)  $\therefore F_1 = 2332.51 \text{ N}$

(iv)  $\therefore R_1 = 2061.67 \text{ N}$

**प्रकार (2):** पिंपाच्या केंद्रावर कार्यरत असलेली बले तीच आहेत परंतु कमीतकमी आवश्यक असलेला ओढण्यासाठी लागणारे बल  $F_2$  आणि त्याची दिशा तसेच लाटीवरील (ब्लॉकवरील) संतुलित अभिक्रियेचे बल (reaction)  $R_2$  [आकृती (b)].

(1) लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून;

$$\frac{W}{\sin \phi} = \frac{F_2}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{R_2}{\sin(270^\circ - \theta - \phi)}$$

(ii) W चे मूल्य लक्षात घेऊन,  $W = 2886.34 \text{ N}$  आणि  $\theta = 36.87$ , समीकरण मिळते

$$F_2 = \frac{2886.34 \times \sin(126.87^\circ)}{\sin \phi} = \frac{2309.07}{\sin \phi}$$

(iii)  $F_2$  ची कमीतकमी मूल्य असण्याकरिता,  $\sin \phi$  जास्तीतजास्त पाहिजे म्हणजेच 1

म्हणून  $\phi = 90$  आणि  $F_2 = 2309.07 \text{ N}$

(iv)  $R_2 = \frac{2886.34 \times \sin(143.13^\circ)}{\sin 90^\circ} = 1731.81 \text{ N}$



## 2.3 आधाराचे प्रकार, भाराचे आणि तुळईचे (बीमचे) प्रकार

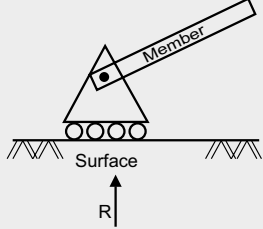
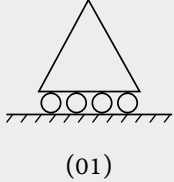
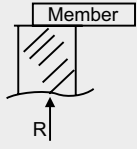
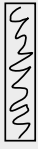
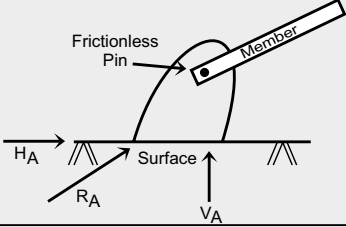
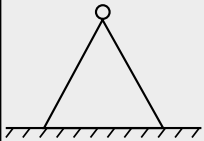
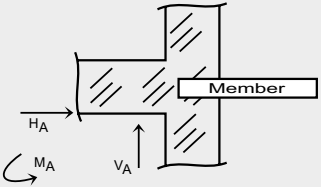

बीम (तुळई) एक संरचनात्मक (स्ट्रक्चरल) घटक आहे जो रचनावरील भारांच्या (reactions) परिणामाचा अभ्यास करण्यासाठी नमुना म्हणून घेतला जातो. ह्यातील भार अनुप्रस्थ (transverse) दिशेने कार्य करीतात. बीमचे कार्य इतर घटकांचे भार वाहून नेणे असा आहे. बीम ही आधारावर संतुलित अभिक्रियेचे बलावरून (reaction) संरचनेतील प्रणालीला (सिस्टमला) समतोल राखण्यासाठी प्रतिक्रिया देऊ शकते. बीमचे त्यांच्या प्रकारच्या आधारानुसार (supports) वर्गीकरण केले जाते.

### 2.3.1 आधाराचे प्रकार

रचना किंवा त्यांचे घटक विविध प्रकारच्या आधारानुसार आधारित केले जाऊ शकतात जे खालीलप्रमाणे त्यांच्याद्वारे दिलेल्या संतुलित अभिक्रियेचे बलावरून वर्गीकृत केले जाऊ शकतात.



कोष्टक 2.1: आधाराचे वर्गीकरण

अ. क्र.	आधाराचे नाव	संतुलित अभिक्रियेचे वर्णन	संतुलित अभिक्रियेच्या आकृत्या	चिन्ह आणि संतुलित अभिक्रियेच्या संख्या
1.	रुळाकारा आधार	हे आधारलेल्या पृष्ठभागाच्या दिशेने लंबरेषेमध्ये होऊ शकणाऱ्या हालचाली करण्यासाठी रोध (resistance)/ प्रतिकार प्रदान करते. उदा. घसरणारी चक्री		 (01)
2.	सरल आधार	हे कोणत्याही प्रकारच्या सांध्याशिवाय किंवा कनेक्शनशिवाय आधार तयार करते आणि म्हणूनच संतुलित अभिक्रिया नेहमी आधाराच्या दिशेने कार्य करत असते. उदा. जेवणाच्या मेजवरती ठेवलेला पाण्याचा जग.		 (02)
3.	बिजागराचा आधार	ह्या प्रकारचा आधार कललेल्या दिशेमध्ये संतुलित अभिक्रिया देतात त्यामुळे कोणत्याही दिशेने हालचालींना प्रतिकार प्रदान करीतात. उदा. दरवाज्यामधील बिजागरी.		 (03)
4.	बंध आधार	ह्या प्रकारचे आधार परिवलनाला प्रतिकार प्रदान करतात आणि हे प्रभावीपणे घटकाला स्थितीत ठेवतात आणि घटकांना परिवलनाला विरुद्ध प्रतिबंधित करतात. उदा. भिंतीमध्ये मारलेला खिळा		 (04)

### 2.3.2 भाराचे प्रकार

संरचनात्मक घटकांवर कार्य करणारे भार हे बाह्य भार असू शकतात किंवा त्या घटकांच्या/ वस्तूच्या स्वतःच्या वजनामुळे कार्य करू शकतात. हे भार संरचनात्मक घटकांवर बाह्य बल म्हणून कार्य करतात. भाराचे महत्त्वपूर्ण प्रकार पुढीलप्रमाणे आहेत (अ) सकेंद्रीत भार किंवा बिंदू भार (Concentrated or Point Load) (ब) समवितरित भार (Uniformly Distributed Load/ UDL) (क) समभारीत परिवर्ती भार (Uniformly Varying Load/ UVL) (ड) आघूर्ण (मोमेंट/ moment) (इ) बलयुग्म (कपल/ couple).

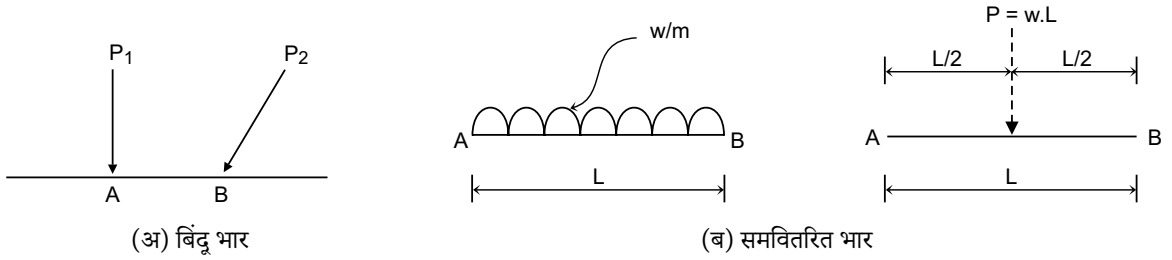
(अ) सकेंद्रीत भार किंवा बिंदू भार: [आकृती 2.9 (अ)]

बीमच्या लांबीपेक्षा खूप कमी लांबीवर कार्यरत असलेल्या भारास सकेंद्रीत भार किंवा बिंदू भार असे म्हणतात. व्यवहारामध्ये (practically) अशा भारास एखाद्या बिंदूवर कार्यरत असल्यासारखे गृहीत धरले जाते. उदाहरणार्थ, जमिनीवर एखादी गाडी उभी

असेल तर गाडीचे वजन चारचाकांच्या बिंदूवर कार्य करेल. ह्यामध्ये त्या गाडीची चार चाके जमिनीशी संपर्क करीत असताना एका बिंदूवर किंवा खूप कमी क्षेत्रात संपर्क करतील. म्हणून गाडीचे वजन जमिनीवर कार्य करताना त्याला बिंदू भार असे समजता येऊ शकेल. एखाद्या बीमवर एखादा व्यक्ती उभारला असेल तर त्याचे वजन हेदेखील बिंदू भाराचे उदाहरण म्हणून सांगता येईल.

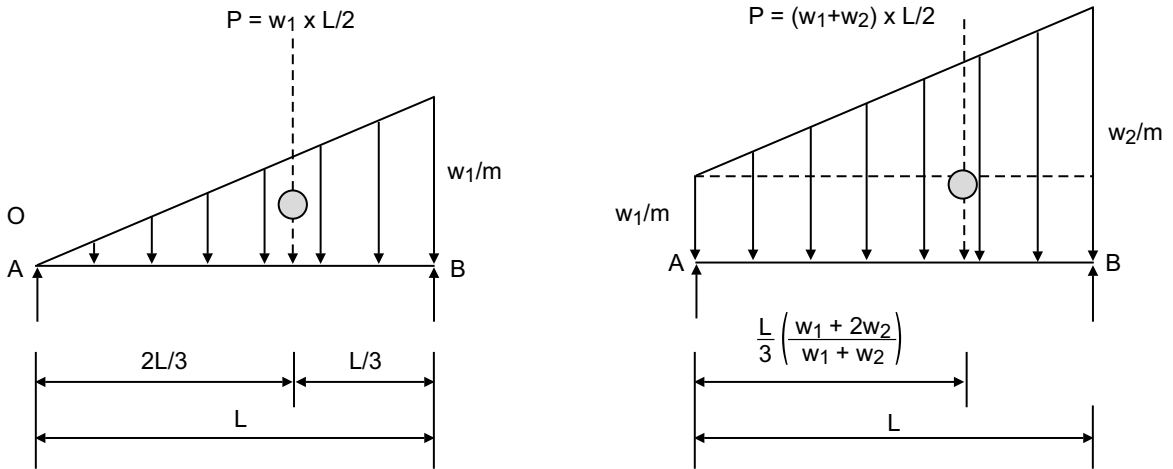
**(ब) समवितरित भार (UDL): [आकृती 2.9 (ब)]**

तुळईच्या (बीमच्या) लांबीवर एकसारखे पसरलेल्या भारास एकसारखेपणाने (सम) वितरित भार म्हणून ओळखले जाते. ह्या प्रकारच्या भारामध्ये, भाराचे प्रति एकक लांबीचे वजन हे त्याची तीव्रता आहे असे समजले जाते आणि ते सर्व लांबीमध्ये एकसारखे असते आणि  $N/m$  हे एकक असते. एखाद्या ट्रकवर सर्व बाजूस एकाच उंचीची वाळू भरली किंवा एखादी व्यक्ती एखाद्या पलंगावर झोपली असेल अशा प्रकारच्या भारास समवितरित भार असे म्हणता येईल. बीमचे विश्लेषण करीत असताना आधाराच्या संतुलित प्रतिक्रिया काढण्यासाठी असे भारास  $P = w \times L$  अस पूर्ण भार/समकक्ष बिंदू भार त्या भाराच्या लांबीच्या मध्यबिंदूवर कार्यरत असल्यासारखे गृहीत धरून संतुलित प्रतिक्रिया काढल्या जातात. हे आकृती 2.9 (ब) मध्ये दर्शविले आहे.



आकृती 2.9: भाराचे प्रकार (ब) मध्ये दर्शविले आहे

**(क) समभारीत परिवर्ती भार (UVL): [आकृती 2.9 (क)]**



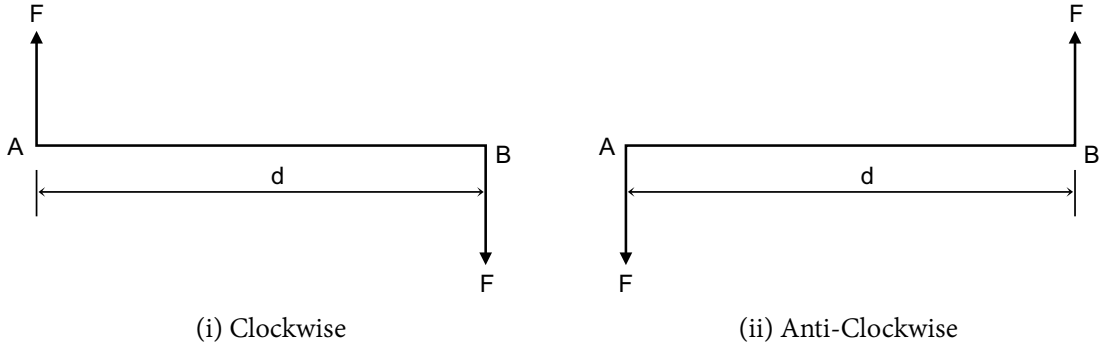
आकृती 2.9: भाराचे प्रकार (क) समभारीत परिवर्ती भार

जर तुळईवर कार्यरत असलेल्या भाराची तीव्रता लांबीच्या बाजूने एकसारखी नसेल परंतु एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत त्याची तीव्रता समान प्रमाणात वाढत असेल किंवा कमी होत असेल तर समभारीत परिवर्ती भार (एकसारखेपणाने बदलणारे भार) म्हणून ओळखले जाते. आकृती 2.9 (क) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, जर अशा भाराचे एका बिंदूवर असलेले मूल्य शून्य असेल आणि दुसऱ्या एका बिंदूवर  $W_1$  इतके असेल तर त्यास समभारीत परिवर्ती त्रिकोणी भार असे म्हणतात, आणि, जर एका बिंदूवर असलेले मूल्य  $W_1$  असेल आणि दुसऱ्या बिंदूवर  $W_2$  इतके असेल तर त्यास समभारीत परिवर्ती समलंबी भार असे म्हणतात.

(ड) आघूर्ण (मोमेंट/ moment): ह्याची चर्चा आपण पाठ 1 मधील अ. क्र. 1.8.1 येथे केलेली आहे.

(इ) बलयुग्म (कपल/ couple): जेव्हा दोन एकसारखे परिमाण असलेले दोन समांतर भार एकमेकांच्या विरुद्ध दिशेने  $d$  इतक्या लंब अंतरामध्ये कार्य करीत असतील तर बलयुग्म (couple) असे म्हणतात. ह्या दोन बलांचे परिणामी बल हे शून्य असते परंतु ज्यावर बलयुग्म कार्य करते ती वस्तु समतोल नसते कारण हे दोन भार परिवलन निर्माण करतात. त्यामुळे आपण असे म्हणू शकतो की अशा प्रकारचे दोन भार सूचक आघूर्ण (pure moment) निर्माण करतात किंवा त्याचा प्रभाव निर्दिष्ट दिशेने परिवलन निर्माण करण्याचा असतो. उदाहरणार्थ (अ) पाण्याचे नळ उघडण्यासाठी किंवा बंद करण्यासाठी लावलेला भार (ब) वाहनाचे फिरणारे सुकाणू चाक (क) घड्याळाच्या वसंताला लावलेला पवनभार इत्यादी.

हे भार कार्य करून ज्या प्रतलावर बलयुग्म (couple) कार्य करतात त्या प्रतलाला बलयुग्म प्रतल असे म्हणतात आणि त्या दोन भारामधील  $d$  ह्या लंब अंतरास युग्म भुज किंवा बलयुग्म भुज (arm) असे म्हणतात. हे आकृती 2.9 (ड) मध्ये दर्शविलेले आहे. बलयुग्माचे आघूर्ण (moment of couple) म्हणजे भार  $F$  आणि अंतर  $d$  ह्याचा गुणाकार होय.



आकृती 2.9: भाराचे प्रकार (ड) बलयुग्म (couple)

**बलयुग्माचे प्रकार (Types of Couple):** वस्तूचे परिवलन ज्या दिशेने होते त्या प्रकारे जर ते घड्याळाच्या दिशेने असेल तर घड्याळाच्या दिशेचे बलयुग्म आणि जर ते घड्याळाच्याविरुद्ध दिशेने असेल तर घड्याळाच्याविरुद्ध दिशेचे बलयुग्म असे म्हणतात.

### 2.3.3 तुळईचे प्रकार

बीमचे मुख्यत्वेकरून दोन प्रमाणात वर्गीकरण करण्यात येते:

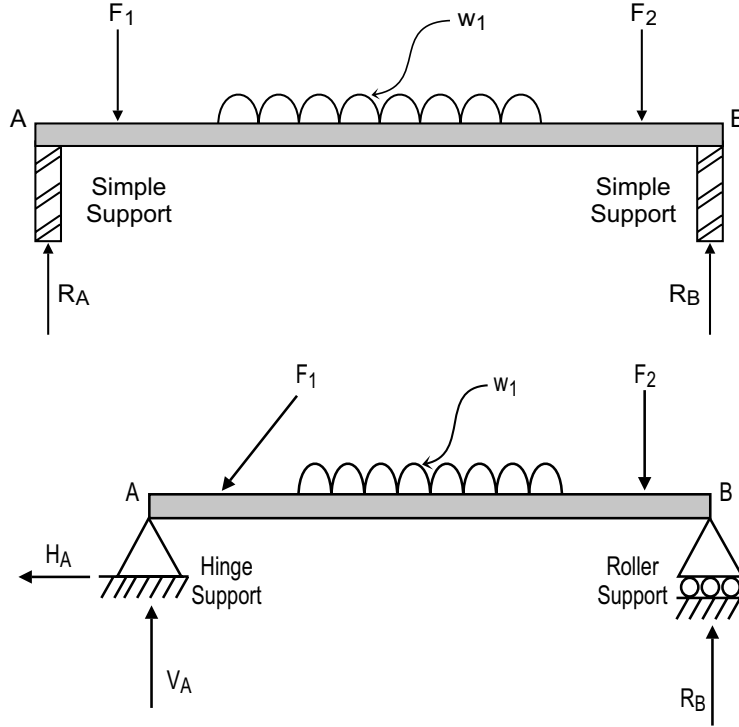
(अ) स्थैतिक निर्धार्य तुळई (Statically Determinate Beam)

(ब) स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई (Statically Indeterminate Beam)

आत्ता आपण अभ्यासकरीत असलेल्या पुस्तकामध्ये स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई व्याप्ती नाही.

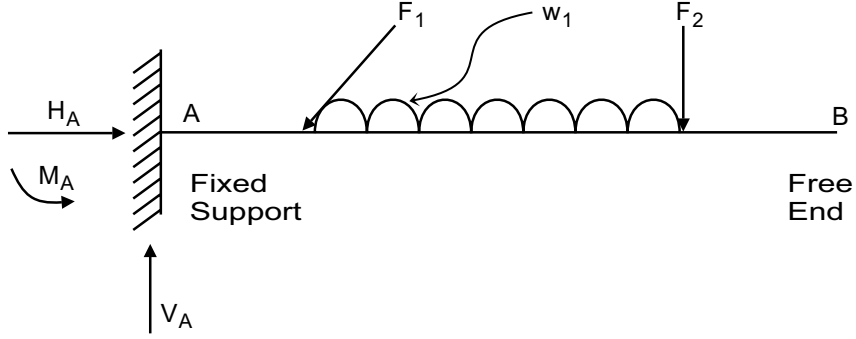
(अ) **स्थैतिक निर्धार्य तुळई (Statically Determinate Beam):** जर तुळईच्या अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही समतोल अटींच्या संख्येपेक्षा कमी केंव्हा तेवढीच असेल तर अशा तुळईला स्थैतिक निर्धार्य तुळई (statically Determinate Beam) असे म्हणतात. समतोल अटींची तीन समीकरणे आहेत जी पुढीलप्रमाणे: (1)  $\sum H = 0$ ; (2)  $\sum V = 0$ ; (3)  $\sum M = 0$ . म्हणून बीमच्या आधाराच्या प्रकारांनुसार जास्तीत जास्त तीन अज्ञात प्रतिक्रिया सोडविल्या जाऊ शकतात. खालील प्रकारच्या तुळई (बीम) ह्या हे स्थैतिक निर्धार्य तुळई (बीम) आहेत:

1. **सरळ आधारित तुळई (Simply Supported Beam):** आकृती 2.10 मध्ये डाव्या बाजूच्या आकृतीतील बीमच्या दोन्ही टोकांच्या बाजू दोन सरळ आधारांवर आधारित केलेल्या आहेत. ह्यामध्ये आधार फक्त संतुलित अभिक्रिया तयार करण्याचे कार्य करतात परंतु आघूर्ण प्रतिक्रिया तयार करू शकत नाहीत. उजव्या बाजूच्या आकृतीतील दोन आधारातील एक आधार हा सरळ आधार असतो आणि दुसरा रूळाकारा आधार असतो किंवा दोन्हीही सरळ आधार असतात. ह्यामध्ये अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही तीन किंवा दोन असते. आकृती 2.10 मध्ये सदरच्या प्रकारची तुळई दाखविलेली आहे.

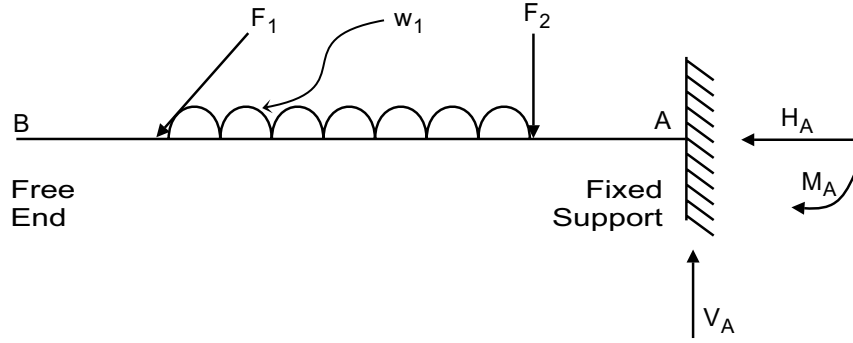


आकृती 2.10: सरळ आधारित तुळई

2. **प्रबाहु तुळई (Cantilever Beam):** प्रबाहु तुळईमध्ये एक आधार हा बंध आधार असतो आणि दुसरे टोक हा मुक्त अंत (free end) असतो. जर तुळईच्या एका बाजूस आधार देणे शक्य नसल्यास अश्या प्रकारची तुळई वापरली जाते. ह्यामध्ये अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही तीन किंवा दोन असते. आकृती 2.11 (अ) आणि (ब) मध्ये सदरच्या प्रकारची तुळई दाखविलेली आहे.



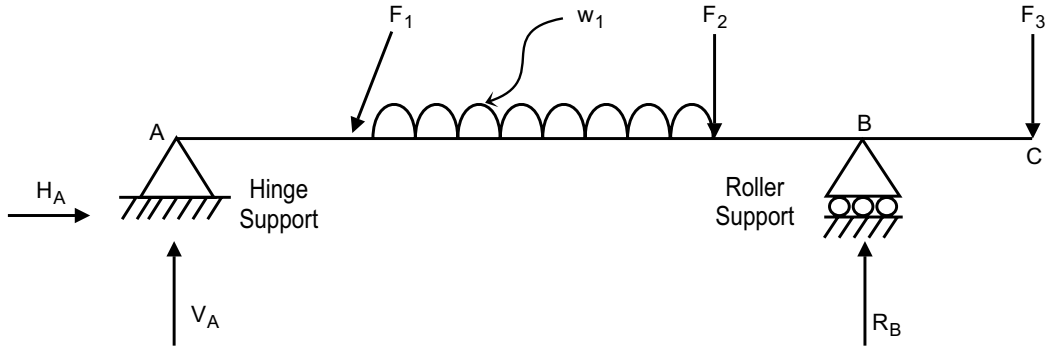
(अ) डावीकडे असलेला बंध आधार

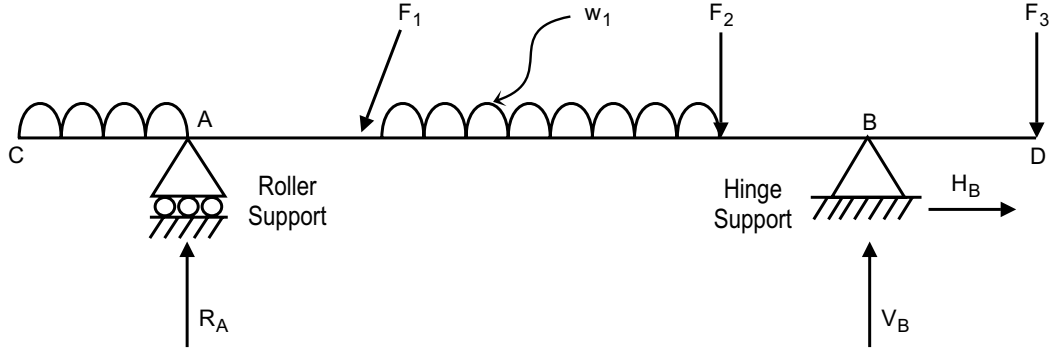


(ब) उजवीकडे असलेला बंध आधार

आकृती 2.11: प्रबाहु तुळई

3. **प्रक्षेपित तुळई (Overhanging Beam):** सरळ आधारित तुळईमधील एक किंवा दोन्हीही भाग आधारांच्या पलीकडे वाढविलेले असतात अशा तुळईला प्रक्षेपित तुळई असे म्हणतात. वाढविलेल्याप्रमाणे ह्यांना एकेरी किंवा दुहेरी प्रक्षेपित तुळई असे प्रकार आहेत. सरळ आधारित तुळईचा हा एक विशेष प्रकार आहे. आकृती 2.12 (अ) आणि (ब) मध्ये सदरच्या प्रकारची तुळई दाखविलेली आहे.

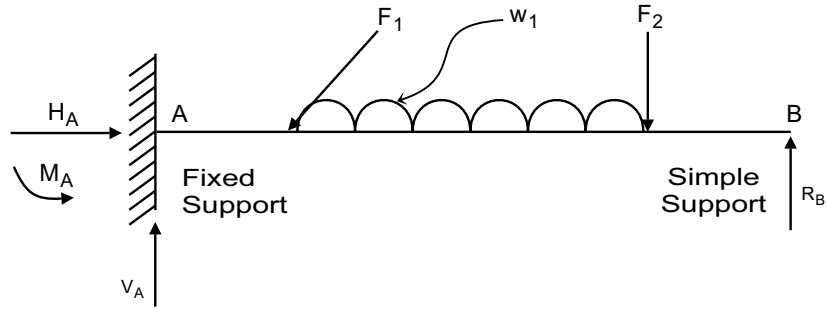




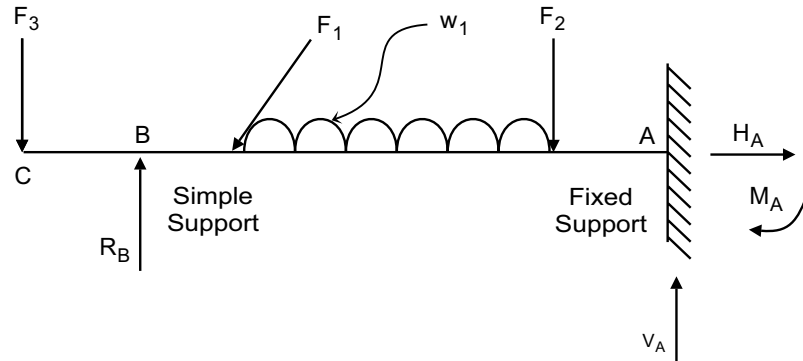
आकृती 2.12: प्रक्षेपित तुळई

(ब) खालील प्रकारच्या तुळई (बीम) ह्या हे स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई (बीम) आहेत: जर तुळईच्या अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही समतोल अटींच्या संख्येपेक्षा जास्त असेल तर अशा तुळईला स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई (Statically Indeterminate Beam) असे म्हणतात. अशा तुळईचे खालील प्रकार आहेत:

1. टेकू दिलेला प्रबाहु (Propped Cantilever): आकृती 2.13 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ह्या प्रकारच्या तुळईमध्ये एका बाजूस बंध आधार असतो आणि दुसरा आधार हा सरल आधार असतो.



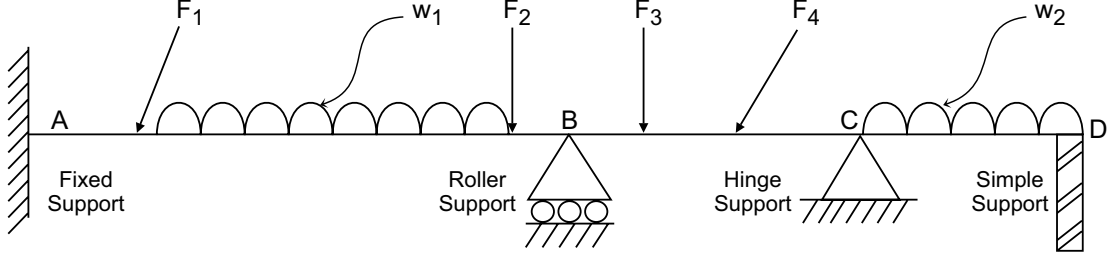
(a) Without overhang



(b) With overhang

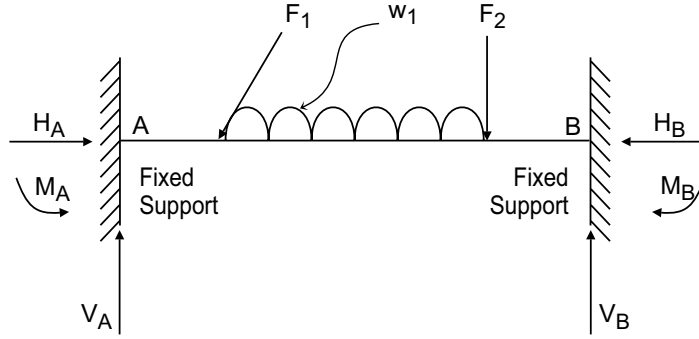
आकृती 2.13: टेकू दिलेला प्रबाहु

2. अनेकाधार तुळई किंवा सलग तुळई (Continuous Beam): आकृती 2.14 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ह्या प्रकारच्या तुळईमध्ये दोनपेक्षा जास्त आधार दिलेले असतात.



आकृती 2.14: अनेकाधार तुळई

3. बद्ध तुळई (Fixed Beam): आकृती 2.15 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ह्या प्रकारच्या तुळईमध्ये दोन्हीही आधार हे बंध आधार असत.



आकृती 2.15: बद्ध तुळई



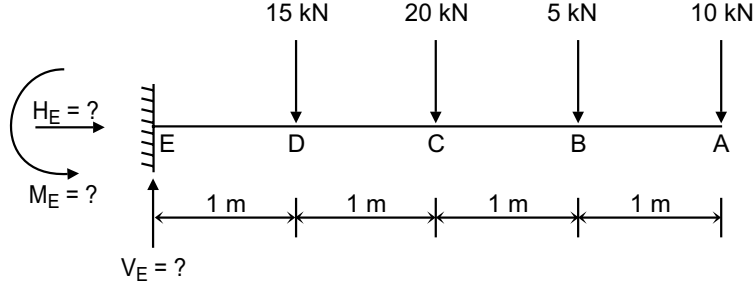
## 2.4 तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया

तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया खालील दोन पद्धतीने शोधता येवू शकते. (1) विश्लेषणात्मक पद्धति (2) आलेखीय पद्धति. विश्लेषणात्मक पद्धतिमध्ये समतोल अटींचा वापर करून आधारावरील अज्ञात प्रतिक्रिया शोधल्या जातात ज्याची चर्चा ह्या पाठात केलेली आहे. आलेखीय पद्धतिची चर्चा आपण 2.5 मध्ये करणार आहोत. आपण ह्यामध्ये खालील तीन प्रकारच्या तुळईबाबत विचार करणार आहोत. (अ) प्रबाहु तुळई (Cantilever Beam) (ब) सरळ आधारित तुळई (Simply Supported Beam) (क) प्रक्षेपित तुळई (Overhanging Beam).

### 2.4.1. प्रबाहु तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया

आधी चर्चा केल्याप्रमाणे, अशा तुळईमध्ये एक आधार हा बंध आधार असतो आणि दुसरी बाजू मुक्त असते. आधाराच्या अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही तीन किंवा दोन असते त्यामुळे आधारावरील प्रतिक्रिया समतोल अटींची तीन समीकरणे वापरून आपण शोधू शकतो. आता आपण त्याची काही उदाहरणे पाहूत.

**उदाहरण 4:** एका 4 m लांबीच्या प्रबाहु तुळईचा डाव्या बाजूला बंध आधार आहे आणि त्यावर 10kN, 5 kN, 20 kN आणि 15 kN असे चार सकेन्द्रित भार मुक्त अंत पासून अनुक्रमे 1 मीटर अंतरावर कार्यरत आहेत. ह्या तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रिया शोधा.



आकृती 2.16

उत्तर:

पहिल्यांदा माहितीमध्ये दिल्याप्रमाणे तुळई आणि त्यावरील कार्यरत असलेले भार ह्याची आकृती काढा.

- (a)  $\sum V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून. गृहीत धरत की E येथील उभी प्रतिक्रिया  $V_E$  हा ऊर्ध्वगामी भार आहे.

$$\therefore V_E - 15 - 20 - 5 - 10 = 0$$

$$\therefore V_E = 50 \text{ kN}$$

- (b)  $\sum H = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि पूर्वेकडे असलेल्या  $\rightarrow$  भाराला +ve चिन्ह घेऊन,

$$H_E = 0 \text{ kN} \rightarrow$$

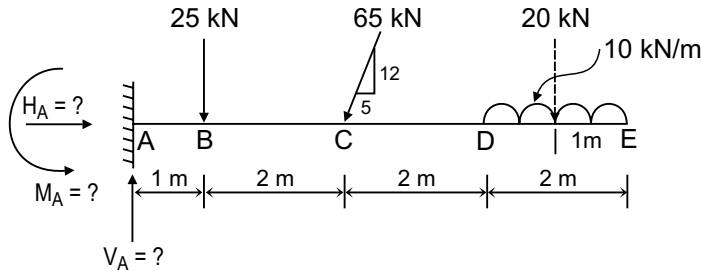
- (c)  $\sum M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन, E येथे तयार होणारे आघूर्ण (moment) खालीलप्रमाणे काढता येईल.

$$\sum M_E = (15 \times 1) + (20 \times 2) + (5 \times 3) + (10 \times 4) - M_E = 0$$

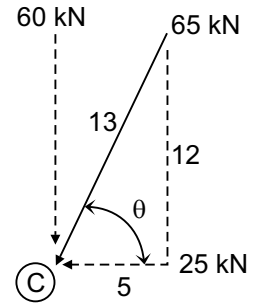
$$\therefore M_E = 15 + 40 + 15 + 40 = 110 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ } \curvearrowright \text{ घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने}$$

टीप: जर गणना गणितेस + चिन्ह मिळाल्यास आमचे गृहित चिन्ह योग्य आहे अन्यथा आम्हाला ते पूर्ववत करावे लागेल.

उदाहरण 5: आकृती 2.17 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रबाहु तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रिया शोधा.



(अ) दिलेली माहिती



(ब) कलत्या भाराचे घटक

आकृती 2.17

उत्तर:

- (i) पहिल्यांदा बिंदू C येथे कार्यरत असलेल्या आकृती 2.17 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कलत्या भाराचे आडवे आणि उभे घटक शोधूयात.



$$\text{येथे } \tan \theta = \frac{12}{5}; \sin \theta = \frac{12}{13} \text{ \& } \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \text{ C बिंदूवर आडव्या दिशेमध्ये कार्यरत घटक} = 65 \times \cos \theta = 65 \times \frac{5}{13} = 25 \text{ kN}$$

$$\text{आणि C बिंदूवर उभ्या दिशेमध्ये कार्यरत घटक} = 65 \times \sin \theta = 65 \times \frac{12}{13} = 60 \text{ kN}$$

(ii) आता ह्या तुळईच्या DE ह्या भागातील समवितरित भाराचा समकक्ष बिंदुभार शोधूया.

I. समवितरित भारामुळे कार्यरत असलेले समकक्ष बिंदुभार =  $P = w \times l = 10 \times 2 = 20 \text{ kN}$

II. समकक्ष बिंदुभार त्या भाराच्या DE ह्या लांबीच्या मध्याबिंदूवर कार्यरत असेल त्यामुळे त्याचे E पासूनचे अंतर 1 m इतके असेल. आता तीन समतोल अटींचा वापर करून आपण प्रवाहु तुळईच्या तीन संतुलित अभिक्रिया शोधूत.

(a)  $\sum V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून.

$$\therefore V_A - 25 - 60 - (10 \times 2) = 0$$

$$\therefore V_A = 25 + 60 + 20 = 105 \text{ kN}$$

(b)  $\sum H = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि पूर्वेकडे असलेल्या  $\rightarrow$  भाराला +ve चिन्ह घेऊन

$$\therefore H_A - 25 = 0$$

$$\therefore H_A = 25 \text{ kN} \rightarrow$$

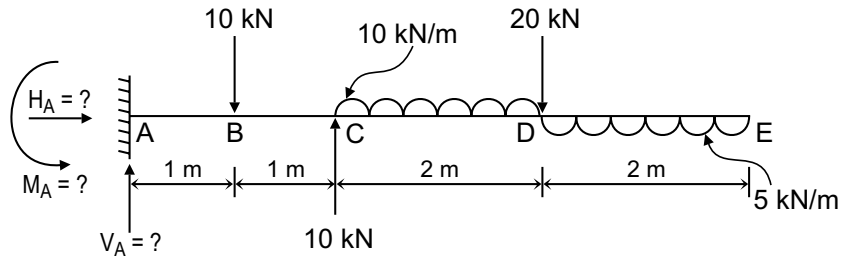
(c)  $\sum M_A = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन. A येथे तयार होणारे आघूर्ण (moment) खालीलप्रमाणे काढता येईल.

**टीप:** आडव्या दिशेमध्ये कार्यरत घटक 25 kN हा बिंदू A मधून कार्यरत असल्या कारणाने, त्याचे A येथील आघूर्ण (moment) शून्य असेल.

$$\therefore 25 \times 1 + 60 \times 3 + 25 \times 0 + (10 \times 2) \times 6 - M_A = 0$$

$$\therefore M_A = 25 + 180 + 0 + 120 = 325 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ \& } \curvearrowright \text{ घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने.}$$

**उदाहरण 6:** आकृती 2.18 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रवाहु तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रिया शोधा.



आकृती 2.18

**उत्तर:**

तीन समतोल अटींचा वापर करून आपण प्रवाहु तुळईच्या तीन संतुलित प्रतिक्रिया शोधूत

(a)  $\sum H = 0$  सदरच्या तुळईवर कोणतेही आडवे बल लागत नसल्यामुळे  $H_A = 0$ .

(b)  $\sum V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून आणि  $V_A$  उभ्या स्थितीत आहे असे गृहीत धरून

$$\therefore V_A - 10 + 10 - (10 \times 2) - 20 + (5 \times 2) = 0$$

$$\therefore V_A = 10 - 10 + 20 + 20 - 10 = 30 \text{ kN}$$

(c)  $\sum MA = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन. A येथे तयार होणारे आघूर्ण (moment) खालीलप्रमाणे काढता येईल.

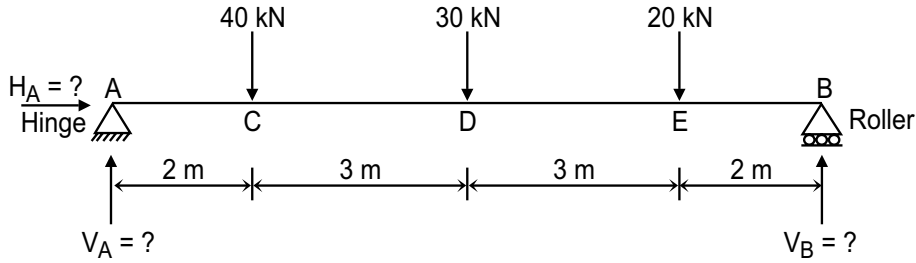
$$\therefore (10 \times 1) - (20 \times 2) + \{(10 \times 2) \times 3\} + (20 \times 4) - \{(5 \times 2) \times 5\} - M_A = 0$$

$$\therefore M_A = 10 - 40 + 60 + 80 - 50 = 60 \text{ kN}\cdot\text{m} \text{ घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने } \curvearrowleft$$

#### 2.4.2 सरळ आधारित तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया

आपल्याला आधी चर्चा केल्याप्रमाणे हे माहिती आहे की, दोन आधारातील एक आधार हा सरल आधार असतो आणि दुसरा रूळाकारी आधार असतो किंवा दोन्हीही सरल आधार असतात. आपण ह्या प्रकारचे आधार आणि अशा आधारावर कार्यरत करणारे आधार प्रतिक्रियेचे भार ह्याआधी शिकलो आहोत. ह्यामध्ये अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही तीन किंवा दोन असते. आता आपण अशा प्रकारच्या तुळईच्या आधारावर कार्यरत होणाऱ्या प्रतिक्रिया बहुलची उदाहरणे पाहूयात.

**उदाहरण 7:** आकृती 2.19 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एका सरळ आधारित तुळईची लांबी 10 m असून त्या तुळईवर 40 kN, 30 kN आणि 20 kN तीन संकेंद्रित भार डाव्या बाजूच्या बिजागारीच्या आधारापासून अनुक्रमे 2 m, 5 m, आणि 8 m इतक्या अंतरावर खालील दिशेने कार्य करीत आहेत. उजव्या बाजूचा आधार हा रूळाकारी आधार आहे. ह्या तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रियेचे भार शोधा.



आकृती 2.19

**उत्तर:**

पहिल्यांदा दिलेल्या माहितीप्रमाणे संरचनेची अवकाश आकृती (Space Diagram) आणि संरचनेची मुक्त आकृती (FBD) काढा. त्यानंतर तीन समतोल अटीचा वापर करून सदरच्या तुळईच्या तीन संतुलित प्रतिक्रियांचे मूल्य शोधा.

(a)  $\sum H = 0$  आता ह्या तुळईवर कोणतेही भार आडव्या दिशेमध्ये कार्य करीत नसल्यामुळे,  $\therefore H_A = 0 \text{ kN}$

(b)  $\sum V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून आणि  $V_A$  आणि  $V_B$  वरच्या दिशेने आहेत असे गृहीत धरून,

$$\therefore V_A - 40 - 30 - 20 + V_B = 0.$$

$$\therefore V_A + V_B = 90 \text{ kN. } W \text{ ह्या समीकरणाचा नंतर तपासण्याकरिता उपयोग करूयात.}$$

(c)  $\sum M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन.

(i) आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_A = (40 \times 2) + (30 \times 5) + (20 \times 8) - (V_B \times 10) + (V_A \times 0) = 0$$

$$\therefore 10 V_B = 80 + 150 + 160 = 390$$

$$\therefore V_B = \frac{390}{10} = 39 \text{ kN}$$

(ii) आधार B येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_B = (V_A \times 10) - (40 \times 8) - (30 \times 5) - (20 \times 2) + (V_B \times 0) = 0$$

$$\therefore 10 V_A = 320 + 150 + 40 = 510$$

$$\therefore V_A = \frac{510}{10} = 51 \text{ kN}$$

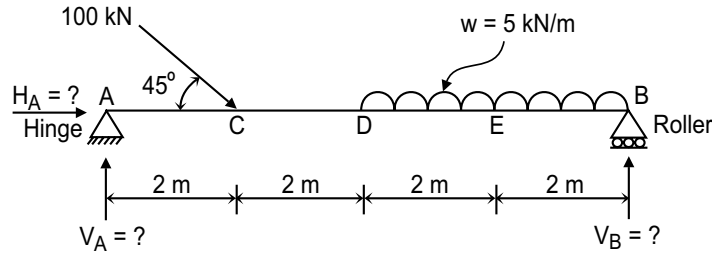
(d) आता समीकरण (ब) चा वापर करून (क) मधील (1) आणि (2) येथील आलेली उत्तरे तपासूया. जर ते योग्य असतील तर आपल्या गणितामध्ये काही त्रुटी नाहीत असे म्हणता येईल.

$\therefore V_A + V_B = 90$  आता  $V_A$  आणि  $V_B$  च्या किंमती वापरून,

डावी बाजू =  $51 + 39 = 90 =$  उजवी बाजू. म्हणजे आपल्या गणितामधील किंमती योग्य आहेत.

जर हे एकसारखे नसेल तर समजून घ्या की आपण कोठेतरी एखादी चूक केलेली आहे आणि सर्व बाबी पहिल्यापासून पुन्हा तपासाव्यात.

**उदाहरण 8:** आकृती 2.20 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एका सरळ आधारित तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रियेचे भार शोधा.



आकृती 2.20

**उत्तर:**

पहिल्यांदा बिंदू C येथे 100 kN कार्यरत असलेल्या  $45^\circ$  कोनात कलत्या भाराचा आडवा आणि उभा घटक शोधूयात.

$\therefore$  C येथे कार्यरत 100 kN भाराचा आडवा (क्षैतिज) घटक =  $100 \times \cos 45^\circ = 70.71 \text{ kN} \rightarrow$  पूर्वेकडे आणि C येथे

कार्यरत 100 kN भाराचा उभा (अनुलंब) घटक =  $100 \times \sin 45^\circ = 70.71 \text{ kN} \downarrow$  खालील दिशेने

आता ह्या तुळईच्या DB ह्या भागातील समवितरित भाराचा समकक्ष बिंदुभार शोधूया जो E येथे कार्यरत असेल.

समवितरित भाराचा समकक्ष बिंदुभार =  $P = (5 \times 4) = 20 \text{ kN}$  हा E येथे कार्यरत असेल.

आता तीन समतोल अटींचा वापर करून सदरच्या तुळईच्या तीन संतुलित प्रतिक्रियांचे मूल्य शोधूयात.

(a)  $\Sigma H = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि पूर्वेकडे असलेल्या  $\rightarrow$  भाराला +ve चिन्ह घेऊन

$$\therefore H_A + 70.71 = 0$$

$\therefore H_A = -70.71 \text{ kN} \leftarrow$  पश्चिमेकडे, येथे ऋण संख्या आल्यामुळे ही आधार प्रतिक्रिया गृहीत केलेल्या दिशेच्या उलट दिशेमध्ये कार्य करीत आहे.

(b)  $\Sigma V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून.

$$\therefore V_A - 70.71 - (5 \times 4) + V_B = 0$$

$\therefore V_A + V_B = 90.71$  kN. ह्या समीकरणाचा नंतर उत्तरे तपासण्याकरिता उपयोग करूयात.

(c)  $\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन.

(i) आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_A = V_A \times 0 + H_A \times 0 + 70.71 \times 2 + 70.71 \times 0 + (5 \times 4) \times 6 - V_B \times 8 = 0$$

$$\therefore 8 V_B = 0 + 0 + 141.42 + 0 + 120 = 261.42$$

$$\therefore V_B = \frac{261.42}{8} = 32.68 \text{ kN}$$

(ii) आधार B येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_B = V_B \times 0 - (5 \times 4) \times 2 - 70.71 \times 6 + 70.71 \times 0 + H_A \times 0 + V_A \times 8 = 0$$

$$\therefore 8 V_A = 0 + 40 + 424.26 - 0 - 0 = 464.26$$

$$\therefore V_A = 58.03 \text{ kN}$$

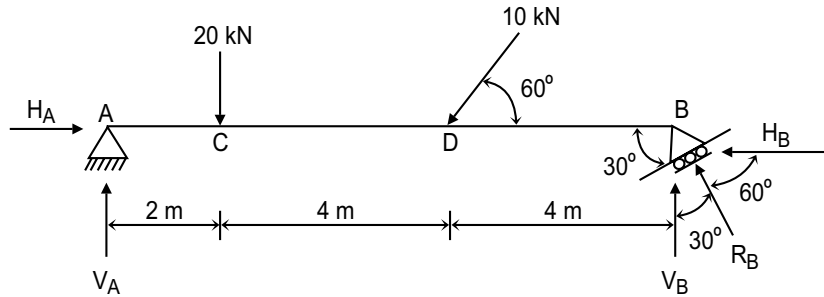
(d) आता समीकरण (2) चा वापर करून (3) मधील (अ) आणि (ब) येथील आलेली उत्तरे तपासूया. जर ते योग्य असतील तर आपल्या गणितामध्ये काही त्रुटी नाहीत असे म्हणता येईल.

$$\therefore V_A + V_B = 90.71 \text{ kN}$$

$V_A$  आणि  $V_B$  च्या किंमती वापरून,

डावी बाजू =  $58.03 + 32.68 = 90.71$  kN. = उजवी बाजू. म्हणजे आपल्या गणितामधील किंमती योग्य आहेत.

**उदाहरण 9:** आकृती 2.21 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एका सरळ आधारित तुळईची लांबी 10 m आणि A बिंदूवर असलेला आधार बिजागिरीचा आहे आणि B बिंदूवर असलेला रूळाकारी आधार असून तो क्षितिज समांतर रेषेपासून  $30^\circ$  कोनात आहे. सदर तुळईवर कार्यरत असलेले भार आकृतीत दाखविले आहेत. आहे. ह्या तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रियेचे भार शोधा.



आकृती 2.21

**उत्तर:**

(i) ह्या उदाहरणामध्ये तुळईमध्ये B बिंदूवर रूळाकारी आधार तुळईच्या समांतर रेषेपासून  $30^\circ$  कोनात आहे. रूळाकारी आधार हे आधारलेल्या पृष्ठभागाच्या दिशेने लंबरेषेमध्ये होऊ शकणाऱ्या हालचाली करण्यासाठी रोध (resistance)/ प्रतिकार प्रदान करते. त्यामुळे ह्या आधाराची अभिक्रिया  $R_B$  ही आडव्या दिशेकडून  $30^\circ$  कोनात कार्य करेल. त्यामुळे त्याचे आडवे आणि उभे घटक खालीलप्रमाणे असतील.

$$\therefore H_B = R_B \times \cos 60^\circ = 0.5 R_B \leftarrow \text{पश्चिमेकडे}$$

$$\& V_B = R_B \times \sin 60^\circ = 0.866 R_B \uparrow \text{वरच्यादिशेने}$$

- (ii) अशाच प्रमाणे D बिंदूवर कार्यरत असलेला 10 kN हे बल तुळईच्या रेषेपासून  $60^\circ$  कोनात कार्यरत आहे त्यामुळे त्याचे आडवे आणि उभे घटक खालीलप्रमाणे असतील.

$$D \text{ येथे असलेल्या } 10 \text{ kN बलाचा आडवा घटक } 10 \text{ kN at } D = 10 \times \cos 60^\circ = 5.0 \text{ kN} \leftarrow \text{पश्चिमेकडे}$$

$$D \text{ येथे असलेल्या } 10 \text{ kN बलाचा उभा घटक } 10 \text{ kN at } D = 10 \times \sin 60^\circ = 8.66 \text{ kN} \downarrow \text{खालच्या दिशेने}$$

आता तीन समतोल अटींचा वापर करून सदरच्या तुळईच्या तीन संतुलित प्रतिक्रियांचे मूल्य शोधुयात.

