



महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई
(स्वायत्त) (ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान पदविका

शिक्षण पुस्तिका
(Learning Material)

उपयोजित यांत्रिकी
APPLIED MECHANICS
(22203)

मराठी-इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम
(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील द्वितीय सत्र पदविका)

शिक्षण पुस्तिका
(Learning Material)

उपयोजित यांत्रिकी **APPLIED MECHANICS** (22203)

मराठी-इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम
(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील द्वितीय सत्र पदविका)



महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई
(स्वायत्त) (ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

मार्गदर्शक

हरीप संजय सुधाकर

अधिव्याख्याता, यंत्र अभियांत्रिकी

लेखक

गायधनी योगेश भास्कर

अधिव्याख्याता, यंत्र अभियांत्रिकी

काळे आशिष जानेश्वर

विभागप्रमुख, स्थापत्य अभियांत्रिकी

लांडे आशिष रविंद्र

अधिव्याख्याता, यंत्र अभियांत्रिकी

डेलें जयेश तुकाराम

अधिव्याख्याता, यंत्र अभियांत्रिकी



महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ

(स्वायत्त) (ISO ९००१:२०१५) (ISO/IEC २७००१:२०१३)

शासकीय तंत्रनिकेतन इमारत, ४ था मजला, ४९, खेरवाडी, वांद्रे (पूर्व), मुंबई - ४०० ०५१

दू.क्र.: ०२२-६२५४२१००/१०१/१०२



संकेतस्थळ : www.msbte.org.in

ई-मेल : director@msbte.com

प्रास्ताविक

महाराष्ट्र राज्यातील पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षणाशी संबंधित बाबींचे नियमन करण्यासाठी महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ वचनबद्ध असून विद्यार्थ्यांच्या सर्वांगीण विकासाकरिता वेळोवेळी प्रयत्नशील आहे. तंत्रज्ञान, उद्योग, समाज आणि जागतिकीकरण यामध्ये सतत घडून येणा-या बदलांच्या अनुषंगाने तांत्रिक शिक्षणाची भविष्यातील निकड वेधून पदविका स्तरावरील अभ्यासक्रम, परीक्षा पद्धती व शैक्षणिक सामुग्री ह्यांमध्ये अद्ययावत बदल करण्यात महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ अग्रगण्य आहे. विद्यार्थी हा शिक्षण क्षेत्राच्या केंद्रस्थानी असून त्यांची निकड व समस्या संवेदनशीलपणे हाताळल्यास भारत देशाचे 'ज्ञान महासत्ता' बनण्याचे स्वप्न पूर्णत्वास जाईल ह्याचा मला विश्वास आहे.

शहर आणि ग्रामीण भागातील शैक्षणिक सोयीसुविधांमधील दरी अनेक वेळा दिसून येत असून ग्रामीण भागातील विद्यार्थ्यांचे इंग्रजी भाषेतील ज्ञान व संवाद कौशल्याबाबतही ही वस्तुस्थिती प्रकर्षाने जाणवते. केवळ इंग्रजी भाषेतील संवाद कौशल्याअभावी ग्रामीण भागातील विद्यार्थी तंत्रशिक्षणापासून वंचित राहू नये, ह्या दृष्टिकोनातून महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळाने शैक्षणिक वर्ष २०२१-२२ पासून प्रथम वर्ष पदविका अभ्यासक्रमाकरिता तांत्रिक शिक्षण मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमात इच्छुक विद्यार्थ्यांना उपलब्ध करून दिले आहे. मात्र असे करताना कोणत्याही परिस्थितीत गुणवत्तेशी तडजोड केली जाऊ नये ह्या दृष्टीने प्रमुख विषयांसाठीच्या शैक्षणिक सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आली आहे.

राष्ट्रीय शिक्षण धोरण २०२० मध्ये प्रादेशिक भाषांमध्ये सर्वांना शिक्षणाची कल्पना मांडण्यात आली आहे. त्यास अनुसरून मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय द्वितीय व तृतीय वर्षाकरिताही उपलब्ध करून देण्यात आला आहे. तसेच त्याकरिता शैक्षणिक सामुग्रीही विद्यार्थी व अध्यापकांना उपलब्ध करून देण्यात येत आहे.