- (a)  $\Sigma H = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि पूर्वेकडे असलेल्या  $\rightarrow$  भाराला +ve चिन्ह घेऊन,

$$\therefore H_A - 5.0 - 0.5 R_B = 0$$

$$\therefore H_A - 0.5 R_B = 5.0 \text{ kN}$$

- (b)  $\Sigma V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून आणि  $V_A$  आणि  $V_B$  वरच्या दिशेने आहेत असे गृहीत धरून,

$$\therefore V_A - 20 - 8.66 + 0.866 R_B = 0$$

$$\therefore V_A + 0.866 R_B = 28.66 \text{ kN}$$

- (c)  $\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन. आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_A = V_A \times 0 + H_A \times 0 + 20 \times 2 + 8.66 \times 6 + 5 \times 0 - V_B \times 10 + H_B \times 0 = 0$$

$$\therefore 0 + 0 + 40 + 51.96 + 0 - 10 \times 0.866 R_B + 0 = 0 \text{ (As } V_B = 0.866 R_B)$$

$$\therefore 8.66 R_B = 91.96$$

$$\therefore R_B = \frac{91.96}{8.66} = 10.62 \text{ kN} \nearrow$$

- (d) आता  $R_B$  ची किंमत समीकरण (a) मध्ये ठेवून  $H_A$  शोधता येईल.

$$H_A - 0.5 R_B = 5.0$$

$$\therefore H_A = 5.0 + 0.5 \times 10.62 = 10.31 \text{ kN} \rightarrow \text{eastward}$$

- (e) आता  $R_B$  ची किंमत समीकरण (b) मध्ये ठेवून  $V_A$  शोधता येईल.

$$V_A + 0.866 R_B = 28.66$$

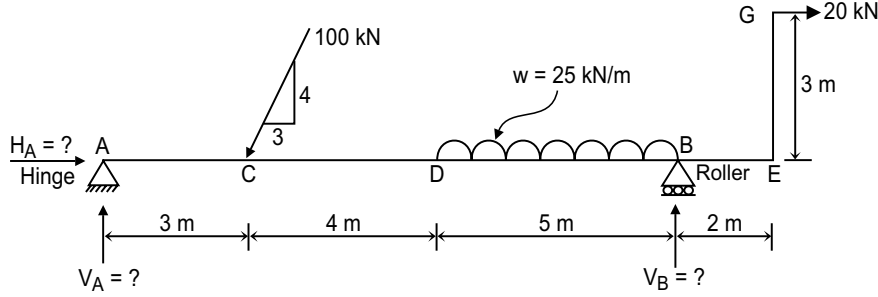
$$\therefore V_A = 28.66 - 0.866 \times 10.62 = 19.46 \text{ kN} \uparrow \text{वरच्यादिशेने}$$

### 2.4.3 प्रक्षेपित तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया

आपण ह्या आधी चर्चा केल्याप्रमाणे सरळ आधारित तुळईमधील एक किंवा दोन्हीही भाग आधारांच्या पलीकडे वाढविलेले असतात अशा तुळईला प्रक्षेपित तुळई असे म्हणतात. आता आपण त्याची काही उदाहरणे पाहूया.



**उदाहरण 10:** आकृती 2.22 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रक्षेपित तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रियेचे भार शोधा.



आकृती 2.22

**उत्तर:**

(i) पहिल्यांदा बिंदू C येथे 100 kN कार्यरत असलेल्या  $45^\circ$  कोनात कलत्या भाराचा आडवा आणि उभा घटक शोधूयात.

$$\therefore \text{C येथे कार्यरत 100 kN भाराचा आडवा (क्षैतिज) घटक} = \frac{100 \times 3}{5} = 60 \text{ kN} \leftarrow \text{उत्तरेकडे आणि}$$

$$\text{C येथे कार्यरत 100 kN भाराचा उभा (अनुलंब) घटक} = \frac{100 \times 4}{5} = 80 \text{ kN} \downarrow \text{खालील दिशेने}$$

(ii) आता ह्या तुळईच्या DB ह्या भागातील समवितरित भाराचा समकक्ष बिंदूभार शोधूया जो त्याच्या मध्यबिंदूवर कार्यरत असेल.

$$\text{समवितरित भाराचा समकक्ष बिंदूभार} = P = (25 \times 5) = 125 \text{ kN जो D पासून 2.5 m अंतरावर कार्यरत असेल.}$$

(iii) ह्या तुळईच्या EG ह्या कोनाधारावर 20 kN  $\rightarrow$  पश्चिमदिशेत कार्यरत आहे त्यामुळे E येथे आघूर्ण (moment) कार्य करेल.

त्यास  $\sum M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करीत असताना विचारात घेतले पाहिजे.

आता तीन समतोल अटींचा वापर करून सदरच्या तुळईच्या तीन संतुलित प्रतिक्रियांचे मूल्य शोधूयात.

(a)  $\sum H = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि पूर्वेकडे असलेल्या  $\rightarrow$  भाराला +ve चिन्ह घेऊन,

$$\therefore H_A - 60 + 20 = 0$$

$$\therefore H_A = 40 \text{ kN} \rightarrow \text{पूर्वेच्या दिशेने.}$$

(b)  $\sum V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून आणि  $V_A$  आणि  $V_B$  वरच्या दिशेने आहेत असे गृहीत धरून,

$$\therefore V_A - 80 - (25 \times 5) + V_B = 0$$

$$\therefore V_A + V_B = 205 \text{ kN ह्या समीकरणाचा नंतर उत्तरे तपासण्याकरिता उपयोग करूयात.}$$

(c)  $\sum M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन.

(i) आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\sum M_A = V_A \times 0 + H_A \times 0 + 60 \times 0 + 80 \times 3 + 125 \times 9.5 - V_B \times 12 + 20 \times 3 = 0$$

$$\therefore 0 + 0 + 0 + 240 + 1187.50 - 12V_B + 60 = 0$$

$$\therefore 12 V_B = 1247.5$$

$$\therefore V_B = 103.96 \text{ kN} \uparrow \text{वरच्या दिशेने}$$

(ii) आधार B येथे आघूर्ण (moment) घेऊन

$$\Sigma M_B = 20 \times 3 + V_B \times 0 - 125 \times 2.5 - 80 \times 9 + 60 \times 0 + H_A \times 0 + V_A \times 12 = 0$$

$$\therefore 12 V_A = -60 + 312.5 + 720 = 972.5$$

$$\therefore V_A = \frac{972.5}{12} = 81.04 \text{ kN} \uparrow \text{ वरच्या दिशेने}$$

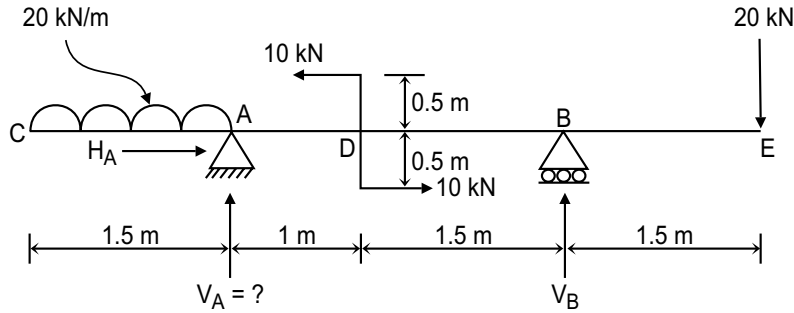
(d) आता समीकरण (ब) चा वापर करून (क) मधील (1) आणि (2) येथील आलेली उत्तरे तपासूया. जर ते योग्य असतील तर आपल्या गणितामध्ये काही त्रुटी नाहीत असे म्हणता येईल.

$$V_A + V_B = 205 \text{ kN. } V_A \text{ आणि } V_B \text{ च्या किंमती वापरून,}$$

$$\text{डावी बाजू} = 81.04 + 123.96 = 205 \text{ kN} = \text{उजवी बाजू. म्हणजे आपल्या गणितामधील किंमती योग्य आहेत.}$$

जर हे एकसारखे नसेल तर समजून घ्या की आपण कोठे तरी एकादी चूक केलेली आहे आणि सर्व बाबी पहिल्यापासून पुन्हा तपासाव्यात.

**उदाहरण 11:** आकृती 2.23 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रक्षेपित तुळईचे दोन्हीही भाग आधारांच्या पलीकडे वाढविलेले आहेत. ह्या तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रियेचे भार शोधा.



आकृती 2.23

**उत्तर:**

(1) ह्या तुळईच्या AC ह्या भागातील समवितरित भाराचा समकक्ष बिन्दुभार शोधूया जो त्याच्या मध्यबिंदुवर कार्यरत असेल.

समवितरित भाराचा समकक्ष बिन्दुभार =  $P = (20 \times 1.5) = 30 \text{ kN}$  जो AC च्या मध्यबिंदुवर वर कार्यरत असेल.

(2) सदरच्या CABE ह्या तुळईवर D येथे दोन 10 kN असे एकसारखे परिमाण असलेले दोन समांतर भार एकमेकांच्या विरुद्ध दिशेने कार्य करीत आहेत, ज्यामुळे बलयुग्म (couple) तयार होईल ज्याचा परिमाण  $10 \times (0.5 + 0.5) = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$  उघड्याळाच्या विरुद्धदिशेने कार्य करेल आणि त्या दोन भारांचा क्षैतिज भार शून्य असेल.

आता तीन समतोल अटींचा वापर करून सदरच्या तुळईच्या तीन संतुलित प्रतिक्रियांचे मूल्य शोधूयात.

(a)  $\Sigma H = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि पूर्वेकडे असलेल्या  $\rightarrow$  भाराला +ve चिन्ह घेऊन,

$$\therefore H_A - 10 + 10 = 0$$

$$\therefore H_A = 0 \text{ kN}$$

(b)  $\Sigma V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून आणि  $V_A$  आणि  $V_B$  वरच्या दिशेने आहेत असे गृहीत धरून,

$$\therefore V_A - (20 \times 1.5) - 20 + V_B = 0$$

$$\therefore V_A + V_B = 50 \text{ kN. ह्या समीकरणाचा नंतर उत्तरे तपासण्याकरिता उपयोग करूयात.}$$

(c)  $\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन.

(i) आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_A = 20 \times 4 - V_B \times 2.5 - 10 + V_A \times 0 + H_A \times 0 - (20 \times 1.5) \times 0.75 = 0$$

$$\therefore 2.5 V_B = 80 - 10 + 0 + 0 - 22.5 = 47.5$$

$$\therefore V_B = \frac{47.5}{2.5} = 19.0 \text{ kN} \uparrow \text{ वरच्या दिशेने}$$

(ii) आधार B येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_B = 20 \times 1.5 + V_B \times 0 - 10 + H_A \times 0 + V_A \times 2.5 - 30 \times 3.25 = 0$$

$$\therefore 2.5 V_A = -30 + 10 + 97.5 = 77.5$$

$$\therefore V_A = \frac{77.5}{2.5} = 31.0 \text{ kN} \uparrow \text{ वरच्या दिशेने}$$

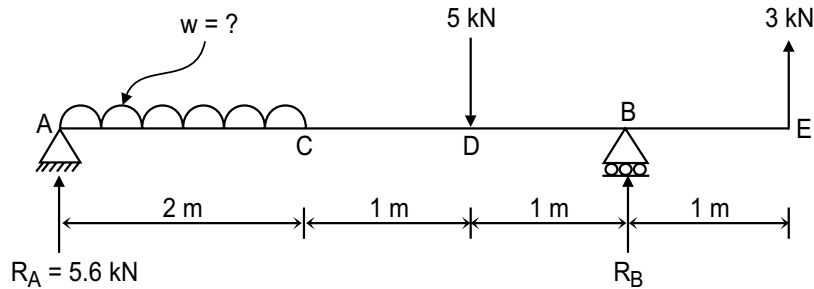
(d) आता समीकरण (ब) चा वापर करून (क) मधील (1) आणि (2) येथील आलेली उत्तरे तपासूया. जर ते योग्य असतील तर आपल्या गणितामध्ये काही त्रुटी नाहीत असे म्हणता येईल.

$$V_A + V_B = 50 \text{ kN.}$$

$V_A$  आणि  $V_B$  च्या किंमती वापरून,

डावी बाजू =  $V_A + V_B = 31.0 + 19.0 = 50 \text{ kN} =$  उजवी बाजू. म्हणजे आपल्या गणितामधील किंमती योग्य आहेत. जर हे एकसारखे नसेल तर समजून घ्या की आपण कोठे तरी एकादी चूक केलेली आहे आणि सर्व बाबी पहिल्यापासून पुन्हा तपासाव्यात.

**उदाहरण 12:** आकृती 2.24 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्रक्षेपित तुळईचा एक भाग आधारांच्या पलीकडे वाढविलेले आहेत. जर A ह्या आधारावरील प्रतिक्रिया  $R_A = 5.6 \text{ kN}$  इतकी असल्यास, समावितरीत भाराची तीव्रता  $w$  ही एकक  $\text{kN/m}$  तुमच्या शोधा आणि B ह्या आधारावरील प्रतिक्रिया  $R_B$  शोधा.



आकृती 2.24

**उत्तर:**

(a) ह्या उदाहरणामध्ये आधार A मधील प्रतिक्रिया भार  $R_A$  चे परिमाण दिलेले आहे परंतु तुळईच्या AC ह्या भागामध्ये कार्य करणाऱ्या समावितरीत भाराचे परिमाण दिलेले नाही. तसेच B ह्या आधारावरील प्रतिक्रिया  $R_B$  माहिती नाही.



- (i)  $\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन आणि आधार B येथे आघूर्ण (moment) घेऊन,

$$\Sigma M_B = R_A \times 4 - (w \times 2) \times 3 - 5 \times 1 + R_B \times 0 - 3 \times 1 = 0$$

$$\therefore 5.6 \times 4 - 6w - 5 + 0 - 3 = 0$$

$$\therefore 6w = 22.4 - 5 - 3 = 14.4$$

$$\therefore w = \frac{14.4}{6} = 2.4 \text{ kN/m}$$

- (b)  $\Sigma V = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि  $\uparrow$  वरील दिशेने +ve चिन्ह वापरून आणि  $V_B$  वरच्या दिशेने आहे असे गृहीत धरून,

$$\therefore R_A + R_B + 3 - (w \times 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 5.6 + R_B + 3 - (2.4 \times 2) - 5 = 0$$

$$\therefore R_B = 1.2 \text{ kN } \uparrow \text{ वरच्या दिशेने}$$

- (c)  $\Sigma M = 0$  ह्या समतोल अटीचा वापर करून आणि घड्याळाच्या दिशेने कार्यरत आघूर्णास +ve चिन्ह घेऊन, आधार A येथे आघूर्ण (moment) घेऊन आपण आपली उत्तरे तपासूत.

$$\Sigma M_A = (w \times 2) \times 1 + 5 \times 3 - R_B \times 4 - 3 \times 5 = 2.4 \times 2 \times 1 + 15 - 1.2 \times 4 - 15$$

$$= 4.8 + 15 - 4.8 - 15 = 0$$

ह्या मध्ये  $\Sigma M_A = 0$  ही किंमत आलेली असल्या कारणाने आपली उत्तरे बरोबर आहेत.

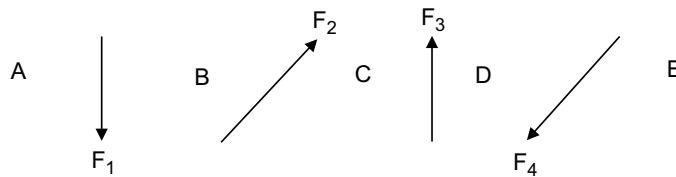
## 2.5 आलेखीय पद्धतिप्रमाणे तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया

ह्याआधी प्रकरण 2.4 मध्ये आपण विश्लेषणात्मक पद्धतिचा वापर करून वेगवेगळ्या प्रकारची तुळईच्या आधारावरील प्रतिक्रिया शोधण्याची चर्चा केली. आता ह्या प्रकरणामध्ये आलेखी पद्धतिचा वापर करून तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया कशा शोधायच्या ह्याची चर्चा करूया. ह्या पद्धतीमध्ये तुमच्या पाठ्यक्रमानुसार आपण फक्त सकेंद्रीत भार किंवा बिंदू भार कार्यरत असलेल्या सरळ आधारित तुळईचा (Simply Supported Beam) अभ्यास करणार आहोत.

### 2.5.1 रज्जु बहुभुज (Funicular Polygon) आलेखीय पद्धती

ग्राफिकल पद्धतीसाठी काही तांत्रिक शब्दावली समजून घेणे आवश्यक आहे. या आलेखी (ग्राफिकल) पद्धतीला फनिक्युलर पॉलीगॉन मेथड असेही म्हणतात.

- (1) **बो यांचे संकेतन:** खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे भार किंवा बल हे त्याच्या दोन बाजूस (अंतराळात) अभिन्न ठळक अक्षरे देऊन त्यास ओळखले जाते.



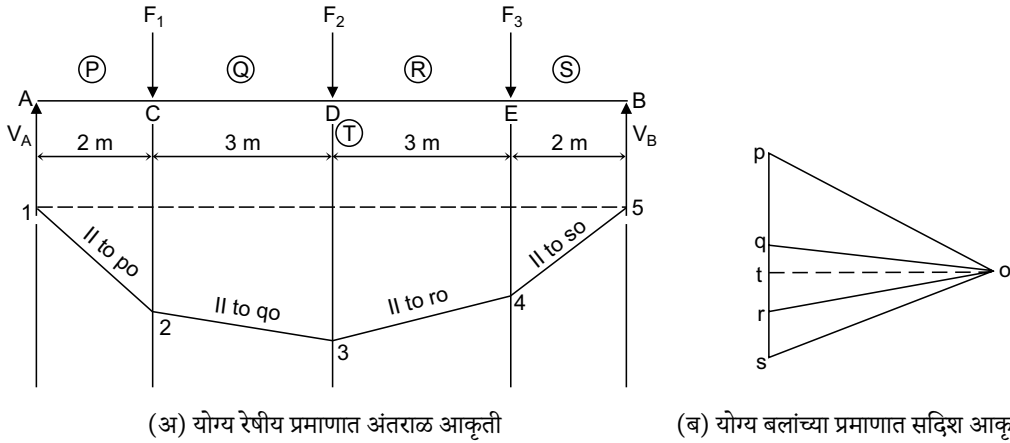
आकृती 2.25: बो यांचे संकेतन

आकृती 2.25 मध्ये  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  आणि  $F_4$  असे चार बल एका वस्तूवर कार्यरत आहेत. आता बल दिशेच्या दोन्ही बाजूंना वर्णमालेतील अभिन्न ठळक अक्षरे दिली आहेत. जसे भार  $F_1$  हे अक्षर A आणि B वापरून. आता बो यांच्या संकेतनानुसार  $F_1$  ह्या भारास,  $F_{AB}$  असे समजतात. आता त्याचप्रमाणे इतर भार जसे  $F_2$ ,  $F_3$  आणि  $F_4$  ह्यांच्या दोन्हीही अंतराळात ठळक अक्षरे द्यावीत.  $F_2$  ह्या बलास डाव्या बाजूस B हे अक्षर आधीच दिले आहे आता उजव्या बाजूस C हे अक्षर दिल्यास हा बलास बो यांच्या संकेतनानुसार  $F_{BC}$  असे म्हणता येईल. त्याचप्रमाणे आता  $F_3$  आणि  $F_4$  ह्या बलास  $F_{CD}$  आणि  $F_{DE}$  असे म्हणता येईल.

(2) **अंतराळ आकृती (Space Diagram):** ज्या आकृतीमध्ये वस्तूवर कार्यरत असलेले सर्व भार त्यांचे ठिकाण, परिमाण आणि दिशा ह्यादेखील लक्षात घेऊन दाखविलेले असतात त्या आकृतीस अंतराळ आकृती म्हणतात. ह्यामध्ये त्या भारांचे परिमाण लांबीने दाखवली जाते आणि परिमाण आणि ठिकाण काढण्यासाठी योग्य रेषीय प्रमाणात जसे  $1\text{cm} = \text{--- m}$  ह्या पद्धतीने काढतात.

(3) **सदिश आकृती (Vector Diagram):** वस्तूवर कार्यरत असलेले सर्व भार सदिश रीतीने एका नंतर एक अशा पद्धतीने काढले जातात. त्यांची दिशा ह्या त्यांच्या मुळ दिशेनुसार काढल्या जातात आणि बलाचे परिमाण हे योग्य बलांच्या प्रमाणात जसे  $1\text{cm} = \text{--- N or kN}$ .

आता आपण फनिक्च्युलर पॉलीगॉन काढताना वापरले जाणारे क्रम समजून घेऊ. आलेखी पद्धतीचा वापर करून आधारावर कार्यरत होणारे प्रतिक्रिया बल आपण शोधणार आहोत.



(अ) योग्य रेषीय प्रमाणात अंतराळ आकृती

(ब) योग्य बलांच्या प्रमाणात सदिश आकृती

#### आकृती 2.26: फनिक्च्युलर पॉलीगॉन आलेखी पद्धती

**भाग 1:** आकृती 2.26 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, तुळईवर (वस्तूवर) कार्यरत असलेले सर्व भार त्यांचे ठिकाण, परिमाण आणि दिशा ह्यादेखील लक्षात घेऊन अंतराळ आकृती काढा. ह्यासाठी योग्य रेषीय प्रमाण निवडा. जसे  $1\text{cm} = \text{--- m}$ .

**भाग 2:** आकृती 2.26 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, बो चे संकेतन वापरून आता बल दिशेच्या दोन्ही बाजूंना वर्णमालेतील अभिन्न ठळक अक्षरे द्या. प्रतिक्रिये बले ही देखील बलासारखेच गृहीत करा.

**भाग 3:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, सर्व भार सदिश रीतीने एका नंतर एक अशा पद्धतीने काढून सदिश आकृती तयार करा. ह्यामध्ये त्या भारांचे परिमाण लांबीने दाखवली जाते आणि परिमाण आणि ठिकाण काढण्यासाठी योग्य बलांच्या प्रमाणात जसे  $1\text{cm} = \text{--- N or kN}$

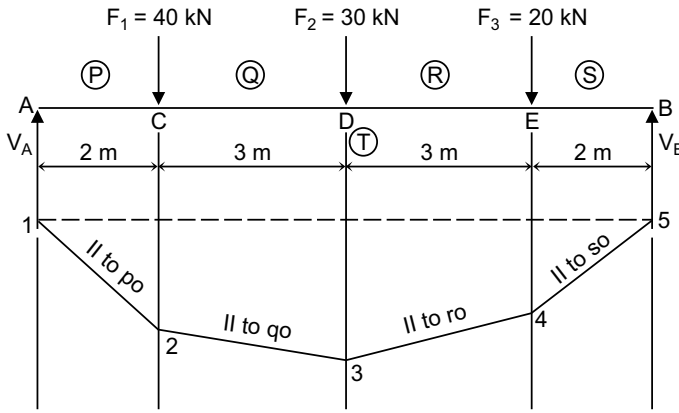
**भाग 4:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, एक सोयीस्कर बिंदू O घेऊन त्यावर सदिश आकृतीमधील सर्व बिंदू O बिंदूशी जोडा.

**भाग 5:** आकृती 2.26 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे,  $R_A$  येथील बिंदू 1 पासून “op” ला समांतर  $F_1$  येथील बिंदू 2 पर्यंत रेषा काढा. आता बिंदू 2 पासून “oq” ला समांतर  $F_2$  येथील बिंदू 3 पर्यंत रेषा काढा. त्याचप्रमाणे 3 – 4, 4 – 5 ह्या रेषा “or” आणि “os” ला समांतर काढा.

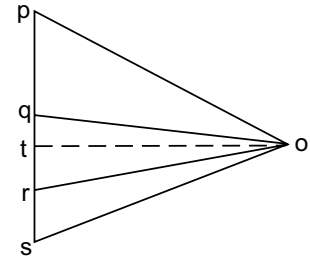
**भाग 6:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आता सुरुवातीचा बिंदू 1 आणि शेवटचा बिंदू 5 हे बिंदू रेखेने एकमेकांशी जोडा. आता 1 – 5 ह्या रेषेला समांतर सदिश आकृती मध्ये O ह्या बिंदूमधून “ot” ही रेषा बिंदू रेखेने काढा.

**भाग 7:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आता “pt” आणि “ts” ह्यांची लांबी मोजा आणि सदिश आकृती मध्ये घेतलेल्या प्रमाणानुसार ह्या लांबीवरून  $R_A$  आणि  $R_B$  ही प्रतिकारी बले शोधा.

**उदाहरण 13:** उदाहरण 7 मध्ये विश्लेषण पद्धतीने सोडविलेले उदाहरण आलेखी पद्धतीने सोडवा.



(अ) योग्य रेषीय प्रमाणात अंतराळ आकृती



(ब) योग्य बलांच्या प्रमाणात सदिश आकृती

आकृती 2.27

**उत्तर:**

**भाग 1:** आकृती 2.27 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, तुळईवर (वस्तूवर) कार्यरत असलेले सर्व भार त्यांचे ठिकाण, परिमाण आणि दिशा ह्यादेखील लक्षात घेऊन अंतराळ आकृती काढा. ह्यासाठी योग्य रेषीय प्रमाण  $1 \text{ cm} = 1 \text{ m}$  प्रमाण निवडा.

**भाग 2:** आकृती 2.27 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, बो चे संकेतन वापरून आता बल दिशेच्या दोन्ही बाजूंना वर्णमालेतील अभिन्न ठळक अक्षरे द्या. प्रतिक्रीय बले  $V_A$  आणि  $V_B$  ही देखील बलासारखेच गृहीत करा. येथे  $F_1 = 40 \text{ kN}$  साठी “P” आणि “Q”,  $F_2 = 30 \text{ kN}$  साठी “Q” आणि “R”, आणि,  $F_3 = 20 \text{ kN}$  करिता “R” आणि “S”,  $V_B$  करिता “S” आणि “T” आता शेवटी  $V_A$  साठी “T” आणि “P” हे संकेत दिले आहेत. आता म्हणून  $F_1$  चे नाव  $F_{pq}$  असे होईल आणि त्यासारखे इतर.

**भाग 3:** आकृती 2.27 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, सर्व भार सदिश रीतीने एका नंतर एक अशा पद्धतीने काढून बलांच्या प्रमाणात जसे  $1 \text{ cm} = 20 \text{ kN}$  सदिश आकृती तयार करा. सुरुवातीचा बिंदू “p” पासून  $F_{pq}$  ह्या बलाच्या समांतर (ह्यामध्ये उभी खालील दिशेत) आणि त्याचा परिणाम  $40 \text{ kN}$  असल्याने  $2 \text{ cm}$  लांबित काढल्याक बिंदू “q” मिळेल. ह्याचप्रमाणे  $F_2 = F_{qr} = “q”$  पासून “r”,  $F_3 = F_{rs} = “r”$  पासून “s” काढा.



Graphical method for Parallel Force System

**भाग 4:** आकृती 2.27 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, एक सोयीस्कर बिंदू O घेऊन त्यावर सदिश आकृतीमधील सर्व बिंदू O बिंदूशी जोडा जसे op, oq, or, os इत्यादी.

**भाग 5:** आकृती 2.27 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे,  $R_A$  येथील बिंदू 1 पासून “op” ला समांतर  $F_1$  येथील बिंदू 2 पर्यंत रेषा काढा. आता बिंदू 2 पासून “oq” ला समांतर  $F_2$  येथील बिंदू 3 पर्यंत रेषा काढा. त्याचप्रमाणे 3 – 4, 4 – 5 ह्या रेषा “or” आणि “os” ला समांतर काढा.

**भाग 6:** आकृती 2.27 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आता सुरुवातीचा बिंदू 1 आणि शेवटचा बिंदू 5 हे बिंदू रेखेने एकमेकांशी जोडा. आता 1 – 5 ह्या रेषेला समांतर सदिश आकृती मध्ये O ह्या बिंदूमधून “ot” ही रेषा बिंदू रेखेने काढा.

**भाग 7:** आकृती 2.27 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आता “pt” आणि “ts” ह्यांची लांबी मोजा आणि सदिश आकृती मध्ये घेतलेल्या प्रमाणानुसार ह्या लांबीवरून  $R_A$  आणि  $R_B$  ह्या प्रतिकारी बले शोधा.

$$V_A = pt \times \text{force scale} = 2.6 \text{ cm} \times 20 = 52 \text{ kN} \quad \&$$

$$V_B = ts \times \text{force scale} = 1.9 \text{ cm} \times 20 = 38 \text{ kN}$$

आलेखीय पध्दतीने आलेले उत्तर हे विश्लेषणात्मक पद्धतिचा वापर करून आलेल्या उत्तरापासून 5% ते 10% कमी असते आणि हे चालेल.

## सारांश

- **वस्तु समतोल:** जर एका वस्तूवर कार्यरत असलेल्या वेगवेगळ्या सर्व बलांचे परिणामी बल आणि परिणामी मोमेंट हे दोन्हीही वस्तूच्या कोणत्याही बिंदूवर बेरीज केल्यास जर शून्य असतील तर ती वस्तु समतोल (equilibrium) असेल असे म्हणता येईल.
- **समातोलक बल:** जर परिणामी बल किंवा परिणामी मोमेंट दोन्हीपैकी कोणतेही शून्य नसेल तर ती वस्तु समतोल नसेल आणि अशा अवस्थेमध्ये त्या वस्तूला समतोल करण्याकरिता जे बल वस्तूवर लावावे लागेल त्याला समातोलक बल (equilibrant force) असे म्हणतात.
- **विश्लेषण (analytical) पद्धतीच्या वस्तु समतोल असण्याच्या अटी:** (1)  $\sum H = 0$  (2)  $\sum V = 0$  आणि (3)  $\sum M = 0$ .
- **मुक्त संरचना आणि संरचनेची मुक्त आकृती:** संरचनेच्या समतोलासाठी संरचनेची मुक्त आकृती (free body diagram) त्याच्या सभोवतलातील इतर भाग आणि वेगवेगळे आधार (supports) बाजूला करून रेकांकित केली जाते. त्या वस्तूवर कार्यरत असलेली सर्व बले, बाह्यरित्या लागू करण्यात आलेली बले, त्यांचे परिमाण, दिशा आणि त्यांची जागा किंवा स्थिती त्यातील वस्तूंचे वजन, आधावर तयार होणाऱ्या संतुलित अभिक्रिया (reactions at the supports), त्यांचे परिमाण आणि कोन अशा साराव बाबी त्या आकृतीमध्ये दाखविलेल्या असतात. जर एखाद्या संरचेवर संपाती बलप्रणाली कार्यरत असेल तर अशा संरचनेला बिन्दुद्वारे दर्शविले जाते. संरचनेची मुक्त आकृती काढताना आधावर तयार होणाऱ्या संतुलित अभिक्रियांचा प्रकार कसा असेल हे लक्षात घेणे गरजेचे आहे.
- **लॅमीचे प्रमेय:** एखाद्या वस्तूच्या कोणत्याही बिंदूवर जर समतल आणि संपाती बलप्रमाणे तीन बले कार्यरत असतील आणि ती वस्तु समतोल असेल तर त्यातील प्रत्येक बल हे राहिलेल्या दोन बलांच्या साइन मध्ये प्रमाणित असते.

- **आधाराचे प्रकार (Types of supports):** रचना किंवा त्यांचे घटक विविध प्रकारच्या आधारांनुसार आधारित केले जाऊ शकतात जे खालीलप्रमाणे त्यांच्याद्वारे दिलेल्या संतुलित अभिक्रियेचे बलावरून वर्गीकृत केले जाऊ शकतात. (अ) रूळाकारी आधार (ब) सरल आधार (क) बिजागरिचा आधार (ड) बंध आधार.
- **भाराचे प्रकार (Types of loading):** भाराचे महत्त्वपूर्ण प्रकार पुढीलप्रमाणे आहेत (अ) सकेंद्रीत भार किंवा बिंदू भार (Point Load) (ब) समवितरित भार (Uniformly Distributed Load) (क) समभारीत परिवर्ती भार (Uniformly Varying Load) (ड) आघूर्ण (मोमेंट/ moment) (इ) बलयुग्म (कपल/ couple).
- **तुळईचे प्रकार (Types of Beam):** बीमचे मुख्यत्वेकरून दोन प्रमाणात वर्गीकरण करण्यात येते: स्थैतिक निर्धार्य तुळई (Statically Determinate Beam) (ब) स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई (Statically Indeterminate Beam).
- **स्थैतिक निर्धार्य तुळई (Statically Determinate Beam):** जर तुळईच्या अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही समतोल अटींच्या संख्येपेक्षा कमी केंव्हा तेवढीच असेल तर अशा तुळईला स्थैतिक निर्धार्य तुळई (statically Determinate Beam) असे म्हणतात. त्याचे प्रकार खालीलप्रमाणे आहेत: (1) सरळ आधारित तुळई (Simply Supported Beam) (2) प्रबाहु तुळई (Cantilever Beam) (3) प्रक्षेपित तुळई (Overhanging Beam).
- **स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई (Statically Indeterminate Beam):** जर तुळईच्या अज्ञात प्रतिक्रियांची संख्या ही समतोल अटींच्या संख्येपेक्षा जास्त असेल तर अशा तुळईला स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई (Statically Indeterminate Beam) असे म्हणतात. त्याचे प्रकार खालीलप्रमाणे आहेत: (1) टेकू दिलेला प्रबाहु (Propped Cantilever) (2) अनेकाधार तुळई किंवा सलग तुळई (Continuous Beam) (3) बद्ध तुळई (Fixed Beam).
- **तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया (Beam Reactions):** तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया खालील दोन पद्धतीने शोधता येवू शकते. (1) विश्लेषणात्मक पद्धति (2) आलेखीय पद्धति.
- **विश्लेषणात्मक पद्धति:** विश्लेषणात्मक पद्धतिमध्ये समतोल अटींचा वापर करून आधारावरील अज्ञात प्रतिक्रिया शोधल्या जातात ज्याची चर्चा ह्या पाठात केलेली आहे.
- **आलेखीय पद्धति:** या आलेखी (ग्राफिकल) पद्धतीला फनिक्युलर पॉलीगॉन मेथड असेही म्हणतात.
- **बो यांची संकेत लिपी (Bow's Notations):** खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे भार किंवा बल हे त्याच्या दोन बाजूस (अंतराळात) अभिन्न ठळक अक्षरे देऊन त्यास ओळखले जाते.
- **अंतराळ आकृती (Space Diagram):** ज्या आकृतीमध्ये वस्तूवर कार्यरत असलेले सर्व भार त्यांचे ठिकाण, परिमाण आणि दिशा ह्यादेखील लक्षात घेऊन दाखविलेले असतात त्या आकृतीस अंतराळ आकृती म्हणतात. ह्यामध्ये त्या भारांचे परिमाण लांबीने दाखवली जाते आणि परिमाण आणि ठिकाण काढण्यासाठी योग्य रेषीय प्रमाणात जसे  $1\text{ cm} = \text{_____ m}$  ह्या पद्धतीने काढतात.
- **सदिश आकृती (Vector Diagram):** वस्तूवर कार्यरत असलेले सर्व भार सदिश रीतीने एका नंतर एक अशा पद्धतीने काढले जातात. त्यांची दिशा ह्या त्यांच्या मुळ दिशेनुसार काढल्या जातात आणि बलाचे परिमाण हे योग्य बलांच्या प्रमाणात जसे  $1\text{ cm} = \text{_____ N or kN}$ .
- **आलेखीत पद्धती (फनिक्युलर पॉलीगॉन पद्धती)** काढताना वापरले जाणारे क्रम (आकृती 2.26)

- **भाग 1:** आकृती 2.26 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, तुळईवर (वस्तूवर) कार्यरत असलेले सर्व भार त्यांचे ठिकाण, परिमाण आणि दिशा ह्यादेखील लक्षात घेऊन अंतराळ आकृती काढा. ह्यासाठी योग्य रेषीय प्रमाण निवडा. जसे  $1\text{cm} = \underline{\hspace{1cm}} \text{m}$ .
- **भाग 2:** आकृती 2.26 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, बो यांची संकेत लिपी वापरून आता बल दिशेच्या दोन्ही बाजूंना वर्णमालेतील अभिन्न ठळक अक्षरे द्या. प्रतिक्रीय बले ही देखील बलासारखेच गृहीत करा.
- **भाग 3:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, सर्व भार सदिश रीतीने एका नंतर एक अशा पद्धतीने काढून सदिश आकृती तयार करा. ह्यामध्ये त्या भारांचे परिमाण लांबीने दाखवली जाते आणि परिमाण आणि ठिकाण काढण्यासाठी योग्य बलांच्या प्रमाणात जसे  $1\text{cm} = \underline{\hspace{1cm}} \text{N or kN}$
- **भाग 4:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, एक सोयीस्कर बिंदू O घेऊन त्यावर सदिश आकृतीमधील सर्व बिंदू O बिंदूशी जोडा.
- **भाग 5:** आकृती 2.26 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे,  $R_A$  येथील बिंदू 1 पासून “op” ला समांतर  $F_1$  येथील बिंदू 2 पर्यंत रेषा काढा. आता बिंदू 2 पासून “oq” ला समांतर  $F_2$  येथील बिंदू 3 पर्यंत रेषा काढा. त्याचप्रमाणे 3 – 4, 4 – 5 ह्या रेषा “or” आणि “os” ला समांतर काढा.
- **भाग 6:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आता सुरुवातीचा बिंदू 1 आणि शेवटचा बिंदू 5 हे बिंदू रेखेने एकमेकांशी जोडा. आता 1 – 5 ह्या रेषेला समांतर सदिश आकृती मध्ये O ह्या बिंदूमधून “ot” ही रेषा बिंदू रेखेने काढा.
- **भाग 7:** आकृती 2.26 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आता “pt” आणि “ts” ह्यांची लांबी मोजा आणि सदिश आकृतीमध्ये घेतलेल्या प्रमाणानुसार ह्या लांबीवरून  $R_A$  आणि  $R_B$  ह्या प्रतिकारी बले शोधा.

## गृहपाठ

### (अ) वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- एका बिंदूवर एकापेक्षा जास्त भार कार्यरत असतील तर ते समतोल कधी असतील?  
 (अ) सर्वांची बेरीज शून्य असेल  
 (ब) दोन वेगवेगळ्या लंब दिशेमधील सर्व भारांच्या आडवे आणि उभे घटकांची बेरीज त्या - त्या घटकाच्या दिशेमध्ये शून्य असेल  
 (क) कोणत्याही दोन लंब दिशांमध्ये निराकरण केलेल्या भागाची बेरीज दोन्ही शून्य आहेत.  
 (ड) त्या सर्वांचा सारखाच कल आहे.
- दोन एकरेषीय नसलेले समांतर समान बल उलट दिशेने कार्य करतात  
 (अ) एकमेकाला समतोल करतात (ब) बलयुग्म (कपल) तयार करतील  
 (क) आघूर्ण (मोमेंट) तयार करतील (ड) परिणामी बलयुग्म (कपल) तयार करतील
- लॅमीच्या प्रमेयाप्रमाणे  
 (अ) एका बिंदूवर कार्य करणारी तीन बले संतुलनात असतील  
 (ब) एका बिंदूवर कार्य करणाऱ्या तीन बले त्रिकोणाद्वारे दर्शविले असतील तर, प्रत्येक बाजू बल प्रमाणात असते.

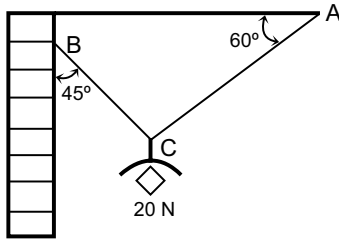
- (क) जर कणावर कार्य करणाऱ्या तीन बलांचे क्रमानुसार लिकोणाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने प्रतिनिधित्व केले गेले तर ते समतोल असेल
- (ड) एका बिंदूवर कार्य करणारी तीन बले समतोल असल्यास प्रत्येक बल इतर दोन दरम्यानच्या कोनाच्या सापेक्ष असते.
4. एकप्रतलीय असंपाती बलप्रणालीमध्ये समतोलतेसाठी आवश्यक आणि पुरेशा अटी आहेत.
- (अ)  $\Sigma H = 0$  (ब)  $\Sigma V = 0$
- (क)  $\Sigma H = 0$  आणि  $\Sigma V = 0$  (ड)  $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0$  &  $\Sigma M = 0$
5. बलयुग्म (कपल) कशामुळे निर्माण होते?
- (अ) दोन समान परिमाण असलेले समानांतर बले (ब) भिन्न परिमाणांच्या दोन सारखे समांतर बले
- (क) दोन समान परिमाणांच्या समांतर नसलेली बले (ड) दोन भिन्न परिमाणांच्या समांतर भिन्न दिशेमध्ये कार्यरत बले.
6. खालीलपैकी कोणते बलयुग्मचे (कपलचे) उदाहरण आहे
- (अ) शाईच्या बाटलीचे टोपण फिरवणे. (ब) स्क्रू ड्रायव्हर फिरविणे.
- (क) कार चालवीत असताना (ड) ह्यापैकी सर्व
7. जर तुळईचा एक आधार बंध आधार असेल आणि दुसरे मुक्त अंत असेल तर ती तुळई कोणती
- (अ) सरळ आधारित तुळई (ब) प्रबाहु तुळई
- (क) प्रक्षेपित तुळई (ड) बद्ध तुळई
8. ज्या तुळईच्या सर्व लांबीवर समभारीत परिवर्ती भार कार्यरत असेल तर त्या प्रकारच्या भाराचा प्रकार कोणता?
- (अ) समभारीत परिवर्ती भार (ब) बिंदू भार
- (क) सकेंद्रीत भार (ड) समवितरित भार
9. जर एखाद्या आधारावर आडवे आणि उभे असे दोन प्रतिक्रिया भार असतील तर त्या आधारस काय म्हणाल?
- (अ) सरल आधार (ब) बिजागरिचा आधार
- (क) रूळाकारी आधार (ड) बंध आधार

[उत्तरे: (1-क), (2-ड), (3-ड), (4-ड), (5-क), (6-ड), (7-क), (8-ड), (9-ब), (10-अ), (11-ड), (12-क), (13-क), (14-ड), (15-ड)]

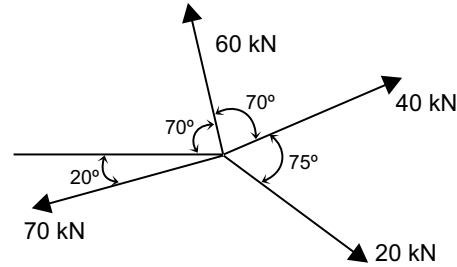
### (ब) व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न

- खालील मुद्ये स्पष्ट करा: (अ) अंतराळ आकृती (ब) संरचनेची मुक्त आकृती (क) सदिश आकृती
- समतोल असलेल्या भारांच्या व्यवस्थेसाठी परिणामी भाराचे / बलाचे मूल्य काय असेल?
- बलांचा समतोल आणि बलांची समतोलकता ह्यातील बदल स्पष्ट करा.
- संपाती बलप्रणालीसाठी वस्तु समतोल असण्याच्या अटींची यादी करा.
- लॅमीचे प्रमेय सांगा.
- समतोलच्या अटी आकृतीआधारे स्पष्ट करा.
- बीमचे/ तुळईचे वेगवेगळे प्रकार आकृती काढून स्पष्ट करा.
- आघूर्ण (मोमेंट/ moment) (इ) बलयुग्म (कपल/ couple) ह्यातील फरक स्पष्ट करा.

9. आधारांचे वेगवेगळे प्रकार आणि तुळईचे वेगवेगळे प्रकार आकृती काढून स्पष्ट करा.
10. तुळईचे आणि त्यावर कार्यरत असू शकतील अश्या भारांचे/ बलांचे वेगवेगळे प्रकार आकृती काढून स्पष्ट करा.
11. दोन व्यक्ती वजनासाठी निश्चित केलेल्या दोन दोरीच्या सहाय्याने 2 kN वजन उचलतात. एक दोरखंड त्यांच्या शिरोबिंदूसह  $45^\circ$  आणि दुसरा  $30^\circ$  वर झुकलेला आहे. प्रत्येक दोरीमध्ये ताण शोधा. [उत्तर: 1.04 kN आणि 1.46 kN]
12. एक गुळगुळीत गोल W गुळगुळीत उभ्या भिंतीवर बिंदू A पर्यंत जोडलेल्या स्ट्रिंगद्वारे बांधलेले आहे, दुसरे टोक भिंतीवरील बिंदू B च्या संपर्कात आहे. जर स्ट्रिंग AC ची लांबी गोलाच्या त्रिज्येच्या समान असेल तर, तार आणि तणावामध्ये तणाव शोधा. [उत्तर: 1.155 आणि 0.577 W]
13. 50 N वजनाचा गोलाकार चेंडू 500 mm लांब सुतळीने उभा टांगलेला आहे. बलाचे कमीतकमी परिमाण आणि दिशा शोधा, जो चेंडू 100 mm वरून सर्वात कमी बिंदूवर ठेवू शकतो. त्या बिंदूवर सुतळीमधील तणाव देखील शोधा. [उत्तर: 30 N सुतळीपासून  $90^\circ$  कोनात, 40 N]
14. W वजनाचा गोलाकार चेंडू त्रिकोणी खाच्यामध्ये स्थिर परिस्थितीमध्ये आहे आणि त्या खाच्याच्या बाजू आडव्या रेषेतून  $\alpha$  आणि  $\beta$  कोनात झुकलेले असते. चेंडूच्या खाच्याच्या संपर्काच्या पृष्ठभागावर प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर:  $W \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta)$ ,  $W \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$ ]
15. आकृती 1 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे 20 N वजनाची इलेक्ट्रिक लाइट फिक्स्चर AC आणि BC या दोन तारांच्या बिंदू C वरून लटकलेला आहे. तार AC चा क्षैतिज कोन  $60^\circ$  आणि BC चा क्षैतिज कोन  $45^\circ$  इतका आहे. लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून, तार AC आणि BC ह्या तारांमधील बल शोधा. [उत्तर: 14.641N आणि 10.352N]



आकृती (1)

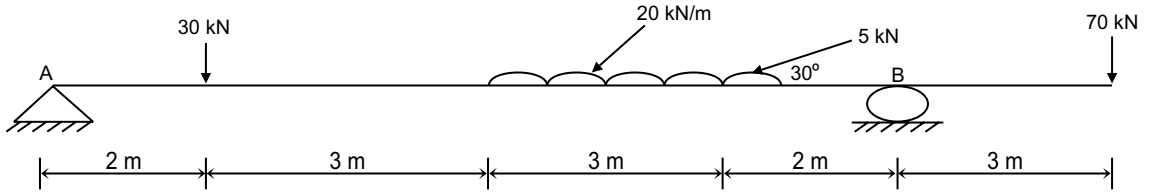


आकृती (2)

16. आकृती 2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कार्यरत असलेली एकसंपाती बलप्रणाली समतोल आहे. व्यवस्थित रेखाटन करून समतोल बलाचा परिमाण आणि दिशा मोजा. [उत्तर: 61 kg आणि + X अक्षाच्या  $14.92^\circ$  कोनात घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेत]
17. एक प्रबाहु तुळई ACB ज्याची लांबी 5 m आहे ज्याच्यावर डाव्या A ह्या बंध आधारापासून AC ह्या भागात 3m लांबीत 10 kN/m इतका समभारीत परिवर्ती भार (UDL) कार्यरत आहे, बिंदू C वर 50 kN सकेंद्रीत भार आणि B ह्या मुक्त शेवटावर 50 kN.m आघूर्ण (मोमेंट) कार्यरत आहे तर तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर:  $H_A = 0$ ,  $V_A = 80$  kN,  $M_A = 245$  kN.m (घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने)]
18. एका सरळ आधारित AB तुळईची लांबी 4 m आहे आणि त्यावर डाव्या बाजूच्या आधार A पासून अनुक्रमे 1 m, 2 m आणि 3 m ह्या बिंदूवर 5 kN, 2 kN आणि 3 kN असे सकेंद्रीत भार कार्यरत आहेत. तुळईच्या A आणि B आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 5.5 kN आणि 4.5 kN]

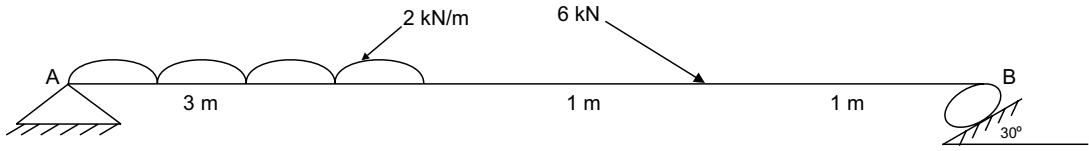


19. एका सरळ आधारित AB तुळईची लांबी 6 m आहे आणि त्यावर उजव्या बाजूच्या आधार B पासून 3 m लांबीपर्यंत 2 kN/m इतका समभारीत परिवर्ती भार (UDL) कार्यरत आहे. तुळईच्या A आणि B आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 1.5 kN आणि 4.5 kN]
20. एका AB ह्या प्रक्षेपित तुळईची लांबी 6 m असून दोन्हीही आधार सरळ आधार असून 4 m अंतरावर आहेत. उजव्या बाजूचा मुक्त शेवट 2 m लांबीचा आहे. ह्या तुळईवर पूर्ण लांबीवरती 1 kN/m इतका समभारीत परिवर्ती भार (UDL) कार्यरत आहे. तुळईच्या A आणि B आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 1.5 kN आणि 4.5 kN]
21. एका सरळ आधारित AB तुळईची लांबी 8 m आहे आणि त्यावर 50 kN आणि 100 kN असे दोन सकेंद्रीत भार प्रत्येक आधारापासून 2 m अंतरावर कार्यरत आहेत. त्याचप्रमाणे ह्या तुळईच्या सर्व लांबीवर 20 kN/m इतका समभारीत परिवर्ती भार (UDL) कार्यरत आहे. तुळईच्या A आणि B आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 142.5 kN आणि 167.5 kN]
22. आकृती 3 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, प्रक्षेपित तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 4.33 kN, 24.5 kN आणि 138 kN]



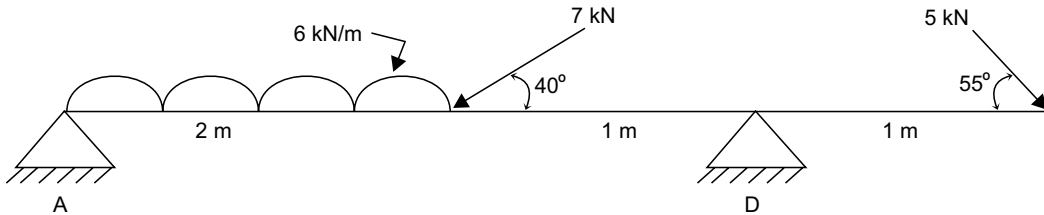
आकृती 3

23. आकृती 4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 0.695 kN, 5.12 kN आणि 6.32 kN]



आकृती 4

24. आकृती 5 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधा. [उत्तर: 2.49 kN, 8.13 kN आणि 12.46 kN]



आकृती 5

## प्रात्यक्षिके

### प्रात्यक्षिक 11: लॅमीचे प्रमेय (विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धती)

#### 11.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

लॅमीच्या प्रमेयाची पडताळणी करून घेणे.

#### 11.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

लॅमीच्या प्रमेयाची पडताळणी करून घेणे.

#### 11.3 संबंधित पाठ

समतोल: जर एका वस्तूवर कार्यरत असलेल्या सर्व बलांचे परिणामी बल आणि परिणामी आघूर्ण (मोमेंट) हे दोन्हीही, वस्तूच्या कोणत्याही बिंदूवर बेरीज केल्यास जर शून्य असतील तर ती वस्तु समतोलात (equilibrium) आहे असे म्हणता येईल. एका वस्तूवर तीन बले कार्यरत असतील आणि ती वस्तु समतोल असेल तर त्याची समतोलकता प्रात्यक्षिकाद्वारे तसेच विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने खालीलप्रमाणे शोधता येते.

**विश्लेषणात्मक पद्धतीने:** लॅमीचे प्रमेय: एखाद्या वस्तूच्या कोणत्याही बिंदूवर जर समतल आणि संपाती बलप्रमाणे तीन बले कार्यरत असतील आणि ती वस्तु समतोल असेल तर त्यातील प्रत्येक बल हे राहिलेल्या दोन बलांच्या कोनाच्या साइन मध्ये प्रमाणित असते.

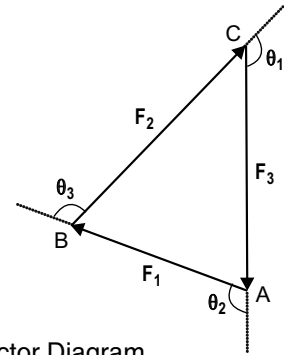
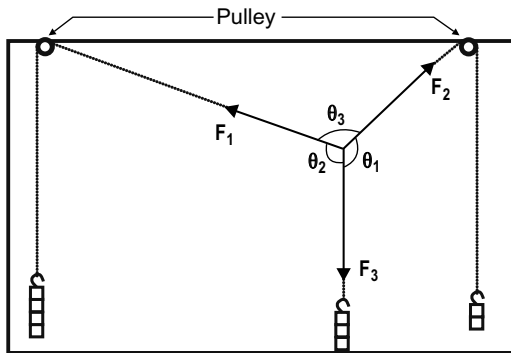
**आलेखीय पद्धतीने:** बलांच्या त्रिकोणाचा कायदा: जर एखाद्या वस्तूवरील एका बिंदूवर कार्यरत असलेल्या दोन बलांचे परिमाण आणि त्यांची दिशा त्रिकोणाच्या दोन बाजूंनी दर्शविलेल्या असतील तर त्या त्रिकोणाच्या राहिलेल्या तिसऱ्या बाजूच्या उलटक्रमामध्ये ती तिसरी बाजू पहिल्या दोन बलांच्या परिणामी बलाचे परिमाण आणि त्याची दिशा यांचे प्रतिनिधित्व करते

#### 11.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: लॅमीचे प्रमेय समजून घेणे.

PrO2: विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने लॅमीचे प्रमेय समजून घेणे.

#### 11.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना



Vector Diagram

### 11.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	रेखाचित्र तयार करण्याचा बोर्ड	1		
2.	रेखाचित्र तयार करण्याची शीट	1		
3.	पुली आणि पुली बांधण्याची उपकरणे	2		
4.	खाच असलेले वजनाचे संच आणि आलंब	3		
5.	नायलॉनच्या दोऱ्या आणि आरसा	3		
6.	पिन्स आणि चिकट पट्टी	लागेल तितके		

### 11.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

1. तीन बलांमधील एकमेकांचा कोन काळजीपूर्वक मोजा.
2. सदिश आकृती काढताना बलांचे परिमाण लांबीने दाखविले जाते आणि परिमाण आणि ठिकाण काढण्यासाठी योग्य बलांचे प्रमाण घ्या आणि कोन काळजीपूर्वक काढा.

### 11.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. रेखाचित्र तयार करण्याचा बोर्ड उभ्या भिंतीवर टांगून घ्या.
2. बोर्डच्या वरच्या बाजूला योग्य अशा अंतरावर दोन पूली घट्टपणे बसावा.
3. चिकट पट्टीच्या वापर करून बोर्डवर रेखाचित्र तयार करण्याची शीट घट्टपणे बसावा.
4. आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे तीन नायलॉनच्या दोऱ्यांच्या एका बाजूस तीन खाच असलेली वजने लावून घ्या जेणेकरून समतल समवर्ती बल प्रणाली निर्माण होईल.
5. जेव्हा सदरची बलप्रणाली समतोल परिस्थितीमध्ये तयार होईल तेव्हा आरसा आणि शीसपेन्सिलचा वापर करून प्रत्येक नायलॉनच्या दोऱ्यांची स्थिती रेषेद्वारे शीटवर काढून घ्या.
6. ह्याप्रमाणे ह्या तीन बलांचे परिमाण लिहून घ्या आणि ह्या तीनही बलांची दिशा शीटवर काढून घ्या.
7. अशाचप्रकारे आता तिन्ही बलांच्या परिमाणामध्ये बदल करून वेगवेगळ्या बल प्रणाली तयार करा आणि क्रमांक 4, 5 आणि 6 पुन्हा चार वेळा वेगवेगळ्या बल प्रणालीच्या आकृत्या तयार करून घ्या.
8. आता लावण्यात आलेली बले  $F_1$ ,  $F_2$  आणि  $F_3$  रेखाचित्र तयार करण्याच्या शीटवर जेथे त्याचे बिंदू काढलेले आहेत त्यांना जोडून काढून घ्या.
9. बलाच्या त्रिकोणाचा कायदा वापरून,  $F_1$ ,  $F_2$  आणि  $F_3$  ह्या बलांचा आलेख काढून एक त्रिकोण काढा ज्यामध्ये ह्या बलांची स्थिती आणि त्यांचे परिमाण AB, BC आणि CA ह्या त्रिकोणाच्या तीन बाजूंप्रमाणे दाखविता येतील ज्यामध्ये  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  आणि  $\theta_3$  हे कोन त्या तीन बलांची दिशा दर्शवतील. (आलेखीय पद्धतीने आलेली किंमत)

10. लॅमीच्या प्रमेयाची पडताळणी करून घेण्याकरिता लॅमीच्या प्रमेयाच्या सूत्रामध्ये  $F_1$ ,  $F_2$  ह्या दोन बलांचे परिमाण आणि  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  आणि  $\theta_3$  हे तीन बलांचे कोन वापरून तिसरे बल  $F_3$  ह्याचे परिमाण मोजा. (विश्लेषणात्मक पद्धतीने आलेली किंमत)
11. आलेखीय पद्धतीने आणि विश्लेषणात्मक पद्धतीने आलेली  $F_3$  ह्या बलाचे परिमाण ह्याची तुलना करा.

### 11.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

अ. क्र.	बल ( $F_1$ )		बल ( $F_2$ )		बल ( $F_3$ )		परिणामी बल (R)			
	परिमाण (N)	दिशा $\theta_1$	परिमाण (N)	दिशा $\theta_2$	परिमाण (N)	दिशा $\theta_3$	आलेखीय पद्धतीने		विश्लेषणात्मक पद्धतीने	
							परिमाण (N) मध्ये	दिशा $\alpha$	परिमाण (N) मध्ये	दिशा $\alpha$
1.										
2.										
3.										
4.										
5.										

#### नमुना गणना

$$(I) K_1 = \frac{F_1}{\sin \theta_1} =$$

$$(II) K_2 = \frac{F_2}{\sin \theta_2} =$$

$$(III) K_3 = \frac{F_3}{\sin \theta_3} =$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_3}{\sin \theta_3} = K$$

### 11.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

### 11.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

### 11.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

### 11.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

### 11.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

### 11.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

**प्रात्यक्षिक 12:** जीब क्रेनच्या विविध सदस्यांमधील बलांचा अभ्यास करा

**टीप:** खालील 13 आणि 14 ही प्रात्यक्षिके आधी चर्चा केलेल्या प्रात्यक्षिक 10 प्रमाणे करता येतील.

**प्रात्यक्षिक 13:** सरळ आधारित तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया शोधणे.

**प्रात्यक्षिक 14:** सरळ आधारित तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया आलेखीय पद्धतीने शोधणे.

### अधिक माहिती घ्या

- (अ) कोणत्या वेगवेगळ्या अभियांत्रिकी समस्या सोडविण्याकरिता लॅमीचे प्रमेय वापरता येईल?
- (ब) कोणत्या समीकरणांचा तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया शोधल्यानंतर उत्तरे तपासण्याकरिता उपयोग करता येऊ शकतो?
- (क) तुळईच्या आधारावरील संतुलित प्रतिक्रिया विश्लेषणात्मक पद्धतिने शोधल्यानंतर आलेली उत्तरे आलेखी पद्धतीचा वापर करून तपासता येतील का?

### संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन

1. D.S.Bedi, “Engineering Mechanics”; Khanna publications, New Delhi.
2. Khurmi RS, “Applied Mechanics”; S. Chand & Co, New Delhi.
3. Ramamrutham, “Engineering Mechanics”; S. Chand & Co, New Delhi.
4. Bansal RK, “A text book of Engineering Mechanics”; Laxmi publications, New Delhi.
5. Dhade, Jamadar & Walawelkar, “Fundamentals of Applied Mechanics”; Pune VidhyarthiGruh, Pune
6. Meriam JL, Kraige LG, “Engineering Mechanics- statics –Vol.-I”; Wiley publication, New Delhi.
7. Beer, Johnson, Mazurek, Cornwell & Sanghi, “Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics”; Tata McGraw Hill, New Delhi.
8. <https://nptel.ac.in/courses/112/106/112106286/>
9. <https://nptel.ac.in/courses/122/104/122104015/>
10. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLC3A601B6060658D3>

# 3

## घर्षण

### पाठाचा तपशील

ह्या पाठामध्ये खालील भागांचे आपण अध्ययन करणार आहोत:

- घर्षण आणि त्याच्याशी संबंधित तांत्रिक संज्ञा/ शब्दावली
- घर्षणाचे प्रकार
- घर्षणाचे नियम
- आडव्या (क्षैतिज) प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल वस्तू
- वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल

“कृती भाग” अंतर्गत घेतलेले काही उपक्रम; अशा पद्धतीने घेतलेले आहेत की विद्यार्थ्यांना सिद्धांत अधिक चांगल्या प्रकारे समजावेत. “वस्तुनिष्ठ प्रश्न” तसेच मोठ्या संख्येने बहु-पर्यायी प्रश्न (MCQ) तसेच लहान प्रश्न आणि ब्लूमच्या वर्गीकरणानुसार दीर्घ प्रश्न संख्यात्मक समस्यांसह पाठाच्या पुढील अभ्यासकरण्याकरिता “गृहपाठ” ह्या विभागात समाविष्ट केलेले आहेत.

अभियांत्रिकीच्या अनेक शाखांमध्ये भविष्यातील उपयोजनासाठी हा पाठ खूप महत्वाचा आहे आणि विद्यार्थ्यांची पुढील उत्सुकता आणि सर्जनशीलता निर्माण करण्यासाठी व्यावहारिक अनुप्रयोगांवर ह्या पाठामध्ये चर्चा केलेली आहे. अभ्यासक्रमाच्या आवश्यकतेनुसार मर्यादित असलेली काही प्रगत उदाहरणे, विद्यार्थ्यांची समस्या सोडवण्याची क्षमता सुधारण्याच्या दृष्टीने ह्या पाठामध्ये घेतलेली आहेत. ह्या पाठाच्या शेवटी प्रात्यक्षिकांची चर्चा झाल्यानंतर “अधिक माहिती घ्या” हा एक विभाग घेतलेला आहे, जो या पुस्तकाच्या वापरकर्त्यांच्या फायद्यासाठी पुरक माहिती मिळावी ह्या अनुषंगाने त्याची रचना केली गेलेली आहे. विविध विषयांवर अधिक माहिती मिळवण्यासाठी काही QR कोड दिलेले आहेत, जे संबंधित पुढील ज्ञानासाठी स्कॅन करून वापरले जाऊ शकतात. QR कोड संदर्भ अशा प्रकारे निवडले गेलेले आहेत की विद्यार्थ्यांना स्वयम/ NPTEL चे अभ्यासक्रम घेण्यास प्रोत्साहन मिळेल.

### तर्कसंगती

आपण असा विचार केला आहे काय की पळणारे खेळाडू जास्त वेगाने पळता यावे म्हणून कठोर बूट वापरतात आणि जर त्यांनी साधे कॅनव्हास शूज जर वापरले तर ते जास्त वेगाने पळू शकत नाहीत असे का घडते? तुम्ही कधी कप्पीच्या (पुलीच्या) मदतीने विहिरीतून पाणी बाहेर काढण्याचा प्रयत्न केला आहे का? येथे काय घडते?

पळणाऱ्या खेळाडूंना जास्त वेगाने पळता यावे ह्याकरिता त्यांच्या बुटांच्या (शूजच्या) खालील तळवे खास संकल्पित (डिझाइन) केलेले असतात जेणेकरून शूजची जमिनीवर असलेली पकड जास्तीत जास्त असावी आणि त्याची ताकत वाढवावी. साध्या कॅनव्हास शूजमध्ये रबरी तळवे (सोल) वापरले जातात जो कडक सोलच्या तुलनेत गुळगुळीत पृष्ठभाग असतो आणि त्यामुळे जमिनीवर असलेल्या शूजची पकड कमी होते आणि खेळाडू सरकण्याची शक्यता असते.

त्याचप्रमाणे आपण जेव्हा विहिरीतून बादलीमधून पाणी वरती ओढण्याचे काम करतो तेव्हा त्याकरिता लागणारी ताकत ही बादली आणि पाणी ह्यांच्या वजनाच्यापेक्षा जास्ती असावी लागते कप्पीवर बांधलेला दोर बादलीसहित विहिरीत खाली पडेल. अशासारख्या क्रिया योग्य पद्धतीने करिता याव्यात म्हणून घर्षणाच्या संकल्पनेचा वापर करून केल्यास सरकल्याशिवाय करणे शक्य होते. आपण आता घर्षणाबद्दलच्या संकल्पना आणि त्यातील नियम याबद्दल चर्चा करणार आहोत.

### पूर्व अपेक्षित ज्ञान

इयत्ता आठवी ते दहावी मधील बल प्रणाली, भौतिकशास्त्र आणि गणितांच्या मुख्य आणि मुलभूत ज्ञान, आणि ह्या विषयातील पहिल्या दोन पाठांची माहिती आवश्यक आहे.

### पाठाचा परिणाम

ह्या भागाचा अभ्यास पूर्ण झाल्यानंतर तुम्ही खालील गोष्टींकरिता सक्षम व्हाल.

U3-O1: घर्षणाशी संबंधित सर्व शब्दावली स्पष्ट होईल.

U3-O2: व्यावहारिक समस्या किंवा उदाहरणे घर्षण नियमांचे वापर करून सोडवू शकाल.

U3-O3: क्षेत्रीज पृष्ठभाग आणि कललेल्या पृष्ठभागावर कार्यरत वस्तूच्या घर्षणाच्या समस्यांचे विश्लेषण करू शकाल.

### पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण

युनिट-3 परिणाम	कोर्स आऊटकोम्ससह एक्सपेक्टेड मॅपिंग (1-दुर्बलसहसंबंध; 2-मध्यमसंबंध; 3-मजबूतसहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U3-O1	-	-	3	-	-
U3-O2	1	-	3	-	-
U3-O3	1	2	3	-	-

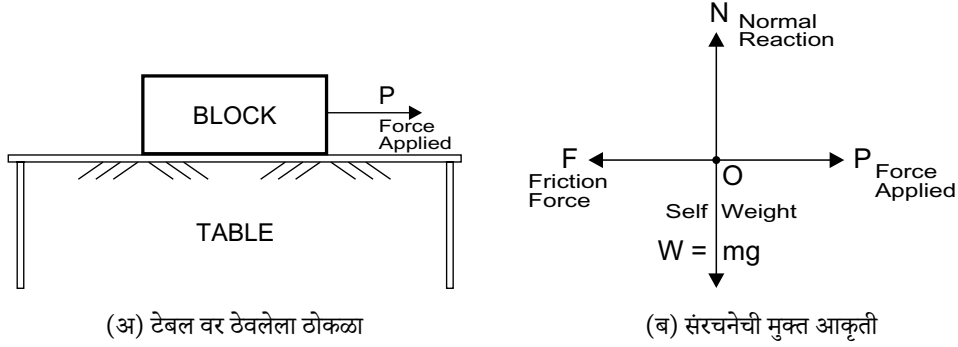
### 3.1 घर्षण

टेबलावर ठेवलेल्या काही वजन असलेल्या वस्तूचा (ठोकळ्याचा) विचार करूया. आकृती 3.1 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे त्या वस्तूवर क्षेत्रीज बाह्य बल P कार्यरत आहे. सदरची वस्तु समतोल असल्यामुळे  $\sum V = 0$  आणि त्यामुळे वस्तूचे वजन W हे टेबलच्या शीर्षस्थानी/ वरच्या बाजूला दिलेल्या सामान्य प्रतिक्रिया N द्वारे समतोल असेल.

∴

$$N = W$$





आकृती 3.1: घर्षण

आता जर ह्या वस्तूला टेबलच्या वरच्या बाजूला वस्तूचा पृष्ठभाग आणि टेबल ह्यांच्या संपर्कामध्ये हलवण्याचा प्रयत्न केला, टेबलचा खरबरीत पृष्ठभाग ह्या वस्तूला हलविण्यासाठी अंतर्गत प्रतिकार करण्याचा प्रयत्न करेल. गतीचा हा प्रतिकार, जो नेहमी गतीला विरोध करतो, ह्याला घर्षण भार किंवा फक्त घर्षण असे म्हणतात आणि त्याला  $F$  मध्ये दर्शविले जाते जसे आकृती 3.1 (ब) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे मुक्त आकृतीमध्ये दाखविले आहे. समतोल अट  $\sum H = 0$  ह्याचा वापर करून हा घर्षण भार वस्तूला हलविण्यासाठी लावलेले बल इतक्या एवढे असेल आणि त्याच्या विरुद्ध दिशेने असेल.

∴

$$F = P$$

घर्षण हे एक असे बल आहे जे सरकण्यास प्रतिकार करते त्याचे वर्णन घर्षण गुणांकानुसार (coefficient of friction) केले जाते आणि जवळजवळ नेहमीच प्रत्येक साहित्याच्या पृष्ठभागासाठी स्थिर आणि विशिष्ट असल्याचे मानले जाते.

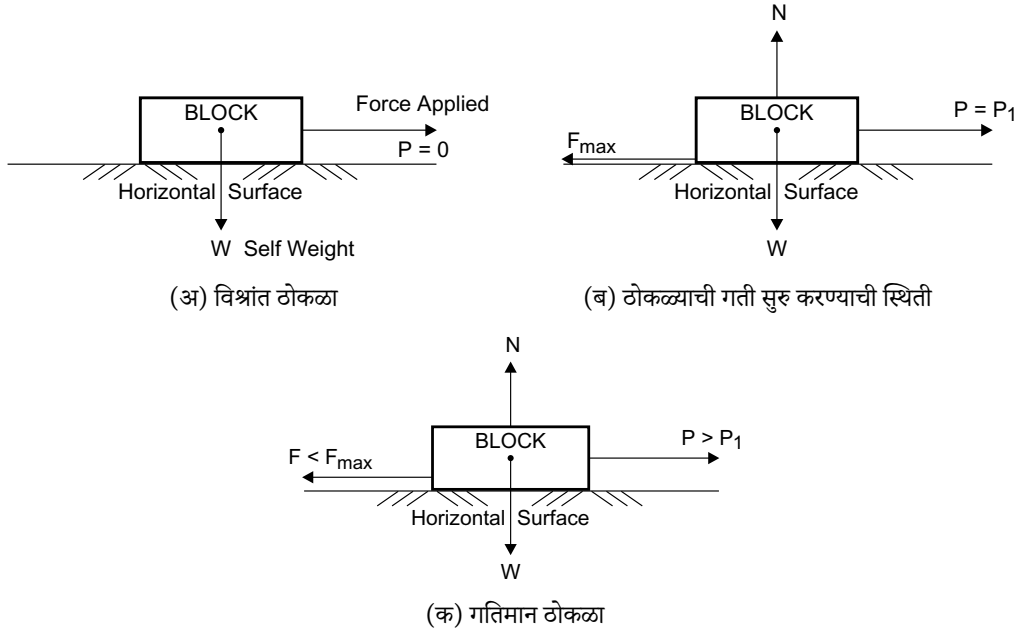
घर्षणाचे वैशिष्ट्य असे आहे की ते दोन पृष्ठभागांच्या संपर्क पृष्ठभागाच्या समांतर असते आणि नेहमी अशा दिशेने असते की एकमेकांच्या सापेक्ष प्रणालींच्या हालचाली किंवा प्रयत्नांच्या गतीला विरोध करते.

जेव्हा आपण वस्तु हलविण्यासाठी भार लावतो तेव्हा वस्तुवर इतका भार लावावा लागतो की जोपर्यंत पेटीचे पृष्ठभागाचे निमुळते टोक संपर्कात येत नाही किंवा संपर्क कमी करू शकत नाही किंवा दोन्हीप्रमाणे. स्पष्ट हालचालीशिवाय घर्षणाने लक्षणीय बलाचा प्रतिकार केला जाऊ शकतो. हे पृष्ठभागावरील या अनियमिततेच्या आंतरपाशनामुळे (interlocking) घर्षण गतीचा प्रतिकार करते. पृष्ठभाग जितके कठीण ढकलले जातात (जसे एका ठोकळ्यावर दुसरा ठोकळा ठेवणे) त्यांना हलविण्यासाठी अधिक बल लावणे आवश्यक होते कारण अनियमिततांचे आंतरपाशन होते. अशाप्रकारे वस्तूला गतिमान करण्यासाठी एक बल आवश्यक असते. काही टोक तुटून जाऊ शकतात किंवा हालचाल तशीच ठेवण्यासाठी बल लागू शकते. हे दोन वस्तूंच्या पृष्ठभागाच्या रेणूमधील चिकट शक्तीमुळे (adhesive force/ आसंगी बल) होते. अगदी गुळगुळीत पृष्ठभागही घर्षण-मुक्त नसतात, चिकट शक्ती देखील पृष्ठभागाच्या बनलेल्या साहित्यावर अवलंबून असते, उदाहरणार्थ रबर-सोलचे शूज लेदर सोल्सच्या तुलनेत कमी सरकतात. एखादी वस्तु अगदी लहान शून्य नसलेल्या वेगाने गतिमान असेल तर अशावेळी घर्षण त्याच्यावर अवलंबून नसते.

**क्रिया 1:** एक लहान प्लास्टिक वस्तू घ्या (जसे की अन्नाचा डबा) आणि टेबलावर हळूवार वरून बल दाबून घसरवा, काय होते ते पहा. आता त्या टेबलावर थोडे पाणी टाका आणि पुन्हा तेच करा, आता काय होते? प्रत्येकवेळी लक्षात आलेली निरीक्षणे लिहा.

### 3.1.1 सीमित घर्षण

आता पुन्हा एकदा आकृती 3.2 (अ) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एक ठोकळा टेबलच्या खरबरीत भूपृष्ठावर ठेवलेला आहे आणि त्याचे वजन  $W$  इतके आहे. या टप्प्यावर ठोकळ्यावर कोणतेही आडवे बल लावलेले नाही म्हणजे  $P = 0$ . त्यामुळे अंतर्गत प्रतिरोधक घर्षण बल  $F$  विकसित होणार नाही म्हणून  $F = 0$  आणि त्यामुळे ठोकळा विश्रांतीच्या परिस्थितीत असेल. आता हळूहळू अधिकाधिक बल  $P$  लावण्याचा जर प्रयत्न केला आणि बल  $P$  वाढविण्याचा प्रयत्न केला तर तितकेच गतीला विरोध करणारे प्रतिकारी बल  $F$  तयार होईल आणि जसे गतीसाठी वापरलेले बल  $P$  जितके असेल तितके प्रतिकारी बल  $F$  तयार होईल. एक टप्पा असा निर्माण होईल की त्यावेळी ठोकळा त्याच्या ठिकाणापासून हलवायला सुरुवात होईल किंवा आपण असे म्हणू शकतो की ठोकळा त्याची विश्रांती स्थिती बदलण्यास सुरुवात करेल, (आसन्न गती/ impending motion)  $P = P_1$  जे आकृती 3.2 (ब) मध्ये दर्शविले आहे. ह्या परिस्थितीमध्ये ठोकळ्याची हालचाल सुरु झालेली नाही परंतु ह्यानंतर जर अगदी कमी बल जसे बोटाने किंवा पेनने काही बल लावले तर ठोकळ्याची हालचाल सुरु होईल. ह्याला आपण आसन्न गती असे म्हणतो ज्यामध्ये घर्षण बल  $F$  हे त्याच्या जास्तीत जास्त घर्षण बलाइतके निर्माण झालेले असेल किंवा सीमित घर्षण बल निर्माण झालेले असेल ( $F_{\max}$ ). आपल्याला असे पाहता येईल की घर्षण बल  $F$  हे स्व-समायोजित असते ज्यामुळे जसे  $P$  हे बल वाढविले तसे घर्षण बल  $F$  हे 0 पासून  $F_{\max}$  पर्यंत वाढले जाईल.



आकृती 3.2: सीमित घर्षण

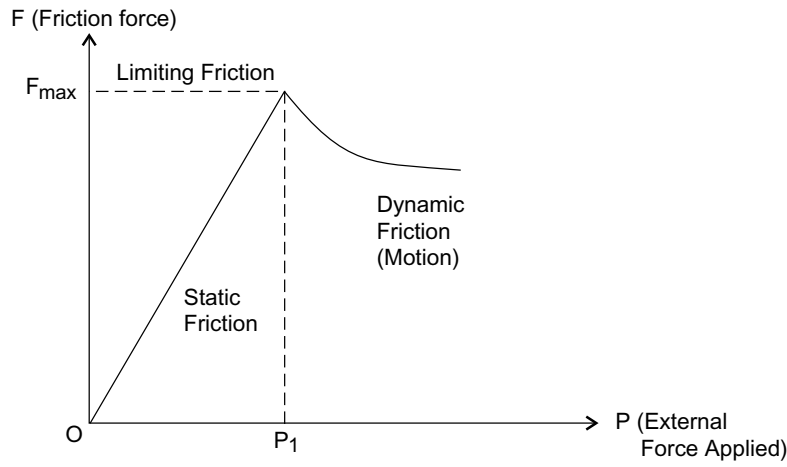
आता जसे बाह्य बल  $P$  हे  $P_1$  पेक्षा थोडे जास्त लावल्यानंतर ठोकळ्याची गती निर्माण होईल. असेदेखील बघण्यात आले आहे की जेव्हा बाह्य बल  $P$  हे  $P_1$  पेक्षा थोडे जास्त लावल्यानंतर घर्षण बल  $F$  कमी होते. आकृती 3.3 मध्ये बाह्य बल  $P$  आणि घर्षण बल  $F$  ह्यामधील संबंध आलेखाद्वारे दर्शविलेला आहे. ह्यात आपण बघू शकता की, जसे  $P$  हे बाह्य बल वाढते तसे घर्षण बल  $F$  हे देखील वाढत जाते जोपर्यंत  $P$  हे  $P_1$  इतके वाढत जाईल.

ह्या स्थितीमध्ये आसन्न गती निर्माण झालेली असेल. ह्या परिस्थितीमध्ये सीमित घर्षण बल ( $F_{\max}$ ) निर्माण झालेले असेल. ह्यामध्ये घर्षणाचा हा गुणधर्म लक्षात येतो की जेव्हा  $P = 0$  असेल तेव्हा  $F = 0$  असेल आणि जसे  $P$  हे बाह्य बल वाढते तसे घर्षण बल  $F$  हे

देखील वाढत जाते आणि ते स्वतःला स्व-समायोजित करून  $F = P$  इतके तयार होते. जेव्हा  $P$  हे  $P_1$  पेक्षा जास्त असते तेव्हा गती निर्माण होते. हेसुद्धा ह्या आलेखाद्वारे दिसते की ह्यापुढे  $P$  वाढले तर घर्षण  $F$  हे कमी होते.

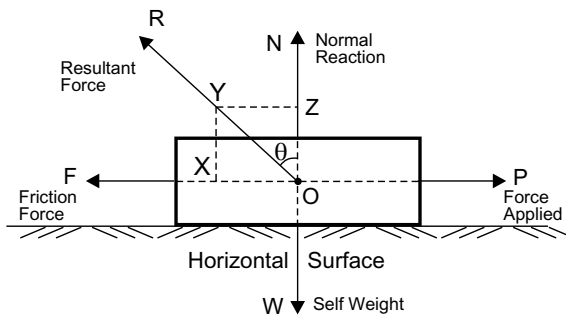
### 3.1.2 घर्षण गुणांक ( $\mu$ )

घर्षण बल हे संपर्कात असलेल्या दोन पृष्ठभागाच्या हालचालीचा प्रतिकार करते. घर्षण बल  $F_{\max}$  आणि लंब प्रतिक्रिया  $N$  ह्यांच्या गुणोत्तराला घर्षण गुणांक असे म्हणतात. त्याच्याकरिता  $\mu$  (म्यु) हे चिन्ह वापरले जाते. विश्लेषणात्मक पद्धतीमध्ये  $\mu = \frac{F_{\max}}{N}$ , ज्यामध्ये  $F_{\max}$  हे घर्षण बल आहे आणि  $N$  ही लंब प्रतिक्रिया आहे.

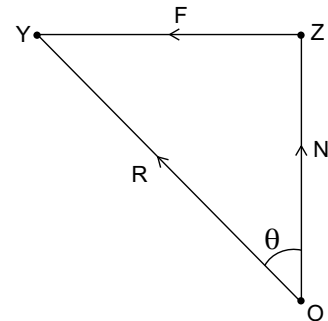


आकृती 3.3:  $F$  आणि  $P$  मधील फरक

### 3.1.3 घर्षणाचा कोन ( $\theta$ )



(अ) क्षेत्रीय पृष्ठभागावरील ठोकळा



(ब) मुक्त संरचना

आकृती 3.4: घर्षणाचा कोन

आकृती 3.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एक ठोकळा क्षेत्रीय पृष्ठभागावर ठेवलेला आहे आणि त्याच्यावर क्षेत्रीय प्रतलाच्या दिशेने खेचाण्याकरिता बल  $P$  लावलेले आहे. ह्यामध्ये  $R$  हे घर्षण बल  $F$  आणि सामान्य प्रतिक्रिया बल  $N$  ह्या दोन बलांचे परिणामी बल आहे आणि ह्यामधील कोन  $\theta$  हे आकृती 3.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे घर्षण कोन आहे.  $OZY$  ह्या त्रिकोणा प्रमाणे,

$$\tan \theta = \frac{ZY}{OZ} = \frac{\text{Friction force}}{\text{Normal reaction}} = \frac{F}{N}$$

ह्यामध्ये जसे P बल वाढवले जाईल त्याच्या बरोबर F हे बल वाढले जाईल आणि त्याचबरोबर  $\theta$  कोनदेखील वाढत जाईल. हा कोन जास्तीत जास्त  $\alpha$  ह्या कोनापर्यंत वाढेल ज्यावेळी घर्षण बल F हे  $F_{\max}$  ह्या सीमित बलापर्यंत वाढेल. ह्यावेळी, कोन  $\theta$  ह्या कोनाला घर्षण कोन  $\alpha$  असे म्हणतात. गणिती पद्धतीने,

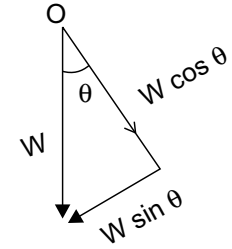
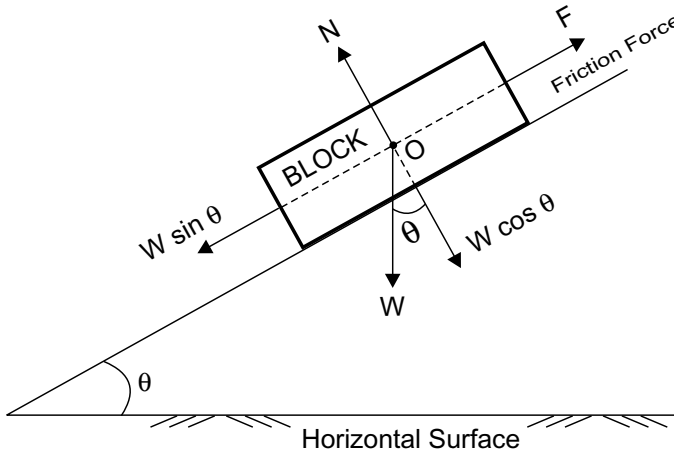
$$\tan \alpha = \frac{F_{\max}}{N} = \mu \text{ (Coefficient of friction)}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\mu)$$



### 3.1.4 स्थैर्य कोन (e)

स्थैर्य कोनाची व्याख्या अशा पद्धतीने करता येईल की, स्थैर्य कोन म्हणजे कललेल्या प्रतलाचा असा किमान कोन की त्यावर ठेवलेली एखादी वस्तू सरकू लागते. आकृती 3.5 मध्ये, आडव्या रेषापासून  $\theta$  ह्या कोनावर कललेल्या पृष्ठभागाच्या प्रतलावर W इतक्या वजनाचा ठोकळा समतोल आहे असे दर्शविले आहे. जर  $\theta$  हा कोन कमी असेल तर ठोकळा विराम अवस्थेत असेल. जर  $\theta$  हा कोन हळू हळू वाढवत नेला तर कधीतरी अशी परिस्थिती तयार होईल की ठोकळा खाली घसरू लागेल. असा कोन ज्यावेळी ठोकळा घसरू लागतो त्याला स्थैर्य कोन असे म्हणतात. म्हणजे जास्तीतजास्त प्रतलाचा कल ज्यावेळी कोणतेही बाह्य बल लावलेले नाही तरीही ती वस्तू खालील दिशेने घसरू लागते त्या कोनास स्थैर्य कोन असे म्हणतात. ह्याकरिता सर्वसाधारणपणे ग्रीक चिन्ह फाय (phi ( $\phi$ )) हे वापरले जाते.



Components of W

आकृती 3.5: स्थैर्य कोन

आकृती 3.5 मध्ये कललेल्या पृष्ठभागावर विराम अवस्थेत असलेला ठोकळा दर्शविला आहे. संपर्कात असलेला पृष्ठभाग हा गुळगुळीत नसेल तर घर्षण बल  $F_r$  आणि लंब प्रतिक्रिया N कार्यरत होतील. ठोकळा खालील दिशेत सरकेल आणि घर्षण बल त्याच्या विरुद्ध दिशेत असेल. विराम अवस्थेत असण्याकरिता लंब दिशेमध्ये कार्यरत बलांचे घटकांची बेरीज शून्य असली पाहिजे त्यामुळे,

$$N = W \cos \theta \quad \dots(i)$$

त्याचप्रमाणे पृष्ठभागाच्या दिशेमधील बलाच्या घटकांची बेरीज शून्य असली पाहिजे त्यामुळे,

$$F = W \sin \theta \quad \dots(ii)$$

जेव्हा वस्तु गती प्राप्त होण्याच्या स्थितीत येते तेव्हा  $\theta$  ची किंमत  $\phi$  इतकी होते आणि  $F$  ची किंमत  $F_{\max}$  इतकी असेल. आपण 3.1.3 मध्ये चर्चा केल्याप्रमाणे  $F_{\max} = \mu N$ . ह्या किंमती समीकरण (1) आणि (2) मध्ये वापरून,

$$W \sin \phi = \mu W \cos \phi$$

$$\tan \phi = \mu = \tan \alpha$$

$$\text{म्हणून स्थैर्य कोन } \phi = \text{घर्षणाचा कोन } \alpha$$

### 3.1.5 घर्षणाचे प्रकार

घर्षणाचे दोन प्रकार असतात जसे (अ) स्थैतिक घर्षण (Static Friction) आणि (ब) गतीज घर्षण/ गतिक घर्षण (Kinematic Friction).

#### अ. स्थैतिक घर्षण

जेव्हा दोन पृष्ठभाग स्थित असतात तेव्हा त्या दोन पृष्ठभागावर स्थैतिक घर्षण कार्य करते. एक वस्तु दुसऱ्या वस्तूच्या पृष्ठभागाच्या संपर्कात असते आणि दोन्ही वस्तु स्थित असतात तेव्हा स्थैतिक घर्षण जास्तीत जास्त असते. जेव्हा एक वस्तु दुसऱ्या वस्तूवरून बल वापरल्यामुळे जागा सोडण्यास सुरुवात करीत असते तेव्हा तयार होण्याच्या घर्षणास स्थैतिक घर्षण असे म्हणतात. दोन पृष्ठभागावरील स्थैतिक घर्षण हे गतिक घर्षणापेक्षा जास्त असते. ते  $F_s$  असे दर्शविले जाते. स्थैतिक घर्षणाचे परिमाण  $F_s$ ,

$$F_s \leq \mu_s N$$

असे आहे ज्यामध्ये  $\mu_s$  म्हणजे स्थैतिक घर्षण गुणांक असे म्हणतात आणि  $N$  म्हणजे पृष्ठभागावरील त्याच्या लंब दिशेत कार्य करणारे बलाचे परिमाण असते.

#### ब. गतीज घर्षण/ गतिक घर्षण (Kinetic Friction)

जर दोन पृष्ठभाग एकमेकांच्या संपर्कात असतील आणि एकमेकावर फिरत असतील तेव्हा तयार होणाऱ्या घर्षणास गतीज घर्षण असे म्हणतात. जेव्हा बलाचे परिमाण हे सीमित घर्षणापेक्षा जास्त असते तेव्हा गतीज घर्षण प्राप्त होते आणि यावेळी वस्तूमध्ये घर्षण प्रतिकार अनुभवला जातो त्यास गतीज घर्षण म्हणतात. गतीज घर्षण हे सीमित घर्षणापेक्षा कमी असते. ते  $F_k$  असे दर्शविले जाते. जेव्हा वापरलेले बल  $F_{s(\max)}$  पेक्षा जास्त होते तेव्हा वस्तु जागा सोडते. म्हणजे जेव्हा वस्तु गतीज स्थितीत येते तेव्हा गतीज घर्षणाचे परिमाण  $F_k$  असते आणि ते  $F_k = \mu_k N$  असे मोजता येते आणि ज्यामध्ये  $\mu_k$  म्हणजे गतीज घर्षण गुणांक असे म्हणतात आणि  $N$  म्हणजे पृष्ठभागावरील त्याच्या लंब दिशेत कार्य करणाऱ्या बलाचे परिमाण असते.

**गतीज घर्षणाचे दोन उपप्रकार असतात. (1) सरक घर्षण (2) लोठण घर्षण:**

1. **सरक घर्षण:** जेव्हा दोन वस्तु एकमेकांच्या पृष्ठभागावर सरकण्याचा प्रयत्न करतात तेव्हा तयार होणाऱ्या घर्षणास सरक घर्षण म्हणतात.
2. **लोठण घर्षण:** जर एखादी वस्तु दुसऱ्या वस्तूच्या पृष्ठभागावर फिरत असेल तर दोन पृष्ठभागामधील घर्षणाला लोठण घर्षण म्हणतात.

तक्ता 3.1: स्थिर आणि गतीज घर्षणाचे साधारणरित्या गुणांक

अ. क्र.	प्रणाली	स्थैतिक घर्षण ( $\mu_s$ )	गतीज घर्षण ( $\mu_k$ )
1.	लाकडावरील लाकूड	0.4 – 0.7	0.3
2.	धातूवरील लाकूड	0.25 – 0.65	0.3
3.	शूजवरील लाकूड	0.5 – 0.6	0.3 – 0.5
4.	स्टीलवरील स्टील (कोरडे)	0.6	0.3
5.	स्टीलवरील स्टील (विंगण)	0.05	0.03
6.	बर्फावरील स्टील	0.4	0.02
7.	काँक्रीटवरील स्टील	0.3 – 0.6	0.4

### 3.1.6 घर्षणाचे नियम

घर्षण बल खालील नियमांचे पालन करते:

- हे संपर्कातील दोन पृष्ठभागाच्या स्वरूपावर आणि रुक्षता/ गुळगुळीतपणाच्या स्थितीवर अवलंबून असते.
- हे नेहमी संपर्कात असलेल्या पृष्ठभागाला समांतर कार्य करते आणि त्याची दिशा गती किंवा प्रयत्नात्मक गतीच्या विरुद्ध असते.
- हे दोन पृष्ठभागाच्या संपर्कात असलेल्या क्षेत्रफळावर अवलंबून नसते किंवा स्वतंत्र असते.
- घर्षण बलाचे परिमाण संपर्कात असलेल्या दोन पृष्ठभागामधील लंब बलाच्या थेट प्रमाणात (समानुपाती/ directly proportional) असते.
- घर्षण बल एका पृष्ठभागाचा वेग आणि इतर पृष्ठभागाचा वेग ह्यांच्या तुलनेत स्वतंत्र असते/ त्यावर अवलंबून नसते.
- जेव्हा वस्तु हालचाल करायला लागते तेव्हा गतिज घर्षण कार्यरत होते, ज्याचे परिमाण सिमित घर्षणापेक्षा कमी असते आणि ती पृष्ठभागावरील त्याच्या लंब दिशेत कार्यरत असलेल्या बलाच्यासोबत स्थिर गुणोत्तर धारण करते. या गुणोत्तराला बलगतिज घर्षण गुणांक असे म्हणतात.

## 3.2 आडव्या (क्षैतिज) प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल वस्तू

आता हे स्पष्ट झाले आहे की, खरबरीत क्षैतिज प्रतलाच्या पृष्ठभागावर असलेली वस्तू नेहमी समतोल असते. परंतु जर ह्या वस्तूवर बाह्य बल लावले तर सदर वस्तूला गती प्राप्त होते. हे बाह्य बल दोन वेगवेगळ्या पद्धतीने लावले जाऊ शकते. (1) क्षैतिज प्रतलावर समांतर असलेले बाह्य बल (2) क्षैतिज प्रतलावर कललेले बाह्य बल. आता आपण ह्या दोन प्रकरणातील लावलेल्या बलांची चर्चा करणार आहोत.

### 3.2.1 क्षैतिज प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील प्रतलावर समांतर असलेल्या बाह्य बल लावल्यानंतर समतोल असलेली वस्तू

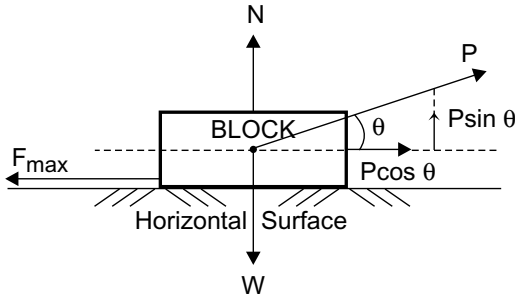
अशा परिस्थितीसाठी, वस्तूवर क्षैतिज (प्रतलाला समांतर) आणि अनुलंब (प्रतलाला लंब) म्हणून समतोल समीकरणे लागू केली गेली.

- (i)  $\Sigma H = 0 \therefore F_{\max} = P$ , ज्यामध्ये  $F_{\max}$  = घर्षण बल आणि  $P$  = लावलेले बाह्य बल.

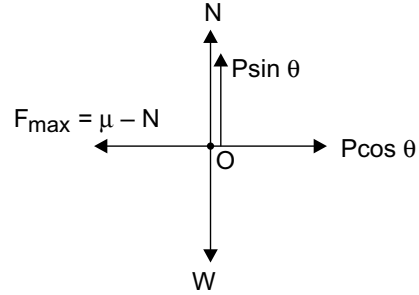
- (ii)  $\Sigma V = 0 \therefore N = W$ , ज्यामध्ये  $N =$  लंब प्रतिक्रिया बल आणि  $W =$  वस्तूचे वजन.  
आता घर्षण बलाचा परिमाण  $F_{\max}$  हे खालील समीकरण वापरून काढता येईल.
- (iii)  $F_{\max} = \mu N$ , ज्यामध्ये  $\mu =$  घर्षण बलाचा गुणांक आणि  $N =$  लंब प्रतिक्रिया बल. ह्या तीन समीकरणांचा वापर करून उदाहरणे सोडविता येतील.

### 3.2.2 क्षैतिज प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील प्रतलावर कललेले बाह्य बल लावल्यानंतर समतोल असलेली वस्तु

अशा परिस्थितीमध्ये, पाठ 2 मध्ये चर्चा केल्याप्रमाणे कललेल्या बलाच्या ठरावाचा वापर करून बाह्य बलाचे विभाजन करावे लागेल (प्रतलावरील समांतर बल आणि प्रतलाच्या लंब दिशेतील बल). आता आकृती 3.6 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, ह्यामध्ये प्रतलावरील समांतर असलेल्या बलांचा समतोल आणि प्रतलाच्या लंब दिशेतील कार्यरत बलांचा समतोल अशी दोन समतोल समीकरणे तयार करावी लागतात.



(a) Body



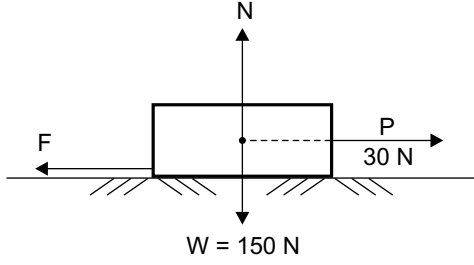
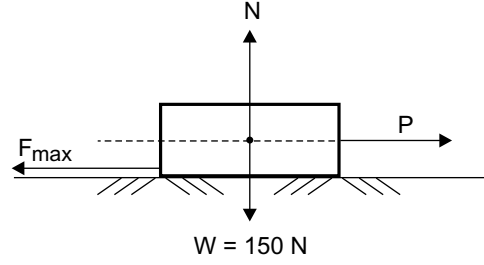
(b) Free body diagram

आकृती 3.6: क्षैतिज प्रतलावर समांतर कललेले बाह्य बलाचा समतोल

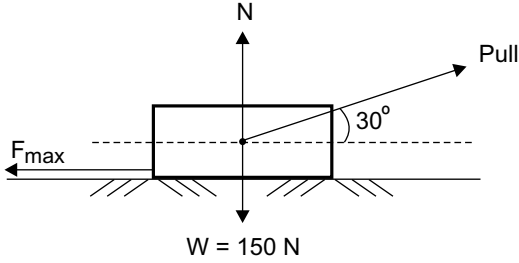
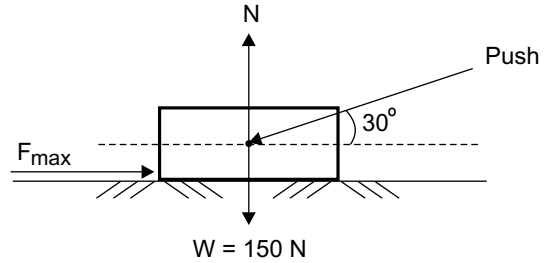
- (i)  $\Sigma H = 0 \therefore F_{\max} = P \cos \theta$ ,  
ज्यामध्ये  $F_{\max} =$  घर्षण बल आणि  $P =$  लावलेले बाह्य बल आहे.
- (ii)  $\Sigma V = 0 \therefore W = N + P \sin \theta$ ,  
ज्यामध्ये  $N =$  लंब प्रतिक्रिया बल आणि  $W =$  वस्तूचे वजन आहे.  
आता घर्षण बलाचा परिमाण  $F_{\max}$  हे खालील समीकरण वापरून काढता येईल.
- (iii)  $F_{\max} = \mu N$ , ज्यामध्ये  $\mu =$  घर्षण बलाचा गुणांक आणि  $N =$  लंब प्रतिक्रिया बल आहे.  
ह्या तीन समीकरणांचा वापर करून उदाहरणे सोडविता येतील. आता ह्या दोन परिस्थिती समजण्याकरिता आपण काही उदाहरणे सोडवूयात.

**उदाहरण 1:** आकृती 3.7 मध्ये दर्शविलेल्याप्रमाणे एक ठोकळा ज्याचे वजन 150 N आडव्या (क्षैतिज) प्रतलाच्या पृष्ठभागावर ठेवलेला आहे. हा ठोकळा आणि पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक 0.25 इतका आहे.

- (a) आकृतीत दर्शविल्याप्रमाणे जर  $P = 30$  N हे बाह्य बल लावले तर काय होईल? (b) त्यानंतर जर ह्या ठोकळ्याला आडव्या दिशेने पुढे नेण्यास सुरुवात करण्याकरिता किती आडवे खेचणारे  $P$  बल लागेल? (c) जर बल हे आडव्या रेषेपासून  $30^\circ$  कोनात असेल तर खेचणारे  $P$  बल किती लागेल? (d) जर बल हे आडव्या रेषेपासून  $30^\circ$  कोनात असेल तर ढकलणारे  $P$  बल किती लागेल?

(a) Ext. force  $P = 30 \text{ N}$ 

(b) Horizontal Ext. force

(c) Pull force at  $30^\circ$  with horizons(d) Push force at  $30^\circ$  with horizons

## आकृती 3.7

उत्तर:

(a)  $W = 150 \text{ N}$ ,  $\mu = 0.25$  आणि  $P = 30 \text{ N}$ . [आकृती 3.7(a)]

समतोल स्थितीचे समीकरण वापरून

(i)  $\Sigma V = 0$ ,  $\therefore N = W = 150 \text{ N}$

(ii)  $\Sigma H = 0$ ,  $\therefore F = P = 30 \text{ N}$

(iii)  $F_{\max} = \mu N = 0.25 \times 150 = 37.5 \text{ N}$

ह्यामुळे जर  $F < F_{\max}$ , हा ठोकळा त्या जागी स्थिर/ समतोल असेल. लावलेले बाह्य बल हे  $F_{\max}$  पेक्षा कमी असल्याने हा ठोकळा हलणार नाही.