महाराष्ट्र राज्यातील अनुभवी अध्यापकांकरवी ही शैक्षणिक सामुग्री तयार करण्यात आली असून व्यावहारिक मराठी भाषा, इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावलीचा उपयोग आणि संदर्भ पुस्तके लक्षात घेऊन या सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आलेली आहे. सदर सामुग्रीची पुनर्तपासणी सुकाणू समितीमार्फत करण्यात आलेली असल्याने ही शैक्षणिक सामुग्री अधिक समृद्ध झालेली आहे. त्यामुळे विद्यार्थ्यांना तांत्रिक शिक्षण समजून घेणे अधिक सुकर होईल. तसेच व्यावहारिक मराठी भाषेच्या उपयोगाने विद्यार्थ्यांना विषयाचे सखोल आकलन होईल व इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावलीच्या वापरामुळे विद्यार्थ्यांचा उद्योग जगतातील वावर सुलभ होईल. त्यामुळे महाराष्ट्र राज्य तांत्रिक क्षेत्रातील वैश्विक मनुष्यबळाच्या निर्मितीत अग्रेसर राहील व त्यायोगे राष्ट्रनिर्मितीकरीता निश्चितच हातभार लागेल असा मला विश्वास आहे.

अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रमातील प्रमुख विषयांची मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक शैक्षणिक सामुग्री बनविण्यासाठी अध्यापक व सुकाणू समितीचे सदस्य हे कौतुकास पात्र असून मी त्यांचे अभिनंदन करतो.

(डॉ. विनोद म. मोहितकर)

संचालक,

महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई

अनुक्रमणिका

अ. क्र.	घटकाचे नाव (Name of Unit)	पान क्र.
1.	यांत्रिकी आणि बल प्रणाली (Mechanics and Force System)	1
2.	उचलण्याचे साधे यंत्र (Simple Lifting Machine)	15
3.	रिझोल्यूशन आणि रचना (Resolution and Composition)	60
4.	समतोल (Equilibrium)	87
5.	घर्षण (Friction)	120
6.	सेंट्रॉइड आणि गुरुत्वाकर्षण केंद्र (Centroid and Center of Gravity)	155

घटक-1 यांत्रिकी आणि बल प्रणाली (Mechanics and Force System)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome): यांत्रिकीच्या मूलभूत गोष्टींचा वापर करून दिलेल्या अटींसाठी बल प्रणाली (Force System) ओळखा.

घटक निष्पत्ती (Unit Outcome):

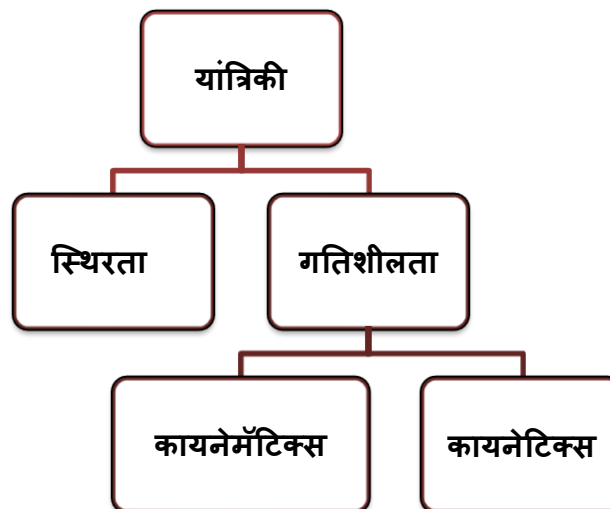
1. दिलेल्या अटींची(Terms) संकल्पना स्पष्ट करा.
2. दिलेल्या परिस्थितीत विविध परिमाणांची संबंधित एकके वापरा.
3. दिलेल्या वस्तूवर बलाचे परिणाम स्पष्ट करा.
4. दिलेल्या परिस्थितीसाठी बल प्रणाली ओळखा.