(b)  $W = 150 \text{ N}$ ,  $\mu = 0.25$  [आकृती 3.7(b)]

(i)  $\Sigma V = 0$ ,  $\therefore N = W = 150 \text{ N}$

(ii) हे आधी दर्शविल्याप्रमाणे  $F_{\max} = \mu N = 0.25 \times 150 = 37.5 \text{ N}$

(iii) From  $\Sigma H = 0$ ,  $P = F_{\max} = 37.5 \text{ N}$

(c)  $W = 150 \text{ N}$ ,  $\mu = 0.25$  [आकृती 3.7(c)]

(i) आता  $\Sigma V = 0$ , वापरून  $N = 150 - P \sin 30$

$N = 150 - 0.5 P$



Friction on horizontal plane



$$\begin{aligned}
 \text{(ii) आपल्याला माहिती आहे की} \quad F_{\max} &= \mu N \\
 F_{\max} &= 0.25 (150 - 0.5P) \\
 F_{\max} &= 37.5 - 0.125 P
 \end{aligned}$$

$$\text{(iii) आता } \Sigma H = 0, \text{ वापरून } P \cos 30 = F_{\max}$$

समीकरण (ii) चा वापर करून,

$$P \cos 30 = 37.5 - 0.125 P$$

$$\therefore 0.866 P + 0.125 P = 37.5$$

$$\therefore P = 37.84 \text{ N}$$

$$\text{(d) } W = 150 \text{ N}, \mu = 0.25 \text{ [आकृती 3.7(d)]}$$

आकृतीमध्ये दर्शवल्याप्रमाणे ढकलणारे बाह्य बल (P) लावले तर घर्षण बल ठोकळा ज्या दिशेने ढकलला जात आहे त्यादिशेच्या विरुद्ध दिशेने लावले जाईल.

$$\begin{aligned}
 \text{(i) आता } \Sigma V = 0, \text{ वापरून,} \quad N &= 150 + P \sin 30 \\
 N &= 150 + 0.5 P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) जसे आपल्याला माहिती आहे त्याप्रमाणे, } F_{\max} &= \mu N \\
 F_{\max} &= 0.25 (150 + 0.5P) \\
 F_{\max} &= 37.5 + 0.125 P
 \end{aligned}$$

$$\text{(iii) आता } \Sigma H = 0, \text{ चा वापर करून, } P \cos 30 = F_{\max}$$

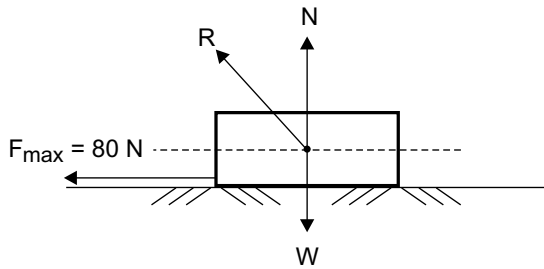
आता समीकरण (2) मधील  $F_{\max}$  चा वापर करून,

$$0.866 P = 37.5 + 0.125 P$$

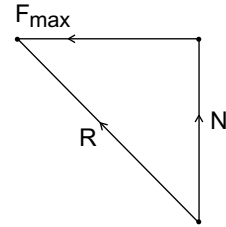
$$\therefore 0.741 P = 37.5$$

$$\therefore P = 50.61 \text{ N}$$

**उदाहरण 2:** एक वस्तु एका खरबरीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेली आहे. ही वस्तु आणि पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक 0.2 इतका आहे आणि सीमित घर्षण बल 80 N इतके आहे. जर R हा घर्षण बल आणि प्रतिक्रिया बल ह्यांचे परिणामी बल असेल तर R ह्या परिणामी बलाचे परिमाण शोधा.



आकृती 3.8



उत्तर:

वस्तूवर कार्यरत असलेली दोन बले आकृती 3.8 मध्ये दर्शवलेली आहेत. ह्यामध्ये  $F_{\max} = 80 \text{ N}$  आणि  $\mu = 0.2$

(i) आता, सीमित घर्षण बल  $= F_{\max} = \mu N$ ,

$$\therefore 80 = 0.2 N$$

$$\therefore N = \frac{80}{0.2}$$

$$\therefore N = 400 \text{ Newton}$$

(ii) (2) बल R हे प्रतिक्रिया बल N आणि सीमित घर्षण बल  $F_{\max}$  ह्या दोन बलांचे परिणामी बल आहे.

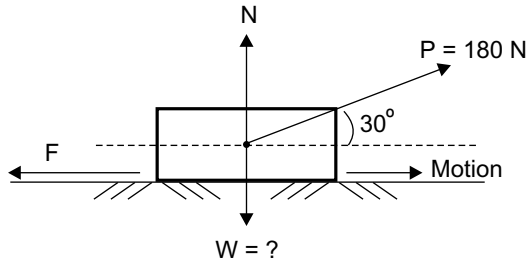
$$R^2 = N^2 + F_{\max}^2 \text{ (पायथागोरस प्रमेयाचा वापर करून)}$$

$$\therefore R^2 = 400^2 + 80^2 = 166400$$

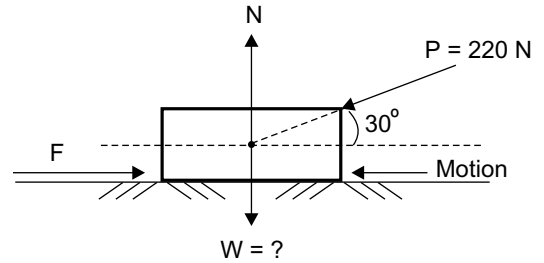
$$\therefore R = 407.92 \text{ N}$$

**प्रयत्न करा:** तुम्ही ह्या परिणामी बलाचा परिमाण R दुसऱ्या कोणत्या पद्धतीने काढू शकाल का? तुमच्या प्राध्यापकांशी चर्चा करा. (सूचना: भाग 1 किंवा भाग 2 मध्ये अभ्यास केलेल्या पद्धतीचा वापर करा.)

**उदाहरण 3:** एक वस्तु एका खरबरीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेली आहे. ही वस्तु पृष्ठभागाच्या  $30^\circ$  कोनामधील प्रतलावर खेचायला सुरुवात करण्याकरिता  $180 \text{ N}$  इतके बल लागते. त्यानंतर हे देखील बघण्यात आलेले आहे की ही वस्तु ढकलण्यासाठी  $30^\circ$  कोनामधील प्रतलावर वस्तु ढकलण्यास सुरुवात करण्याकरिता  $220 \text{ N}$  बल लागते, तर ह्या वस्तूचे वजन आणि ही वस्तु आणि खालील पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक शोधा?



(a) Pull of  $180 \text{ N}$  at  $30^\circ$



(b) Push of  $220 \text{ N}$  at  $30^\circ$

### आकृती 3.9

उत्तर:

आकृती 3.9 मध्ये वस्तु खेचण्यासाठी आणि ढकलण्यासाठी लावलेली बले दर्शवलेली आहेत. ह्यामध्ये  $\theta = 30^\circ$  आणि खेचण्यासाठी आवश्यक बल  $P = 180 \text{ N}$  आणि ढकलण्यासाठी आवश्यक असलेले बल  $P = 220 \text{ N}$

(a) पहिला प्रकार ज्यामध्ये वस्तु खेचणारे बल  $180 \text{ N}$  हे प्रतलाच्या  $30^\circ$  कोनात लावलेले आहे.

$$(i) \Sigma H = 0; \therefore F = P \cos \theta$$

$$\therefore F = 180 \times \cos 30$$

$$\therefore F = 155.9 \text{ N}$$

$$(ii) \Sigma V = 0; \therefore W = N + P \sin \theta$$

$$\therefore W = N + 180 \times \sin 30$$

$$\therefore W = N + 90$$

$$\therefore N = W - 90$$

$$(iii) \text{ आपल्याला माहिती आहे की, घर्षण बल } = F = \mu N = \mu (W - 90)$$

$$\therefore 155.9 = \mu (W - 90) \quad \dots (i)$$

(b) दुसरा प्रकार ज्यामध्ये वस्तु ढकलणारे बल 220 N हे प्रतलाच्या 30° कोनात लावलेले आहे.

$$(i) \Sigma H = 0; \therefore F = P \cos \theta$$

$$\therefore F = 220 \times \cos 30$$

$$\therefore F = 190.5 \text{ N}$$

$$(ii) \Sigma V = 0; \therefore N = W + P \sin \theta$$

$$\therefore N = W + 220 \cdot \sin 30$$

$$\therefore N = W + 110$$

$$(iii) \text{ आपल्याला माहिती आहे की, घर्षण बल } = F = \mu N = \mu (W + 110)$$

$$\therefore 190.5 = \mu (W + 110) \quad \dots (ii)$$

(c) समीकरण (1) आणि (2) सोडवून

$$\frac{155.9}{190.5} = \frac{\mu(W - 90)}{\mu(W + 110)} = \frac{(W - 90)}{(W + 110)}$$

$$\therefore 155.9 (W + 110) = 190.5 (W - 90)$$

$$\therefore 155.9 W + 17149 = 190.5 W - 17145$$

$$\therefore 34.6 W = 34294$$

$$\therefore W = 991.16 \text{ N}$$

(d) समीकरण (1) मध्ये वस्तूचे वजन W वापरून,

$$\therefore 155.9 = \mu (W - 90) = \mu (991.16 - 90) = \mu (901.16)$$

$$\therefore \mu = \frac{155.9}{901.16}$$

$$\therefore \mu = 0.173$$

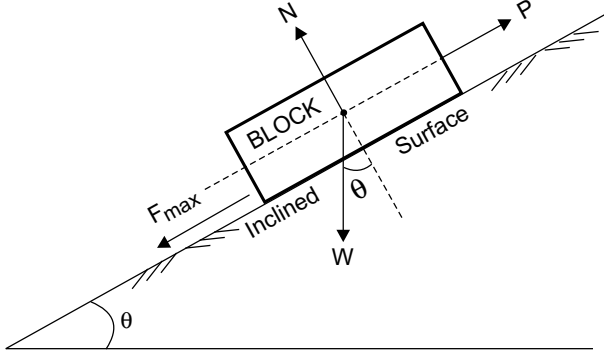
### 3.3 वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल

आपण असे बघितले आहे की, कललेल्या पृष्ठभागाच्या प्रतलाचा कोन, स्थैर्य कोनापेक्षा ( $\phi$ ) (घर्षणाचा कोन  $\alpha$ ) कमी असेल आणि कोणतेही बाह्य बल त्या वस्तूवर लावलेले नसेल तर ती वस्तु विश्राम स्थितीमध्ये असेल किंवा समतोल परिस्थितीमध्ये असेल. ह्या वस्तूला पृष्ठभागाच्या समांतर वरच्या दिशेने किंवा खालच्या दिशेने गती देण्याकरिता ह्या दिशेने बाह्य बल लावणे गरजेचे आहे. ह्याच्या

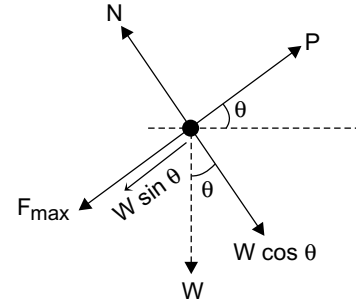
विरुद्ध जर कललेल्या पृष्ठभागाच्या प्रतलाचा कोन, स्थैर्य कोनापेक्षा जास्त असेल तर सदरची वस्तु ही विश्राम स्थितीमध्ये नसेल किंवा समतोल नसेल आणि ह्यामध्ये वस्तु समतोल परिस्थितीमध्ये आणण्याकरिता कललेल्या पृष्ठभागाला समांतर वरच्या दिशेने बल लावणे गरजेचे असेल. ह्यामध्ये लावलेले बल हे पृष्ठभागाला समांतर असू शकते किंवा ते पृष्ठभागाच्या समांतर काही कोनात असू शकते किंवा आडव्या रेषेत सुद्धा असू शकते. आपल्या अभ्यासक्रमाचा विचार करून वस्तूच्या कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल ह्याची चर्चा आपण थांबवत आहोत.

### 3.3.1 वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील त्या प्रतलाला समांतर बलामुळे असलेला समतोल

ह्या प्रकारातील वस्तूच्या समतोलाचे विश्लेषण करण्याकरिता बलांचे पृष्ठभागाला समांतर आणि पृष्ठभागाच्या लंब दिशेमध्ये असे निराकरण करावे लागते ज्यामध्ये बाह्य बल (1) वरच्या दिशेने खेचणारे बल असू शकते किंवा (2) खालच्या दिशेने ढकलणारे बल असू शकते. (अ) कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समांतर वरच्या दिशेने खेचणारे बलह्या प्रकारामध्ये आकृती 3.10 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे बल तयार करतात.



(a) Body on inclined plane



(b) Free body diagram

आकृती 3.10: क्षैतिज प्रतलावर कललेल्या वस्तूचा समतोल

(1) बलांचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समांतर निराकरण करून,

$$P = F_{\max} + W \sin \theta$$

$$P = \mu N + W \sin \theta \quad [\text{as } F_{\max} = \mu N] \quad \dots(i)$$

(2) ह्या बलांचे प्रतलाच्या लंब दिशेमध्ये निराकरण करून

$$N = W \cos \theta \quad \dots(ii)$$

$$\text{समीकरण (2) समीकरण (1) मध्ये वापरून, } P = \mu W \cos \theta + W \sin \theta \quad \dots(iii)$$

आता  $\mu = \text{Coefficient of friction} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , हे समीकरण (3) मध्ये वापरून,

$$P = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} W \cos \theta + W \sin \theta$$

$$\therefore P \cos \alpha = W \sin \alpha \cos \theta + W \cos \alpha \sin \theta$$

$$\therefore P \cos \alpha = W \sin (\alpha + \theta)$$

$$\therefore P = \frac{W \sin (\alpha + \theta)}{\cos \alpha} \quad \dots(\text{iv})$$

समीकरण (4) प्रमाणे वरच्या दिशेने वस्तूला गती देण्याकरिता लागणारे बाह्य बल शोधता येईल.

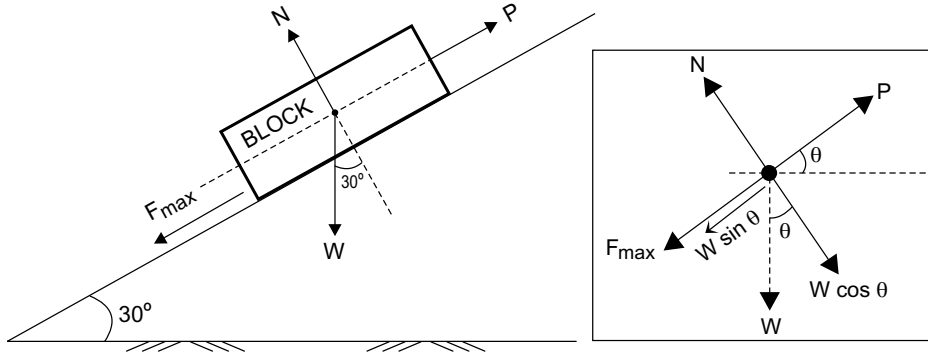
(ब) कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समांतर खालच्या दिशेने ढकलणारे बल ह्याआधी (अ) मध्ये चर्चा केल्याप्रमाणे ह्या प्रकारात लागणारे बाह्य बळ खालीलप्रमाणे असते,

$$P = \frac{W \sin (\alpha - \theta)}{\cos \alpha} \quad \dots(\text{v})$$

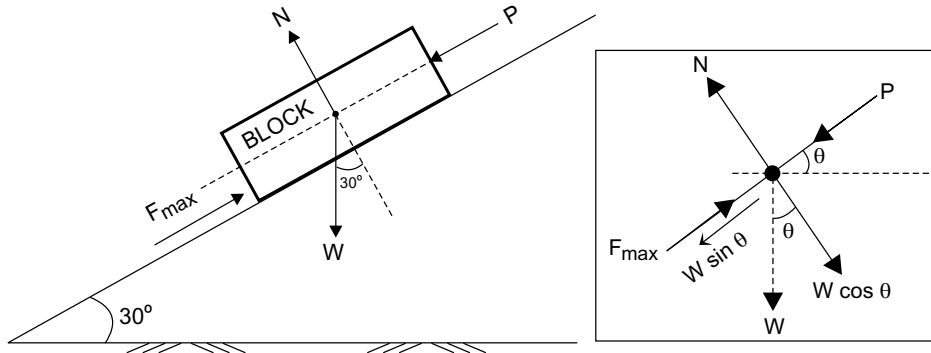
समीकरण (5) मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समांतर खालच्या दिशेने वस्तूला गती देणारे बल शोधता येईल. वरील समीकरणे समजून घेण्याकरिता आपण काही उदाहरणे बघूया.

**उदाहरण 4:** आकृतीमध्ये दर्शविलेला ठोकळा ज्याचे वस्तुमान 10 kg आहे, तो आडव्या रेषेपासून  $30^\circ$  कोनाच्या खडबडीत पृष्ठभागावर आहे. जर ठोकळा आणि पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक 0.25 इतका असेल तर सदराच्या कोनाच्या ठिकाणी खडखडीत पृष्ठभागाच्या दिशेमध्ये तयार होणारे बल खालील दोन गोष्टीमध्ये शोधा.

(1) पृष्ठभागाच्या समांतर वरच्या दिशेने (2) पृष्ठभागाच्या समांतर खालच्या दिशेने.



(a) Upward motion of clock on inclined plane



(b) Downward motion of clock on inclined plane

आकृती 3.11

उत्तर:

आकृती 3.11 मध्ये दिलेली माहिती पुढील प्रमाणे,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\mu = 0.25$  आणि वस्तुमान  $= m = 10 \text{ kg}$ . म्हणून वजन,  $W = mg = 10 \times 9.8 \text{ N} = 98 \text{ N}$ .

(a) ठोकळा जेव्हा वरच्या दिशेने कार्यरत असेल आणि प्रतलाच्या दिशेमध्ये असेल तर,

(i) कार्यरत असलेल्या सर्व बलांचे त्यांची प्रतलाच्या दिशेमधील निराकरण लक्षात घेऊन,

$$N = W \cos \theta$$

$$\therefore N = 98 \times \cos 30^\circ$$

$$\therefore N = 84.87 \text{ N} \quad \dots(i)$$

(ii) कार्यरत असलेल्या सर्व बलांचे त्यांची प्रतलाच्या लंब दिशेमधील निराकरण लक्षात घेऊन

$$P = F_{\max} + W \sin \theta$$

$$\therefore P = \mu N + W \sin \theta \quad \dots(ii)$$

$\mu$ ,  $\theta$ ,  $N$  आणि  $W$  ह्यांच्या किंमती समीकरण (2) मध्ये ठेवून,

$$P = (0.25 \times 84.87) + (98 \times \sin 30)$$

$$\therefore P = 70.22 \text{ N}$$

(b) ठोकळा खालच्या दिशेने कार्यरत असेल आणि प्रतलाच्या दिशेमध्ये असेल तर, [fig. 3.11(b)]

(i) कार्यरत असलेल्या सर्व बलांचे त्यांची प्रतलाच्या दिशेमधील निराकरण लक्षात घेऊन,

$$N = W \cos \theta$$

$$\therefore N = 98 \times \cos 30^\circ$$

$$\therefore N = 84.87 \text{ N} \quad \dots(i)$$

(ii) कार्यरत असलेल्या सर्व बलांचे त्यांची प्रतलाच्या लंब दिशेमधील निराकरण लक्षात घेऊन,

$$P = F_{\max} - W \sin \theta$$

$$\therefore P = \mu N - W \sin \theta \quad \dots(ii)$$

$\mu$ ,  $\theta$ ,  $N$  आणि  $W$  ह्यांच्या किंमती समीकरण (२) मध्ये ठेवून,

$$P = (0.25 \times 84.87) - (98 \times \sin 30)$$

$$\therefore P = -27.78 \text{ N (ओढणारे)}$$

**प्रयत्न करा:** बाह्य बल जे 1) प्रथलाच्या समांतर वरच्या दिशेने लागणारे बल (2) प्रथलाच्या समांतर दिशेच्या खालच्या दिशेने कार्यरत असताना लागणारे बल ह्या बाह्य बलाची किंमत शोधा. प्रकार 3.3.1 मध्ये चर्चा केल्याप्रमाणे समीकरण (ड) आणि (इ) चा वापर करा.

**उदाहरण 5:** एक ठोकळा ज्याचे वजन 500 N आहे. सदराचा ठोकळा त्यावर 200 N इतके बल आकृतीमध्ये दर्शविलेल्या ठोकळ्यावर खडखडीत प्रतलाच्या पृष्णभागावर त्याच्या समांतर दिशेत खालच्या बाजूने लावले तर ठोकळा खाली गतीमध्ये येतो.

त्याचप्रमाणे जर त्यावर 300 N इतके बल आकृतीमध्ये दर्शविलेल्या ठोकळ्यावर खडखडीत प्रतलाच्या पृष्ठभागावर त्याच्या समांतर दिशेत वरच्या दिशेने लावले तर ठोकळा वरच्या दिशेने गतीमध्ये येतो. तर ह्या प्रतलाचा आडव्या पासूनचा कोन शोधा आणि ठोकळा आणि पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक शोधा.

**उत्तर:**

ठोकळा पृष्ठभागाला समांतर वरच्या आणि खालच्या दिशेने जाण्यास सुरुवात करताना त्याच्या मुक्त संकल्पना आकृती 3.12 (अ) आणि आकृती 3.12 (ब) मध्ये दर्शविलेली आहे.

हे लक्षात घेतले पाहिजे की घर्षण बल  $F_{\max}$  हा ज्या दिशेने ठोकळा गती घेत आहे त्याच्या विरुद्ध दिशेने कार्य करेल आणि गती बंद करायचा प्रयत्न करेल. ह्या दोन्ही प्रकारामध्ये  $F_{\max} = \mu N$  इतका असेल. [जसे ठोकळा गती सुरु करण्याचा प्रयत्न करीत असेल.] दिलेली माहिती:  $W = 500$  N, आणि बाह्य बल (1) 200 N आणि (2) 300 N.

(A) सदरचा ठोकळा पृष्ठभागाच्या समांतर खालच्या दिशेने जाण्याचा प्रयत्न करीत असेल तर,

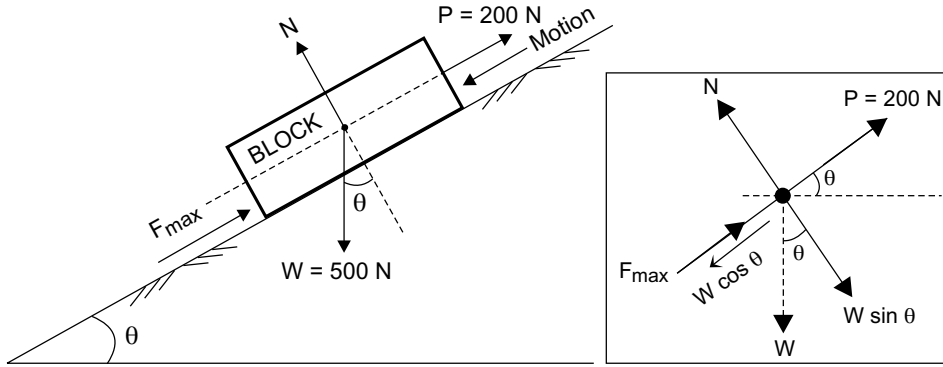
(i) सर्व बलांचे पृष्ठभागाच्या लंब स्थितीत निराकरण करून,

$$N = W \cos \theta$$

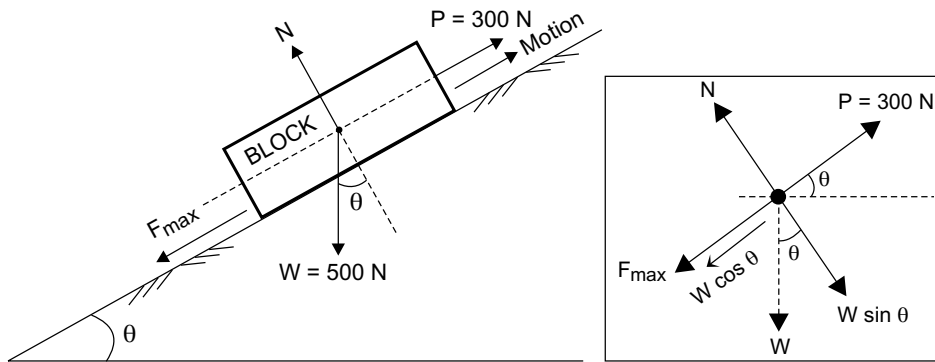
$\therefore$

$$N = 500 \times \cos \theta$$

...(i)



(a) Block just move downwards



(b) Block just move upwards

आकृती 3.12

(ii) सर्व बलांचे पृष्ठभागाच्या लंब स्थितीत निराकरण करून,

$$P + F_{\max} = W \sin \theta, \text{ ज्यामध्ये } F_{\max} = \mu N \quad \dots(ii)$$

आणि W ह्यांच्या किमती समीकरण (2) मध्ये वापरून,

$$200 + (\mu \times 500 \times \cos \theta) = (500 \times \sin \theta)$$

$$\therefore 200 = 500 \times \sin \theta - \mu \times 500 \times \cos \theta \quad \dots(iii)$$

(b) सदरचा ठोकळा पृष्ठभागाच्या समांतर वरच्या दिशेने जाण्याचा प्रयत्न करीत असेल तर,

(i) सर्व बलांचे पृष्ठभागाच्या लंब स्थितीत निराकरण करून,

$$N = W \cos \theta$$

$$\therefore N = 500 \times \cos \theta \text{ same as case (A)}$$

(ii) सर्व बलांचे पृष्ठभागाच्या लंब स्थितीत निराकरण करून,

$$P = W \sin \theta + F_{\max}, \text{ ज्यामध्ये } F_{\max} = \mu N$$

$$\therefore 300 = (500 \times \sin \theta) + (\mu \times 500 \times \cos \theta) \quad \dots(iv)$$

(c) आता समीकरण (3) आणि (4) ह्याचा वापर करून,

$$500 = 1000 \times \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = 0.5$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

(d) आता कोन  $\theta$  ची किंमत समीकरण (4) मध्ये वापरून,

$$300 = (500 \times \sin \theta) + (\mu \times 500 \times \cos \theta)$$

$$300 = (500 \times 0.5) + (\mu \times 500 \times 0.866)$$

$$\therefore 300 = 250 + (\mu \times 433.01)$$

$$\therefore \mu = 0.1155$$

### सारांश

- घर्षण हे एक बल आहे जे सुनिश्चित करते की आपण घसरत नाही.
- घर्षण हे एक बल आहे जे सरकण्यास प्रतिकार करते त्याचे गुणांकाच्या दृष्टीने वर्णन केले जाते आणि जवळजवळ नेहमीच प्रत्येक वस्तु गतीजसाठी स्थिर आणि विशिष्ट असल्याचे मानले जाते.
- **घर्षणाचा कोन:** घर्षण कोन हा वस्तूच्या वजना विरुद्ध कार्यरत असलेल्या लंब प्रतिक्रिया  $N$  आणि घर्षण बल  $F_r$  ह्यांच्यामधील परिणामी बल  $R$  आणि लंब प्रतिक्रिया  $N$  ह्यांच्यामधील कोन असतो आणि त्याला घर्षण कोन असे म्हणतात.
- **स्थैर्य कोन:** स्थैर्य कोनची ह्याची व्याख्या अशा पद्धतीने करता येईल की, स्थैर्य कोन म्हणजे कललेल्या प्रतलाचा असा किमान कोन की त्यावर ठेवलेली एखादी वस्तू सरकू लागते.



- **घर्षण शंकू:** जेव्हा ठोकळा हा P ह्या बलाच्या दिशेमध्ये सरकायला सुरुवात करेल तेव्हा घर्षण बल सिमित घर्षणा इतके असेल आणि F आणि N यांचे परिणामी बल हे N च्या दिशेपासून मर्यादित कोन  $\alpha$  तयार करेल. जर ठोकळा ह्या दुसऱ्या दिशेने सरकत असेल तर त्या दिशेमध्ये कोन  $\alpha$  तयार होईल. म्हणजे जर P ह्या बलाची दिशा जर हळूहळू वर्तुळाप्रमाणे बदलली तर 360 डिग्रीमध्ये उजवा गोलाकार शंकू तयार होईल ज्याचा अर्धमध्यकोन  $\alpha$  इतका असेल. ह्या शंकूस घर्षण शंकू असे म्हणतात.
- **सीमित घर्षण:** दोन पृष्ठभागावर हालचाल सुरु होण्याच्या स्थितीमध्ये सीमित घर्षण तयार होते.
- **घर्षणाचे प्रकार:**
  - **स्थैतिक घर्षण:** जेव्हा दोन पृष्ठभाग स्थित असतात तेव्हा त्या दोन पृष्ठभागावर स्थैतिक घर्षण कार्य करते. वस्तु दुसऱ्या वस्तूच्या पृष्ठभागाच्या संपर्कात असते आणि दोन्ही वस्तु स्थित असतात तेव्हा स्थैतिक घर्षण जास्तीत जास्त असते.
  - **सीमित घर्षण:** दोन पृष्ठभागावर हालचाल सुरु होण्याच्या स्थितीमध्ये सीमित घर्षण तयार होते.
  - **गतीज घर्षण/ गतिक घर्षण:** जर दोन पृष्ठभाग एकमेकांच्या संपर्कात असतील आणि एकमेकावर फिरत असतील तेव्हा तयार होणाऱ्या घर्षणास गतीज घर्षण असे म्हणतात. जेव्हा बलाचे परिमाण हे सीमित घर्षणापेक्षा जास्त असते तेव्हा गतीज घर्षण प्राप्त होते आणि यावेळी वस्तुमध्ये घर्षण प्रतिकार अनुभवला जातो त्यास गतीज घर्षण म्हणतात.
- **घर्षणाचे नियम**

घर्षण बल खालील नियमांचे पालन करते:

  1. हे संपर्कातील दोन पृष्ठभागाच्या स्वरूपावर आणि रुक्षता/ गुळगुळीतपणाच्या स्थितीवर अवलंबून असते.
  2. हे नेहमी संपर्कात असलेल्या पृष्ठभागाला समांतर कार्य करते आणि त्याची दिशा गती किंवा प्रयत्नात्मक गतीच्या विरुद्ध असते.
  3. हे दोन पृष्ठभागाच्या संपर्कात असलेल्या क्षेत्रफळावर अवलंबून नसते किंवा स्वतंत्र असते.
  4. घर्षण बलाचे परिमाण संपर्कात असलेल्या दोन पृष्ठभागामधील लंब बलाच्या थेट प्रमाणात (समानुपाती/ directly proportional) असते.
  5. घर्षण बल एका पृष्ठभागाचा वेग आणि इतर पृष्ठभागाचा वेग ह्यांच्या तुलनेत स्वतंत्र असते/ त्यावर अवलंबून नसते.
  6. जेव्हा वस्तु हालचाल करायला लागते तेव्हा गतिज घर्षण कार्यरत होते, ज्याचे परिमाण सिमित घर्षणापेक्षा कमी असते आणि ती पृष्ठभागावरील त्याच्या लंब दिशेत कार्यरत असलेल्या बलाच्यासोबत स्थिर गुणोत्तर धारण करते. या गुणोत्तराला बलगतिज घर्षण गुणांक असे म्हणतात.
- वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील त्या प्रतलाला आडव्या बलामुळे असलेला समतोल
  1.  $\sum H = 0 \quad \therefore F_{\max.} = P$ , येथे  $F_{\max.}$  = घर्षण बल आणि  $P$  = लावलेला बाह्य बल.
  2.  $\sum V = 0 \quad \therefore N = W$ , येथे  $N$  = वरच्या दिशेतील प्रतिक्रिया बल आणि  $W$  = वस्तूचे वजन.
  3.  $F_{\max.} = \mu N$ , येथे  $\mu$  = घर्षण गुणांक, आणि  $N$  = वरच्या दिशेतील प्रतिक्रिया बल.
- वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील त्या प्रतलाच्या दिशेने लावलेल्या बलामुळे असलेला समतोल
  1.  $\sum H = 0 \quad \therefore F_{\max.} = P \cos \theta$  ज्यामध्ये  $F_{\max.}$  = घर्षण बल आणि  $P$  = लावलेला बाह्य बल.
  2.  $\sum V = 0 \quad \therefore W = N + P \sin \theta$  ज्यामध्ये  $N$  = वरच्या दिशेतील प्रतिक्रिया बल आणि  $W$  = वस्तूचे वजन.
  3.  $F_{\max.} = \mu N$  ज्यामध्ये  $\mu$  = घर्षण गुणांक आणि  $N$  = वरच्या दिशेतील प्रतिक्रिया बल.

- वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील त्या प्रतलाच्या दिशेने लावलेल्या बलामुळे असलेला समतोल  
(a) जर बाह्य बल हे प्रतलाच्या पृष्ठभागावर समांतर वरच्या दिशेने असेल तर,

$$P = \frac{W \sin (\alpha + \theta)}{\cos \alpha}$$

- (b) जर बाह्य बल हे प्रतलाच्या पृष्ठभागावर समांतर खालच्या दिशेने असेल तर,

$$P = \frac{W \sin (\alpha - \theta)}{\cos \alpha}$$

## गृहपाठ

### (अ) वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- घर्षण गुणांक कशावर अवलंबून असतो:  
(अ) केवळ संपर्काचे क्षेत्र (ब) फक्त पृष्ठभागाच्या स्वरूपावर  
(क) (अ) आणि (ब) दोन्हीही (ड) कोणतेही नाही
- घर्षण गुणांक म्हणजे:  
(अ) घर्षण बल आणि परिणामी बल ह्यांचे गुणोत्तर.  
(ब) जेव्हा वस्तु एका दिशेने गती घेण्यास सुरुवात करते त्यावेळी तयार झालेले घर्षण बल.  
(क) परिणामी बल आणि परिणामी बल आणि सीमित घर्षण यांच्या परिणामी बल ह्यातील कोन.  
(ड) असे घर्षण बल की ज्यावेळी वस्तूला गती येते.
- एका कललेल्या पृष्ठभागावर वस्तु ठेवल्यास त्या पृष्ठभागाचा कोन वाढवत नेला तर ज्यावेळी ती वस्तु खालील दिशेने गती प्राप्त होते त्या कोनाला काय म्हणतात?  
(अ) विश्रांत कोन (ब) घर्षण कोन  
(क) कललेल्या पृष्ठभागाचा कोन (ड) कोणतेही नाही
- खालील विधानामधील कोणते विधान बरोबर आहे?  
(अ) घर्षण कोनाची स्पर्शिका ही घर्षण गुणांकाइतकी असते.  
(ब) विश्रांत कोन हा घर्षण कोनाइतका असतो.  
(क) विश्रांत कोनाची स्पर्शिका ही घर्षण गुणांक इतकी असते.  
(ड) ह्यातील सर्व विधान योग्य आहेत.
- एक वस्तु जेव्हा दुसऱ्या वस्तूच्या पृष्ठावरून गती प्राप्त होण्याच्या परिस्थितीमध्ये असते तेव्हा तयार होणारे जास्तीत जास्त घर्षण बल तयार होते त्याला काय म्हणतात?  
(अ) सरक घर्षण (ब) रोलिंग घर्षण  
(क) मर्यादित घर्षण (ड) ह्यातील काहीही नाही

6. वस्तूला जे घर्षण तयार होते जेव्हा ती वस्तु विश्रांत स्थितीमध्ये असते त्याला काय म्हणतात?  
 (अ) स्थैतिक घर्षण (ब) गतीज घर्षण  
 (क) सीमित घर्षण (ड) घर्षण गुणांक
7. वस्तूला जे घर्षण तयार होते जेव्हा ती वस्तु गती होण्यास तयार होते त्याला काय म्हणतात?  
 (अ) रोलिंग घर्षण (ब) गतीज घर्षण  
 (क) सीमित घर्षण (ड) स्थैतिक घर्षण
8. खालील कोणते विधान बरोबर आहे?  
 (अ) घर्षण बल पृष्ठभाग आणि वस्तु ह्यांच्यातील क्षेत्रफळाच्यावर अवलंबून नसते.  
 (ब) सीमित घर्षण हे दोन पृष्ठभागावरील परिणामी बलाशी स्थिर असते.  
 (क) स्थैतिक घर्षण हे सीमित घर्षणापेक्षा थोडे मोठे असते.  
 (ड) (अ) आणि (ब) बरोबर आहे.  
 (इ) (अ), (ब), (क) तिन्हीही योग्य आहे.
9. दोन वस्तूंमधील घर्षण बलाचे परिमाण, जेव्हा एक वस्तु दुसऱ्या वस्तूवर ठेवलेली असते, तेव्हा ती कोणत्या वस्तूच्या खरबरीत पणावर अवलंबून असते?  
 (अ) वरची वस्तु  
 (ब) खालची वस्तु  
 (क) दोन्हीही वस्तु  
 (ड) ती वस्तु ज्याच्या पृष्ठभागावर जास्त खरबरीतपणा असेल
10. घर्षण बल नेहमी कोणत्या दिशेने कार्य करते?  
 (अ) त्या दिशेने जिथे वस्तु गती घेण्यास प्रयत्न करीत असते.  
 (ब) ज्या दिशेने वस्तु पुढे जाण्यासाठी प्रयत्न करते  
 (क) (अ) आणि (ब) दोन्हीही बरोबर.  
 (ड) (अ) आणि (ब) दोन्हीही चूक.

[उत्तरे: 1-(ड), 2-(अ), 3-(अ), 4-(ड), 5-(क), 6-(अ), 7-(ब), 8-(इ), 9-(क), 10-(क)]

### (ब) व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न

1. खालील व्याख्या सांगा: (अ) घर्षण (ब) घर्षणाचा गुणांक (क) घर्षणाचा कोन (ड) स्थैतिक कोन (इ) मर्यादित घर्षण (ड) स्थिर घर्षण (फ) गतीज घर्षण.
2. घर्षणची काही उदाहरणे सांगा ज्यामध्ये घर्षण आपल्याकरिता महत्वाचे असते.
3. घर्षणाची काही अशी उदाहरणे सांगा की ज्यामध्ये घर्षण आपल्याकरिता महत्वाचे नसते.
4. घर्षण गुणांक आणि घर्षण कोन ह्यातील फरक स्पष्ट करा.

5. विश्रांतीचा कोन म्हणजे काय ह्याचे समर्थन करा.
6. विश्रांतीचा कोन आणि घर्षणाचा कोन ह्यातील संबंध साध्य करा.
7. जर वस्तु आणि पृष्ठभाग यातील संपर्कामाधले क्षेत्रफळ वाढल्यास, त्याचा घर्षानावर काय परिणाम होतो?
8. दोन वस्तूंमधील घर्षण गुणांक कशावर अवलंबून असतो?
9. एखाद्या वस्तूवर सर्व बाळांचा परिणामी बल ज्या दिशेने कार्य करतो तो कोन घर्षण कोणापासून कमी असेल तर त्या वस्तूवर काय होईल?
10. घर्षणाचे नियम लिहा.
11. एक वस्तु ज्याचे वजन 60 N आहे ती एका आडव्या प्रतलावर असलेल्या खरबरीत पृष्ठभागावर ठेवलेली आहे. जर वस्तु ढकलण्यासाठी 18 N हे बल आडव्या रेषेपासून  $20^\circ$  कोनात लावल्यास ही वस्तु हलण्यास सुरुवात होते. तर ह्यातील घर्षण गुणांक शोधा. [उत्तर: 0.255]
12. एका आडव्या प्रतलापासून  $25^\circ$  कोनात 60 N खेचणारे बल लावलेले आहे ज्यामुळे सदरची वस्तु त्या आडव्या खरबरीत पृष्ठभागावरून हलण्यास सुरुवात होते. त्याच वस्तूला ढकलणारे बल 75 N आडव्या प्रतलापासून  $25^\circ$  कोनात लावल्यास ती वस्तु त्या दिशेने हलण्यास सुरुवात करते. असे असल्यास त्या वस्तुचे वजन आणि ती वस्तु आणि तो खरबरीत पृष्ठभाग ह्यातील घर्षण गुणांक शोधा. [उत्तर: 253.83N, 0.238]
13. एक वस्तु ज्याचे वजन W इतके आहे तो एका खरबरीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेला आहे. ही वस्तु हलवण्यासाठी किमान लागणारे बाह्य बल  $\theta$  इतक्या आडव्यापासूनच्या कोनावर  $W \sin \theta$  इतके बल लागेल हे सविस्तर रित्या शोधा.
14. एक वस्तु ज्याचे वजन 100N इतके आहे तो एका खरबरीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेला आहे. तर ह्या वस्तूला पुढे खेचण्यासाठी आडवे किती बल लागेल. जर पृष्ठभाग हळूहळू  $15^\circ$  कोनात वर नेला तर ही वस्तु खालील दिशेने आपोआप घसरते. [उत्तर: 26.79N]
15. एक वस्तु ज्याचे वजन 50N इतके आहे तो एका खरबरीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेला आहे आणि जर अडवा खेचण्यासाठीचे 18 N इतके बल आडव्या प्रतलातून  $14^\circ$  कोनात लावले तर ती वस्तु खेचण्यास सुरुवात करित आहे. तर ही वस्तु आणि पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक शोधा. [उत्तर: 0.383]
16. जर इतक्या 500 N वजनाची वस्तु जी आडव्या प्रतलापासून  $15^\circ$  इतक्या कोनात आहे तर ती वस्तु खेचण्यासाठी इतके 250N बाह्य बल पृष्ठभागाला समांतर लागते. तर ही वस्तु आणि पृष्ठभाग यातील घर्षण गुणांक शोधा. [उत्तर: 0.25]
17. एका ठोकळ्याचे वजन 500 N इतके आहे आणि तो ठोकळा आडव्या प्रतलावरून  $30^\circ$  कोनामध्ये असलेल्या पृष्ठभागावर ठेवण्यात आलेला आहे. सदरचा ठोकळा आणि पृष्ठभाग ह्यातील घर्षण गुणांक 0.4 इतका असल्यास, ह्या ठोकळ्याला समतोल परिस्थितीमध्ये ठेवण्यासाठी किती कमीत कमी आणि जास्तीत जास्त बाह्य बल लागेल. [उत्तर: 76.68N, 422.5N]
18. एक 250 N इतके वजन असलेला ठोकळा एका  $30^\circ$  इतका आडव्या रेषेपासून कोन असलेल्या खरबरीत पृष्ठभागास ठेवलेला आहे. ह्यावर जर P इतके त्या कोनमधील प्रतलावर बाह्य बल लावल्यास सदरचा ठोकळा वरच्या दिशेने खेचण्यास सुरुवात होते. तर हा ठोकळा कमीत कमी आणि जास्तीत जास्त बाह्य बलामुळे समतोल परिस्थितीत राहू शकतो? सदरचा ठोकळा आणि खरबरीत पृष्ठभाग ह्यातील घर्षण गुणांक 0.30 इतका आहे. [उत्तर: 189.95N, 60.05N]

19. A आणि B ह्या दोन ठोकळ्यांचे वजन 200N आणि 200N आहे. A आणि B ह्यामधील जोडणारी रेषा (चेन) कललेल्या खरबरीत प्रतलाला समांतर आहे. ठोकळा A आणि ठोकळा B आणि पृष्ठभाग ह्यातील घर्षण गुणांक 0.15 आणि 0.40 इतका आहे. असे असल्यास कललेल्या प्रतलाचा कोन शोधा आणि A आणि B ह्यामधील जोडणारी रेषा (चेन) मधील ताण शोधा जर हे ठोकळे खालच्या दिशेने जाण्यास कार्यरत आहेत. [उत्तर:  $17.57^\circ$ ,  $31.78\text{N}$ ]
20. एक ठोकळा ज्याचे वजन 500N इतके आहे तो एका खरबरीत कललेल्या पृष्ठभागावर ठेवलेला आहे ज्याचा आडव्या दिशेपासूनचा कोन  $25^\circ$  इतका आहे. सदरचा ठोकळा समतोल परिस्थितीमध्ये राहण्याकरिता लागणारे कमीत कमी आणि जास्तीत जास्त बाह्य बल शोधा. हा ठोकळा आणि पृष्ठभाग ह्यातील घर्षण कोन  $20^\circ$  इतका च्या. [उत्तर:  $46.4\text{N}$ ,  $376.2\text{N}$ ]

## प्रात्यक्षिके

### प्रात्यक्षिक 15: घर्षण गुणांक

#### 15.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

क्षैतिज पृष्ठभाग आणि कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील घर्षण गुणांक शोधणे.

#### 15.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्व

दोन वेगवेगळ्या पदार्थांच्या वस्तूंमधील घर्षण गुणांक शोधणे.

#### 15.3 संबंधित पाठ

जेव्हा एखादी वस्तु दुसऱ्या संपर्कात असलेल्या वस्तूवरून गती प्रस्थापित करते किंवा गती निर्माण करण्याचा प्रयत्न करते तेव्हा घर्षण बल तयार होते आणि हे घर्षण बल त्या वस्तूच्या गतीच्या विरोधात कार्य करते. घर्षण बलाची दिशा ही गतीच्या दिशेच्या विरुद्ध असते. जेव्हा एक वस्तु दुसऱ्या वस्तूच्या संपर्कामधून गती सुरु करण्याच्या परिस्थितीमध्ये येते त्यावेळी जास्तीत जास्त घर्षण बल तयार झालेले असते. ह्या जास्तीत जास्त तयार होणाऱ्या घर्षण बलाला सीमित घर्षण असे म्हणतात.

**घर्षण गुणांक:** सीमित घर्षण बल आणि लंब प्रतिक्रिया ह्यांच्या गुणोत्तराला घर्षण गुणांक असे म्हणतात.

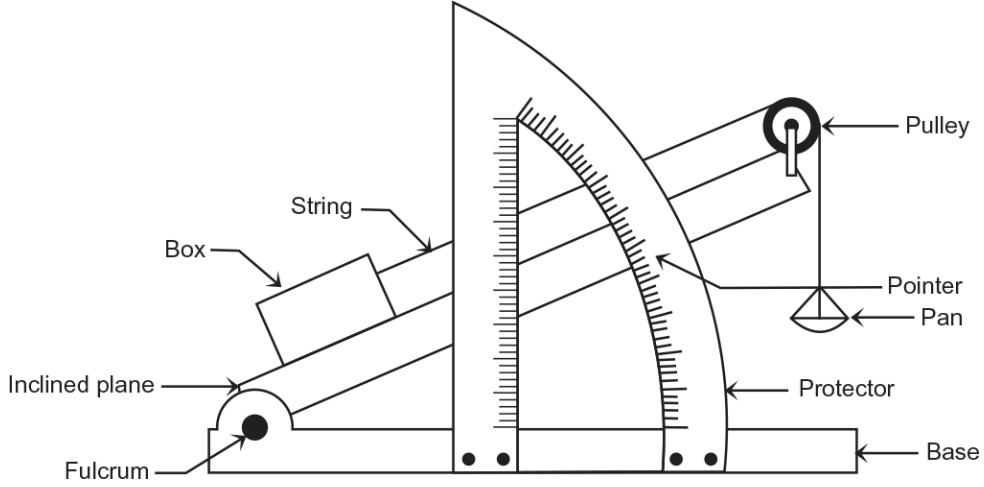
**घर्षणाचा कोन:** घर्षण कोन हा वस्तूच्या वजना विरुद्ध कार्यरत असलेल्या लंब प्रतिक्रिया आणि घर्षण बल ह्यांच्यामधील परिणामी बल आणि लंब प्रतिक्रिया ह्यांच्यामधील कोन असतो आणि त्याला घर्षण कोन असे म्हणतात.

#### 15.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: दोन वेगवेगळ्या पदार्थांच्या वस्तूंमधील घर्षण गुणांक शोधणे.

PrO2: वस्तूचे वस्तुमान, किंवा कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील कोन, किंवा ह्यापैकी दोन्हीही बदल केल्यास घर्षण गुणांकात काय बदल होतो ह्याचा अभ्यास करणे.

## 15.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना



## 15.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	घर्षण बेंच	1		
2.	लाकडी ठोकळा आणि वजन ठेवण्याची थाळी	1		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच आणि आलंब 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	स्प्रिंट लेव्हल	1		
5.	नायलॉनच्या दोऱ्या आणि आरसा	3		

## 15.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

1. घर्षण बेंच खरोखर आणि अचूकपणे लावून घ्या.
2. घर्षण बेंचचा पृष्ठभाग स्वच्छ करा जेणेकरून वंगण किंवा घाण पृष्ठभागावर चिकटणार नाही.
3. वजन ठेवण्याच्या तबकडीमध्ये वजन हळुवार पद्धतीने ठेवा जेणेकरून कोणताही धक्का लागणार नाही किंवा आदळणार नाही.
4. वजन लावल्यानंतर ठोकळा अचानक सरकू नये. तो शांततेत हलवू लागला पाहिजे.

## 15.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. स्प्रिंट लेवलाचा वापर करून घर्षण बेंचचा पृष्ठभाग क्षैतिज प्रतलावर समांतर ठेवून घ्या.
2. तुम्ही वापरणाऱ्या रिक्त ठोकळा आणि रिक्त थाळी यांचे वजन मोजा आणि नोंद करा.

3. आता ठोकळ्यामध्ये काही जास्तीचे वजन ठेवा आणि त्याला खेचण्यासाठी वजन (P) ठेवण्याच्या थाळीमध्ये एखादे कमी वजन ठेवा.
4. आता थाळीमधील वजन (P) हळू हळू वाढत जा आणि ठोकळ्यास गती प्राप्त होते का ते प्रत्येकवेळी पहा. जर खेचण्यासाठी लावलेले वजन ठोकळ्याला गती देवू शकत नसेल तर लावलेले वजन थोड्या पद्धतीने वाढत जा.
5. एका परिस्थितीमध्ये सगळ्यात शेवटी ज्या वजनाने ठोकळ्याला गती प्राप्त होत आहे ते वजन मोजा.
6. टीप: एकूण वजन W (हे ठोकळ्याचे वजन + ठोकळ्यामध्ये लावलेले वजन) आणि ठोकळ्याला गती प्राप्त होण्याकरीता लागलेले वजन P (हे थाळीचे वजन + थाळीमध्ये जास्तीचे ठेवलेले वजन) अशी बेरीज करून निरीक्षण तक्त्यामध्ये नोंदी लिहा.
7. आता ठोकळ्यामध्ये लावलेले वजन वाढवा आणि क्रमांक 3 ते 6 प्रमाणे कार्य करून ठोकळ्याला गती प्राप्त होण्याकरीता लागलेले वजन P मोजा. अशा 5 ते 6 नोंदी निरीक्षण तक्त्यात नोंदवा.
8. आता एक आलेख काढा. ज्यामध्ये क्ष - अक्षावर एकूण वजन W आणि य - अक्षावर गती प्राप्त होण्याकरीता लागलेले वजन P आलेख काढा.
9. ह्या आलेखामधील उतार म्हणजे ह्या दोन वस्तूंच्या पृष्ठभागामधील घर्षण गुणांक ( $\mu$ ) देतो.
10. आता वस्तूंमध्ये बदल करा आणि क्रमांक 2 ते 10 पर्यंत कार्यपद्धती वापरून घर्षण गुणांक शोधा.

### 15.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

पृष्ठभागामध्ये संपर्कात असलेल्या वस्तु:						
W = ठोकळ्याचे वजन + ठोकळ्यामध्ये लावलेले वजन आणि P = थाळीचे वजन + थाळीमध्ये जास्तीचे ठेवलेले वजन						
अ. क्र.	वजन (W) (gm मध्ये)	घर्षण बल (P) (gm मध्ये)	घर्षण गुणांक $\mu = P/W$	सरासरी घर्षण गुणांक $\mu$	आलेखातून आलेला घर्षण गुणांक $\mu$	घर्षणाचा कोन ( $\phi$ )
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						

नमुना गणना

$$\mu = \frac{P}{W}$$

### 15.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

## 15.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

## 15.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. मानक पुस्तकामध्ये दिलेल्या दोन पृष्ठभागाच्या मधील वजन आणि घर्षण बल यांच्या किंमती वापरून त्या पृष्ठभागामधील घर्षण गुणांक  $\mu$  शोधा.
2. जर घर्षण बेंच आणि लाकडी ठोकळा ह्यातील वस्तूचे पदार्थ बदलले तर घर्षण गुणांक  $\mu$  ह्यामध्ये बदल होईल काय?
3. घर्षण बल कशावर अवलंबून असते ह्याची यादी तयार करा.

## 15.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

## 15.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

## 15.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्याचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		



---

### अधिक माहिती घ्या

---

1. घर्षण बल आणि बाह्य बल ह्यामध्ये वस्तु संतुलित आहे किंवा कसे ह्याकरिता लॅमीच्या प्रमेयाचा वापर करून कसे शोधता येईल.

---

### संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन

---

1. D.S.Bedi, “Engineering Mechanics”; Khanna publications, New Delhi.
2. Khurmi RS, “Applied Mechanics”; S. Chand & Co, New Delhi.
3. Ramamrutham, “Engineering Mechanics”; S. Chand & Co, New Delhi.
4. Bansal RK, “A text book of Engineering Mechanics”; Laxmi publications, New Delhi.
5. Dhade, Jamadar & Walawelkar, “Fundamentals of Applied Mechanics”; Pune VidhyarthiGruh, Pune.
6. Meriam JL, Kraige LG, “Engineering Mechanics- statics –Vol.-I”; Wiley publication, New Delhi.
7. Beer, Johnson, Mazurek, Cornwell & Sanghi, “Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics”; Tata McGraw Hill, New Delhi.
8. <https://nptel.ac.in/courses/112/106/112106286/>
9. <https://nptel.ac.in/courses/122/104/122104015/>
10. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLC3A601B6060658D3>
11. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLB85BDFBE784B>

# 4

## प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र

### पाठाचा तपशील

ह्या पाठामध्ये खालील भागांचे आपण अध्ययन करणार आहोत:

- प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र ह्यांच्या व्याख्या
- प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र ह्यामधील फरक
- प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र ह्या संबंधित वेगवेगळ्या तांत्रिक बाबी
- एकमितीय आयामी आणि द्विमितीय आयामी असलेल्या वेगवेगळ्या मानक आकारांचे प्रकेंद्र
- संमिश्र आकृतीचे (लॅमिना) प्रकेंद्र
- साध्या मानक घन वस्तूंचे (तीन आयामी आकार) गुरुत्वाकेंद्र [3D घटक]
- संयुक्त घन पदार्थांचे गुरुत्व केंद्र

पुढच्या सत्रातील एका वेगळ्या अभ्यासक्रमामध्ये क्षेत्राचे द्वितीय आघूर्ण (second moment of area/ moment of inertia) ह्याचा अभ्यास करणार आहोत त्याकरिता हा पाठ समजणे महत्वाचे आहे. आपण ह्यातील उदाहरणे सारणीचा वापर करून करणार आहोत. काही वेगळ्या पद्धतीनेदेखील ह्या संदर्भातील उदाहरणे सोडविता येतात ते आपण “हे करण्याचा प्रयत्न करा” ह्यामध्ये बघणार आहोत. काही उपक्रम, उपक्रम ह्या विभागामध्ये अंतर्भूत केलेले आहेत; अशा पद्धतीने हे उपक्रम घेतले गेले तर विद्यार्थ्यांना सिद्धांत अधिक चांगल्या प्रकारे समजतील. ह्या पाठाच्या शेवटी प्रात्यक्षिकांची चर्चा झाल्यानंतर “अधिक माहिती घ्या” हा एक विभाग घेतलेला आहे, ज्याची या पुस्तकाच्या वापरकर्त्यांच्या फायद्यासाठी पूरक माहिती मिळावी ह्या अनुषंगाने त्याची रचना केली गेलेली आहे. विद्यार्थ्यांमध्ये ह्या विषयाबद्दल उत्सुकता निर्माण व्हावी आणि त्यांच्यामध्ये सुधारणा व्हावी ह्या अनुषंगाने पाठाच्या शेवटी बहुपर्यायी प्रश्न आणि व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न दिलेले आहेत.

विविध विषयांवर अधिक माहिती मिळवण्यासाठी काही QR कोड दिलेले आहेत, जे संबंधित पुढील ज्ञानासाठी स्कॅन करून वापरले जाऊ शकतात. QR कोड संदर्भ अशा प्रकारे निवडले गेलेले आहेत की विद्यार्थ्यांना स्वयम/NPTEL चे अभ्यासक्रम घेण्यास प्रोत्साहन मिळेल.

### तर्कसंगती

तुम्ही कधी विचार केला आहे का, की जहाज पाण्यावर का तरंगत आहे, बस किंवा कार रस्त्यावर का धावत आहे आणि ती खाली पडत नाही किंवा कलंडत नाही? बसचा खालचा मजला समजा रिकामा असेल आणि वरचा मजला लोकांनी भरलेला असेल तरीही बसेस कलंडत नाहीत? येथे गुरुत्व केंद्र महत्वाची भूमिका बजावते. एखाद्या वस्तूच्या गुरुत्व केंद्राची स्थिती त्याच्या स्थिरतेवर परिणाम

करते. या पाठामध्ये तुम्ही प्रकेंद्र (सेंट्रॉइडे) आणि गुरुत्व केंद्र (सेंटर ऑफ ग्राव्हिटी) यांचे महत्त्व जाणून घेऊ शकाल. स्ट्रक्चरल डिझाईन, मशीन डिझाईन आणि मटेरियलची ताकद यांसारख्या अभियांत्रिकी डिझायनिंगमध्ये वस्तूचे प्रकेंद्र आणि त्यांचा गुरुत्व केंद्र ह्याची माहिती असणे खूप महत्वाचे असते.

## पूर्व अपेक्षित ज्ञान

क्षेत्रफळ आणि घनफळ ह्याच्या मुलभूत संकल्पना ह्यांची माहिती असणे गरजेचे आहे.

## पाठाचा परिणाम

ह्या भागाचा अभ्यास पूर्ण झाल्यानंतर तुम्ही खालील गोष्टींकरिता सक्षम व्हाल.

U4-O1: प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र ह्यामधील फरक समजून घ्याल.

U4-O2: सममितीय (symmetrical) वस्तूच्या प्रकेंद्राचा बिंदू आणि गुरुत्व केंद्र ओळखू शकाल.

U4-O3: दिलेल्या वस्तूचे प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र हे शोधून काढू शकाल.

## पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण

युनिट-4 परिणाम	कोर्स आऊटकोम्ससह एक्सपेक्टेड मॅपिंग (1-दुर्बलसहसंबंध; 2-मध्यमसंबंध; 3-मजबूतसहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U4-O1	2	-	-	3	-
U4-O2	2	-	-	3	-
U4-O3	2	-	-	3	-

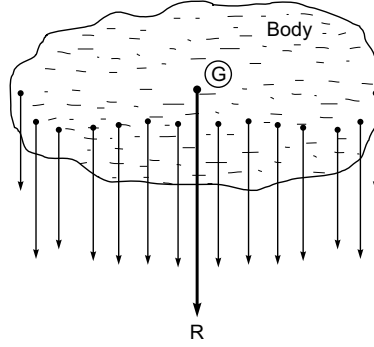
## 4.1 परिचय

वस्तूचा आकार वस्तूच्या कार्य करण्याच्या पद्धतीमध्ये परिणाम करतो. त्यामुळे वस्तूच्या कार्य करण्याच्या पद्धतीचा अभ्यास करण्यासाठी प्रकेंद्र, गुरुत्व केंद्र तसेच क्षेत्रफळाचे आघूर्ण (moment of area) आणि वस्तुमान यांची माहिती आवश्यक आहे. ह्या पाठामध्ये एखाद्या वस्तूचे प्रकेंद्र, गुरुत्व केंद्र कसे शोधावे तसेच एखादी वस्तू वेगवेगळ्या मानक आकारापासून (standard shapes) तयार झालेल्या संमिश्र वस्तूचे प्रकेंद्र, गुरुत्व केंद्र कसे शोधावे ह्याचा अभ्यास करणार आहोत.

### 4.1.1 गुरुत्व केंद्र

फार आधीपासून हे आपल्याला माहित आहे की, वस्तूचा प्रत्येक कण पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षण केंद्राकडे आकर्षित केलेला असतो. आकर्षणाचे बल, जे ह्या सर्व कणांच्या वस्तुमानाच्या प्रमाणात असते आणि ते खाली उभ्या दिशेने कार्य करते आणि ह्या सर्व कणांच्या परिणामी बलास हे त्या वस्तूचे वजन म्हणतात. आकृती 4.1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, वस्तूचे कण आणि पृथ्वीचे केंद्र ह्यामधील अंतर समान आहे असे मानले जाते (कारण पृथ्वीच्या तुलनेत वस्तूचा आकार खूपच लहान असल्यामुळे) हे सर्व कणांचे बल एकमेकास समांतर असणाऱ्या रेषेवर कार्य करीत आहेत असे समजले जाते/ जाऊ शकते.

ह्यामधील सर्व समांतर बलांचे परिणामी बल  $R$  हे  $G$  ह्या एका बिंदूवर कार्यरत असते. हा बिंदू जेथे वस्तूचे संपूर्ण वजन कार्य करते त्या बिंदूला गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (center of gravity / CG) म्हणून ओळखले जाते आणि ह्यामध्ये वस्तूची स्थिती विचारात घेतली जात नाही. हे लक्षात घ्या की कोणत्याही वस्तूस फक्त एक आणि एकच प्रकेंद्र किंवा गुरुत्व केंद्र असते. जर तुम्ही CG ह्या बिंदूवर वस्तूला संतुलित केले तर ती वस्तू संतुलित होईल.



आकृती 4.1: गुरुत्व केंद्र (CG)

#### 4.1.2 प्रकेंद्र

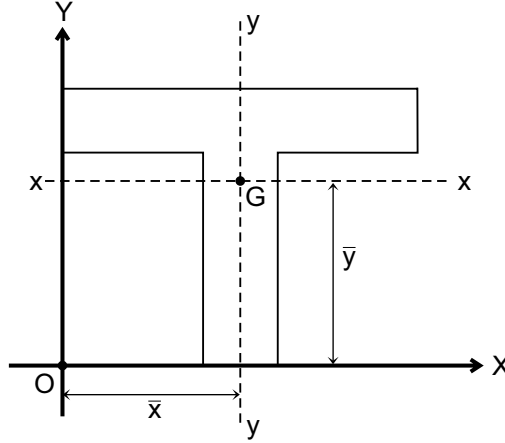
एका प्रतलावरील आकृत्या, जसे त्रिकोण, वर्तुळ इत्यादी, (द्विमितीय), ह्यांना वजन नसते तर फक्त क्षेत्रफळ असते. अशा आकृत्यांच्या केंद्राला प्रकेंद्र (centroid) असे म्हणतात. प्रकेंद्र हा एका प्रतलावरील एक बिंदू आहे आणि तो बिंदू असा असतो की त्या बिंदूवर त्या क्षेत्रफळाचे आघूर्ण (moment of area) घेतल्यास ते शून्य असते.

#### 4.1.3 गुरुत्व केंद्र आणि प्रकेंद्र ह्यातील फरक

फरक करण्याचे मापदंड	गुरुत्व केंद्र	प्रकेंद्र
आकलन फरक	गुरुत्व केंद्र म्हणजे एक बिंदू जेथे वस्तूचे सर्व वजन तेथे कार्यरत असते असे गृहीत धरले जाते.	प्रकेंद्र म्हणजे एक बिंदू जेथे वस्तूचे सर्व क्षेत्रफळ तेथे कार्यरत असते असे गृहीत धरले जाते.
चिन्हातील फरक	सर्वसाधारणपणे गुरुत्व केंद्राकरिता 'G' हे चिन्ह/अक्षर वापरले जाते.	सर्वसाधारणपणे प्रकेंद्राकरिता 'C' हे चिन्ह/अक्षर वापरले जाते.
संरचनेच्या उपयोगानेमधील फरक	गुरुत्व केंद्र हे द्विमितीय संरचनेचे विश्लेषण करीत असताना वापरले जाते.	प्रकेंद्र हे द्विमितीय संरचनेचे विश्लेषण करीत असताना वापरले जाते.
विषयाच्या वापरातील फरक	गुरुत्व केंद्र हे भौतिकशास्त्रामध्ये वापरले जाते.	प्रकेंद्र हे गणितामध्ये वापरले जाते आणि त्याचा उपयोग क्षेत्रफळाचे विश्लेषण करताना वापरला जातो.
उदाहरणार्थ	घन (cube), शंकू (cone), दंडगोल (cylinder), गोल (sphere), अर्धगोल (hemisphere) इत्यादी.	चौकोन (square), काटकोन चौकोन (rectangle), त्रिकोण (triangle), वर्तुळ (circle), अर्धवर्तुळ (semi circle), चतुर्थांश वर्तुळ (quarter circle) इत्यादी.

#### 4.1.4 प्रकेंद्राकरिता संदर्भ घेण्यासाठी घेतलेले अक्ष

प्रकेंद्र किंवा गुरुत्व केंद्र यांची गणना नेहमी गृहीत अक्षांच्या संदर्भात केली जाते. ह्या गृहीत अक्षांना संदर्भीय अक्ष असे म्हणतात. एका प्रतलातील क्षेत्रफळाकरिता संदर्भीय अक्ष घेताना सर्वसाधारणपणे आकृती 4.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, आकृतीच्या डाव्या बाजूच्या (OY) रेषेपासून  $\bar{x}$  आणि सगळ्यात खालील असलेल्या (OX) रेषेपासून  $\bar{y}$  अशी मोजली जाते.



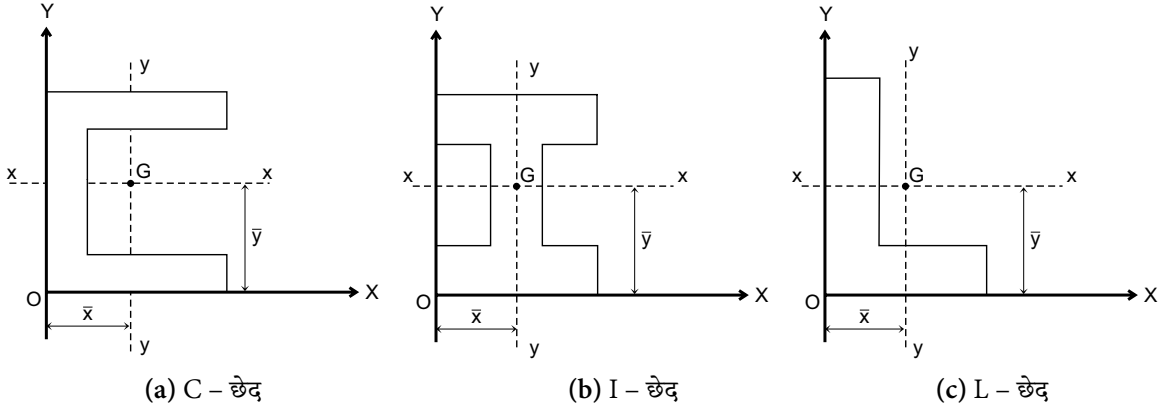
आकृती 4.2: संदर्भीय अक्ष

#### 4.1.5 सममिती अक्ष

आकृती 4.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे जे अक्ष (जसे x-x अक्ष आणि y-y अक्ष) आकृतीला तंतोतंत जुळणाऱ्या दोन आकृतीमध्ये विभाजित करतात अशा अक्षाला सममिती अक्ष असे म्हणतात. जर y-y अक्ष सममिती असेल तर  $\bar{x}$  चे अंतर थेटपणे मिळते परंतु  $\bar{y}$  चे अंतर गणना करून शोधावे लागते. त्याचप्रमाणे जर x-x अक्ष सममिती असेल तर  $\bar{y}$  ची स्थिती थेटपणे मिळते परंतु  $\bar{x}$  चे अंतर गणना करून शोधावे लागते.

एक किंवा एकापेक्षा जास्त अक्षसोबत सममिती असलेल्या आकृत्यांची उदाहरणे पाहूत:

1. **T – छेद:** आकृती 4.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे y-y हा अक्ष सममिती आहे त्यामुळे तर  $\bar{x}$  ची स्थिती थेटपणे मिळते परंतु  $\bar{y}$  चे अंतर गणना करून शोधावे लागते.
2. **C – छेद:** आकृती 4.3 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ह्यामध्ये x-x अक्ष हे सममिती आहे त्यामुळे  $\bar{y}$  चे अंतर थेटपणे मिळते परंतु  $\bar{x}$  चे अंतर गणना करून शोधावे लागते.
3. **I – छेद:** आकृती 4.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ह्यामध्ये x-x अक्ष आणि y-y हे दोन्हीही अक्ष सममिती आहेत त्यामुळे  $\bar{x}$  आणि  $\bar{y}$  ह्या दोन्हींचे अंतर थेटपणे मिळते.
4. **L – छेद:** ह्यामध्ये x-x अक्ष आणि y-y अक्ष हे दोन्हीही अक्ष सममिती अक्ष नसल्यामुळे,  $\bar{x}$  आणि  $\bar{y}$  या दोन्हींचे अंतर गणना करून शोधावे लागतात.



आकृती 4.3: सममिती अक्ष

**क्रिया 1:** एखाद्या वस्तूच्या गुरुत्व केंद्राची स्थिती ही त्या वस्तूच्या आकार आणि रचनेवर अवलंबून असते. अनेक इंजिनीअरिंग डिझाईन्समध्ये खडीचे वजन / स्थैर्यभाराचा वापर केला जातो जेणेकरून गुरुत्व केंद्राची स्थिती अधिक इष्ट स्थितीत हलवली जाते किंवा हलवता येऊ शकते. खाली दाखवलेले विमान पहा. ह्याचे गुरुत्व केंद्र कोठे असणे जास्त चांगले असू शकेल ह्यावर चर्चा करा.



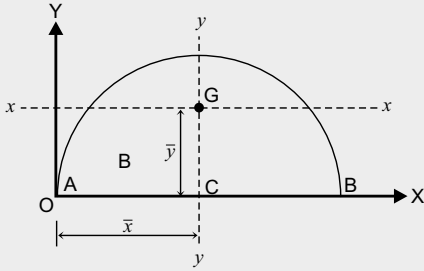
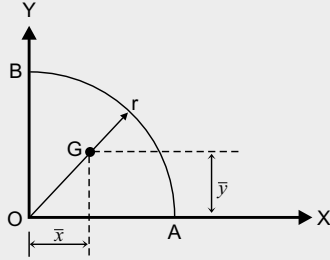
## 4.2 मानक आकारांचे प्रकेंद्र

तक्ता 4.1 मध्ये एकमितीय (आयामी) आणि द्विमितीय आकारांचे प्रकेंद्र दर्शविलेले आहे.

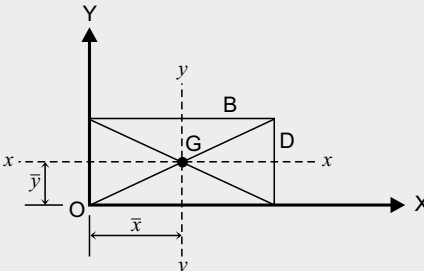
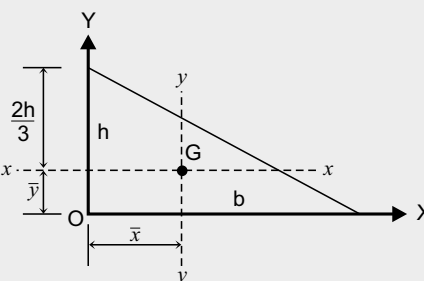
तक्ता 4.1: मानक आकारांचे प्रकेंद्र [आयामी आणि द्विमितीय आकार]

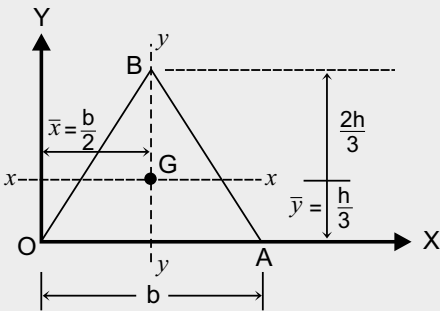
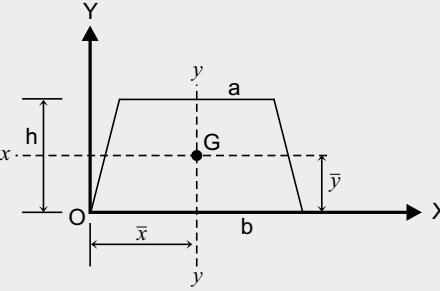
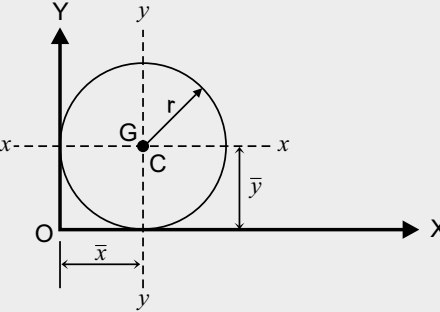
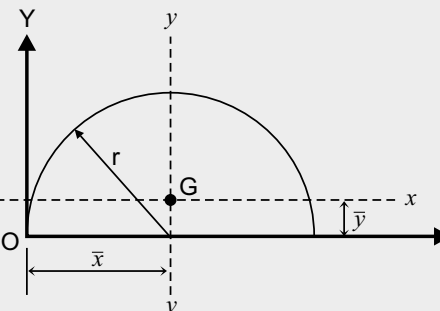
(A) एकमितीय (आयामी) आकार (रेषा)

क्र.	भौमितिक आकार	लांबी	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1.	<p>Straight wire AB</p>	L	Centre of Length $\left(\frac{L}{2}\right)$	
2.	<p>Wire ring</p>	$2\pi r$	Centre of Circle (r) $\bar{x} = r$ $\bar{y} = r$	

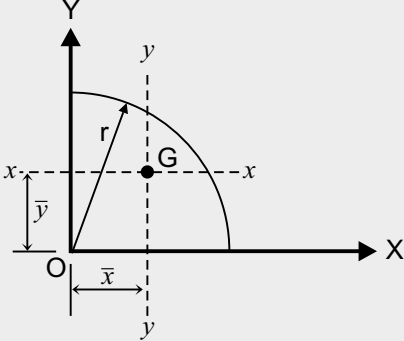
3.	 <p>Semicircular wire AB</p>	$\pi r$	$r$	$\frac{2r}{\pi}$
4.	 <p>Quarter-circular wire AB</p>	$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$

(B) द्विमितीय आकार (प्रतलावरील आकार)

क्र.	भौमितिक आकार	क्षेत्रफल	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1.	 <p>Rectangular or square</p>	$A = B \cdot D$	$\frac{B}{2}$	$\frac{D}{2}$
2.	 <p>Right angle triangle</p>	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$\frac{1}{3} b$	$\frac{1}{3} h$

3.	 <p>Symmetrical triangle</p>	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{3}$
4.	 <p>Trapezium</p>	$A = (a+b) \frac{h}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{3} \left( \frac{b+2a}{b+a} \right)$
5.	 <p>Circle</p>	$A = \pi r^2$ or $A = \frac{\pi}{4} d^2$	$r$	$r$
6.	 <p>Semicircle</p>	$A = \frac{\pi r^2}{2}$	$r$	$\frac{4r}{3\pi}$



7.	 <p style="text-align: center;">Quarter circle</p>	$A = \frac{\pi r^2}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$
----	---	-------------------------	-------------------	-------------------

### 4.3 संमिश्र आकृत्यांचे प्रकेंद्र

जेव्हा एकापेक्षा अधिक एकप्रतलीय मानक आकृत्या एकत्र घेऊन एखादी आकृती तयार केली जाते ती आकृती संमिश्र आकृती तयार करते. संमिश्र आकृतीचे प्रकेंद्र शोधताना त्या आकृतीला वेगवेगळ्या एकप्रतलीय मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन करावे लागते आणि खाली 4.3.1 मध्ये दिलेल्या क्रमाने अनुसरण करणे आवश्यक आहे. सदरच्या पुस्तकामध्ये आपण फक्त तीन किंवा तीनपेक्षा कमी एकप्रतलीय मानक आकृत्या वापरून तयार करण्यात आलेल्या संमिश्र आकृत्यांचा अभ्यास करणार आहोत.

#### 4.3.1 संमिश्र आकृत्यांचे प्रकेंद्र शोधण्याची पद्धत

संमिश्र आकृत्यांचे प्रकेंद्र शोधण्यासाठी खालील क्रमाने अनुसरण करावे.

**क्रम पहिला:** दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे वेगवेगळ्या मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन करा. ह्या मानक आकृत्यांमध्ये चौरस, आयत, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ, त्रिकोण अशा अनेक आकृत्या आहेत. संमिश्र आकृतीचे विभाजन करताना, छिद्र असलेले भाग (Cut outs) सुद्धा विचारात घ्यायचे असतात आणि त्या घटकांचे क्षेत्रफळ ऋण क्षेत्रफळ समजावे.

कधी कधी संमिश्र आकृत्या तयार करताना मानक आकृत्यांचे परिवलन सुद्धा ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ ) केलेले असू शकते. पुढील क्रमावर जाण्यापूर्वी संमिश्र आकृतीच्या वेगवेगळ्या सर्व मानक आकृत्यांचे विभाजन केलेले आहे ह्याची खात्री करून घ्या आणि ह्या प्रत्येक घटकाला (घटक 1, घटक 2, ... इत्यादी) असे नाव द्यावे.

**क्रम दुसरा:** तक्ता 4.1 (ब) मध्ये दर्शविलेल्या वेगवेगळ्या मानक आकृत्या विचारात घेऊन आणि त्याचा आधार घेऊन सर्व घटकांच्या क्षेत्रफळांची गणना करा. छिद्र असलेले भाग (Cut outs) सुद्धा विचारात घ्या आणि त्यांचे क्षेत्रफळ ऋण क्षेत्रफळ असे लिहा.

**क्रम तिसरा:** दिलेल्या संमिश्र आकृतीला X – अक्ष आणि Y – अक्ष असे संदर्भीय अक्ष गृहीत धरावे लागतात. ह्यामध्ये X – अक्ष काढताना तो दिलेल्या संमिश्र आकृतीच्या सर्वात खालच्या बिंदुवरून जाणारी क्षैतिज/ आडवी रेषा काढा आणि Y – अक्ष काढताना तो दिलेल्या संमिश्र आकृतीच्या सर्वात डाव्या बिंदुवरून जाणारी उभी रेषा काढा.

**क्रम चौथा:** क्रम पहिलामध्ये विभाजन करण्यात आलेल्या प्रत्येक घटकाच्या प्रकेंद्राचे X – अक्ष आणि Y – अक्ष ह्या संदर्भीय अक्षापासूनचे अंतर शोधा.

**क्रम पाचवा:** खाली दर्शविल्याप्रमाणे पुढील सर्व गणना सारणीमध्ये करा.

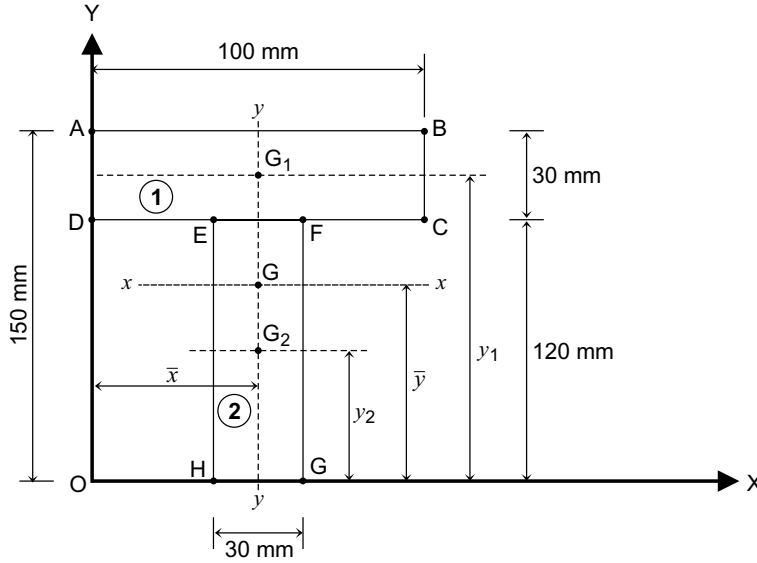
**क्रम सहावा:** खालील समीकरणांचा वापर करून संपूर्ण संमिश्र आकृतीचे संदर्भीय अक्षापासून असलेले अंतर

( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ) शोधा. (अ)  $\bar{x} = \Sigma Ax / \Sigma A$  आणि (ब)  $\bar{y} = \Sigma Ay / \Sigma A$

वरीलप्रमाणे संमिश्र आकृतीचे प्रकेंद्र शोधण्याची पद्धत समजून घेण्याकरिता आपण काही उदाहरणे पाहूत. अभ्यासक्रमाचा विचार करून संमिश्र आकृतीमध्ये तीनपेक्षा जास्त भौमितिक आकृत्या नाहीत.

अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे क्षेत्रफळ $\text{mm}^2$ एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर $\text{mm}$ एककामध्ये		$A \cdot x$	$A \cdot y$
			x	y		
1.	घटक 1	$A_1$	$x_1$	$y_1$	$A_1 x_1$	$A_1 y_1$
2.	घटक 2	$A_2$	$x_2$	$y_2$	$A_2 x_2$	$A_2 y_2$
n	घटक n	$A_n$	$x_n$	$y_n$	$A_n x_n$	$A_n y_n$
	Summation	$\Sigma A =$	---	---	$\Sigma Ax =$	$\Sigma Ay =$

उदाहरण 1: आकृती 4.6 मध्ये दर्शविलेल्या  $100 \text{ mm} \times 150 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$  T-छेदचे (T-section) प्रकेंद्र शोधा.



आकृती 4.6

उत्तर:

1. दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे वेगवेगळ्या मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन खालीलप्रमाणे केलेले आहे. दिलेल्या संमिश्र आकृतीमध्ये दोन आयत आहेत. ह्यांच्या घटकांना, खालील सारणीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे, वरचा आयत (फलँज) हा घटक 1 – ABCD आणि खालचा आयत (वेब) घटक 2 – EFGH अशी नावे द्या.
2. ह्या सर्व घटकांचे मानक आकारानुसार (आयत) असलेले क्षेत्रफळ शोधा.
3. दिलेल्या आकृतीसाठी संदर्भीय अक्ष X – अक्ष (OX रेषा) आणि Y – अक्ष (OY रेषा) काढा.

4. प्रत्येक घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्ष X – अक्ष आणि Y – अक्ष पासूनचे अंतर लिहा.
5. क्रम 2 ते 4 पर्यंत गणना केलेल्या सर्व किंमती खालील सारणीमध्ये लिहा.

अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे क्षेत्रफळ mm <sup>2</sup> एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर mm एककामध्ये		A·x	A·y
			x	y		
1.	वरील आयत 1 ABCD (100 × 30 mm)	100 × 30 = 3000	$\frac{100}{2} = 50$	$120 + \frac{30}{2} = 135$	150000	405000
2.	खालील आयत 2 EFGH (30 × 120 mm)	30 × 120 = 3600	50 from symmetry	$\frac{120}{2} = 60$	180000	216000
	बेरीज	ΣA = 6600	---	---	ΣA·x = 330000	ΣA·y = 6210000

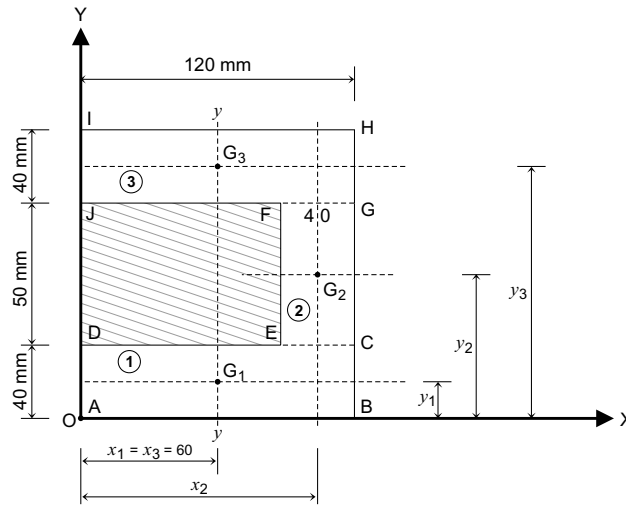
6. आता वापरलेल्या मानक आकृत्यांचा वापर करून मुख्य आकृतीचे प्रकेंद्र काढण्याकरिता वरच्या तक्त्यातील किंमती घेऊन आणि समीकरणाचा वापर करूया.

$$(a) \bar{x} = \frac{\Sigma A \cdot x}{\Sigma A} = \frac{330000}{6600} = 50.00 \text{ mm}$$

(ह्याच्याऐवजी y – y अक्ष सममिती अक्ष असल्याने  $\bar{x} = \frac{100}{2} = 50.00 \text{ mm}$  असे पण लिहिता येईल.)

$$(b) \bar{y} = \frac{\Sigma A \cdot y}{\Sigma A} = \frac{621000}{6600} = 94.09 \text{ mm}$$

उदाहरण 2: आकृती 4.7 मध्ये दर्शविलेल्या C-छेदचे (C-section) प्रकेंद्र शोधा.



आकृती 4.7

उत्तर:

1. दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे वेगवेगळ्या मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन खालीलप्रमाणे केलेले आहे. दिलेल्या संमिश्र आकृतीमध्ये C छेद आहे ज्यामध्ये तीन आयत आहेत. ह्यांच्या घटकांना, खालील सारणीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे, खालच्या आयताचा घटक 1, मधल्या आयताचा घटक 2, आणि वरच्या आयताचा घटक 3.
2. ह्या सर्व घटकांचे मानक आकारानुसार (आयत) असलेले क्षेत्रफळ शोधा.
3. दिलेल्या आकृतीसाठी संदर्भीय अक्ष X – अक्ष (OX रेषा) आणि Y – अक्ष (OY रेषा) काढा.
4. प्रत्येक घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्ष X – अक्ष आणि Y – अक्ष पासूनचे अंतर लिहा.
5. क्रम 2 ते 4 पर्यंत गणना केलेल्या सर्व किंमती खालील सारणीमध्ये लिहा.
6. वरील सारणीमधील किंमतींचा वापर करून आणि दिलेल्या समीकरणांचा वापर करून दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे प्रकेंद्र शोधा.

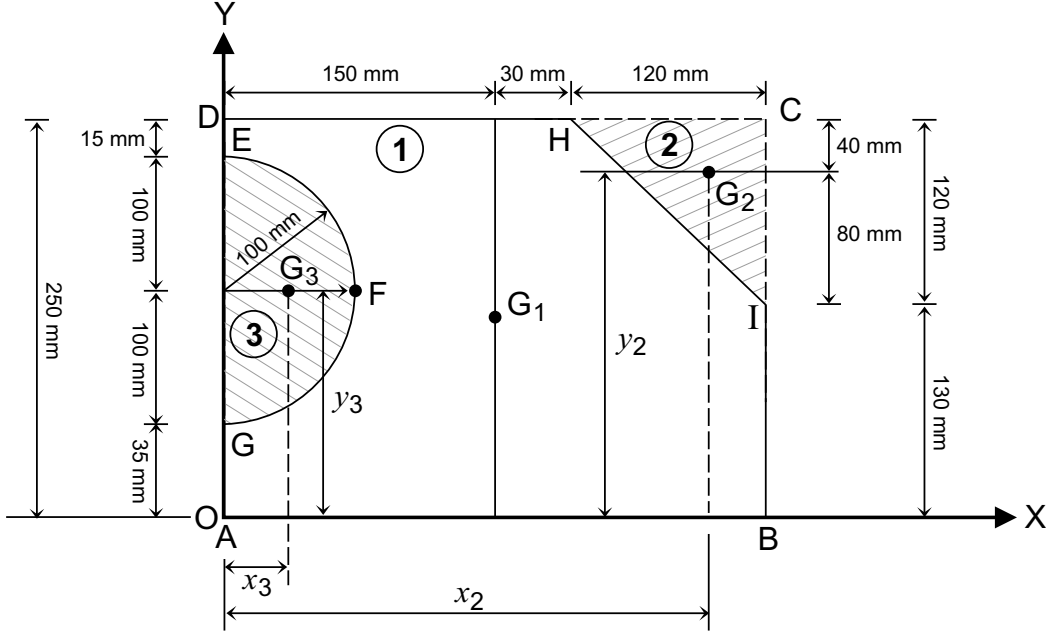
अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे क्षेत्रफळ mm <sup>2</sup> एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर mm एककामध्ये		A·x	A·y
			x	y		
1.	खालील आयताचा घटक 1 ABCD	$120 \times 40 = 4800$	$\frac{120}{2} = 60$	$\frac{40}{2} = 20$	288000	96000
2.	मधला आयताचा घटक 2 CEFG	$40 \times 50 = 2000$	$120 - 20 = 100$	$40 + \frac{50}{2} = 65$	200000	130000
3.	वरील आयताचा घटक 3 GHIJ	$120 \times 40 = 4800$	$\frac{120}{2} = 60$	$40 + 50 + \frac{40}{2} = 110$	288000	528000
	बेरीज	$\Sigma A = 11600$	---	---	$\Sigma A \cdot x = 776000$	$\Sigma A \cdot y = 754000$

$$(a) \bar{x} = \frac{\Sigma A \cdot x}{\Sigma A} = \frac{776000}{11600} = 66.90 \text{ mm}$$

$$(b) \bar{y} = \frac{\Sigma A \cdot y}{\Sigma A} = \frac{754000}{11600} = 65.00 \text{ mm}$$

**प्रयत्न करा:** उदाहरण दोन मध्ये दिलेल्या संमिश्र आकृतीमधील दोन आयत विचारात घेऊन प्रकेंद्र शोधा. ह्यामध्ये पूर्ण आयत ( $120 \times 130$ ) mm (+ ve) आणि दुसरा काढून टाकलेला आयत ( $80 \times 50$ ) mm (– ve) आहे.

उदाहरण 3: आकृती 4.8 मध्ये दर्शविलेल्या संमिश्र आकृतीचे प्रकेंद्र शोधा.



आकृती 4.8

उत्तर:

- दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे वेगवेगळ्या मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन खालीलप्रमाणे केलेले आहे. दिलेल्या संमिश्र आकृतीमध्ये तीन मानक आकृत्या आहेत. ह्या आकृत्यांचे घटक 1, घटक 2 आणि घटक 3 अशाप्रकारे विभाजन करून ज्या ह्या 3 आकृत्या आहेत त्या तक्ता 4.1 मध्ये दाखविलेल्या आहेत. अर्धवर्तुळ हे  $90^\circ$  मध्ये अभिमुख केलेले असल्यामुळे समन्वयक  $\bar{x}$  असा होतो आणि दुसरा त्याचप्रमाणे  $\bar{y}$  उलट होतो. ह्याचप्रमाणे लिकोन  $180^\circ$  मध्ये अभिमुख केलेला असल्यामुळे लिकोणाची खालची रेषा वर जाते त्याप्रमाणे त्याचे प्रकेंद्र घ्या.
- ह्या सर्व घटकांचे मानक आकारानुसार (आयत) असलेले क्षेत्रफळ शोधा. ह्यामध्ये दोन मानक आकृत्या 2 आणि 3 ह्या काढून टाकलेल्या आहेत त्यांना  $(-ve)$  ऋण समजा.
- दिलेल्या आकृतीसाठी संदर्भीय अक्ष X – अक्ष (AB रेषा) आणि Y – अक्ष (AD रेषा) काढा.
- प्रत्येक घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्ष X – अक्ष आणि Y – अक्ष पासूनचे अंतर लिहा.
- क्रम 2 ते 4 पर्यंत गणना केलेल्या सर्व किंमती खालील सारणीमध्ये लिहा.
- वरील सारणीमधील किंमतींचा वापर करून आणि दिलेल्या समीकरणांचा वापर करून दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे प्रकेंद्र शोधा.

अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे क्षेत्रफळ mm <sup>2</sup> एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर mm एककामध्ये		A·x	A·y
			x	y		
1.	आयत घटक 1 ABCD (300 × 250 mm)	$300 \times 250$ = 75000	$\frac{300}{2} = 150$	$\frac{250}{2} = 250$	11250000	9375000
2.	छाटलेल्या त्रिकोणाचा घटक 2 CHI (120 mm दोन्ही बाजूची लांबी)	$120 \times \frac{120}{2}$ = 7200	$300 - 40 = 260$	$250 - 40 = 210$	-1872000	-1512000
3.	छाटलेल्या अर्ध वर्तुळाचा घटक 3 EFJ (त्रिज्या = 100 mm)	$\frac{\pi \times 100^2}{2}$ = -15707.96	$\frac{4 \times 100}{(3 \times \pi)}$ = 42.44	$35 + 100 = 135$	-666645.82	-2120574.60
	बेरीज	$\Sigma A = 52092.04$	---	---	$\Sigma A \cdot x = 8711354.18$	$\Sigma A \cdot y = 5742425.40$

$$(a) \bar{x} = \frac{\Sigma A \cdot x}{\Sigma A} = \frac{8711354.18}{52092.04} = 167.23 \text{ mm}$$

$$(b) \bar{y} = \frac{\Sigma A \cdot y}{\Sigma A} = \frac{5742425.40}{52092.04} = 110.23 \text{ mm}$$

**क्रिया 2:** सर्व विद्यार्थ्यांना किंवा त्यांच्या गटामध्ये वास्तविक जगातील वस्तु द्या. त्यांना आपण ह्या तीन उदाहरणांमध्ये वापरलेल्या पद्धतीप्रमाणे प्रकेंद्र शोधायला सांगा.

हे करण्याकरिता खालील पद्धतीच्या एक मार्ग वापर:

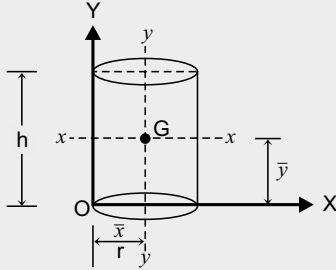
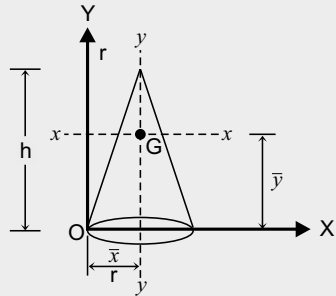
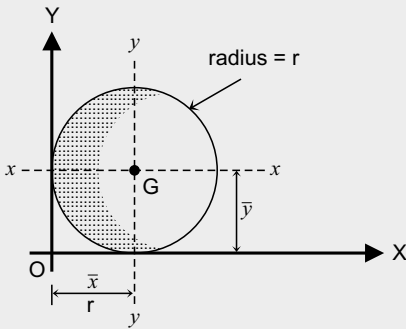
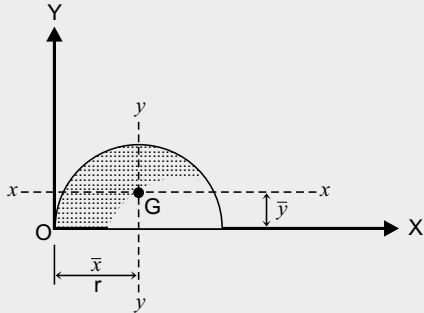
- आकृतीमध्ये दोन भिन्न छिद्र पाडणे.
- एका छिद्रातून ऑब्जेक्ट आणि वेटेड स्ट्रिंग लटकवा.
- ऑब्जेक्टवर जिथे स्ट्रिंग लटकते, तेथे एक रेषा काढा.
- दुसऱ्या छिद्राचा वापर करून हेच पुन्हा करा.

ह्या दोन रेषा जेथे त्यांचा छेदनबिंदू असेल तेथे ह्या आकृतीचा प्रकेंद्र असेल.

#### 4.4 गुरुत्व केंद्र (घनाकृती आकृतीचे गुरुत्व केंद्र/ लिमितीय घटकांचे गुरुत्व केंद्र)

वेगवेगळ्या घनाकृती आकृत्यांचे किंवा लिमितीय आकृत्यांचे गुरुत्व केंद्र खालील तक्ता 4.2 मध्ये दर्शविले आहेत.

तक्ता 4.2: लिमितीय आकृत्यांचे गुरुत्व केंद्र

अ. क्र.	घन	घनफळ	$\bar{x}$	$\bar{y}$
1.	 <p>Cylinder</p>	$V = \pi r^2 h$	$r$	$\frac{h}{2}$
2.	 <p>Cone</p>	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$	$r$	$\frac{h}{4}$
3.	 <p>Sphere</p>	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	$r$	$r$
4.	 <p>Hemisphere</p>	$V = \frac{2}{3} \pi r^3$	$r$	$\frac{3r}{8}$

#### 4.5 संमिश्र घनाकृती आकृतीचे गुरुत्व केंद्र

ह्यामध्ये आपण आकृतीच्या क्षेत्रफळाचा विचार करीत नाही तर त्या आकृतीचे घनफळ विचारात घेतो. द्विमितीय आकृतीचे प्रकेंद्र काढण्यासाठी जी पद्धत आपण वापरली त्याच पद्धतीने त्रिमितीय आकृतीचे गुरुत्व केंद्र आपण काढत असतो तरीही काम करण्याचे क्रम खालीलप्रमाणे असतात.

**क्रम पहिला:** पहिल्यांदा दिलेल्या संमिश्र घनाकृतीचे वेगवेगळ्या मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन करा. ह्या मानक घन आकृत्या शंकू, दंडगोल, घनगोल, घनअर्धगोल अशा प्रकारच्या असतात. संमिश्र आकृतीचे विभाजन करताना, छिद्र असलेले भाग (Cut outs) सुद्धा विचारात घ्यायचे असतात आणि त्या घटकांचे घनफळ ऋण घनफळ समजावे. पुढील क्रमावर जाण्यापूर्वी संमिश्र आकृतीच्या वेगवेगळ्या सर्व मानक आकृत्यांचे विभाजन केलेले आहे ह्याची खाली करून घ्या आणि ह्या प्रत्येक घटकाला (घटक 1, घटक 2, घटक 3 .. इत्यादी) असे नाव द्यावे.

**क्रम दुसरा:** तक्ता 4.2 मध्ये दर्शविलेल्या वेगवेगळ्या मानक आकृत्या विचारात घेऊन आणि त्याचा आधार घेऊन सर्व घटकांच्या घनफळाची गणना करा. छिद्र असलेले भाग (Cut outs) सुद्धा विचारात घ्या आणि त्यांचे घनफळ ऋण घनफळ असे लिहा.

**क्रम तिसरा:** दिलेल्या संमिश्र आकृतीला  $X$  – अक्ष आणि  $Y$  – अक्ष असे संदर्भीय अक्ष गृहीत धरावे लागतात. ह्यामध्ये  $X$  – अक्ष काढताना तो दिलेल्या संमिश्र आकृतीच्या सर्वात खालच्या बिंदूवरून जाणारी क्षैतिज/ आडवी रेषा काढा आणि  $Y$  – अक्ष काढताना तो दिलेल्या संमिश्र आकृतीच्या सर्वात डाव्या बिंदूवरून जाणारी उभी रेषा काढा.

**क्रम चौथा:** क्रम पहिलामध्ये विभाजन करण्यात आलेल्या प्रत्येक घटकाच्या गुरुत्व केंद्राचे  $X$  – अक्ष आणि  $Y$  – अक्ष ह्या संदर्भीय अक्षापासूनचे अंतर शोधा.

**क्रम पाचवा:** खाली दर्शविल्याप्रमाणे पुढील सर्व गणना सारणीमध्ये करा.

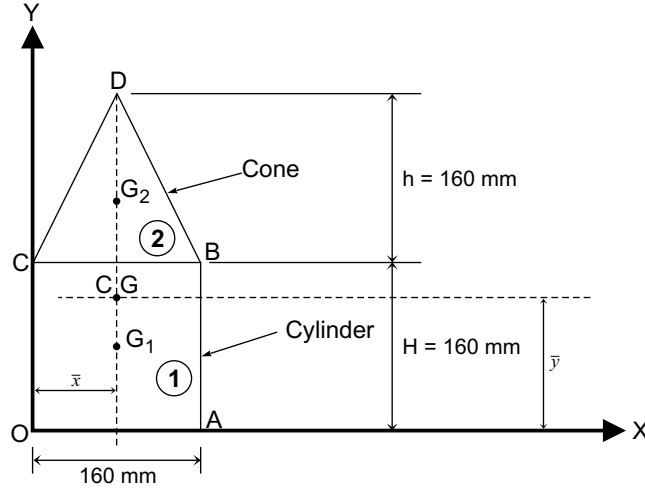
अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे घनफळ $\text{mm}^3$ एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर $\text{mm}$ एककामध्ये		$V \cdot x$	$V \cdot y$
			$x$	$y$		
1.	घटक 1	$V_1$	$x_1$	$y_1$	$V_1 x_1$	$V_1 y_1$
2.	घटक 2	$V_2$	$x_2$	$y_2$	$V_2 x_2$	$V_2 y_2$
n	घटक n	$V_n$	$x_n$	$y_n$	$V_n x_n$	$V_n y_n$
	बेरीज	$\Sigma V =$	---	---	$\Sigma Vx =$	$\Sigma Vy =$

**क्रम सहावा:** खालील समीकरणांचा वापर करून संपूर्ण संमिश्र आकृतीचे संदर्भीय अक्षापासून असलेले अंतर ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ) शोधा. (अ)  $\bar{x} = \Sigma Vx / \Sigma V$  आणि  $\bar{y} = \Sigma Vy / \Sigma V$

वरीलप्रमाणे संमिश्र आकृतीचे गुरुत्व केंद्र शोधण्याची पद्धत समजून घेण्याकरिता आपण काही उदाहरणे पाहूत. अभ्यासक्रमाचा विचार करून संमिश्र आकृतीमध्ये दोनपेक्षा जास्त भौमितिक आकृत्या नाहीत.

**उदाहरण 4:** आकृती 4.9 मध्ये दर्शविलेल्या संमिश्र घन आकृतीचे गुरुत्व केंद्र शोधा. दंडगोलाचा व्यास आणि उंची 160 mm आहे आणि दंडगोल शंकूला आधार देत आहे ज्याची खालील रुंदी आणि उंची 160 mm इतकी आहे. आकृतीमध्ये गुरुत्व केंद्राची स्थिती दर्शवा.





आकृती 4.9

उत्तर:

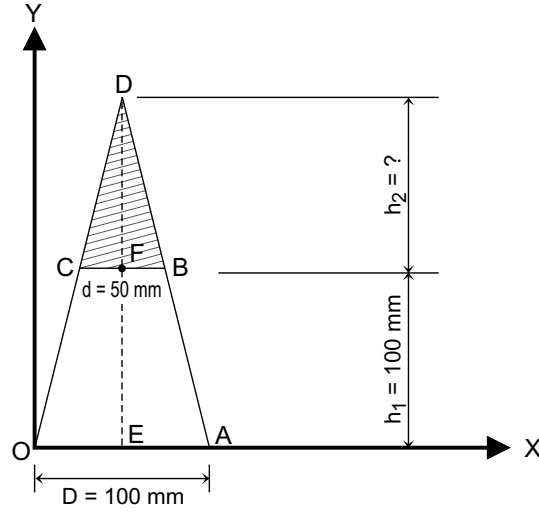
1. दिलेल्या संमिश्र घन आकृतीचे वेगवेगळ्या मानक आकृत्यांमध्ये विभाजन खालीलप्रमाणे केलेले आहे. दिलेल्या संमिश्र आकृतीमध्ये दोन मानक आकृत्या आहेत. ह्यामध्ये OABC हा दंडगोल घटक 1 आहे आणि CBD हा शंकू घटक 2 आहे.
2. ह्या सर्व घटकांचे मानक आकारानुसार असलेले घनफल शोधा.
3. दिलेल्या आकृतीसाठी संदर्भीय अक्ष X – अक्ष (AB रेषा) आणि Y – अक्ष (AD रेषा) काढा.
4. प्रत्येक घटकाच्या गुरुत्व केंद्राचे संदर्भीय अक्ष X – अक्ष आणि Y – अक्ष पासूनचे अंतर लिहा.
5. क्रम 2 ते 4 पर्यंत गणना केलेल्या सर्व किंमती खालील सारणीमध्ये लिहा.
6. वरील सारणीमधील किंमतींचा वापर करून आणि दिलेल्या समीकरणांचा वापर करून दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे गुरुत्व केंद्र शोधा.

अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे घनफल mm <sup>3</sup> एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर mm एककामध्ये		V·x	V·y
			x	y		
1.	दंडगोल	$\pi R^2 H = \pi \times 80^2 \times 160$ $= 321699.88$	$\frac{D}{2} = \frac{160}{2}$ $= 80$	$\frac{H}{2} = \frac{160}{2}$ $= 80$	257359270.40	257359270.40
2.	शंकू	$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 80^2 \times 160}{3}$ $= 1072330.29$	$\frac{d}{2} = \frac{160}{2}$ $= 80$	$H + \frac{h}{4}$ $= 160 + \frac{160}{4}$ $= 200$	85786423.20	214466058.00
	बेरीज	$\Sigma V = 4289321.17$	---	---	$\Sigma Vx =$ 343145693.60	$\Sigma Vy =$ 471825328.40

$$(a) \bar{x} = \frac{\Sigma V \cdot x}{\Sigma V} = \frac{343145693.60}{4289321.17} = 80.00 \text{ mm}$$

$$(b) \bar{y} = \frac{\Sigma V \cdot y}{\Sigma V} = \frac{471825328.40}{4289321.17} = 110.00 \text{ mm}$$

**उदाहरण 5:** आकृती 4.10 मध्ये दर्शविलेल्या संमिश्र घन आकृतीचे गुरुत्व केंद्र शोधा. ह्यामध्ये समच्छिन्न शंकू आहे ज्याचा खालील व्यास 100 mm आहे, वरील व्यास 50 mm आणि उंची 100 mm आहे. आकृतीमध्ये गुरुत्व केंद्राची स्थिती दर्शवा.



आकृती 4.10

**उत्तर:**

हा समच्छिन्न शंकू OABC पूर्ण शंकू OAD मधून वरचा शंकू CBD काढून टाकला तर तयार होतो. संपूर्ण कोन DCF आणि कोन OAD मधील कोन ह्या दोन कोनांची तुलना करून,

$$\begin{aligned} \frac{DE}{OE} &= \frac{DF}{CF} \\ \therefore \frac{DE}{50} &= \frac{(DE - 100)}{25} \\ \therefore 25 DE &= 50 DE - 5000 \\ \therefore 25 DE &= 5000 \\ \therefore DE &= 200 \text{ mm} \\ \therefore h_2 &= DF \\ &= DE - EF \\ &= 200 - 100 \\ \therefore h_2 &= 100 \text{ mm} \end{aligned}$$

1. आकृती 4.10 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे दिलेला घन हा समखीन्न शंकू OABC पूर्ण कोन OAD मधून वरचा कोन CBD काढून टाकला तर तयार होतो. त्यामुळे पूर्ण कोन OAD ह्याला घटक 1 आणि वरचा कोन CBD ह्याला घटक 2 असे नाव दया.
2. ह्या सर्व घटकांचे मानक आकारानुसार असलेले घनफल शोधा.
3. दिलेल्या आकृतीसाठी संदर्भीय अक्ष X – अक्ष (AB रेषा) आणि Y – अक्ष (AD रेषा) काढा.
4. प्रत्येक घटकाच्या गुरुत्व केंद्राचे संदर्भीय अक्ष X – अक्ष आणि Y – अक्ष पासूनचे अंतर लिहा.
5. क्रम 2 ते 4 पर्यंत गणना केलेल्या सर्व किंमती खालील सारणीमध्ये लिहा.

अ. क्र.	घटकाचे नाव	घटकाचे घनफल mm <sup>3</sup> एककामध्ये	घटकाच्या प्रकेंद्राचे संदर्भीय अक्षापासून अंतर mm एककामध्ये		V·x	V·y
			x	y		
1.	पूर्ण शंकू OAD	$\pi R^2 H$ $= \pi \times 50^2 \times 200$ $= 1570796.33$	$\frac{D}{2} = \frac{100}{2}$ $= 50$	$\frac{H}{4} = \frac{200}{4}$ $= 50$	78539816.50	78539816.50
2.	वरचा शंकू CBD काढून टाकला	$-\pi r^2 h$ $= \pi \times 25^2 \times 100$ $= -196349.54$	50 From Symmetry	$h_1 + \frac{h_2}{4}$ $= 160 + \frac{100}{4}$ $= 200$	-9817477.04	-24543692.50
	बेरीज	$\Sigma V = 1374446.79$	---	---	$\Sigma Vx =$ 68722339.46	$\Sigma Vy =$ 53996124.00

6. समीकरणांचा वापर करून दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे गुरुत्व केंद्र शोधा.

$$(a) \bar{x} = \frac{\Sigma V \cdot x}{\Sigma V} = \frac{343145693.60}{4289321.17} = 50.00 \text{ mm}$$

दिलेली संमिश्र आकृती ही Y-Y अक्षाभोवती सममित असल्यामुळे  $\bar{x} = 50.00 \text{ mm}$  हे स्वाभाविक आहे.

$$(b) \bar{y} = \frac{\Sigma V \cdot y}{\Sigma V} = \frac{53996124.00}{4289321.17} = 39.29 \text{ mm}$$

### क्रिया 3: त्रिमितीय आकृत्यांचे गुरुत्व केंद्राचे आव्हान

- भिंतीच्या जवळ एक खुर्ची ठेवा जेणेकरून ती मागे सरकणार नाही.
  - खुर्चीवर बसा आणि तुमचे पाय तुमच्या समोरील जमिनीवर ठेवा. (तुमचे पाय कोनामध्ये किंवा बाजूला तिरके नसावेत.)
  - तुमच्या जोडीदाराला हळूवारपणे अंगठा तुमच्या कपाळाच्या मध्यभागी ठेवण्यास सांगा.
- आता आपल्या जोडीदाराचा हात मागे न घेता उभे राहण्याचा प्रयत्न करा. काय होत आहे?

## सारांश

- **गुरुत्व केंद्र:** हा असा बिंदू आहे जेथे वस्तूचे संपूर्ण वजन कार्य करते त्या बिंदूला गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (center of gravity / CG) म्हणून ओळखले जाते आणि ह्यामध्ये वस्तूची स्थिती विचारात घेतली जात नाही.
- **प्रकेंद्र:** प्रकेंद्र हा एका प्रतलावरील एक बिंदू आहे आणि तो बिंदू असा असतो की त्या बिंदूवर त्या क्षेत्रफळाचे आघूर्ण (moment of area) घेतल्यास ते शून्य असते.
- **संदर्भीय अक्ष:** प्रकेंद्र किंवा गुरुत्व केंद्र यांची गणना नेहमी गृहित अक्षांना संदर्भात केली जाते. ह्या गृहित अक्षांना संदर्भीय अक्ष असे म्हणतात. एका प्रतलातील क्षेत्रफळाकरिता संदर्भीय अक्ष घेताना सर्वसाधारणपणे आकृतीच्या डाव्या बाजूच्या (OY) रेषेपासून  $\bar{x}$  आणि सगळ्यात खालील असलेल्या (OX) रेषेपासून अशी  $\bar{y}$  मोजली जाते.
- **सममिती अक्ष:** जे अक्ष (जसे x - x अक्ष आणि y - y अक्ष) आकृतीला तंतोतंत जुळणाऱ्या दोन आकृतीमध्ये विभाजित करतात अशा अक्षाला सममिती अक्ष असे म्हणतात.
- **संमिश्र द्विमितीय छिद्र असलेल्या आकृतीचे प्रकेंद्र:** संमिश्र द्विमितीय आकृतीचे विभाजन करताना, छिद्र असलेले भाग (Cut outs) सुद्धा विचारात घ्यायचे असतात आणि त्या घटकांचे क्षेत्रफळ ऋण क्षेत्रफळ समजावे.
- **संमिश्र त्रिमितीय छिद्र असलेल्या आकृतीचे गुरुत्व केंद्र:** संमिश्र त्रिमितीय आकृतीचे विभाजन करताना, छिद्र असलेले भाग (Cut outs) सुद्धा विचारात घ्यायचे असतात आणि त्या घटकांचे घनफळ ऋण घनफळ समजावे.

## गृहपाठ

### (अ) वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. खाली दिलेल्या विधानामधील कोणते विधान बरोबर आहे.
  - (अ) त्रिकोणाचे प्रकेंद्र एका बिंदूवर असते जेथे त्याचे कोणतेही दोन मध्यक एकमेकांना भेटतात
  - (ब) अनियमित आकृतीमध्ये एकापेक्षा जास्त प्रकेंद्र असू शकतात
  - (क) त्रिकोणाचा प्रकेंद्र एका बिंदूवर असते जिथे तिन्ही कोनांचे दुभाजक एकमेकांना भेटतात
  - (ड) सर्व विधाने बरोबर आहेत.
  - (इ) सर्व विधाने चुकीची आहेत.
2. समभूज त्रिकोणाच्या सर्व बाजू 'a' इतक्या आहेत. त्याचे प्रकेंद्र त्रिकोणाच्या कोणत्याही एका बाजूकडून किती अंतरावर असेल?

(अ)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

(ब)  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

(क)  $\frac{a}{2\sqrt{3}}$

(ड)  $\frac{a}{3\sqrt{2}}$

3. एका समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजू  $a$  आणि  $b$  इतक्या आहेत आणि त्यातील उंची  $h$  इतकी आहे तर खालच्या निम्नतल पातळी पासून प्रकेंद्र कुठे असेल?
 

(अ) $\frac{h}{3} \times \frac{b+2a}{b+a}$	(ब) $\frac{h}{4} \times \frac{b+2a}{b+a}$
(क) $\frac{h}{2} \times \frac{b+2a}{b+a}$	(ड) $h \times \frac{b+a}{b+2a}$
4. अर्धवर्तुळाचे प्रकेंद्र खालील पातळीपासून  $r$  इतक्या लंब लिज्येपासून किती अंतरावर असते.
 

(अ) $\frac{3r}{4\pi}$	(ब) $\frac{4r}{3\pi}$
(क) $\frac{4\pi}{3r}$	(ड) $\frac{3\pi}{4r}$
5. एका अर्धगोलाचा व्यास पृष्ठभागावर ठेवल्यास त्या अर्धगोलाचे गुरुत्व केंद्र खालील पातळीपासून किती अंतरावर असेल?
 

(अ) $\frac{3r}{8}$	(ब) $\frac{3}{8r}$
(क) $\frac{8r}{3}$	(ड) $\frac{8}{3r}$
6. उजव्या गोलाकार शंकूचा व्यास  $d$  आणि उंची  $h$  असल्यास त्याच्या खालच्या गोलाकार पातळीपासून वरच्या दिशेने गुरुत्व केंद्र किती अंतरावर असेल?
 

(अ) $\frac{h}{2}$	(ब) $\frac{h}{3}$
(क) $\frac{h}{4}$	(ड) $\frac{h}{6}$
7. एका दंडगोलाचा व्यास  $d$  असेल आणि उंची  $h$  असेल तर उभ्या लिज्या  $r$  सह मोजलेल्या त्याच्या पायापासून त्याच्या गुरुत्व केंद्राचे अंतर किती असेल?
 

(अ) $\frac{h}{2}$	(ब) $\frac{h}{3}$
(क) $\frac{h}{4}$	(ड) $\frac{h}{6}$
8. एक लिज्या पृष्ठभागावर ठेवलेल्या एक चतुर्थांश वर्तुळाचे प्रकेंद्र पृष्ठभागापासून किती  $r$  उंचीवर असेल?
 

(अ) $\frac{3r}{4\pi}$	(ब) $\frac{4r}{3\pi}$
(क) $\frac{4\pi}{3r}$	(ड) $\frac{3\pi}{4r}$

9. एका काटकोन त्रिकोणाचा बेस 'b' आणि उंची 'h' असेल तर बेस पासून वरच्या दिशेमध्ये त्याचे प्रकेंद्र कुठे असेल?
- (अ)  $\frac{h}{2}$  (ब)  $\frac{h}{3}$
- (क)  $\frac{h}{4}$  (ड)  $\frac{h}{6}$
10. तिज्या r चे वर्तुळाचे छिद्र 2r च्या वर्तुळाकार डिस्कमधून अशा प्रकारे कापलेले आहे की छिद्राचा व्यास डिस्कच्या तिज्ये इतका होतो. ह्याचे प्रकेंद्र कोठे असेल?
- (अ) डिस्कचे केंद्र (ब) छिद्रांचे केंद्र
- (क) डिस्कमध्ये कुठेतरी (ड) छिद्रात कुठेतरी

[उत्तर: 1-(अ), 2-(क), 3-(अ), 4-(ब), 5-(अ), 6-(क), 7-(अ), 8-(ब), 9-(ब), 10-(क)]

### (ब) व्यक्तीनिष्ठ प्रश्न

- प्रकेंद्र आणि गुरुत्व केंद्र ह्यातील फरक स्पष्ट करा.
- व्याख्या लिहा: (अ) प्रकेंद्र (ब) गुरुत्व केंद्र (क) सममिती अक्ष.
- खाली सांगितलेल्या आकृत्या काढून त्यांचे प्रकेंद्र दाखवा.  
(अ) चतुर्थांश वर्तुळ (ब) अर्धवर्तुळ (क) त्रिकोण (ड) उजवा गोलाकार कोन
- एका T-छेदाचा वरचा आयत (फलँज)  $200 \times 20$  mm आणि खालचा आयत (वेब)  $300 \times 20$  mm इतका आहे. ह्याची आकृती तयार करा आणि त्याचे प्रकेंद्र शोधून ते सुद्धा आकृतीमध्ये दाखवा.  $[\bar{x} = 100 \text{ mm}, \bar{y} = 214.0 \text{ mm}]$
- एका I - छेदाचा वरचा आयत (फलँज)  $200 \times 20$  mm, मधला आयत (वेब)  $300 \times 20$  mm आणि खालचा आयत (फलँज)  $400 \times 40$  mm इतका आहे. ह्याची आकृती तयार करा आणि त्याचे प्रकेंद्र शोधून ते सुद्धा आकृतीमध्ये दाखवा.  
 $[(\bar{x}, \bar{y}) = (200, 110 \text{ mm})]$
- एका L-छेदाचे ISA  $90 \times 60 \times 6$  mm प्रकेंद्र शोधा. ह्यामध्ये लांब असलेला पाय उभा आहे असे गृहीत धरा.  
 $[\bar{x} = 14.25 \text{ mm}, \bar{y} = 29.25 \text{ mm}]$
- एका धरणाच्या काटछेदाची उंची 9 m आहे, वरची रुंदी 3 m आणि खालची रुंदी 6 m आहे. त्याची एक बाजू लंबरेषेत आहे. ह्या धरणाचे प्रकेंद्र शोधा.  
 $[(\bar{x}, \bar{y}) = (2.33 \text{ m}, 4.0 \text{ m})]$
- एका T - छेदाचा वरचा आयत (फलँज)  $150 \times 20$  mm आणि खालचा आयत (वेब)  $200 \times 20$  mm इतका आहे. त्याचे प्रकेंद्र शोधा.
- एका 500 mm व्यास असलेल्या वर्तुळातून 100 mm व्यास असलेले वर्तुळ काढून टाकले आहे. काढून टाकलेल्या वर्तुळाचा केंद्र मोठ्या वर्तुळाच्या केंद्रापासून 150 mm अंतरावर डावीकडे आहे. ह्या आकृतीचे प्रकेंद्र शोधा.  
 $[(\bar{x}, \bar{y}) = (256.25 \text{ mm}, 250 \text{ mm})]$
- एका 100 mm व्यास असलेल्या वर्तुळ असलेल्या पत्यातून त्याच्या आडव्या आणि उभ्या मध्य रेषेतून 50 mm कर्ण असलेला चौरस आकाराचा पत्ता काढून टाकलेला आहे. राहिलेल्या पत्याचे प्रकेंद्र शोधा.  $[(45.27 \text{ mm}, 50 \text{ mm})]$
- एका 40 mm बाजूचा समभुज त्रिकोण बनवणाऱ्या दोरीचे प्रकेंद्र शोधा.  $[(\bar{x}, \bar{y}) = (20 \text{ mm}, 11.55 \text{ mm})]$

12. एक 120 mm व्यास असलेला दंडगोल ज्याची उंची 120 mm आहे तो 120 mm व्यास असलेल्या शंकूला आधार देत आहे. ह्याचे गुरुत्व केंद्र शोधा.  $[(\bar{x}, \bar{y}) = (80 \text{ mm}, 110 \text{ mm})]$
13. एका समखीन्न शंकूची उंची 100 mm आहे आणि खालचा व्यास 100 mm आणि वरचा व्यास 50 mm इतके आहेत. ह्याचे गुरुत्व केंद्र शोधा.  $[(\bar{x}, \bar{y}) = (50 \text{ mm}, 39.3 \text{ mm})]$
14. ISA  $60 \times 40 \times 10 \text{ mm}$  L-छेदाचे प्रकेंद्र शोधा. ह्यामध्ये लांब असलेला पाय उभा आहे असे गृहीत धरा.  $[(\bar{x}, \bar{y}) = (11.67 \text{ mm}, 21.67 \text{ mm})]$
15. एका  $100 \times 50 \times 15 \text{ mm}$  असलेल्या C- छेदाचे प्रकेंद्र शोधा.  $[\bar{x} = 17.79 \text{ mm}]$

## प्रात्यक्षिके

### प्रात्यक्षिक 16: द्विमितीय आकृत्यांचे प्रकेंद्र

#### 16.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

द्विमितीय साध्या आकृत्यांचे प्रकेंद्र शोधणे.

#### 16.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्व

ओळंब्याच्या रेषातील पद्धतीचा वापर करून द्विमितीय साध्या आकृत्यांचे प्रकेंद्र शोधणे.

#### 16.3 संबंधित पाठ

**प्रकेंद्र:** एका प्रतलावरील आकृत्या, जसे त्रिकोण, वर्तुळ इत्यादी, (द्विमितीय), ह्यांना वजन नसते तर फक्त क्षेत्रफळ असते. अशा आकृत्यांच्या केंद्राला प्रकेंद्र (centroid) असे म्हणतात.

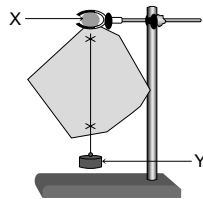
**गुरुत्व केंद्र:** असा एक बिंदू जेथे वस्तूचे संपूर्ण वजन कार्य करते अशा बिंदूला गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र/ गुरुत्व केंद्र (center of gravity / CG) म्हणून ओळखले जाते. गुरुत्व केंद्र हे द्विमितीय आकृतीकरिता वापरले जाते आणि ह्यामध्ये वस्तूची स्थिती विचारात घेतली जात नाही परंतु त्याचे वस्तुमान विचारात घेणे महत्वाचे आहे.

#### 16.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

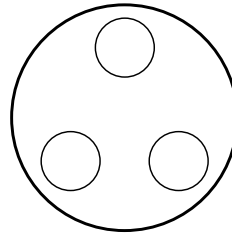
PrO1: गुरुत्व केंद्राच्या संकल्पनेचे परीक्षण करा.

PrO2: गुरुत्वाकर्षणाचे बल वापरून गुरुत्व केंद्र शोधणे.

#### 16.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना



आकृती 1



आकृती 2

## 16.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	पातळ प्लायवूडपासून तयार केलेल्या वेगवेगळ्या द्विमितीय साध्या आकृत्या	2 ते 3		
2.	अनुलंब स्टँड	1		
3.	ओळंबा आणि खिळे	1		
4.	रेखाचित्र तयार करण्याची शीट आणि फुटपट्टी	1		
5.	नायलॉनच्या दोऱ्या आणि शिसपेन्सिल	2		

## 16.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

- ओळंब्याचे वजन खूप जास्त नसावे आणि असे असावे की त्यामुळे खिळे खाली खेचली जाणार नाहीत किंवा बाहेर निघून जाणार नाहीत.
- जेंव्हा रेषा काढायच्या आहेत तेव्हा ओळंबा हेलखावे घेणार नाही.
- खिळे घट्टपणे निश्चित पद्धतीने राहतील ह्यावर लक्ष्य ठेवा.
- जेंव्हा ओळंब्याची रेषा काढायची असेल तेव्हा फुटपट्टीचा वापर करा.

## 16.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

- अनियमित आकाराचा पातळ प्लायवूडपासून तयार केलेली द्विमितीय साधी आकृती घ्या आणि त्याच्या मध्यभागी रेखाचित्र तयार करण्याची शीट जोडा.
- ह्या आकृतीच्या कोणत्याही एका कोपऱ्यापासून ही आकृती अनुलंब स्टँडवर नायलॉनची दोरी वापरून आकृती 1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे ठेवा.
- ओळंबा ज्या पद्धतीने उभा आहे त्याप्रमाणे नायलॉनच्या दोरीची दिशा शीटवर काढा.
- आता हीच आकृती कोणत्याही दुसऱ्या कोपऱ्यापासून अनुलंब स्टँडवर नायलॉनची दोरी वापरून ठेवा.
- वरील क्रमांक 2 आणि 3 चा वापर करून वेगवेगळ्या पद्धतीने उभा केलेल्या आकृतीचे दोरीची दिशा शीटवर काढा.
- ह्या काढलेल्या सर्व दिशांचा छेदनबिंदू म्हणजे त्या द्विमितीय साध्या आकृतीचे प्रकेंद्र असेल.
- आता ह्याच द्विमितीय साध्या आकृतीचे प्रकेंद्र विश्लेषणात्मक पद्धतीने शोधा आणि ह्याचे निकाल निरीक्षण तक्त्यावर लिहा.
- आता ह्याचप्रमाणे आकृती 2 मध्ये दर्शविलेल्या नियमित आकृतीतून चकती काढलेल्या आकृतीचे प्रकेंद्र शोधा. आता प्रकेंद्र बदलून अशा प्रकारचे प्रकेंद्रसुद्धा शोधू शकतो.



### 16.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

अ. क्र.	आकृतीचा आकार	निरीक्षण केलेल्याप्रमाणे प्रकेंद्र (mm)		विश्लेषणात्मक पद्धतीने शोधलेले प्रकेंद्र (mm)	
		य	क्ष	य	क्ष
1.					
2.					
3.					

#### नमुना गणना

.....

.....

### 16.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

### 16.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

### 16.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. चांगले निकाल मिळण्याकरिता कोणकोणती काळजी घेतली पाहिजे?
2. जर आकृतीचा आकार समलंब चौकोन असा असेल तर त्याचे प्रकेंद्र कसे शोधू शकता.
3. प्रकेंद्र शोधताना आपल्याला वेगवेगळ्या बिंदूमधून रेषा का काढाव्या लागतात?
4. आपण प्रकेंद्र मोजल्यानंतर ते योग्य आहेत हे कसे तपासता येईल?

### 16.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ - कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

**16.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय**

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

**16.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत**

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

**अधिक माहिती घ्या**

- कोणतीही वस्तु गुरुत्व केंद्राच्या ठिकाणी समतोल असते हे स्पष्ट करा.

**संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन**

- D.S.Bedi, "Engineering Mechanics"; Khanna publications, New Delhi.
- Khurmi RS, "Applied Mechanics"; S. Chand & Co, New Delhi.
- Ramamrutham, "Engineering Mechanics"; S. Chand & Co, New Delhi.
- Bansal RK, "A text book of Engineering Mechanics"; Laxmi publications, New Delhi.
- Dhade, Jamadar & Walawelkar, "Fundamentals of Applied Mechanics"; Pune Vidhyarthi Gruh, Pune
- Meriam JL, Kraige LG, "Engineering Mechanics- statics –Vol.-I"; Wiley publication, New Delhi.
- Beer, Johnson, Mazurek, Cornwell & Sanghi, "Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics"; Tata McGraw Hill, New Delhi.
- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLB85BDFBE784B>

# 5

## वजन उचलण्याची साधी यंत्रे

### पाठाचा तपशील

ह्या पाठामध्ये खालील भागांचे आपण अध्ययन करणार आहोत:

- साध्या उचलण्याच्या यंत्राशी संबंधित व्याख्या आणि त्या संबंधित काही तांत्रिक संज्ञा
- वेगवेगळ्या यंत्रांचे नियम
- वेगवेगळ्या यंत्रांचे वेग गुणोत्तर

हा विषय तसा थोडा अवघड आणि जास्त कौशल्य लागणारा तसेच व्यावहारिक दृष्टीकोनाशी संबंधित असा आहे. काही लोकप्रिय आणि दैनंदिन वापराशी संबंधित काही यंत्रे जसे स्कू जॅक, कप्पी (पुली) इत्यादी यंत्रे ही जीवनामधील काम करताना लागणारी शक्ती आणि वेळ कमी करणारी आहेत. परंतु, त्या यंत्रांची तांत्रिक संकल्पना पुस्तकाच्या वापरकर्त्याने आकृती आणि व्यावहारिकतेसह समजून घेणे आवश्यक आहे. त्यामुळे या पाठामध्ये यंत्रांचे तांत्रिक आकलन होण्याच्या दृष्टीकोनातून यंत्रांच्या आकृत्यांसह प्रात्यक्षिके देण्यात आलेली आहेत.

यंत्रांचे नियम, यंत्रांचे नियम आलेखीय पद्धतीने समजण्याकरिता यंत्रांच्या नियमांचे आलेख आणि आणि इतर आलेख ह्या काही महत्वाच्या संकल्पना ह्या पाठात समाविष्ट केलेल्या आहेत. पाठामध्ये यांत्रिक फायदा, वेग गुणोत्तर, यंत्राची कार्यक्षमता ह्या महत्वाच्या संकल्पना स्पष्ट होण्याच्या दृष्टीने त्याबाबत चर्चा केलेली आहे. विद्यार्थ्यांमध्ये ह्या विषयाबद्दल उत्सुकता निर्माण व्हावी आणि त्यांच्यामध्ये सुधारणा व्हावी ह्या अनुषंगाने पाठाच्या शेवटी बहुपर्यायी प्रश्न व्यक्तीनिष्ठ प्रश्न दिलेले आहेत.

ह्या पाठाच्या शेवटी प्रात्यक्षिकांची चर्चा झाल्यानंतर “अधिक माहिती घ्या” हा एक विभाग घेतलेला आहे, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना ह्याबद्दल जास्तीची माहिती मिळेल. विविध विषयांवर अधिक माहिती मिळवण्यासाठी काही QR कोड दिलेले आहेत, जे संबंधित पुढील ज्ञानासाठी स्कॅन करून वापरले जाऊ शकतात. QR कोड संदर्भ अशा प्रकारे निवडले गेलेले आहेत की विद्यार्थ्यांना स्वयम/ NPTEL चे अभ्यासक्रम घेण्यास प्रोत्साहन मिळेल.

### तर्कसंगती

तुम्ही कधी जड भार हलवण्यासाठी रॉड वापरला आहे का? तुम्ही कधी पुलीच्या मदतीने विहिरीतून पाणी उचलताना पाहिले आहे का? तुमची कार जेव्हा पंक्चर झाली असेल तेव्हा चाक बदलण्यासाठी कार उचलताना तुम्ही कधी जॅक वापरला आहे का? जड भार हलविण्यासाठी वापरलेला रॉड किंवा विहिरीतून पाणी उचलण्यासाठी वापरलेली पुली (रहाट) किंवा चाक बदलण्यासाठी वापरलेला जॅक म्हणजेच वजन उचलण्याची सोपी यंत्रे आहेत. ही यंत्रे जरी समजण्यासाठी आणि तयार करण्यासाठी सोपी जरी असली तरीपण आपल्या रोजच्या कामामध्ये खूप महत्वाची आणि उपयुक्त आहेत. ह्या पाठामध्ये आपण अशा काही सोप्या यंत्रांची जी

मानवीजीवनामध्ये खूप उपयुक्त आहेत त्यांची चर्चा करणार आहोत. आपण ह्या पाठामध्ये यंत्रांच्याबाबतची शब्दावली आणि यंत्रांचे वेगवेगळे नियम समजून घेणार आहोत. त्याचप्रमाणे वेगवेगळ्या यंत्रांचे वेग गुणोत्तर (velocity ratio) कसे शोधायचे, आणि ते कसे असले पाहिजे ज्यामुळे यंत्राचा जास्तीत जास्त लाभ (यांत्रिक फायदा/ mechanical advantage) घेता यावा ह्याची चर्चा करणार आहोत.

## पूर्व अपेक्षित ज्ञान

ह्या पाठाचा अभ्यास सुरु करण्याआधी, इयत्ता आठवी ते दहावी मध्ये शिकलेल्या भौतिकशास्त्र आणि गणिताचे मुलभूत ज्ञान आणि यंत्र अभियांत्रिकी ह्या आत्ता शिकत असलेल्या विषयातील आधीच्या पाठाचे ज्ञान असणे गरजेचे आहे.

## पाठाचा परिणाम

ह्या पाठाचा अभ्यास पूर्ण झाल्यानंतर तुम्ही खालील गोष्टी समजू शकाल:

U5-O1: साधे साधे वजन उचलण्याचे यंत्र आणि त्याच्या विविध शब्दावली

U5-O2: जास्तीत जास्त यांत्रिक फायदा आणि कार्यक्षमतेसाठी मशीनचा नियम आणि त्याचा वापर.

U5-O3: विविध साध्या उचलण्याच्या यंत्रासाठी वेग गुणोत्तराचा अर्थ.

## पाठाचे परिणाम आणि विषयाचे परिणाम यांचे प्रतीचित्रण

युनिट-5 परिणाम	कोर्स आऊटकोम्ससह एक्सपेक्ट्ड मॅपिंग (1-दुर्बलसहसंबंध; 2-मध्यमसंबंध; 3-मजबूतसहसंबंध)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U5-O1	-	-	-	3	-
U5-O2	-	-	-	3	-
U5-O3	-	-	-	3	-

## 5.1 महत्त्वाच्या व्याख्या

मानवाने अनेक अडचणींवर मात करण्यासाठी किंवा काम करताना लागणारे प्रयत्न कमीत कमी होण्यासाठी वेगवेगळी यंत्रे शोधून काढली. मूलभूतपणे, सर्व मशीन माणसाच्या मनातील सोप्या तत्त्वाने तयार केलेल्या आहेत जेणेकरून काम करीत असताना माणसाला लागणारा वेळ आणि ताकत कमीत कमी वापरावी लागावी. यंत्रामुळे कोणतेही काम करीत असताना एखादा माणूस यंत्राच्या मदतीने जास्तीत जास्त वजन उचलण्यास सक्षम होतो. उदाहरणार्थ, ऑटोमोबाईल उचलण्यासाठी 3 ते 4 व्यक्तींची आवश्यकता असते परंतु स्कू जॅक वापरून ऑटोमोबाईल उचलण्याचे काम एक व्यक्तीदेखील सहजपणे पूर्ण करू शकते. त्याचप्रमाणे विहिरीतून जेव्हा पाण्याची बादली वर ओढायची असते तेव्हा हाताची खूप ताकत लावावी लागते परंतु जर पुलीच्या (रहाट) मदतीने विहिरीतून पाणी उचलले तर तेच काम खूप सोयीस्कर पद्धतीने करता येऊ शकते.

ह्या सगळ्या सोप्या यंत्रांचा अभ्यास करण्याकरिता ह्यासंबंधी वापरल्या जाणाऱ्या महत्त्वाच्या व्याख्या आपण समजून घेणे खूप महत्त्वाचे आहे.

1. **सोपी यंत्रे:** सोपी यंत्रे (मशीन) ही अशा प्रकारची उपकरणे आहेत ज्यामध्ये कार्य करीत असताना कार्य करण्यासाठी आवश्यक असलेले बल एका बिंदूवर लावले जाते आणि ज्या वस्तूवर काम करायचे आहे ते काम वेगळ्या बिंदूवर किंवा वेगळ्या ठिकाणी केले जाते. एक असे उपकरण आहे ज्यामध्ये एका ठिकाणी प्रयत्न लागू केले जातात आणि इतर ठिकाणी काम केले जाते. साधी यंत्रे ही माणूस त्यांच्या हाताने काम करून वापरू शकतो आणि त्यामुळे कार्य करण्याकरिता विद् युत शक्तीची गरज पडत नाही किंवा गरजेची आवश्यकता नसते. उदाहरणार्थ, पुली (रहाट), सायकल, शिवण यंत्र, आणि साधे स्कू जॅक इत्यादी.
2. **संयुक्त यंत्रे (compound machines):** जर एखादे यंत्र तयार करताना त्यामध्ये वेगवेगळी सोपी यंत्रे वापरली असतील तर अशा यंत्राला संयुक्त यंत्र असे म्हणतात. अशी यंत्रे विद् युत शक्ती किंवा यांत्रिकी शक्तीद्वारे चालविली जातात. संयुक्त यंत्रे वापरल्यामुळे कमी परिश्रमात किंवा कमी प्रयत्नात जास्त काम करता येऊ शकते. उदाहरणार्थ, स्कूटर, लेथ मशीन, क्रेन/ यारी, ग्राइंडिंग मशीन (धार यंत्र) इत्यादी.
3. **उचलण्याची यंत्रे (लिफ्टिंग मशीन):** उचलण्याची यंत्रे (लिफ्टिंग मशीन) हे एक असे उपकरण आहे ज्यात कमी परिश्रमात जड भार/ वजन उचलता येतो. उदाहरणार्थ, क्रेन/ यारी, लिफ्ट इत्यादी.
4. **साधी उचलण्याची यंत्रे (सिम्पल लिफ्टिंग मशीन):** साधी उचलण्याची यंत्रे हे एक असे उपकरण असते ज्यामध्ये कमी परिश्रमात जड भार / वजन उचलता येतो आणि ह्यामध्ये व्यक्ती स्वतः कमी परिश्रमात वजन उचलू शकते. उदाहरणार्थ, साधी पुली, साधा स्कू जॅक, इत्यादी.

## 5.2 साध्या उचलण्याच्या यंत्रांच्याबाबतची तांत्रिक बाबी

1. **भार (लोड) (W):** उचललेल्या घटकांच्या वजनाला भार म्हणतात (W).
2. **परिश्रम (P):** भार (W) उचलण्यासाठी लागू होणाऱ्या बलाला परिश्रम म्हणतात (P).
3. **यांत्रिक फायदा (Mechanical Advantage) (MA):** उचललेला भार (W) आणि त्याला उचलण्यासाठी लागलेले परिश्रम (P) ह्यांच्या गुणोत्तराला यांत्रिक फायदा (MA) असे म्हणतात. हे नेहमी गणितीय पद्धतीने संख्या म्हणून व्यक्त केले जाते.

$$MA = \frac{\text{Load lifted}}{\text{Effort required}}$$

$$\therefore MA = \frac{W}{P}$$

जेथे W हा उचललेला भार आहे ज्याचे एकक Newton आहे आणि P हे लागलेले परिश्रम आहे ज्याचे एकक Newton आहे.

4. **वेग गुणोत्तर (Velocity Ratio) (VR):** परिश्रमाने हलवलेले अंतर (y) आणि भाराने हलवलेले अंतर (x) ह्यांच्या गुणोत्तरास वेग गुणोत्तर असे म्हणतात. ह्याचे एकक नसते आणि त्याला गणितीय पद्धतीने संख्या म्हणून व्यक्त केले जाते.

$$VR = \frac{\text{Distance moved by effort}}{\text{Distance moved by load}}$$

$$\therefore VR = \frac{y}{x}$$

ह्यामध्ये समजून घेतले पाहिजे की कोणत्याही उचलणाऱ्या वस्तूसाठी वेग गुणोत्तर नेहमी स्थिर (स्थिरांक) असते. कालांतराने त्यात बदल होत नाही.

5. **कार्यक्षमता (Efficiency) ( $\eta$ ):** यंत्रावर केलेले काम आणि यंत्राने केलेले काम ह्यांच्या गुणोत्तरास यंत्राची कार्यक्षमता असे म्हणतात. गणितीय पद्धतीमध्ये त्याला खालीलप्रमाणे सांगता येईल.

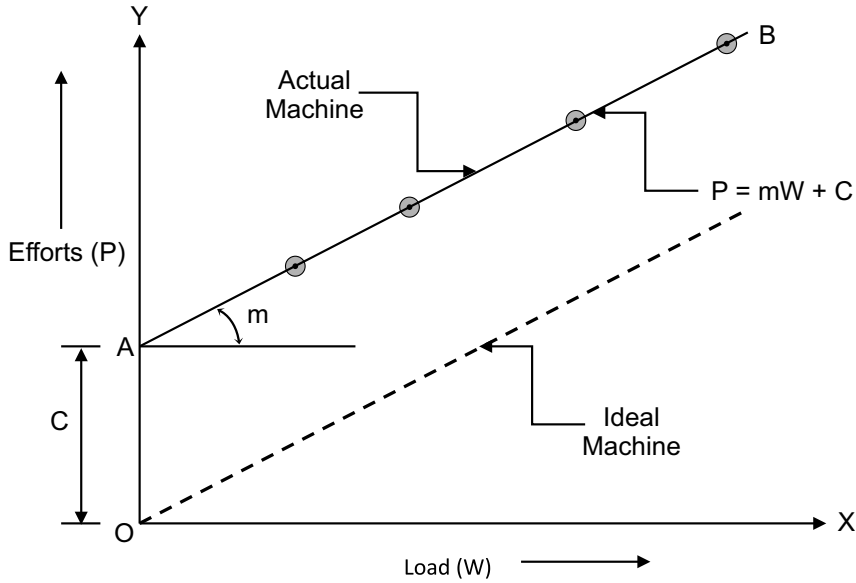
यंत्राने केलेले काम = परिश्रम  $\times$  परिश्रमाने हलवलेले अंतर =  $P \times y$

यंत्रावर केलेले काम = भार  $\times$  भाराने हलवलेले अंतर =  $W \times x$

$$\text{त्यामुळे यंत्राची कार्यक्षमता} = \eta = \frac{W \times x}{P \times y} \times 100 \% = \frac{W/P}{y/x} \times 100 \%$$

$$\text{म्हणून यंत्राची कार्यक्षमता} = \frac{MA}{VR} \times 100\%$$

6. **यंत्राचा नियम:** एखाद्या विशिष्ट यंत्रासाठी, जर आपण संबंधित भार ( $W$ ) उचलण्यासाठी आवश्यक असलेल्या परिश्रमाची ( $P$ ) विविध परिमाणे नोंदवले आणि परिश्रम आणि भार यांच्यातील आलेख काढला, तर आकृती 5.1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आपल्याला एक सरळ रेषा AB मिळेल.



आकृती 5.1: यंत्राचा नियम

गणितानुसार, यंत्राचा नियम खालील संबंधानुसार दिला जातो:

$$P = mW + C$$

ज्यामध्ये,  $P$  = लागलेले परिश्रम,

$W$  = उचललेला भार,

$m$  = स्थिरांक (घर्षण गुणांक) आणि तो AB ह्या रेषेचा कल आहे

आणि  $C$  = स्थिरांक आहे = यंत्राचे घर्षण आहे.

ह्या आलेखावरून खालील निरीक्षणे काढली जाऊ शकतात:

- (अ) यंत्रामध्ये भार लावलेला नसेल,  $W = 0$  असल्यास, यंत्र चालवण्यासाठी परिश्रम  $C$  आवश्यक आहे. म्हणून, यंत्रामधील घर्षण दूर करण्यासाठी परिश्रम  $C$  आवश्यक आहे.
- (ब)  $AB$  रेषा आलेखाच्या आरंभबिंदू मधून जात असल्यास, घर्षण संतुलित करण्यासाठी कोणत्याही प्रयत्नांची आवश्यकता नसते. असा आलेख आदर्श यंत्रासाठी आहे.
- (क)  $AB$  रेषेने  $x-x$  अक्ष ओलांडली तर, परिश्रम न करता ( $P = 0$ ) यंत्राद्वारे काही भार उचलला जाऊ शकतो, जे अशक्य आहे. म्हणून  $AB$  रेषा कधीही  $x-x$  अक्ष ओलांडत नाही.

7. **जास्तीत जास्त यांत्रिक फायदा ( $MA_{\max}$ ):** आपल्याला माहिती आहे की, यांत्रिक फायदा  $= \frac{W}{P}$ .

जास्तीत जास्त यांत्रिक फायदा असण्याकरिता  $P$  ची किंमत यंत्राच्या नियमाच्या आलेखानुसार जर वापरले तर

$$P = mW + C$$

$$\therefore MA_{\max} = \frac{W}{mW + C}$$

$$= \frac{1}{m + \frac{C}{W}} \text{ ह्यामधील } \frac{C}{W}, \text{ ह्याकडे दुर्लक्ष केल्यास,}$$

$$\therefore MA_{\max} = \frac{1}{m}$$

8. **जास्तीत जास्त कार्यक्षमता ( $\eta_{\max}$ ):** आपल्याला माहिती आहे की, दिलेल्या यंत्रासाठी वेग गुणोत्तर ( $VR$ ) स्थिर असते आणि यांत्रिक फायदा ( $MA$ ) बदलत जातो.

यंत्राची कार्यक्षमता  $\eta = \frac{MA}{VR}$

$\therefore$  Substitute  $MA$  as  $MA_{\max} = \frac{1}{m}$  to get  $\eta_{\max}$ ,

$$\therefore \eta_{\max} = \frac{1/m}{VR}$$

$$\therefore \eta_{\max} = \frac{1}{m \times VR}$$

9. **आदर्श यंत्र (Ideal Machine):** जर एखाद्या यंत्राची कार्यक्षमता 100% असेल तर त्या यंत्राला आदर्श यंत्र असे म्हणता येईल. अशा यंत्रामध्ये घर्षण नसते किंवा शून्य असते.

अशा आदर्श यंत्राकरिता, भाराचे बल = परिश्रम बल, यांत्रिक फायदा = वेग गुणोत्तर किंवा  $MA = VR$

10. **घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम (Effort Lost in Friction,  $P_f$ ):** साध्या यंत्रांमध्ये त्या यंत्राच्या विविध भागांमधील घर्षण काढण्याकरिता जे परिश्रम लागतात त्याला घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम असे म्हणतात. जर  $P$  हे लागलेले परिश्रम असेल,  $P_0$  हे आदर्श यंत्राकरिता लागणारे परिश्रम असेल आणि  $P_f$  हा यंत्रातील वेगवेगळ्या भागांमध्ये असलेल्या घर्षणामुळे लागलेले जास्तीचे परिश्रम असेल तर,

∴ घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम,  $P_f = P - P_o$

आदर्श यंत्रामध्ये  $MA = VR$  असल्यामुळे

$$\therefore \frac{W}{P_o} = VR$$

$$\therefore P_o = \frac{W}{VR} = \text{Ideal effort}$$

त्यामुळे वेगवेगळ्या भागांमधील घर्षणामुळे यंत्रामधील परिश्रम  $P >$  आदर्श यंत्राकरिता लागणारे परिश्रम  $P_o$ ,

$$\therefore P_f = P - P_o$$

$$\therefore P_f = P - \frac{W}{VR}$$

11. **घर्षण भार ( $W_f$ ):** यंत्र चालू असताना निर्माण होणाऱ्या एकूण घर्षण शक्तीला घर्षण भार म्हणतात. समजा,  $W =$  वास्तविक भार,  $W_o =$  आदर्श यंत्राकरिता लागणारा भार आणि  $P =$  यंत्राचे परिश्रम असेल तर, आदर्श यंत्रामध्ये,  $MA = VR$  असल्यामुळे,  $W_o = P \times VR =$  आदर्श भार

त्यामुळे, घर्षण भार,

$$W_f = W_o - W$$

$$W_f = (P \times VR) - W$$

12. **व्युत्क्रमी यंत्र (Reversible Machine):** जर एखादे यंत्र, त्यावरील परिश्रम काढून टाकल्यानंतर, काही काम उलट दिशेने करण्यास सक्षम असेल तर त्या यंत्राला व्युत्क्रमी (उलट कार्य करण्यायोग्य) यंत्र असे म्हणतात. व्युत्क्रमी यंत्राकरिता त्याची कार्यक्षमता,  $\eta > 50\%$  इतकी असते.

13. **अव्युत्क्रमी यंत्र / स्वतः कार्य बंद करणारे यंत्र (Irreversible Machine/ Self - Locking Machine):** जर एखादे यंत्र, त्यावरील परिश्रम काढून टाकल्यानंतर, काही काम उलट दिशेने करण्यास सक्षम नसेल तर त्या यंत्राला अव्युत्क्रमी (उलट कार्य करण्यायोग्य नसलेले) यंत्र असे म्हणतात. अव्युत्क्रमी यंत्राकरिता त्याची कार्यक्षमता,  $\eta < 50\%$  इतकी असते.

14. **उलट कार्य करण्यायोग्य असलेल्या यंत्राची अट:** जर  $W$  हा भार असेल,  $P$  हे परिश्रम असेल,  $x$  हे भाराने कापलेले अंतर असेल आणि  $y$  हे परिश्रमाने कापलेले अंतर असेल तर,

$P \cdot y =$  दिलेली ताकत आणि  $W \cdot x =$  उत्पादित ताकत

यंत्रामधील घर्षण = दिलेली ताकत - उत्पादित ताकत

व्युत्क्रमी यंत्राकरिता, उत्पादित ताकत  $>$  यंत्रामधील घर्षण

$$\therefore W \cdot x \geq P \cdot y - W \cdot x$$

$$\therefore 2 W \cdot x \geq P \cdot y$$

$$\therefore \frac{W \cdot x}{P \cdot y} \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{output}}{\text{input}} \geq 0.5$$

$$\therefore \eta \geq 50\%$$



Basic  
Definition



**उदाहरण 1:** एका साध्या यंत्रामध्ये 30 N परिश्रम लावलेले असताना 720 N वजन उचलले जात आहे. जर ह्या यंत्राची कार्यक्षमता 30% असेल तर यंत्राचा यांत्रिक फायदा (MA) आणि वेग गुणोत्तर शोधा.

**उत्तर:**

$W = 720 \text{ N}$ ,  $P = 30 \text{ N}$  and  $\eta = 30\% = 0.3$

$$(a) \quad MA = \frac{W}{P} = \frac{720}{30}$$

$$\therefore MA = 24$$

$$(b) \quad \eta = \frac{MA}{VR}$$

$$\therefore 0.30 = \frac{24}{VR}$$

$$\therefore VR = 80$$

**उदाहरण 2:** एका साध्या उचलण्याच्या यंत्रामध्ये वेग गुणोत्तर 30 आहे आणि यंत्राची कार्यक्षमता 80% आहे जर 200 N परिश्रम लावलेले असतील ते यंत्र किती वजन उचलू शकेल.

**उत्तर:**

$VR = 10$ ,  $\eta = 80\% = 0.80$ ,  $P = 200 \text{ N}$

$$(a) \quad \eta = \frac{MA}{VR}$$

$$0.80 = \frac{MA}{20}$$

$$\therefore MA = 16$$

$$(b) \quad MA = \frac{W}{P}$$

$$16 = \frac{W}{200}$$

$$\therefore W = 3200 \text{ N}$$

**उदाहरण 3:** एका साध्या उचलण्याच्या सिंगल परचेस क्रॅब या यंत्राची माहिती खालील निरीक्षणानुसार आहे: जेव्हा 200 N परिश्रम लावलेले होते तेव्हा त्या यंत्राने 1800 N भार उचलला आहे आणि जेव्हा 120 N परिश्रम लावलेले होते तेव्हा त्या यंत्राने 3960 N भार उचलला आहे. यंत्राचे वेग गुणोत्तर 42 इतके आहे. (अ) ह्या यंत्राचा नियम प्रस्थापित करा. (ब) दोन्ही पैकी कोणत्याही एका वेळेची माहिती लक्षात घेऊन यंत्राची कार्यक्षमता शोधा.

**उत्तर:**

(i) When  $P_1 = 60 \text{ N}$ ,  $W_1 = 1800 \text{ N}$  (ii) When  $P_2 = 120 \text{ N}$ ,  $W_2 = 3960 \text{ N}$  (iii)  $VR = 42$

**(A) यंत्राचा नियम:**

(a) वरील दोन निरीक्षणानुसार माहिती वापरून यंत्राचा नियम लिहिता येईल.

$$P = mW + C$$

$$\therefore 60 = m \times 1800 + C \quad \dots (i)$$

$$120 = m \times 3960 + C \quad \dots (ii)$$

ही दोन एकसामायिक समीकरणे सोडवून,

$$\therefore -60 = -2160 m \quad \dots (i) - (ii)$$

$$\therefore m = \frac{60}{2160}$$

$$\therefore m = 0.0277$$

(b) आता  $m$  ची किंमत समीकरण (1) मध्ये वापरून,

$$\therefore 60 = 0.0277 \times 1800 + C$$

$$\therefore 60 = 49.86 + C$$

$$\therefore C = 10.14$$

(c) त्यामुळे माहिती दिलेल्या यंत्राचा नियम खालीलप्रमाणे,

$$P = 0.0277 W + 10.14$$

(B) पहिल्या निरीक्षणाची माहिती घेऊन यंत्राची कार्यक्षमता खालीलप्रमाणे,

$$(a) \quad MA = \frac{W}{P} = \frac{1800}{60} = 30$$

$$(b) \quad VR = 42$$

$$(c) \quad \eta = \frac{MA}{VR} = \frac{30}{42} = 0.7142$$

$$\therefore \eta = 71.42\%$$

**उदाहरण 4:** एका साध्या उचलण्याच्या यंत्राची माहिती खालील निरीक्षणानुसार आहे. यंत्राचे वेग गुणोत्तर  $VR = 30$ . खाली दिलेल्या तक्त्यातील रिक्त जागा भरा. ह्या यंत्राची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता मोजा आणि हे यंत्र व्युत्क्रमी यंत्र (रिव्हर्सिबल मशीन) आहे किंवा नाही ते सांगा.

अ. क्र.	भार (W) kN मध्ये	परिश्रम (P) kN मध्ये	कार्यक्षमता % मध्ये
1.	100	9.82	_____
2.	600	49.82	_____
3.	1000	_____	_____

**उत्तर:**

(a) पहिल्या निरीक्षणानुसार,

$$W = 100 \text{ kN}, P = 9.82 \text{ kN and } VR = 30$$

$$(i) \quad MA = \frac{W}{P} = \frac{100}{9.82} = 10.18$$

$$(ii) \quad \eta = \frac{MA}{VR} \times 100$$

$$= \frac{10.18}{30} \times 100$$

$$\therefore \quad \eta = 33.93\%$$

(b) दुसऱ्या निरीक्षणानुसार,

$$W = 600 \text{ kN}, P = 49.82 \text{ kN and } VR = 30$$

$$(i) \quad MA = \frac{W}{P} = \frac{600}{49.82} = 12.04$$

$$(ii) \quad \eta = \frac{MA}{VR} \times 100$$

$$= \frac{12.04}{30} \times 100$$

$$\therefore \quad \eta = 40.13\%$$

(c) तिसऱ्या निरीक्षणानुसार,

(i) आपल्याला माहिती आहे की, यंत्राचा नियम पुढीलप्रमाणे आहे,  $P = mW + C$

पहिल्या दोन निरीक्षणाचा वापर करून,

$$(i) \quad P = 9.82 \text{ kN and } W = 100 \text{ kN}$$

$$(ii) \quad P = 49.82 \text{ kN and } W = 600 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad 9.82 = m \times 100 + C \quad \dots(i)$$

$$49.82 = m \times 600 + C \quad \dots(ii)$$

$$-40 = -500m \quad \dots(i) - (ii)$$

$$\therefore \quad m = 0.08$$

(ii)  $m = 0.08$  हे आता समीकरण (1) मध्ये वापरून,

$$9.82 = 0.08 \times 100 + C$$

$$\therefore \quad 9.82 = 8 + C$$

$$\therefore \quad C = 1.82$$

(iii) त्यामुळे दिलेल्या यंत्राचा नियम

$$P = 0.08W + 1.82$$

(iv) आता जर  $W = 1000 \text{ kN}$ , इतके असल्यास,

$$\begin{aligned}
 P &= 0.08 \times 1000 + 1.82 \\
 \therefore P &= 81.82 \text{ kN} \\
 \text{(c) (i)} \quad MA &= \frac{W}{P} = \frac{1000}{81.82} = 12.22 \\
 \text{(ii)} \quad \eta &= \frac{MA}{VR} = \frac{12.22}{30} \times 100 = 40.73\% \\
 \text{(d)} \quad \eta_{\max} &= \frac{1}{m \times VR} \times 100 \\
 &= \frac{100}{0.08 \times 30} = 41.67\% \\
 \therefore \eta_{\max} &= 41.67\%
 \end{aligned}$$

(e) रील सर्व निरीक्षणानुसार यंत्राची कार्यक्षमता ही 50% पेक्षा कमी आहे त्यामुळे हे यंत्र व्युत्क्रमी यंत्र (रिव्हर्सिबल मशीन) नाही.

**उदाहरण 5:** एक साधे उचलण्याचे यंत्र 30 N इतके परिश्रम लावल्यास 350 N इतका भार उचलते, आणि 40 N इतके परिश्रम लावल्यास 500 N इतका भार उचलते. यंत्राचे वेग गुणोत्तर  $VR = 20$  इतके आहे. ह्या यंत्राची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता 75% आहे सिद्ध करा.

**उत्तर:**

दिलेल्या माहितीनुसार,  $VR = 20$ ,  $\eta_{\max} = 75\%$ ,  $P_1 = 30 \text{ N}$  and  $W_1 = 350 \text{ N}$ ,  $P_2 = 40 \text{ N}$  and  $W_2 = 500 \text{ N}$

(a) ह्या दोन्ही निरीक्षणानुसार यंत्राचा नियम लिहिता येईल

$$\begin{aligned}
 P &= mW + C \\
 \therefore 30 &= m \times 350 + C & \dots(i) \\
 40 &= m \times 500 + C & \dots(ii) \\
 -10 &= -150m & \dots(i) - (ii) \\
 \therefore m &= 0.067
 \end{aligned}$$

(b)  $m = 0.067$  ही किंमत आता समीकरण (1) मध्ये वापरून,

$$\begin{aligned}
 30 &= 0.067 \times 350 + C \\
 \therefore C &= 6.55
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \eta_{\max} &= \frac{1}{m \times VR} = \frac{1}{0.067 \times 20} \\
 \therefore \eta_{\max} &= 0.746 = 74.6\% \cong 75\%
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 6:** एक यंत्राचे वेग गुणोत्तर  $VR = 6$  इतके आहे आणि हे यंत्र 20 N इतके परिश्रम लावल्यास 100 N इतका भार उचलू शकते. ह्या यंत्राची (1) कार्यक्षमता (2) घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम (3) घर्षण भार (4) आदर्श परिश्रम (5) आदर्श भार मोजा.

**उत्तर:**

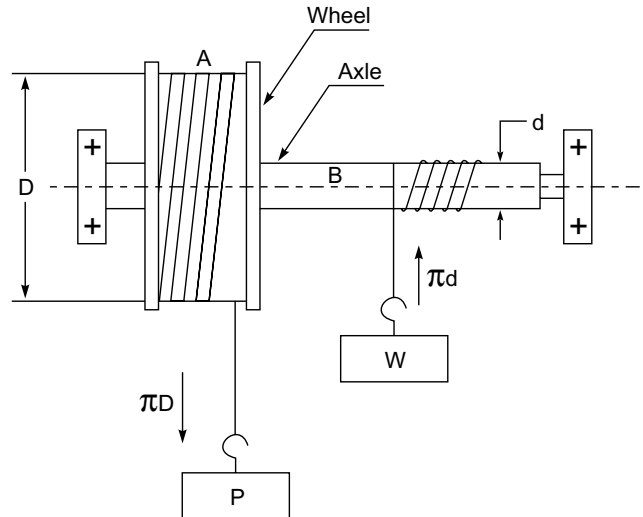
ह्या यंत्रामध्ये दिलेली माहिती पुढीलप्रमाणे,  $VR = 6$ ,  $W = 100 \text{ N}$  &  $P = 20 \text{ N}$

- (i) यंत्राचा यांत्रिक फायदा,  $MA = \frac{W}{P} = \frac{100}{20} = 5$
- (ii) यंत्राची कार्यक्षमता,  $\eta = \frac{MA}{VR} = \frac{5}{6} = 0.8333$   
 $\therefore$  Efficiency of machine,  $\eta = 83.33\%$
- (iii) घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम,  $P_F = P - \frac{W}{VR} = 20 - \frac{100}{6}$   
 $\therefore P_F = 3.33 \text{ N}$
- (iv) घर्षण भार,  $W_F = (P \times VR) - W$   
 $\therefore W_F = (20 \times 6) - 100$   
 $\therefore$  घर्षण भार,  $W_F = 20 \text{ N}$
- (v) आदर्श परिश्रम ( $P_o$ ),  $P_o = \frac{W}{VR} = \frac{100}{6}$   
 $\therefore P_o = 16.67 \text{ N}$
- (vi) आदर्श भार, ( $W_o$ ),  $W_o = L \times VR$   
 $\therefore W_o = 20 \times 6 = 120 \text{ N}$

### 5.3 वेगवेगळ्या साध्या यंत्रांचे वेग गुणोत्तर

#### 5.3.1 साधे अक्षदंड आणि चाक

आकृती 5.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे सिम्पल एक्सल आणि व्हील हे एक साधे यंत्र आहे ज्यामध्ये चाक A आणि एक्सल B हे एकाच दंड किंवा शॅफ्टला जोडलेले आहेत.



आकृती 5.2: सिम्पल एक्सल आणि व्हील

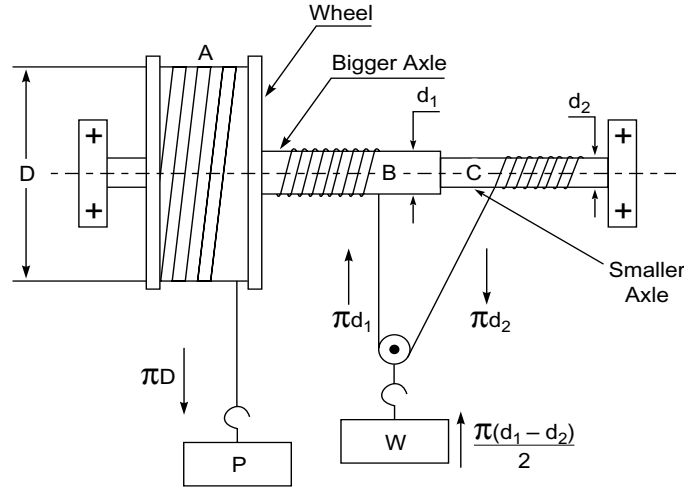
एक स्ट्रिंग B ह्या एक्सलच्या भोवती बांधलेली आहे, जी भार उचलत आहे. दुसरी स्ट्रिंग व्हील A च्या भोवती बांधलेली आहे आणि B वरील स्ट्रिंगच्या विरुद्ध दिशेने बांधलेली आहे जेणेकरून परिश्रम P खालच्या दिशेत जाईल त्यामुळे W हे वजन वरच्या दिशेत उचलले जाईल.

ह्यामध्ये,  $D$  = चाकाचा व्यास असेल आणि  $d$  = एक्सलचा व्यास असेल तर, ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर

$$\begin{aligned} VR &= \frac{\text{Distance moved by Effort}}{\text{Distance moved by Load}} \\ &= \frac{y}{x} = \frac{\pi D}{\pi d} \\ \therefore VR &= \frac{D}{d} \end{aligned}$$

### 5.3.2 भिन्न अक्षदंड व चाक

आकृती 5.3 मध्ये भिन्न अक्षदंड आणि चाक ह्याचे यंत्र दर्शविलेले आहे. ह्या यंत्रामध्ये वजन उचलायचा अक्षदंड BC हा दोन भागांमध्ये असतो आणि ह्या प्रत्येक भागाचा व्यास वेगवेगळा असतो आणि परिश्रम उचलणारे चाक A हे वेगळे असते. ह्यामध्ये परिश्रम P ची दोरी हे A ह्या चाकावर बांधलेले असते आणि दुसरी दोरी अक्षदंड B आणि C वरून अशाप्रकारे जोडलेली असते की दोन्हीमधील जोडलेली दिशा एकमेकांच्या विरुद्ध दिशेत असते. ह्यामुळे दोरी चाक A मधून उघडते तशीच दुसरी दोरी देखील C अक्षदंडापासून उघडते. पण भार W उचलण्यासाठी अक्षदंड B वर वळतो.



आकृती 5.3: भिन्न अक्षदंड आणि चाक

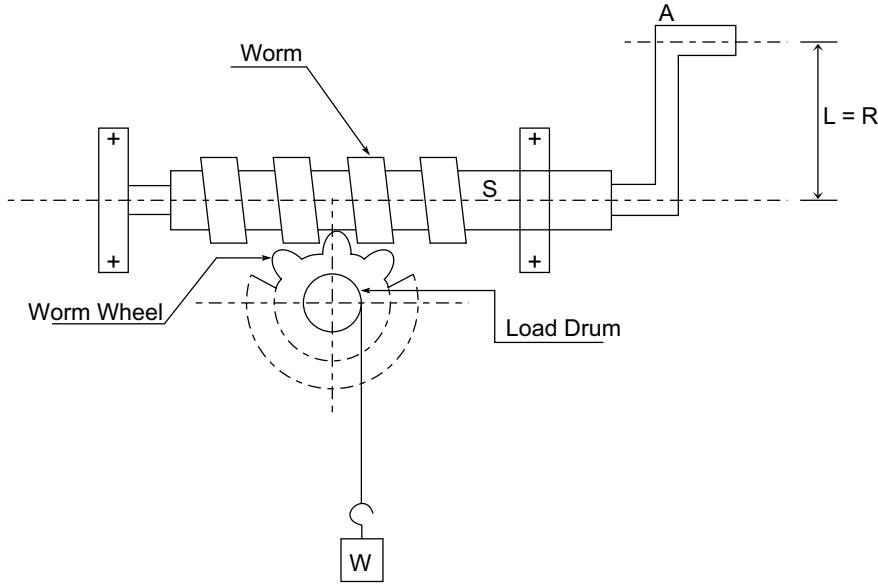
समजा,  $D$  = चाकाचा व्यास,  $d_1$  = मोठ्या अक्षदंडाचा व्यास आणि  $d_2$  = लहान अक्षदंडाचा व्यास असे असेल तर, ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.

$$VR = \frac{2D}{d_1 - d_2}$$



### 5.3.3 मळसूत्र आणि मळसूत्र चाक (वर्म आणि वर्म व्हील/ Worm and Worm Wheel)

आकृती 5.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे यामध्ये एक चौरस थ्रेडेड स्कू “S” असतो ज्याला मळसूत्र/ वर्म म्हणून ओळखले जाते आणि एक दातेरी चक्र ज्याला मळसूत्र चाक/ वर्म व्हील असे म्हणतात ते त्याच्याशी जोडलेले असते. परिश्रम P लावण्याकरिता “A” प्रमाणे एक चाक किंवा हँडल हे वर्मला जोडलेले असते. ह्यामध्ये जर R = परिश्रम चाकाची त्रिज्या = हँडलची लांबी, r = भार उचलायच्या ड्रमची त्रिज्या, T = वर्म व्हीलच्या दातांची संख्या, n = चौरस थ्रेडेड स्कू ची संख्या (एक किंवा दोन) असेल तर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.



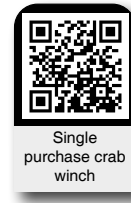
आकृती 5.4: वर्म आणि वर्म व्हील

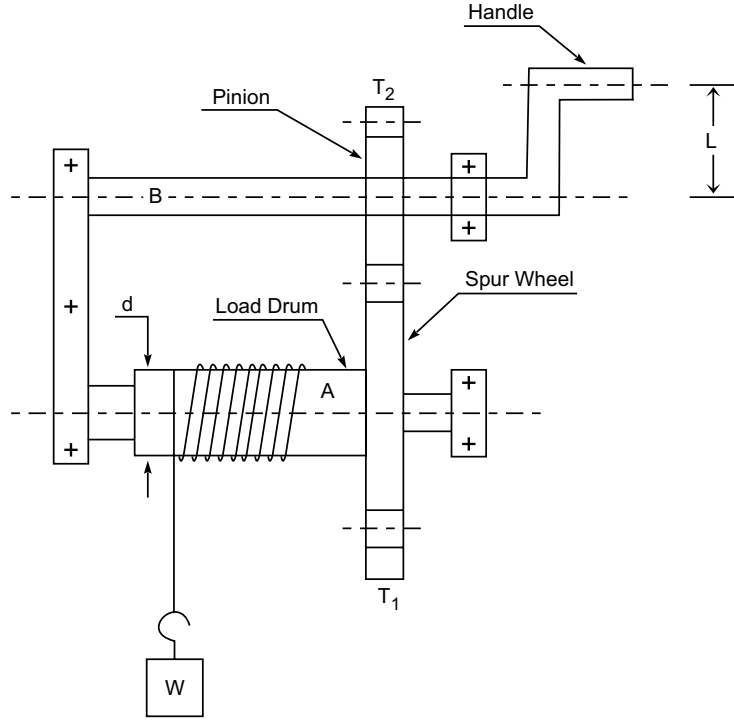
$$VR = \frac{RT}{r} \text{ or } VR = \frac{RT}{nr}$$

### 5.3.4 सिंगल परचेस क्रॅब विंच

सिंगल परचेस क्रॅब विंच मध्ये वजन उचलणाऱ्या ड्रम A वरती एक दोरी लावलेली असते आणि आकृती 5.5 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे त्या ड्रमवर त्याची काही वळणे लावलेली असतात. ह्या दोरीच्या शेवटी वजनाचा भार W लावलेला असतो. एक दाती असलेले स्पूर व्हील ( $T_1$ ) दृढपणे लोड ड्रम A वर बसवलेले असते. दुसरे दाती असलेले पिनियन व्हील ( $T_2$ ) हे स्पूर व्हीलसह गिअरने बसवलेले असते. ह्यामध्ये जर L = हँडलची लांबी, R = ड्रमची त्रिज्या,  $T_1$  = मुख्य गिअरच्या दातांची संख्या (स्पूर व्हील),  $T_2$  = पिनियन वरील दातांची संख्या असेल तर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.

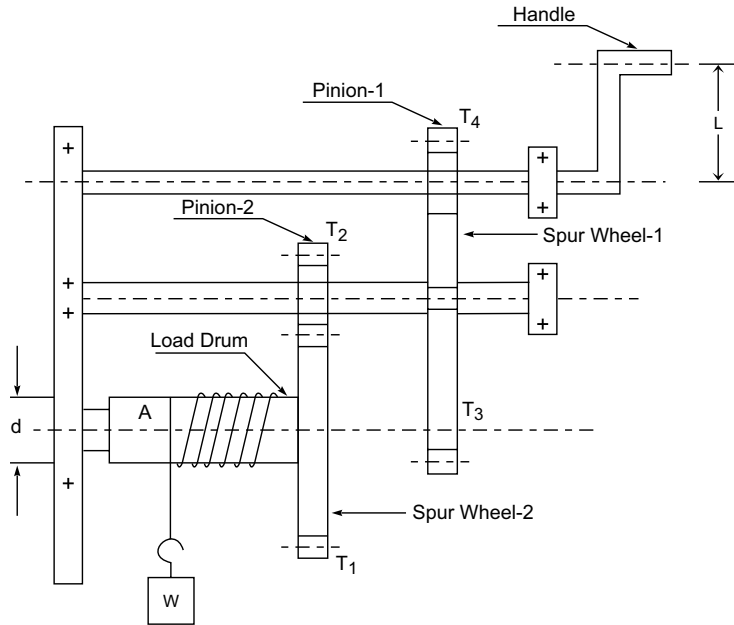
$$VR = \frac{l}{r} \times \frac{T_1}{T_2}$$





आकृती 5.5: सिंगल परचेस क्रॅब विंच

### 5.3.5 डबल परचेस क्रॅब विंच



आकृती 5.6: डबल परचेस क्रॅब विंच

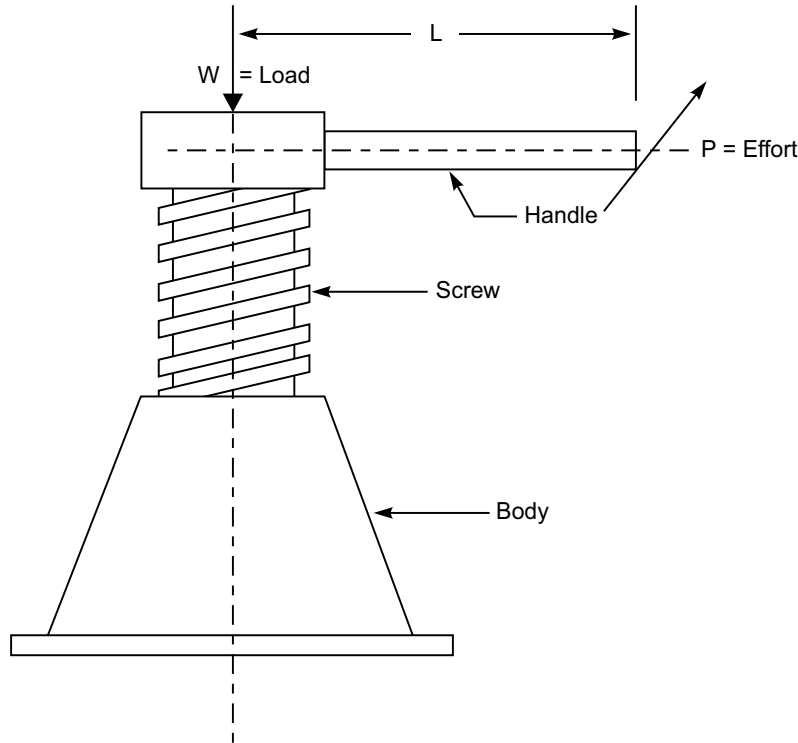


डबल परचेस क्रॅब विंच हे सिंगल परचेस क्रॅब विंचचे सुधारित डिझाइन आहे ज्यामध्ये यंत्राचे वेग गुणोत्तर वाढते. ह्यामध्ये आकृती 5.6 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे दोन स्पर व्हील असतात ज्याच्या दातांची संख्या  $T_1$  आणि  $T_3$  अशी असते, आणि दोन पिनियन व्हील असतात ज्याच्या दातांची संख्या  $T_2$  आणि  $T_4$  अशी असते. आता ह्यामध्ये जर,  $L$  = हँडलची लांबी,  $R$  = ड्रमची त्रिज्या,  $T_1$  आणि  $T_3$  = मुख्य गिअरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील),  $T_2$  आणि  $T_4$  = पिनियन वरील दातांची संख्या असेल तर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.

$$VR = \frac{l}{r} \times \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$$

### 5.3.6 साधा स्कू जॅक

ह्या यंत्रामध्ये आकृती 5.7 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे, एक स्कू असतो, जो नटामध्ये बसवलेला असतो, जो जॅकचा मुख्य भाग तयार करित असतो. ह्यामध्ये परिश्रम  $P$  लीव्हर हँडलच्या शेवटी लावून स्कू फिरविला जातो आणि सिंगल थ्रेडेड सिंपल स्कू जॅकचा वापर करून भार  $W$  उचलला जातो.



आकृती 5.7: साधा स्कू जॅक

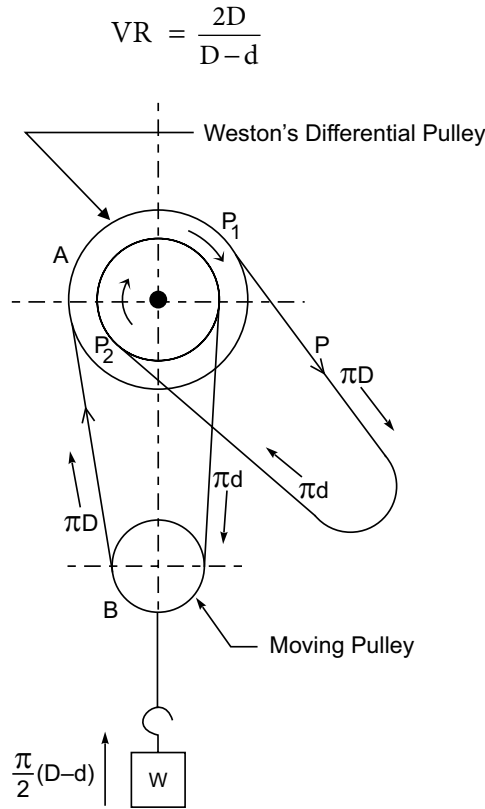
जर  $L$  = हँडलची लांबी, आणि  $P$  = स्कूचा पिच असेल तर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.

$$VR = \frac{2\pi l}{p}$$

### 5.3.7 वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक

यात दोन पुली ब्लॉक A आणि B असतात. वरच्या ब्लॉक A मध्ये दोन पुली ( $P_1$  आणि  $P_2$ ) असतात, एकाचा व्यास दुसऱ्यापेक्षा थोडा मोठा असतो. म्हणजे दोन्ही पुली दोन पुलांसह एक पुली म्हणून वागते. खालचा ब्लॉक B हा देखील एक पुली वाहून नेतो, ज्यावर भार W वर उचलण्यासाठी जोडलेला असतो. एक अखंड साखळी पुली  $P_1$  वरून जाते नंतर खालच्या ब्लॉक पुलीला गुंडाळून येते आणि नंतर शेवटी पुली  $P_2$  ला गुंडाळते. परिश्रम P पुली  $P_1$  वरून जाणाऱ्या साखळीवर लागू होते, जेणेकरून आकृती 5.8 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे भार W वर उचलता येतो.

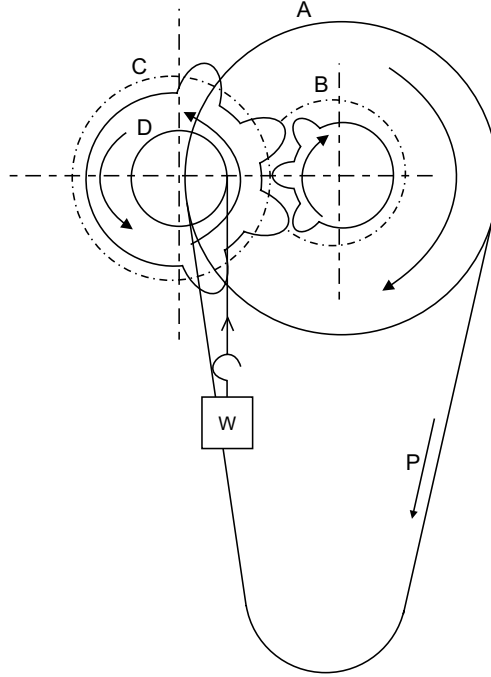
जर ह्यामध्ये  $D$  हा जर मोठ्या पुलीचा व्यास असेल आणि  $d$  हा लहान पुलीचा व्यास असेल तर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.



आकृती 5.8: वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक

### 5.3.8 गिअर पुली ब्लॉक

ह्या यंत्रामध्ये कॉग व्हील A असते, ज्याभोवती एक अंतहीन साखळी असते. एक लहान गिअर व्हील B ज्याला पिनियन म्हणतात ते A च्या समान शाफ्टला की असते. व्हील एक्सल B हे दुसरे मोठे चाक C ह्याच्यासोबत जोडलेले असते ज्याला स्पर व्हील म्हणतात. कॉग व्हील D हे शाफ्टला स्पर व्हील C सोबतच बांधविले जाते. भार W एका साखळीशी कॉगव्हील D सोबत जोडलेला असतो आणि परिश्रम P हा अंतहीन साखळीवर लागू होतो, जो A चाकावरून जातो. असे यंत्र आकृती 5.9 मध्ये दर्शविली आहे.



आकृती 5.9: गिअर पुली ब्लॉक

गिअर पुली ब्लॉकमध्ये जर  $T_1$  = परिश्रम चाक A च्या कॉगची संख्या असेल,  $T_2$  = पिनिन व्हील B च्या दातांची संख्या असेल आणि  $T_3$  = स्पर व्हील C वर दातांची संख्या असेल आणि  $T_4$  = भार व्हील D वर कॉगची संख्या असेल तर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे असते.

$$VR = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$$

**क्रिया:**

1. आपल्या प्रयोगशाळेतील उपलब्ध असलेल्या वेगवेगळ्या वजन उचलण्याच्या साध्या यंत्रांच्या वेग गुणोत्तराच्या (VR) समीकरणांची पडताळणी करा.
2. जर साध्या यंत्रावर वापरलेल्या दोरीचा व्यास मोठा असेल तर आपण अभ्यास करित असलेल्या वजन उचलण्याच्या साध्या यंत्रांच्या वेग गुणोत्तराच्या समीकरणामध्ये काय बदल होईल?

**उदाहरण 7:** एका डबल परचेस क्रॅब विंचमध्ये दोन पिनिन व्हीलच्या दातांची संख्या 10 आणि 20 इतकी आहे आणि स्पर व्हीलच्या दातांची संख्या 40 आणि 50 अशी आहे. हँडलची लांबी 30 cm आहे, ड्रमचा व्यास 20 cm आहे. ह्या यंत्राची कार्यक्षमता 40% असल्यास ह्या यंत्राला 1500 N भार उचलण्याकरिता लागणारे परिश्रम मोजा.

**उत्तर:**

$$l = 30 \text{ cm}, r = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}, T_1 = 40, T_2 = 10, T_3 = 50 \text{ \& } T_4 = 20, \eta = 0.40$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad VR &= \frac{l}{r} \times \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4} \\
 \therefore VR &= \frac{30}{10} \times \frac{40 \times 50}{10 \times 20} = 30 \\
 (b) \quad \eta &= \frac{MA}{VR} \\
 0.40 &= \frac{MA}{30} \\
 \therefore MA &= 12 \\
 (c) \quad MA &= \frac{W}{P} \\
 12 &= \frac{1500}{P} \\
 \therefore P &= 125 \text{ N}
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 8:** एका वर्म आणि वर्म व्हीलमध्ये, वर्म व्हीलची दाती 120 आहेत. हँडलची लांबी 30 cm आहे आणि भार उचलायच्या ड्रमचा व्यास 10 cm आहे. त्या यंत्राला 1800 N भार उचलण्याकरिता लागणारे परिश्रम 350 N आहे. ह्या यंत्राची कार्यक्षमता 40% असल्यास ह्या यंत्राचा नियम तयार करा. वर्म हे एकच ग्रेडेड आहे.

**उत्तर:**

$$T = 120, R = 30 \text{ cm}, r = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}, n = 1 \text{ (दिलेले वर्म हे एकच ग्रेडेड आहे)} \text{ and } \eta_{\max} = 40\%$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad VR &= \frac{RT}{nr} \\
 &= \frac{30 \times 120}{1 \times 5} = 720 \\
 (b) \quad \eta_{\max} &= \frac{1}{m \times VR} \\
 \therefore 0.40 &= \frac{1}{m \times 720} \\
 \therefore m &= 0.00347 \\
 (c) \quad P &= mW + C \\
 350 &= 0.00347 \times 1800 + C \\
 \therefore C &= 343.75 \\
 (d) \text{ Law of machine, } P &= 0.00347 W + 343.75
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 9:** एका सिंगल परचेस क्रॅब विंचची माहिती पुढीलप्रमाणे आहे: (1) हँडलची लांबी = 80 cm (2) मुख्य गिअरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील) = 120 (3) ड्रमचा व्यास = 30 cm. असे निरीक्षण आहे की 80 N इतके परिश्रम लावले तर 2000 N इतका भार उचलला जातो. आणि जर 160 N इतके परिश्रम लावले तर 4200 N इतका भार उचलला जातो. ह्या यंत्रामध्ये (1) यंत्राचा नियम शोधा (2) कोणत्याही एका निरीक्षणानुसार यंत्राची कार्यक्षमता मोजा.

**उत्तर:**

$$l = 80 \text{ cm}, r = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}, T_1 = 120 \text{ \& } T_2 = 20$$

$$(a) \quad VR = \frac{l}{r} \times \frac{T_1}{T_2} = \frac{80}{15} \times \frac{120}{20}$$

$$\therefore VR = 32$$

$$(b) \quad MA = \frac{W}{P} = \frac{2000}{80} = 25$$

(c) त्यामुळे पहिल्या निरीक्षणानुसार ह्या यंत्राची कार्यक्षमता खालीलप्रमाणे,

$$\eta = \frac{MA}{VR} \times 100 = \frac{25}{32} \times 100$$

$$\eta = 78.125\%$$

(d) यंत्राचा नियम

(i) दोन्ही निरीक्षणाचे वापर करून, यंत्राच्या नियमाच्या समीकरणाचा वापर करून,  $P = mW + C$ , we get

$$80 = m \times 2000 + C \quad \dots(i)$$

$$\underline{\underline{160 = m \times 4200 + C}} \quad \dots(ii)$$

$$\underline{\underline{-80 = -2200 m}} \quad [समीकरण (1) आणि (2) वापरून]$$

$$\therefore m = 0.036$$

(ii) आता  $m$  ची किंमत समीकरण (1) मध्ये वापरून,

$$80 = m \times 2000 + C$$

$$\therefore 80 = 0.036 \times 2000 + C$$

$$\therefore C = 8$$

(iii)  $m$  आणि  $C$  ह्याची किंमत  $P = mW + C$  ह्या समीकरणात वापरून, आपल्याला ह्या यंत्राचा नियम लिहिता येईल.

$$P = 0.036W + 8$$

**उदाहरण 10:** एका भिन्न अक्षदंड व चाक ह्या यंत्रामध्ये चाकाचा व्यास 400 mm इतका आहे. अक्षदंडांची लिज्या 150 mm and 100 mm अशी आहे. दोरीचा व्यास 1 cm इतका आहे. जर ह्या यंत्रावर 200 N इतके परिश्रम लावले आणि त्या यंत्राची कार्यक्षमता 75% इतकी असेल तर ह्या यंत्राद्वारे किती भार उचलता येईल?

**उत्तर:**

$$D = 400 \text{ mm}, d_1 = 2 \times 150 = 300 \text{ mm}, d_2 = 2 \times 100 = 200 \text{ mm},$$

$t_1$  = diameter of the rope = 1 cm = 10 mm &  $\eta = 75\%$

(a) For differential axle and wheel,

$$VR = \frac{2(D + t_1)}{(d_1 + t_1) - (d_2 + t_1)} = \frac{2(D + t_1)}{(d_1 - d_2)}$$

$$\therefore VR = \frac{2 \times (400 + 10)}{300 - 200}$$

$$\therefore VR = 8.2$$

$$(b) \quad \eta = \frac{MA}{VR} \times 100$$

$$75 = \frac{MA}{8.2} \times 100$$

$$\therefore MA = 6.15$$

$$MA = \frac{W}{P}$$

$$\therefore 6.15 = \frac{W}{200}$$

$$\therefore W = 1230 \text{ N}$$

**उदाहरण 11:** एका डबल परचेस क्रॅब विंचमध्ये दोन पिनियन व्हीलच्या दातांची संख्या 120 आणि 150 इतकी आहे आणि स्पर व्हीलच्या दातांची संख्या 300 आणि 400 अशी आहे. ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर शोधा. हँडलची लांबी 80 cm आहे, ड्रमचा व्यास 20 cm आहे. जर ह्या यंत्राला 1.834 kN भार उचलण्याकरिता 105 N इतके परिश्रम लागत असेल तर ह्या यंत्राचा घर्षण भार शोधा.

**उत्तर:**

$$l = 80 \text{ cm}, r = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}, T_1 = 300, T_2 = 120 \text{ \& } T_3 = 400 \text{ \& } T_4 = 150$$

$$(a) \text{ यंत्राचे वेग गुणोत्तर खालीलप्रमाणे काढता येईल, } VR = \frac{l}{r} \times \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$$

$$\therefore VR = \frac{80}{10} \times \frac{300 \times 400}{120 \times 150} = 53.33$$

$$(b) \text{ घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम, } P_f = P - \frac{W}{VR}$$

$$\text{Put } P = 105 \text{ N and } W = 1.834 \text{ kN} = 1834 \text{ N}$$

$$\therefore P_f = 105 - \frac{1834}{53.33}$$

$$\therefore P_f = 70.61 \text{ N}$$

$$(c) \text{ घर्षण भार : } W_f = 105 \times 53.33 - 1834$$

$$\therefore W_f = 3765.65 \text{ N}$$

## सारांश

- **यांत्रिक फायदा (MA):**  $MA = \frac{W}{P}$  जेथे W हा उचललेला भार आहे ज्याचे एकक Newton आहे आणि P हे लागलेले परिश्रम आहे ज्याचे एकक Newton आहे.
- **वेग गुणोत्तर (VR):**  $VR = \frac{y}{x}$  ह्यामध्ये परिश्रमाने हलवलेले अंतर (y) आणि भाराने हलवलेले अंतर (x)
- **यंत्राने केलेले काम:** यंत्राने केलेले काम = परिश्रम × परिश्रमाने हलवलेले अंतर =  $P \times y$
- **यंत्रावर केलेले काम:** यंत्रावर केलेले काम = भार × भाराने हलवलेले अंतर =  $W \times x$
- **कार्यक्षमता (Efficiency) ( $\eta$ ):** यंत्राची कार्यक्षमता =  $\eta = \frac{W/P}{y/x} \times 100\%$   

$$\text{यंत्राची कार्यक्षमता} = \eta = \frac{MA}{VR} \times 100\%$$
- **आदर्श यंत्र (Ideal Machine):** जर एखाद्या यंत्राची कार्यक्षमता 100 % असेल तर त्या यंत्राला आदर्श यंत्र असे म्हणता येईल. अशा यंत्रामध्ये घर्षण नसते किंवा शून्य असते. अशा आदर्श यंत्राकरिता, भाराचे बल = परिश्रम बल, यांत्रिक फायदा = वेग गुणोत्तर किंवा  $MA = VR$ .
- **व्युत्क्रमी यंत्राकरिता (reversible machine):** त्याची कार्यक्षमता,  $\eta \geq 50\%$  इतकी असते. अव्युत्क्रमी irreversible machine) यंत्राकरिता त्याची कार्यक्षमता,  $\eta < 50\%$  इतकी असते.
- **घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम (Effort Lost in Friction,  $P_f$ ):**  $P_f = P - \frac{W}{VR}$
- **घर्षण भार ( $W_f$ ):**  $W_f = (P \times VR) - W$
- यंत्राचा नियम:  $P = mW + C$ , ज्यामध्ये, P = लागलेले परिश्रम, W = उचललेला भार, m = स्थिरांक (घर्षण गुणांक) आणि तो AB ह्या रेषेचा कल आहे आणि C = स्थिरांक आहे = यंत्राचे घर्षण आहे.
- **जास्तीत जास्त यांत्रिक फायदा ( $MA_{\max}$ ):**  $MA_{\max} = \frac{W}{mW+C} = 1/(m + CW)$
- **जास्तीत जास्त कार्यक्षमता ( $\eta_{\max}$ ):**  $\eta_{\max} = \frac{1}{m \times VR}$
- **वेगवेगळी यंत्रे:**
  - (अ) साधे अक्षदंड आणि चाक (Simple Axle and Wheel)
  - (ब) भिन्न अक्षदंड व चाक (Differential Axle and Wheel)
  - (क) मळसूत आणि मळसूत चाक (वर्म आणि वर्म व्हील/ Worm and Worm Wheel)
  - (ड) सिंगल परचेस क्रॅब विंच (Single Purchase Crab Winch)
  - (इ) डबल परचेस क्रॅब विंच (Double Purchase Crab Winch)
  - (ई) साधा स्कू जॅक (Simple Screw Jack)

## गृहपाठ

### (अ) वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. साध्या उचाल्याच्या यंत्राची कार्यक्षमता हे कशाचे गुणोत्तर आहे?  
 (अ) यंत्रावर लागलेला भार आणि यंत्रणे उचलेला भार  
 (ब) यंत्राने केलेले कार्य आणि त्याच्यावर केलेले कार्य  
 (क) यांत्रिकी फायदा आणि वेग गुणोत्तर  
 (ड) अ, ब, आणि क ह्यातील सर्व योग्य आहे
2. जर एखाद्या यंत्राची कार्यक्षमताची किंमत स्थिर ठेवलेली असेल तर त्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर कशाच्या थेट प्रमाणात असेल?  
 (अ) यांत्रिकी फायदा (ब) लावलेले परिश्रम  
 (क) यंत्रामधील घर्षण (ड) अ, ब, आणि क ह्यातील सर्व
3. जर एखाद्या यंत्राची कार्यक्षमता ही 50% एवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त असेल तर त्या यंत्राला काय म्हणतात?  
 (अ) स्वतः लॉक होणारे यंत्र (ब) अव्युत्कर्मी यंत्र  
 (क) आदर्श यंत्र (ड) अ, ब, आणि क ह्यातील काहीच नाही.
4. जर एखाद्या यंत्राची कार्यक्षमता ही 50% पेक्षा कमी असेल तर त्या यंत्राला काय म्हणतात?  
 (अ) व्युत्कर्मी यंत्र (ब) अव्युत्कर्मी यंत्र  
 (क) आदर्श यंत्र (ड) अ, ब, आणि क ह्यातील काहीच नाही.
5. कोणत्याही आदर्श यंत्रामध्ये यांत्रिकी फायदा हा वेग गुणोत्तर \_\_\_\_\_.  
 (अ) इतकाच असतो (ब) पेक्षा कमी असतो  
 (क) पेक्षा मोठा असतो (ड) ह्यातील काहीच नाही
6. एका यंत्राद्वारे 1000 N हे W वजन 100 N ह्या P परिश्रम बलाद्वारे उचलले जाते. जर ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर 30 असेल तर हे यंत्र कोणत्या पद्धतीचे आहे?  
 (अ) व्युत्कर्मी यंत्र (ब) अव्युत्कर्मी यंत्र  
 (क) आदर्श यंत्र (ड) ह्यातील काहीच नाही
7. एखाद्या साध्या भार उचलण्याच्या यंत्राचा नियम कसा लिहिला जातो?  
 (अ)  $P = mW - C$  (ब)  $P = mW + C$   
 (क)  $P = mW \times C$  (ड) ह्यातील काहीच नाही
8. एखाद्या साध्या भार उचलण्याच्या यंत्राची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता कशी मोजतात?  
 (अ)  $\frac{1}{m}$  (ब)  $\frac{VR}{m}$   
 (क)  $\frac{m}{VR}$  (ड)  $\frac{1}{(m \times VR)}$



9. एखाद्या साध्या यंत्राचा जास्तीत जास्त यांत्रिकी फायदा कसा मोजतात?  
 (अ)  $1 - m$  (ब)  $1 + m$   
 (क)  $1 / m$  (ड)  $1 \times m$
10. सिम्पल एक्सल आणि व्हील ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर जर त्याच्या परिश्रम चाकाचा आणि भार चाकाचा व्यास  $D$  आणि  $d$  असेल तर किती असेल?  
 (अ)  $D + d$  (ब)  $D - d$   
 (क)  $D \times d$  (ड)  $D / d$
11. वर्म आणि वर्म व्हील ह्या यंत्राच्या कार्यक्षमतेचा आणि परिश्रम चाकाच्या लिज्येचा काहीही संबंध नसतो.  
 (अ) योग्य (ब) अयोग्य
12. एका सिंगल परचेस क्रॅब विंचचे वेग गुणोत्तर कशाने वाढविता येईल?  
 (अ) हँडलची लांबी वाढविल्याने (ब) भार उचलणाऱ्या ड्रमची लिज्या वाढविल्यास  
 (क) पिनीयन मधील दातांची संख्या वाढवून (ड) (अ), (ब) आणि (क) सर्व योग्य आहेत.
13. एका सिम्पल स्कू जॅक परिश्रम बल लावण्यात येणाऱ्या हँडलची लांबी  $L$  आणि स्कूचा पीच  $P$  असेल तर त्याचे वेग गुणोत्तर किती असेल?  
 (अ)  $\frac{2\pi L}{P}$  (ब)  $\frac{\pi L}{2P}$   
 (क)  $\frac{2\pi P}{L}$  (ड)  $\frac{2\pi P}{L}$

[उत्तर : (1-अ), (2-अ), (3-ड), (4-ब), (5-अ), (6-ब), (7-ब), (8-ड), (9-क), (10-ड), (11-ब), (12-अ), (13-अ)]

### (ब) व्यक्तीनिष्ठ प्रश्न

1. पुढील गोष्टींच्या व्याख्या सांगा:  
 (1) यांत्रिकी फायदा (2) वेग गुणोत्तर (3) यंत्राने केलेले काम (4) यंत्राकरिता केलेले काम (5) घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम (6) व्युत्कर्मी यंत्र (7) अव्युत्कर्मी यंत्र (8) जास्तीत जास्त यांत्रिकी फायदा (9) जास्तीत जास्त कार्यक्षमता (10) आदर्श यंत्र (11) घर्षण भार.
2. यंत्रांचा नियम स्पष्ट करा.
3. व्युत्कर्मी यंत्र आणि अव्युत्कर्मी यंत्र ह्यातील फरक स्पष्ट करा.
4. व्युत्कर्मी यंत्राकरिता  $\eta > 50\%$  हे सिद्ध करा.
5. यंत्राची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता कशी शोधता येईल हे स्पष्ट करा.
6. स्वतः लॉक होणारे यंत्र म्हणजे काय हे स्पष्ट करा.
7. साधा स्कू जॅक (Simple Screw Jack) ची आकृती काढा आणि त्याचे वेगवेगळे भाग दाखवा आणि स्पष्ट करा. या यंत्राचे वेग गुणोत्तर लिहा.

8. एका सिंगल परचेस क्रॅब विंचची माहिती पुढीलप्रमाणे आहे: (1) हँडलची लांबी = 600 mm (2) मुख्य गिरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील) = 100 (3) ड्रमचा व्यास = 200 mm (4) पिनियनच्या दातांची संख्या = 20 आहे. ह्याचे वेग गुणोत्तर शोधा. असे निरीक्षण आहे की 100 N इतके परिश्रम लावले तर 2000 N इतका भार उचलला जातो. असे असल्यास ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा आणि कार्यक्षमता शोधा. [उत्तर: VR = 30, MA = 20,  $\eta = 66.67\%$ ]
9. एका साध्या उचलण्याच्या यंत्राचा नियम  $P = 0.1 W + 3.5$  असा आहे. ह्या वस्तूला 50 kN इतका भार उचलण्यासाठी किती परिश्रम बल लागेल ते शोधा. त्याचप्रमाणे ह्या यंत्राची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता आणि यांत्रिकी फायदा शोधा. गृहीत धारा की ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर 30.5 इतके आहे.  
[उत्तर:  $P = 8.5$  kN, Maximum MA = 10,  $\eta_{\max} = 32.78\%$ ]
10. एका साध्या यंत्रामध्ये जर 30 kN परिश्रम बल लावले तर 100 kN भार उचलला जातो आणि त्याच यंत्राद्वारे जर 50 kN परिश्रम बल लावले तर 200 kN भार उचलला जातो. ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर VR = 100 असे असेल तर 300 kN भार उचलण्याकरिता लागणारे परिश्रम बल किती लागेल? हा यंत्राची कार्यक्षमता किती असेल?  
[उत्तर:  $P = 0.20W + 10$ ,  $P = 70$  kN,  $\eta = 4.28\%$ ]
11. एका साध्या उचलण्याच्या यंत्राचा नियम  $P = 0.03W + 1$  असा आहे. जर VR = 40 असेल तर ह्या यंत्राची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता किती असेल हे शोधा. त्याचप्रमाणे हे यंत्र स्वतः लॉक होणारे यंत्र आहे किंवा नाही हे स्पष्ट करा. जर ह्या यंत्राद्वारे 1 kN इतका भार उचलायचा असेल तर लागणारे परिश्रम बल किती असेल?  
[उत्तर:  $\eta_{\max} = 83.33\%$ , Machine is reversible,  $P = 31$  N]

## प्रात्यक्षिके

### प्रात्यक्षिक 2: भिन्न अक्षदंड व चाक

- 2.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य  
भिन्न अक्षदंड आणि चाक ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे.
- 2.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्व  
भिन्न अक्षदंड आणि चाक ह्या यंत्राचा नियम शोधणे आणि प्रस्थापित करणे.
- 2.3 संबंधित पाठ  
[पाठ 5 (अ) आणि 5 (ब) ह्याचा संदर्भ घ्या]
- 2.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:  
PrO1: यांत्रिकी फायदा (MA), वेग गुणोत्तर (VR), आणि यंत्राची कार्यक्षमता समजून घेणे.  
PrO2: ह्या यंत्राचा नियम समजून घेणे,  $P = mW + C$   
PrO3: विश्लेषणात्मक परिणाम आणि आलेखीय परिणाम ह्याचा अर्थ समजून घेणे.

## 2.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

[पाठ 5 (ब) मधील आकृती 5.3 ह्याचा संदर्भ घ्या]

## 2.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	भिन्न अक्षदंड आणि चाक	1		
2.	वजनाचे संच जसे 1kg, 2kg, 3kg	2		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच जसे 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	बाह्य लघुमापक सरकपट्टी (व्हर्निअर क्वालीपायर)	1		
5.	स्टीलची फुटपट्टी, लाकडाची मीटरपट्टी	1		
6.	नायलॉनची दोरी	2		

## 2.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

1. कोणताही धक्का किंवा हिसका न लागू देता वजन हलुवारपणे पॅनमध्ये ठेवावे.
2. उचललेला भार आणि वापरलेले परिश्रम बल ह्यांचे अंतर काळजीपूर्वक मोजावे.
3. आलेख काढण्याकरिता योग्य प्रमाण निवडा.

## 2.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. प्रथम दिलेल्या भिन्न अक्षदंड आणि चाक ह्या यंत्राची कार्यप्रणाली समजून घ्या.
2. आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे भिन्न अक्षदंड आणि चाक ह्या यंत्रामध्ये उचलण्याचा भार  $W$  उचलण्याकरिता आवश्यक वापरले जाणारे परिश्रम बल  $P$  हे व्यवस्थित पद्धतीने दोरीवर अडकवा जेणेकरून त्यामधील भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$ , आपण योग्य पद्धतीने मोजू शकू.
3. आता आपण भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  मोजल्यास, ह्यावरून आपण ह्या दिलेल्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर,  $VR = y/x$  शोधू शकतो.
4. वेग गुणोत्तराचा सरासरी परिणाम शोधण्यासाठी वरील क्र. 2 आणि क्र. 3 हे चार ते पाच वेगवेगळ्या भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  शोधा.
5. आता, चाकाचा व्यास  $D$ , मोठा अक्षदंड आणि लहान अक्षदंड ह्यांचा व्यास  $d_1$  आणि  $d_2$  शोधा. ज्यांचे वापर करून ह्या यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर मुल्य आपण शोधू शकतो.  $VR = 2D/(d_1 - d_2)$ .
6.  $X$  अक्षावर उचललेले भार आणि  $Y$  अक्षावर वापरलेले परिश्रम बल ह्याचा योग्य प्रमाणाचा वापर करून आलेख तयार करा आणि सदरच्या यंत्राचा घर्षण गुणांक  $m$  आणि स्थिरांक  $C$  शोधा.

7. कोणत्याही दोन निरीक्षणांची किंमत वापरून आणि  $P = mW + C$  हे समीकरण वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  शोधा.
8. स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  च्या विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या किंमतींची तुलना करा.

### 2.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

1. चाकाचा व्यास  $= D = \dots \text{ mm}$ ,
2. मोठा आणि लहान अक्षदंड ह्यांचा व्यास  $= d_1 = \dots \text{ mm}, d_2 = \dots \text{ mm}$

अ. क्र.	भार $W$ (N)	परिश्रम बल $P$ (N)	यांत्रिकी फायदा $MA = W/P$	विस्थापित अंतर		प्रात्यक्षिका प्रमाणे $VR = Y/X$	यंत्राची कार्यक्षमता $MA/VR$	विश्लेषणात्मक पद्धतीने		आलेखीय पद्धतीने	
				Effort $Y$ (mm)	Load $X$ (mm)			$m$	$C(N)$	$m$	$C(N)$
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											

#### नमुना गणना

(I) यांत्रिकी फायदा,  $MA = \frac{W}{P}$

(II) वेग गुणोत्तर,  $VR = \frac{Y}{X}$

(III) यंत्राची कार्यक्षमता,  $\text{Efficiency} = \frac{MA}{VR}$

(IV) यंत्राचा नियम: (विश्लेषणात्मक पद्धतीने)  $P = mW + C$

(V) यंत्राचा नियम: (आलेखीय पद्धतीने)  $P = mW + C$

(VI) यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर:  $VR = \frac{2D}{(d_1 - d_2)}$

### 2.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

### 2.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

### 2.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. यंत्राचे शोधलेले सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर आणि प्रात्यक्षिकाआधारे शोधलेले वेग गुणोत्तर ह्यातील फरक ह्यामधील कारणे शोधा आणि त्याची चर्चा करा.
2. यंत्राचा नियम  $P = mW + C$  ह्यामधील विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या यंत्राचे स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  ह्यातील फरक आणि त्याची कारणे शोधा.

इथे तुम्हाला प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्नांची उत्तरे वेगळ्या कागदावर लिहायची आहेत.

### 2.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ - कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

### 2.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

### 2.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

### प्रात्यक्षिक 3: साधा स्कू जॅक

#### 3.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

साधा स्कू जॅक ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे.

#### 3.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

साधा स्कू जॅक ह्या यंत्राचा नियम शोधणे आणि प्रस्थापित करणे.

#### 3.3 संबंधित पाठ

[पाठ 5 (ई) ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 3.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: यांत्रिकी फायदा (MA), वेग गुणोत्तर (VR), आणि यंत्राची कार्यक्षमता समजून घेणे.

PrO2: ह्या यंत्राचा नियम समजून घेणे,  $P = mW + C$

PrO3: विश्लेषणात्मक परिणाम आणि आलेखीय परिणाम ह्याचा अर्थ समजून घेणे.

#### 3.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

[पाठ 5 (ई) मधील आकृती 5.7 ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 3.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	स्कू जॅकचे उपकरण	1		
2.	वजनाचे संच जसे 1kg, 2kg, 3kg	2		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच जसे 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	बाह्य लघुमापक सरकपट्टी (व्हर्निअर क्वालीपायर)	1		
5.	स्टीलची फुटपट्टी, लाकडाची मीटरपट्टी	1		
6.	नायलॉनची दोरी	2		

#### 3.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

- कोणताही धक्का किंवा हिसका न लागू देता वजन हलुवारपणे पॅनमध्ये ठेवावे.
- स्कू जॅकचा पिच योग्य पद्धतीने आणि काळजीपूर्वक शोधा.
- भार उचलण्याच्या किंमतीची कमीत कमी तीन वेळा वाचन करा.

#### 3.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

- प्रथम दिलेल्या साधा स्कू जॅक ह्या यंत्राची कार्यप्रणाली समजून घ्या.

2. दिलेल्या साधा स्कू जॅक ह्या यंत्राचे वेग गुणोत्तर दोन वेगवेगळ्या पद्धतीने शोधा:  
 (अ) सिद्धांतविषयक: हँडलची लांबी  $L$  आणि स्कूचा पिच  $p$  हे मोजून.  
 (ब) आलेखीय: परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  आणि भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  मोजून
3. लोड ड्रमवर एकानंतर एक असे वेगवेगळे भार  $W$  ठेवून प्रत्येक भार  $W$  वर उचलण्यासाठी कमीत कमी किती परिश्रम बल  $P$  आवश्यक आहे ते शोधा आणि निरीक्षण तक्त्यामध्ये ह्याची नोंद करा.
4.  $X$  अक्षावर उचललेले भार  $W$  आणि  $Y$  अक्षावर वापरलेले परिश्रम बल  $P$  ह्याचा योग्य प्रमाणाचा वापर करून आलेख तयार करा आणि सदरच्या यंत्राचा घर्षण गुणांक  $m$  आणि स्थिरांक  $C$  शोधा.
5. कोणत्याही दोन निरीक्षणांची किंमत वापरून आणि  $P = mW + C$  हे समीकरण वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  शोधा.
6. स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  च्या विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या किंमतींची तुलना करा.

### 3.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

1. परिश्रम चाकाचा व्यास = हँडलची लांबी =  $D = \dots\dots$  mm, 2. स्कू जॅकचा पिच =  $p = \dots\dots$  mm

अ. क्र.	भार $W$ (N)	परिश्रम बल $P$ (N)	यांत्रिकी फायदा $MA = W/P$	विस्थापित अंतर		प्रात्यक्षिका प्रमाणे $VR = Y/X$	यंत्राची कार्यक्षमता $MA/VR$	विश्लेषणात्मक पद्धतीने		आलेखीय पद्धतीने	
				Effort $Y$ (mm)	Load $X$ (mm)			$m$	$C$ (N)	$m$	$C$ (N)
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											

#### नमुना गणना

(I) यांत्रिकी फायदा,  $MA = \frac{W}{P}$

(II) वेग गुणोत्तर,  $VR = \frac{Y}{X}$

(III) यंत्राची कार्यक्षमता,  $Efficiency = \frac{MA}{VR}$

(IV) यंत्राचा नियम: (विश्लेषणात्मक पद्धतीने)  $P = mW + C$

(V) यंत्राचा नियम: (आलेखीय पद्धतीने)  $P = mW + C$

(VI) यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर:  $VR = \frac{\pi D}{p}$

### 3.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

### 3.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

### 3.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. स्कू जॅकचा पीच म्हणजे काय? पीच कसे मोजतात?
2. लोड ड्रमचा परीघ कसा मोजला जातो/ तुम्ही कसा मोजला?
3. स्कू जॅक हे यंत्र कोणत्या कार्य तत्वानुसार काम करते?

### 3.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ - कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

### 3.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

### 3.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्याचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		



### प्रात्यक्षिक 4: मळसूत आणि मळसूत चाक (वर्म आणि वर्म व्हील)

#### 4.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

मळसूत आणि मळसूत चाक (वर्म आणि वर्म व्हील) यंत्राचा नियम शोधणे.

#### 4.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

दिलेल्या मळसूत आणि मळसूत चाक (वर्म आणि वर्म व्हील) ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे आणि प्रस्थापित करणे.

#### 4.3 संबंधित पाठ

[पाठ 5 (क) ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 4.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: यांत्रिकी फायदा (MA), वेग गुणोत्तर (VR), आणि यंत्राची कार्यक्षमता समजून घेणे.

PrO2: ह्या यंत्राचा नियम समजून घेणे,  $P = mW + C$

PrO3: विश्लेषणात्मक परिणाम आणि आलेखीय परिणाम ह्याचा अर्थ समजून घेणे.

#### 4.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

[पाठ 5 (क) मधील आकृती 5.4 ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 4.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	वर्म आणि वर्म व्हीलचे उपकरण	1		
2.	वजनाचे संच जसे 1kg, 2kg, 3kg	2		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच जसे 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	बाह्य लघुमापक सरकपट्टी (व्हर्निअर क्वालीपायर)	1		
5.	स्टीलची फुटपट्टी, लाकडाची मीटरपट्टी	1		
6.	नायलॉनची दोरी	2		

#### 4.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

- कोणताही धक्का किंवा हिसका न लागू देता वजन हळुवारपणे पॅनमध्ये ठेवावे.
- उचललेले भार आणि वापरलेले परिश्रम बल ह्यांचे अंतर काळजीपूर्वक मोजा.
- आलेखासाठी योग्य त्या प्रमाणाचा वापर करा.

#### 4.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. प्रथम दिलेल्या वर्म आणि वर्म व्हील ह्या यंत्राची कार्यप्रणाली समजून घ्या.
2. लोड ड्रमवर एकानंतर एक असे वेगवेगळे भार  $W$  ठेवून प्रत्येक भार  $W$  वर उचलण्यासाठी व्हील/ हँडलवर कमीत कमी किती परिश्रम बल  $P$  आवश्यक आहे ते शोधा. त्याचबरोबर भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  मोजा.
3. ह्यावरून आपण वेग गुणोत्तर शोधू शकू. Velocity Ratio =  $y/x$ .
4. सरासरी वेग गुणोत्तर शोधण्याकरिता वरीलप्रमाणे चार ते पाच वेगवेगळी किंमत असलेल्या भाराकरिता लागणारे परिश्रम बल मोजा आणि निरीक्षण तक्त्यामध्ये ह्याची नोंद करा.
5. आता व्हीलचा व्यास / हँडलची लांबी ( $D$ ), भार उचलायच्या ड्रमची लिज्या ( $r$ ), वर्म व्हीलच्या दातांची संख्या ( $T$ ) आणि चौरस थ्रेडेड स्कूची संख्या (एक किंवा दोन) ( $n$ ) शोधा.
6.  $X$  अक्षावर उचललेले भार  $W$  आणि  $Y$  अक्षावर वापरलेले परिश्रम बल  $P$  ह्याचा योग्य प्रमाणाचा वापर करून आलेख तयार करा आणि सदरच्या यंत्राचा घर्षण गुणांक  $m$  आणि स्थिरांक  $C$  शोधा.
7. कोणत्याही दोन निरीक्षणांची किंमत वापरून आणि  $P = mW + C$  हे समीकरण वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  शोधा.
8. स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  च्या विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या किंमतींची तुलना करा.

#### 4.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

1. व्हीलचा व्यास / हँडलची लांबी =  $D = \dots\dots$  mm,
2. भार उचलायच्या ड्रमची लिज्या =  $r = \dots\dots$  mm
3. वर्म व्हीलच्या दातांची संख्या =  $T = \dots\dots$
4. चौरस थ्रेडेड स्कूची संख्या (एक किंवा दोन) =  $n = \dots\dots$

अ. क्र.	भार $W$ (N)	परिश्रम बल $P$ (N)	यांत्रिकी फायदा $MA = W/P$	विस्थापित अंतर		प्रात्यक्षिका प्रमाणे $VR = Y/X$	यंत्राची कार्यक्षमता $MA/VR$	विश्लेषणात्मक पद्धतीने		आलेखीय पद्धतीने	
				Effort $Y$ (mm)	Load $X$ (mm)			$m$	$C$ (N)	$m$	$C$ (N)
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											

#### नमुना गणना

(I) यांत्रिकी फायदा,  $MA = \frac{W}{P}$

(II) वेग गुणोत्तर,  $VR = \frac{Y}{X}$

(III) यंत्राची कार्यक्षमता,  $Efficiency = \frac{MA}{VR}$

(IV) यंत्राचा नियम: (विश्लेषणात्मक पद्धतीने)  $P = mW + C$

(V) यंत्राचा नियम: (आलेखीय पद्धतीने)  $P = mW + C$

(VI) यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर:  $VR = \frac{RT}{nr}$

#### 4.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

#### 4.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

#### 4.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. कोणत्याही साध्या यंत्राच्या नियमातील स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  कसा शोधतात?
2. यंत्राचे सैद्धांतिक पद्धतीने काढलेले वेग गुणोत्तर आणि प्रात्यक्षिकाद्वारे शोधलेले वेग गुणोत्तर ह्यामध्ये फरक येतो ह्याची कारणे स्पष्ट करा.
3. आपल्या प्रयोगशाळेत असेल त्या वेगवेगळ्या साध्या उचलण्याच्या यंत्रांचे वेग गुणोत्तरांची समीकरणे लिहा.

#### 4.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

#### 4.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

## 4.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्याचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

## प्रात्यक्षिक 5: सिंगल परचेस क्रॅब विंच

## 5.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

सिंगल परचेस क्रॅब विंच ह्या यंत्राचा नियम शोधणे.

## 5.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

दिलेल्या सिंगल परचेस क्रॅब विंच ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे आणि प्रस्थापित करणे.

## 5.3 संबंधित पाठ

[पाठ 5 (ड) ह्याचा संदर्भ घ्या]

## 5.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: यांत्रिकी फायदा (MA), वेग गुणोत्तर (VR), आणि यंत्राची कार्यक्षमता समजून घेणे.

PrO2: ह्या यंत्राचा नियम समजून घेणे,  $P = mW + C$

PrO3: विश्लेषणात्मक परिणाम आणि आलेखीय परिणाम ह्याचा अर्थ समजून घेणे.

## 5.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

[पाठ 5 (ड) मधील आकृती 5.5 ह्याचा संदर्भ घ्या]

## 5.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	सिंगल परचेस क्रॅब विंचचे उपकरण	1		
2.	वजनाचे संच जसे 1kg, 2kg, 3kg	2		

अ. क्र.	महत्त्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
3.	खाच असलेले वजनाचे संच जसे 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	बाह्य लघुमापक सरकपट्टी (व्हर्निअर क्वालीपायर)	1		
5.	स्टीलची फुटपट्टी, लाकडाची मीटरपट्टी	1		
6.	नायलॉनची दोरी	2		

### 5.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

1. कोणताही धक्का किंवा हिंसका न लागू देता वजन हळुवारपणे पॅनमध्ये ठेवावे.
2. उचललेले भार आणि वापरलेले परिश्रम बल ह्यांचे अंतर काळजीपूर्वक मोजा.
3. आलेखासाठी योग्य त्या प्रमाणाचा वापर करा.

### 5.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. प्रथम दिलेल्या सिंगल परचेस क्रेब विंच ह्या यंत्राची कार्यप्रणाली समजून घ्या.
2. लोड ड्रमवर एकानंतर एक असे वेगवेगळे भार  $W$  ठेवून प्रत्येक भार  $W$  वर उचलण्यासाठी व्हील/ हँडलवर कमीत कमी किती परिश्रम बल  $P$  आवश्यक आहे ते शोधा. त्याचबरोबर भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  मोजा.
3. ह्यावरून आपण वेग गुणोत्तर शोधू शकू.  $\text{Velocity Ratio} = y/x$
4. सरासरी वेग गुणोत्तर शोधण्याकरिता वरीलप्रमाणे चार ते पाच वेगवेगळी किंमत असलेल्या भाराकरिता लागणारे परिश्रम बल मोजा आणि निरीक्षण तक्त्यामध्ये ह्याची नोंद करा.
5. आता व्हीलचा व्यास / हँडलची लांबी ( $L$ ), भार उचलायच्या ड्रमची त्रिज्या ( $r$ ), मुख्य गिअरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील) ( $T_1$ ) आणि पिनियन वरील दातांची संख्या ( $T_2$ ) शोधा. ह्यावरून सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर  $VR = (L/r) \times (T_1/T_2)$  शोधता येईल.
6.  $X$  अक्षावर उचललेले भार  $W$  आणि  $Y$  अक्षावर वापरलेले परिश्रम बल  $P$  ह्याचा योग्य प्रमाणाचा वापर करून आलेख तयार करा आणि सदरच्या यंत्राचा घर्षण गुणांक  $m$  आणि स्थिरांक  $C$  शोधा.
7. कोणत्याही दोन निरीक्षणांची किंमत वापरून आणि  $P = mW + C$  हे समीकरण वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  शोधा.
8. स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  च्या विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या किमतींची तुलना करा.

### 5.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

1. व्हीलचा व्यास / हँडलची लांबी  $= L = \dots\dots \text{mm}$ ,
2. भार उचलायच्या ड्रमची त्रिज्या  $= r = \dots\dots \text{mm}$

3. मुख्य गिरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील) =  $T_1 = \dots$
4. पिनियन वरील दातांची संख्या =  $T_2 = \dots$

अ. क्र.	भार W (N)	परिश्रम बल P (N)	यांत्रिकी फायदा MA = W/P	विस्थापित अंतर		प्रात्यक्षिका प्रमाणे VR = Y/X	यंत्राची कार्यक्षमता MA/VR	विश्लेषणात्मक पद्धतीने		आलेखीय पद्धतीने	
				Effort Y (mm)	Load X (mm)			m	C (N)	m	C (N)
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											

#### नमुना गणना

- (I) यांत्रिकी फायदा,  $MA = \frac{W}{P}$
- (II) वेग गुणोत्तर,  $VR = \frac{Y}{X}$
- (III) यंत्राची कार्यक्षमता,  $Efficiency = \frac{MA}{VR}$
- (IV) यंत्राचा नियम: (विश्लेषणात्मक पद्धतीने)  $P = mW + C$
- (V) यंत्राचा नियम: (आलेखीय पद्धतीने)  $P = mW + C$
- (VI) यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर:  $VR = \left(\frac{L}{r}\right) \times \left(\frac{T_1}{T_2}\right)$

#### 5.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

#### 5.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

#### 5.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

- साधे उचलण्याचे आदर्श यंत्र ह्याची व्याख्या स्पष्ट करा.
- जर घर्षणामुळे लागणारे जास्त परिश्रम बल कमी करता आले तर यंत्राच्या कार्यक्षमतेवर काय परिणाम होईल?

### 5.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

### 5.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

### 5.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

## प्रात्यक्षिक 6: डबल परचेस क्रेब विंच

### 6.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

डबल परचेस क्रेब विंच ह्या यंत्राचा नियम शोधणे.

### 6.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्व

दिलेल्या डबल परचेस क्रेब विंच ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे आणि प्रस्थापित करणे.

### 6.3 संबंधित पाठ

[पाठ 5 (इ) ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 6.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: यांत्रिकी फायदा (MA), वेग गुणोत्तर (VR), आणि यंत्राची कार्यक्षमता समजून घेणे.

PrO2: ह्या यंत्राचा नियम समजून घेणे,  $P = mW + C$

PrO3: विश्लेषणात्मक परिणाम आणि आलेखीय परिणाम ह्याचा अर्थ समजून घेणे.

#### 6.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

[पाठ 5 (इ) मधील आकृती 5.6 ह्याचा संदर्भ घ्या]

#### 6.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	डबल परचेस क्रॅब विंचचे उपकरण	1		
2.	वजनाचे संच जसे 1kg, 2kg, 3kg	2		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच जसे 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	बाह्य लघुमापक सरकपट्टी (व्हर्निअर क्वालीपायर)	1		
5.	स्टीलची फुटपट्टी, लाकडाची मीटरपट्टी	1		
6.	नायलॉनची दोरी	2		

#### 6.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

1. कोणताही धक्का किंवा हिसका न लागू देता वजन हळुवारपणे पॅनमध्ये ठेवावे.
2. उचललेले भार आणि वापरलेले परिश्रम बल ह्यांचे अंतर काळजीपूर्वक मोजा.
3. आलेखासाठी योग्य त्या प्रमाणाचा वापर करा.

#### 6.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

1. प्रथम दिलेल्या डबल परचेस क्रॅब विंच ह्या यंत्राची कार्यप्रणाली समजून घ्या.
2. लोड ड्रमवर एकानंतर एक असे वेगवेगळे भार  $W$  ठेवून प्रत्येक भार  $W$  वर उचलण्यासाठी व्हील/ हँडलवर कमीत कमी किती परिश्रम बल  $P$  आवश्यक आहे ते शोधा. त्याचबरोबर भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  मोजा.
3. ह्यावरून आपण वेग गुणोत्तर शोधू शकू.  $\text{Velocity Ratio} = y/x$
4. सरासरी वेग गुणोत्तर शोधण्याकरिता वरीलप्रमाणे चार ते पाच वेगवेगळी किंमत असलेल्या भाराकरिता लागणारे परिश्रम बल मोजा आणि निरीक्षण तक्त्यामध्ये ह्याची नोंद करा.
5. आता व्हीलचा व्यास / हँडलची लांबी ( $L$ ), भार उचलायच्या ड्रमची त्रिज्या ( $r$ ), मुख्य गिअरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील) ( $T_1$  आणि  $T_3$ ) आणि पिनिन वरील दातांची संख्या ( $T_2$  आणि  $T_4$ ) शोधा. ह्यावरून सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर  $VR = (L/r) \times (T_1 \times T_3 / T_2 \times T_4)$  शोधता येईल.



6. X अक्षावर उचललेले भार W आणि Y अक्षावर वापरलेले परिश्रम बल P ह्याचा योग्य प्रमाणाचा वापर करून आलेख तयार करा आणि सदरच्या यंत्राचा घर्षण गुणांक m आणि स्थिरांक C शोधा.
7. कोणत्याही दोन निरीक्षणांची किंमत वापरून आणि  $P = mW + C$  हे समीकरण वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने स्थिरांक m आणि C शोधा.
8. स्थिरांक m आणि C च्या विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या किंमतींची तुलना करा.

#### 6.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

1. व्हीलचा व्यास / हँडलची लांबी =  $L = \dots\dots$  mm,
2. भार उचलायच्या ड्रमची त्रिज्या =  $r = \dots\dots$  mm
3. मुख्य गिअरच्या दातांची संख्या (स्पर व्हील) =  $T_1 = \dots\dots$  आणि  $T_3 = \dots\dots$
4. पिनियन वरील दातांची संख्या =  $T_2 = \dots\dots$  आणि  $T_4 = \dots\dots$

अ. क्र.	भार W (N)	परिश्रम बल P (N)	यांत्रिकी फायदा MA = W/P	विस्थापित अंतर		प्रात्यक्षिका प्रमाणे VR = Y/X	यंत्राची कार्यक्षमता MA/VR	विश्लेषणात्मक पद्धतीने		आलेखीय पद्धतीने	
				Effort Y (mm)	Load X (mm)			m	C (N)	m	C (N)
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											

#### नमुना गणना

- (I) यांत्रिकी फायदा,  $MA = \frac{W}{P}$
- (II) वेग गुणोत्तर,  $VR = \frac{Y}{X}$
- (III) यंत्राची कार्यक्षमता,  $Efficiency = \frac{MA}{VR}$
- (IV) यंत्राचा नियम: (विश्लेषणात्मक पद्धतीने)  $P = mW + C$
- (V) यंत्राचा नियम: (आलेखीय पद्धतीने)  $P = mW + C$
- (VI) यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर:  $VR = \left( \frac{L}{r} \right) \times \left( \frac{T_1 \times T_3}{T_2 \times T_4} \right)$

#### 6.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

## 6.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

## 6.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. डबल परचेस क्रॅब विंचचे सिंगल परचेस क्रॅब विंचच्या विचार करून काय फायदे आहेत ते स्पष्ट करा.
2. मुख्य गिअरच्या (स्पर व्हील) दातांची संख्या पिनिन वरील दातांच्या संख्येपेक्षा जास्त का असते?
3. डबल परचेस क्रॅब विंचचे वेग गुणोत्तर कशा पद्धतीने वाढविता येऊ शकते?

## 6.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

## 6.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

## 6.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्याचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

## प्रात्यक्षिक 7: वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक

### 7.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक ह्या यंत्राचा नियम शोधणे.

### 7.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्व

दिलेल्या वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे आणि प्रस्थापित करणे.

### 7.3 संबंधित पाठ

[पाठ 5 (फ) ह्याचा संदर्भ घ्या]

### 7.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO): हे प्रात्यक्षिक पूर्ण झाल्यानंतर आपण खालील गोष्टी समजून घ्याल:

PrO1: यांत्रिकी फायदा (MA), वेग गुणोत्तर (VR), आणि यंत्राची कार्यक्षमता समजून घेणे.

PrO2: ह्या यंत्राचा नियम समजून घेणे,  $P = mW + C$

PrO3: विश्लेषणात्मक परिणाम आणि आलेखीय परिणाम ह्याचा अर्थ समजून घेणे.

### 7.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

[पाठ 5 (फ) मधील आकृती 5.8 ह्याचा संदर्भ घ्या]

### 7.6 आवश्यक संसाधने

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा
1.	वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉकचे उपकरण	1		
2.	वजनाचे संच जसे 1kg, 2kg, 3kg	2		
3.	खाच असलेले वजनाचे संच जसे 1g, 2g, 5g, 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 500g	4 ते 6		
4.	बाह्य लघुमापक सरकपट्टी (व्हर्निअर क्वालीपायर)	1		
5.	स्टीलची फुटपट्टी, लाकडाची मीटरपट्टी	1		
6.	नायलॉनची दोरी	2		

### 7.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

- कोणताही धक्का किंवा हिंसका न लागू देता वजन हळुवारपणे पॅनमध्ये ठेवावे.
- उचललेले भार आणि वापरलेले परिश्रम बल ह्यांचे अंतर काळजीपूर्वक मोजा.
- आलेखासाठी योग्य त्या प्रमाणाचा वापर करा.

### 7.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

- प्रथम दिलेल्या वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक ह्या यंत्राची कार्यप्रणाली समजून घ्या.

- लोड ड्रमवर एकानंतर एक असे वेगवेगळे भार  $W$  ठेवून प्रत्येक भार  $W$  वर उचलण्यासाठी व्हील/ हँडलवर कमीत कमी किती परिश्रम बल  $P$  आवश्यक आहे ते शोधा. त्याचबरोबर भार  $W$  चे विस्थापित अंतर  $x$  आणि परिश्रम बल  $P$  चे विस्थापित अंतर  $y$  मोजा.
- ह्यावरून आपण वेग गुणोत्तर शोधू शकू. Velocity Ratio =  $y/x$
- सरासरी वेग गुणोत्तर शोधण्याकरिता वरीलप्रमाणे चार ते पाच वेगवेगळी किंमत असलेल्या भाराकरिता लागणारे परिश्रम बल मोजा आणि निरीक्षण तक्त्यामध्ये ह्याची नोंद करा.
- आता मोठ्या पुलीचा व्यास  $D$  आणि लहान पुलीचा व्यास  $d$  शोधा. ह्यावरून सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर  $VR = 2D / (D - d)$  शोधता येईल.
- $X$  अक्षावर उचललेले भार  $W$  आणि  $Y$  अक्षावर वापरलेले परिश्रम बल  $P$  ह्याचा योग्य प्रमाणाचा वापर करून आलेख तयार करा आणि सदरच्या यंत्राचा घर्षण गुणांक  $m$  आणि स्थिरांक  $C$  शोधा.
- कोणत्याही दोन निरीक्षणांची किंमत वापरून आणि  $P = mW + C$  हे समीकरण वापरून विश्लेषणात्मक पद्धतीने स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  शोधा.
- स्थिरांक  $m$  आणि  $C$  च्या विश्लेषणात्मक आणि आलेखीय पद्धतीने मिळालेल्या किंमतींची तुलना करा.

### 7.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

- मोठ्या पुलीचा व्यास =  $D = \dots\dots$  mm,
- लहान पुलीचा व्यास =  $d = \dots\dots$  mm

अ. क्र.	भार $W$ (N)	परिश्रम बल $P$ (N)	यांत्रिकी फायदा $MA = W/P$	विस्थापित अंतर		प्रात्यक्षिका प्रमाणे $VR = Y/X$	यंत्राची कार्यक्षमता $MA/VR$	विश्लेषणात्मक पद्धतीने		आलेखीय पद्धतीने	
				Effort $Y$ (mm)	Load $X$ (mm)			$m$	$C$ (N)	$m$	$C$ (N)
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											

#### नमुना गणना

(I) यांत्रिकी फायदा,  $MA = \frac{W}{P}$

(II) वेग गुणोत्तर,  $VR = \frac{Y}{X}$

(III) यंत्राची कार्यक्षमता, Efficiency =  $\frac{MA}{VR}$

(IV) यंत्राचा नियम: (विश्लेषणात्मक पद्धतीने)  $P = mW + C$

(V) यंत्राचा नियम: (आलेखीय पद्धतीने)  $P = mW + C$

(VI) यंत्राचे सैद्धांतिक वेग गुणोत्तर:  $VR = \frac{2D}{D-d}$

#### 7.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ

.....

.....

#### 7.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता

.....

.....

#### 7.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न

1. व्युत्कर्मी यंत्र आणि अव्युत्कर्मी यंत्र ह्यातील फरक स्पष्ट करा.
2. वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक आणि भिन्न अक्षदंड व चाक ह्या दोन यंत्रामध्ये तुलना करा.

#### 7.13 कचऱ्याची विल्हेवाट

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ - कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

#### 7.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

#### 7.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्यांचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		

### अधिक माहिती घ्या

1. सिंगल परचेस क्रॅब विंचचा वापर करून त्याला डबल परचेस क्रॅब विंचमध्ये सुधारित करा.
2. वजन उचलण्याच्या साध्या यंत्राचे परिश्रम भारावर वेग गुणोत्तराचा काय परिणाम होतो.
3. यंत्रामध्ये वर उचलण्याच्या वजनावरील भार जास्ती झाल्यास यांत्रिकी फायद्यामध्ये कसा बदल होतो?

### संदर्भ आणि सुचवलेले वाचन

1. D.S.Bedi, "Engineering Mechanics"; Khanna publications, New Delhi.
2. Khurmi RS, "Applied Mechanics"; S. Chand & Co, New Delhi.
3. Ramamrutham, "Engineering Mechanics"; S. Chand & Co, New Delhi.
4. Bansal RK, "A text book of Engineering Mechanics"; Laxmi publications, New Delhi.
5. Dhade, Jamadar & Walawelkar, "Fundamentals of Applied Mechanics"; Pune Vidhyarthi Gruh, Pune
6. Meriam JL, Kraige LG, "Engineering Mechanics- statics –Vol.-I"; Wiley publication, New Delhi.
7. Beer, Johnson, Mazurek, Cornwell & Sanghi, "Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics"; Tata McGraw Hill, New Delhi.

## परिशिष्ट – अ: प्रात्यक्षिकांसाठी सूचक नमुना

### 1.1 प्रात्यक्षिकाचा उद्देश्य

प्रात्यक्षिकाचे विधान अभ्यासक्रमानुसार लिहिले पाहिजे.

### 1.2 प्रात्यक्षिकाचे महत्त्व

प्रात्यक्षिकेचे महत्त्व येथे लिहिले पाहिजे.

### 1.3 संबंधित पाठ

संबंधित प्रात्यक्षिकेवर आधारित सिद्धांत लिहिलेला असावा किंवा या पुस्तकाच्या संबंधित पाठाचा संदर्भ घेतला जावा.

### 1.4 प्रात्यक्षिकाचा परिणाम (PrO):

अभ्यासक्रमावर आधारित प्रात्यक्षिकाचा परिणाम विद्यार्थ्यांनी समजून घेण्याकरिता, येथे नमूद केले पाहिजे.

### 1.5 प्रात्यक्षिकाच्या उपकरणांची रचना

संबंधित प्रात्यक्षिकांचे उपकरण/ यंत्र इत्यादी रेखांकनाच्या मदतीने स्पष्ट केले पाहिजे/ प्रत्यक्ष उपकरण/ यंत्र यांचे वर्णन येथे केले पाहिजे.

### 1.6 आवश्यक संसाधने

संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे जी प्रात्यक्षिकासाठी वापरली जाणारी आणि आवश्यक असणारी आणि ती येथे दिलेल्या तक्त्यानुसार लिहिली जावीत.

अ. क्र.	महत्वपूर्ण तपशिलांसह सुचवलेली आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	संख्या	विस्तृत तपशिलांसह वास्तविक आवश्यक संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे	शेरा

### 1.7 प्रात्यक्षिक करताना घ्यायची खबरदारी

प्रयोगशाळा/ प्रात्यक्षिकेशी संबंधित सामान्य आणि विशिष्ट खबरदारी इथे लिहिली पाहिजे आणि त्याचे पालन केले पाहिजे.

### 1.8 सुचवलेली कार्यपद्धत

येथे टप्प्यानुसार प्रात्यक्षिकेची कार्यपद्धती स्पष्ट करा.

### 1.9 निरीक्षण तक्ता आणि गणना

अचूक अनुमान काढण्यासाठी निरीक्षणे नीट लक्षात घ्या. आपण खाली दिलेल्या सारख्या सारणीचा वापर करू शकता

अ. क्र.	निरीक्षण	अनुमान
1.		
2.		
3.		

**1.10 परिणाम आणि/ किंवा लावलेला अर्थ**

प्रत्येक प्रात्यक्षिकामध्ये मिळालेले परिणाम आणि त्याचे अर्थ तुम्हाला येथे लिहायचे आहेत.

**1.11 निष्कर्ष आणि/ किंवा वैधता**

प्रात्यक्षिकावरून काढलेले निष्कर्ष/ वैधता तुम्हाला येथे लिहायचे आहेत.

**1.12 प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्न**

इथे तुम्हाला प्रात्यक्षिकासंबंधी प्रश्नांची उत्तरे वेगळ्या कागदावर लिहायची आहेत.

**1.13 कचऱ्याची विल्हेवाट**

ह्या प्रात्यक्षिकामुळे झालेला कचरा फेकून देण्यासाठी त्याचे पुढील डब्यांमध्ये वर्गीकरण करा:

कचऱ्याचा प्रकार		तपशील
जैविक कचरा	हिरवा डब्बा	
इ – कचरा	काळा डब्बा	
प्लास्टिक आणि धातूचा कचरा	निळा डब्बा	
इतर		

**1.14 पर्यावरणपूरक दृष्टीकोन: पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय**

प्रात्यक्षिकामध्ये वापरलेले कोणते साहित्य हे पुनर्वापर, कमी वापर आणि पुनर्प्रकीय केले जाऊ शकतात ते लिहा.

**1.15 सुचवलेली मुल्यांकन पद्धत**

प्रात्यक्षिकाचे मुल्यांकन हे अविरत केले गेले पाहिजे. खाली दिलेली कामगिरी निर्देशके ही प्रक्रिया आणि उत्पादनाच्या मूल्यांकनासाठी मार्गदर्शक तत्त्वे म्हणून वापरली गेली पाहिजेत.

विद्यार्थ्याचे नाव: प्रक्रिया मुल्यांकन (70 %)					हजेरी क्रमांक: उत्पादन मुल्यांकन (30%)		
पूर्वतयारी	अचूकता	स्वच्छता	हाताळणी	काळजी	लावलेला अर्थ	अहवाल	तोंडी परीक्षा
/ 30	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10
प्राध्यापकाची स्वाक्षरी: तारीख:					एकूण गुण मिळालेले गुण: /100		



## परिशिष्ट – ब: प्रात्यक्षिके/ प्रकल्प/ समूहातील क्रियांसाठी सूचक मूल्यमापन मार्गदर्शक तत्त्वे

### प्रक्रिया संबंधित कौशल्ये

निकष आणि स्तर	विकसितता	सक्षमता	कुशलता
संसाधने/ यंत्रे/ साधने/ उपकरणे हाताळणे			
माहितीची नोंद ठेवणे			
वेळेचे व्यवस्थापन			
संधामध्ये काम करण्याची पद्धत			
वैयक्तिक काम करण्याची पद्धत			
सुरक्षाबद्दल खबरदारी			

### उत्पादन संबंधित कौशल्ये

निकष आणि स्तर	विकसितता	सक्षमता	कुशलता
सामग्री			
संशोधन/ सर्वेक्षण			
नवीनतम तंत्रज्ञानाचा वापर			
विषयावर आधारित चर्चा			
तयारी			
सादरीकरणाचा आत्मविश्वास			
पीपीटी बनवण्याच्या कौशल्यासह आयसीटी वापर			
वेळेचे व्यवस्थापन			
गट प्रयत्न			
वैयक्तिक प्रयत्न			

## परिशिष्ट – क: प्रात्यक्षिकेच्या नोंदी

अ. क्र.	पृष्ठ क्र.	प्रात्यक्षिकाचे नाव	दिनांक			गुण	सही
			वास्तविक	पुनरावृत्ती	नोंद		
1.		यंत्र अभियांत्रिकी प्रयोगशाळेतील वेगवेगळ्या उपकरणांचा अभ्यास करणे.					
2.		भिन्न अक्षदंड आणि चाक ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे.					
3.		साधा स्कू जॅक ह्या यंत्राचा यांत्रिकी फायदा, वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि यंत्राचा नियम शोधणे.					
4.		मळसूत्र आणि मळसूत्र चाक (वर्म आणि वर्म व्हील) यंत्राचा नियम शोधणे.					
5.		सिंगल परचेस क्रॅब विंच ह्या यंत्राचा नियम शोधणे.					
6.		डबल परचेस क्रॅब विंच ह्या यंत्राचा नियम शोधणे.					
7.		वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक ह्या यंत्राचा नियम शोधणे.					
8.		फोर्से टेबलचा वापर करून समवर्ती बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे, बलाच्या विश्लेषणात्मक पद्धतीने परिणामी बल शोधणे.					
9.		बलाच्या बहुभूजेचा कायदा वापरून समवर्ती बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे, बलाच्या आलेखीय पद्धतीने परिणामी बल शोधणे.					
10.		समांतर बल प्रणालीमधील कार्यरत बलांचे विश्लेषणात्मक पद्धतीने आणि आलेखीय पद्धतीने परिणामी बल शोधणे.					
11.		लॅमीच्या प्रमेयाची पडताळणी करून घेणे.					
12.		जीब क्रेनच्या विविध सदस्यांमधील बलांचा अभ्यास करा.					
13.		सरळ आधारित तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया शोधणे.					
14.		सरळ आधारित तुळईच्या संतुलित प्रतिक्रिया आलेखीय पद्धतीने शोधणे.					
15.		क्षैतिज पृष्ठभाग आणि कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील घर्षण गुणांक शोधणे.					
16.		ओळंब्याच्या रेषातील पद्धतीचा वापर करून द्विमीतीय साध्या आकृत्यांचे प्रकेंद्र शोधणे.					

---

## अनुपलः प्रयोगशालेत काम करताना/ प्रात्यक्षिक करताना ध्यायची सामान्य आणि विशेष खबरदारी

---

### सामान्य सूचना

1. प्रयोगशालेत शांतपणे आणि सावधगिरीने काम करा. लक्षात ठेवा कोणतेही प्रात्यक्षिक करण्याचा मुख्य हेतू अचूक निरीक्षण करणे आहे.
2. नेहमी आपल्या जोडीदारासह कामाच्या सर्व पायऱ्या समानपणे सर्वांच्यासोबत सामायिक करा.
3. तक्त्याच्या स्वरूपात माहितीचे सादरीकरण, आलेख आणि गणना योग्य आणि प्रामाणिकपणे केली पाहिजे.
4. प्रात्यक्षिकाच्या माहितीच्या नोंदी करताना आणि प्रात्यक्षिकाच्या माहितीचे प्रतिनिधित्व करताना नेहमी प्रामाणिक रहा.
5. हे लक्षात ठेवणे अत्यंत आवश्यक आहे की सिद्धांताप्रमाणे आलेख अधिक चांगले होण्यासाठी कधीही नोंदी आणि / किंवा माहिती तयार करू नका. जर कोणतीही नोंद/ माहिती चुकीची दिसत असेल, तर आपल्याला त्रुटीचे स्रोत शोधण्यासाठी पुन्हा पुन्हा प्रात्यक्षिकामध्ये मापन करावे लागेल.
6. आलेख काढण्याच्या वेळी प्रात्याक्षिकेमधील नोंदींमधून मिळवलेली सर्व माहिती त्रुटींशिवाय व्यवस्थित आलेख काढा.
7. हे खरे आहे की प्रयोगशालेचा उद्देश शिकणे आहे आणि आपण गोळा केलेल्या ज्ञानाची पडताळणी देखील आहे. यंत्र अभियांत्रिकीच्या सर्व महत्त्वाच्या क्षेत्रांमध्ये वेगवेगळ्या घटना स्पष्ट करण्याच्या हेतूने प्रात्यक्षिक योग्यरित्या तयार केले गेले आहेत.
8. आपल्या स्वतःच्या हितासह प्रात्याक्षिके आपण स्वतः केल्याने सर्व बारीकसारीक बाबींशी परिचित होणे आणि मोजण्याचे साधन तुम्हाला उघड करणे शक्य आहे.
9. नेहमी शिकण्याच्या वृत्तीने आणि तुम्ही जमवलेल्या सैद्धांतिक ज्ञानाची पडताळणी करण्याच्या वृत्तीने नेहमी प्रात्यक्षिक आवडीने करा.
10. प्रयोगशालेत वेळेवर येण्यासाठी आणि प्रात्यक्षिकाविषयी स्पष्ट ज्ञानासह नेहमी योग्य तयारीसह अत्यंत विशिष्ट रहा.

### विशिष्ट सूचना

1. आपण करीत असलेल्या प्रात्यक्षिकांचा माहिती गोळा करण्यासाठी प्रयोगशालेत काम करत असताना, सर्व निरीक्षणे वहीमध्ये नीटपणे लिहून घेणे आवश्यक आहे.
2. वहीमध्ये नोंदवलेली प्रात्यक्षिकासंबंधी माहिती आपल्या प्रशिक्षकाद्वारे/ प्राध्यापकाद्वारे प्रयोगशालेतून बाहेर पडण्यापूर्वी पुष्टी करणे आवश्यक आहे.
3. समान प्रात्यक्षिक एकत्रपणे करणाऱ्या सर्व विद्यार्थ्यांना लिहिलेल्या सर्व माहितीची वैयक्तिक प्रत ठेवावी. जेव्हा आपण प्रात्यक्षिक करण्यासाठी येतो तेव्हा प्रयोगशालेची वही प्रयोगशालेत आणणे अनिवार्य असेल.
4. आलेख विशिष्ट प्रात्याक्षिकेच्या शेवटी आलेख योग्यरित्या काढावेत. यासाठी आपल्याला आलेख कागदाच्या वापरावर अनुकूलन कसे करावे हे माहिती असणे आवश्यक आहे. लक्षात ठेवा की सर्व पुनरावृत्ती असलेली माहिती एकाच आलेख कागदावर सामावून घ्यावी.
5. संबंधित एकाके दर्शविणाऱ्या अक्षांसह आलेख योग्यरित्या खुणा करणे आवश्यक आहे. सर्व निरीक्षणे सामावून घेण्यासाठी मापणी योग्यरित्या निवडा.
6. प्रयोगशालेत कामकाजाच्या तासांमध्ये, तुम्ही कालावधीचा पूर्ण वापर करावा आणि कामाचे तास पूर्ण होण्यापूर्वी प्रयोगशाला सोडू नका. जर तुमचे प्रात्यक्षिक आधी पूर्ण झाले असेल तर, तर तुम्ही उरलेला वेळ गणना आणि आलेख रेखाटण्यासाठी पूर्ण करू शकता आणि त्यासाठी प्रयोगशालेत येताना तुम्ही वैज्ञानिक कॅल्क्युलेटर, पेन्सिल, आलेख कागद आणि स्केलसह सुसज्जरित्या यावे.

---

## पुढील शिक्षणासाठी संदर्भ

---

1. D. S. Bedi, Engineering Mechanics; Khanna publications, New Delhi.
2. Khurmi RS, Applied Mechanics; S. Chand & Co; New Delhi.
3. Ramamrutham, Engineering Mechanics; S. Chand & Co; New Delhi.
4. Bansal RK, A text book of Engineering Mechanics; Laxmi publications
5. Dhade, Jamadar & Walawelkar; Fundamentals of Applied Mechanics; Pune Vidhyarthi Gruh.
6. Meriam J. L., Kraige L. G.; Engineering Mechanics - Statics –Vol.-I; Wiley publication, New Delhi.
7. Beer, Johnson, Mazurek, Cornwell & Sanghi, Vector Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics; Tata McGraw Hill, New Delhi.
8. <https://nptel.ac.in/courses/112/106/112106286/>
9. <https://nptel.ac.in/courses/122/104/122104015/>
10. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLC3A601B6060658D3>
11. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLB85BDFBE784BFEB6>
12. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLqTAOqgbdGVBPkVSuRKM64Fx1mIvSgdw7>
13. <https://nitsri.ac.in/Department/DisplayDeptPage.aspx?page=eacka&nDeptID=c>

## CO आणि PO अटेन्मेंट टेबल

या कोर्ससाठी कोर्सचे परिणाम (CO) कोर्स पूर्ण झाल्यानंतर प्रोग्रामच्या परिणामांसह (PO) मॅप केले जाऊ शकतात आणि अंतरांचे विश्लेषण करण्यासाठी PO च्या प्राप्तीसाठी परस्परसंबंध तयार केला जाऊ शकतो. PO च्या प्राप्तीमधील अंतरांचे योग्य विश्लेषण केल्यानंतर अंतर दूर करण्यासाठी आवश्यक उपाययोजना केल्या जाऊ शकतात.

### CO आणि PO प्राप्तीसाठी टेबल

कोर्स आउटकॉम्स	कार्यक्रमाच्या परिणामांसह अपेक्षित मॅपिंग (1- कमकुवत सहसंबंध; 2- मध्यम सहसंबंध; 3- मजबूत सहसंबंध)						
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7
CO-1							
CO-2							
CO-3							
CO-4							
CO-5							

वरील टेबलमध्ये भरलेला डेटा अंतर विश्लेषणासाठी वापरला जाऊ शकतो.

## शब्दसूची

<b>अ</b>		काटकोनामधील (ऑर्थोगोनल) घटक Orthogonal components	30
अंतराळ आकृती Space diagram (two different page)	44, 52, 53, 66, 74, 77	काटकोनामधील नसलेले (नॉनऑर्थोगोनल) घटक Nonorthogonal components	10
अंतरिक्ष Space	03	कार्यक्षमता Efficiency	139, 142, 143, 145
अदिश राशि Scalar Quantity	4	<b>ग</b>	
अनेकाधार किंवा सलग तुळई Overhanging beam	61, 63, 77	गतीज घर्षण Kinetic	94, 105,
अव्युत्क्रमी Non-reversible	144, 159	गतिक घर्षण Dynamic	93, 105
असमतल बल प्रणाली Non coplanar	6, 7	गिअर पुली ब्लॉक Geared pulley block	154, 155
असमवर्ती Non-Concurrent	6, 22, 29, 49	गुणांक Coefficient	89, 92, 100
असमवर्ती, असमांतरित Non-concurrent and nonparallel	49	गुरुत्व केंद्र Center of gravity	116, 132
आदर्श Ideal	142, 143, 144, 159	<b>घ</b>	
<b>आ</b>		घर्षण Friction	89, 91, 143, 159
आघूर्णाचे प्रकार Types of moment	21, 22	घर्षण बल Friction load	89, 90
आघूर्ण Moment	21	घर्षणाचा कोन Angle of Friction	91, 93
आडव्या (क्षैतिज) प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील आधाराचे प्रकार Types of supports	77	घर्षणाचे प्रकार Types of Friction	93, 105
आलेखीय पद्धतिप्रमाणे संतुलित अभिक्रिया Graphical method	11, 48	घर्षणामुळे जास्त लागलेले परिश्रम Effort lost in friction	143
<b>उ</b>		<b>ज</b>	
उलट कार्य करण्यायोग्य असलेल्या यंत्राची अट Condition for reversibility	144	जास्तीत जास्त कार्यक्षमता Maximum efficiency	143
उचलण्याची Lifting	141	जास्तीत जास्त यांत्रिक फायदा Maximum mechanical advantage	143
उचलण्याची साधी यंत्रे Simple lifting	141	<b>ट</b>	
<b>ए</b>		टेकू दिलेला प्रबाहु Propped cantilever beam	62
एक रेषीय Collinear	6, 29	<b>ठ</b>	
एस आय एकेके SI units	4	ठरावाची पद्धत Method of Resolution	12, 16, 30
<b>क</b>		<b>ड</b>	
कठोर वस्तु Rigid body	3, 5, 50	डबल परचेस क्रॅब विंच Double purchase crab winch	152, 175

त		बलाच्या वेगवेगळ्या प्रणाली Force system	6
तुळई Beam	48, 59, 60	बो यांचे संकेतन Bow's notation	73
न		भ	
नियम Laws	1, 9, 94	भिन्न अक्षदंड आणि चाक Differential axle and wheel	150
प		म	
परिश्रम Effort	141, 143	मळसूत आणि मळसूत चाक Worm and worm wheel	151
प्रकेंद्र Centroid	116	मानक आकार Standard shapes	118
प्रक्षेपित तुळई Overhanging Beam	61	मुक्त संरचना Free body	91, 149
प्रबाहु तुळई Cantilever Beam	60	मूलभूत राशि Fundamental units	4
फ		मोमेंटचे तत्व Principle of moments	22
फनिक्युलर पॉलीगॉन Funicular Polygon	73	य	
ब		यंत्र Machine	1, 2, 3, 139
बद्ध तुळई Fixed beam	63	यंत्र अभियांत्रिकी Applied mechanics	140
बल Force	3, 5	यंत्राचा नियम Law of machine	142
बलयुग्म Couple	57, 58, 59	यांत्रिक फायदा Mechanical advantage	139, 141
बलांचा समतोल कायदा Equilibrium law of force	1, 8,	ल	
बलांचे एकत्रीकरण Composition of force	11, 30	लवचिक वस्तु Flexible body	3
बलांचे परिणामी बल Resultant force	11, 12, 13	लॅमीचे प्रमेय Lami's theorem	52
बलांचे प्रकार Types of loading	77	लोठण घर्षण Sliding	93
बलाचा (फोर्सचा) ठराव Resolution of force	12, 30	व	
बलाचा प्रभाव Effect of force	1, 6	वर्गीकरण Classification	6, 29
बलाचा/ फोर्सचा समांतरवृत्तीचा कायदा Law of parallelogram of forces	12, 30	वस्तुमान Mass	3, 4
बलाची वैशिष्ट्ये Characteristics	5	वस्तूचे कललेल्या प्रतलाच्या पृष्ठभागावरील समतोल Equilibrium of body on Inclined plane	99
बलाचे (फोर्ससचे) हस्तांतरण करण्याचा सिद्धांत Principle of transmissibility of force	30	वेग गुणोत्तर Velocity ratio	140, 141
बलाचे आघूर्ण Moment of force	21	वेळ Time	3
बलाचे एकक Unit of force	5	वेस्टनचा डिफरेंशियल पुली ब्लॉक Weston's differential pulley block	154
बलाच्या (फोर्ससच्या) उच्चस्थानाचे सिद्धांत Principle of superposition of force	29	व्युत्क्रमी Reversible	144
बलाच्या (फोर्ससच्या) त्रिकोणाचा कायदा Law of triangle of force	31	व्युत्पन्न एकेके Derived units	4
		व्हॅरिगनचे तत्व Varignon's principle	22, 30

स		सममिती अक्ष Axis of Symmetry	117
मुक्त संरचना Free body	49	समवर्ती Concurrent	10
संतुलित अभिक्रिया Beam reactions	24	समवितरित भार Uniformly distributed load	58
संदर्भ घेण्यासाठी घेतलेले अक्ष Axis of Reference	117	समांतर Parallel	7
स्थैर्य कोन Angle of repose	92	समातोलक बल Equilibrant	49
संमिश्र आकृत्या Composite figures	121	सरक घर्षण Rolling	93
संयुक्त Compound	114	सरळ आधारित तुळई Simply supported beam	60
संयुक्त घन Composite solids	114	साधा स्कू जॅक Simple screw jack	153
संरचनेची मुक्त आकृती Free body diagram	49	साधे Simple	149
संकेंद्रीत भार किंवा बिंदू भार Point load	57	साधे अक्षदंड आणि चाक Simple axle & wheel	149
सदिश आकृती Vector Diagram	74	साधे घन Simple solids	149
सदिश राशि Vectors quantity	02	सिंगल परचेस क्रॅब विंच Single purchase	
समतल Coplanar	6	crab winch	151
समतोल Equilibrium	61, 62	सीमित घर्षण Limiting friction	190
समतोल असण्याच्या अटी Condition of equilibrium	49	स्थैतिक अनिर्धार्य तुळई Statically indeterminate	
समतोल वस्तू Equilibrium of body on		beam	62
Horizontal plane	94	स्थैतिक घर्षण Static	92
समभारीत परिवर्ती भार Uniformly varying load		स्थैतिक निर्धार्य तुळई Statically	
(UVL)	77	determinate beam	60
		स्वतः कार्य बंद करणारे Self-locking	144