1.1. यांत्रिकीचा परिचय (Introduction to Mechanics):

इंजिनियरिंग मेकॅनिक्स हा विषय म्हणजे एप्लाइड सायन्सची शाखा आहे, जी यांत्रिकीच्या नियम आणि तत्त्वांबरोबरच त्यांच्या अभियांत्रिकी समस्यांशी संबंधित आहे. खरं तर, इंजिनियरिंग मेकॅनिक्सचे ज्ञान एखाद्या अभियंत्यासाठी प्लॅनिंग, डिझाईन आणि विविध प्रकारच्या मशीन आणि स्ट्रक्चरच्या कन्स्ट्रक्शनसाठी अत्यंत आवश्यक आहे.

उपयोजित यांत्रिकी (Applied Mechanics):

ही विज्ञानाची शाखा आहे जी सर्व प्रकारच्या मशीन आणि स्ट्रक्चर यांच्या कन्स्ट्रक्शनसाठी पदार्थ आणि गतीच्या नियमांच्या व्यावहारिक वापराचा अभ्यास करते.



आकृती 1.0: यांत्रिकीचे वर्गीकरण

यांत्रिकी दोन भागांमध्ये विभागली गेली आहे .

- स्थिरता
- गतिशीलता

स्थिरता (Statics):

ही इंजिनियरिंग मेकॅनिक्सची शाखा आहे, जी बल आणि त्यांचे परिणाम यांच्याशी संबंधित आहे जेव्हा ते एखाद्या **स्थिर वस्तूवर** कार्य (Act) करत असतील.

गतिशीलता (Dynamics):

ही इंजिनियरिंग मेकॅनिक्सची शाखा आहे, जी बल आणि त्यांचे परिणाम यांच्याशी संबंधित आहे जेव्हा ते एखाद्या **गतिशील वस्तूवर** कार्य (Act) करत असतील.

गतिशीलता पुढील दोन शाखांमध्ये विभागली जाऊ शकते:

- कायनेमॅटिक्स (Kinematics)
- कायनेटिक्स (Kinetics)

कायनेटिक्स (Kinetics):

ही गतिशीलतेची (डायनेमिक्सची) शाखा आहे, जी बलामुळे तयार झालेल्या गतिमान वस्तूशी संबंधित आहे.

कायनेमॅटिक्स (Kinematics):

ही गतिशीलतेची (डायनेमिक्सची) शाखा आहे, जी गतिशील वस्तूशी संबंधित आहे, ज्यामध्ये गतीसाठी जबाबदार असलेल्या बलाचा कोणताही संदर्भ घेतला जात नाही.

1.2 मूलभूत व्याख्या (Fundamental Definition):

स्पेस (Space):

जिओमेट्रीक रिजन (Geometric Region) ज्यामध्ये वस्तूचा अभ्यास केला जातो त्याला स्पेस म्हणतात.

वेळ (Time):

हे एक मूलभूत प्रमाण आहे. वेळ म्हणजे मोजलेला किंवा मोजण्यायोग्य कालावधी ज्या दरम्यान एखादी क्रिया, प्रक्रिया किंवा स्थिती अस्तित्वात असते किंवा चालू असते. आणि ते 't ' किंवा 'T' द्वारे दर्शविले जाते.

वस्तुमान (Mass):

बॉडी मधील पदार्थाच्या (Matter) प्रमाणास वस्तुमान असे म्हणतात. त्याचे एकक किलोग्राम (kg) किंवा ग्रॅम(gm) आहे.

कण (Particle):

कण हा अत्यंत लहान आकाराची वस्तू म्हणून परिभाषित केला जाऊ शकतो आणि तो एकाग्र बिंदू (Concentrated point) मानले जातो.

वस्तू (Body) :

निश्चित वस्तुमान असलेल्या आणि निश्चित जागा व्यापलेल्या वस्तूला बॉडी म्हणतात.

रिजिड बॉडी (Rigid Body):

रिजिड वस्तू ची व्याख्या अशी केली जाऊ शकते जी काही बाह्य बलाच्या अधीन असली तरीही त्याचे आकार आणि आकारमान (Shape and Size) टिकवून ठेवू शकते. प्रत्यक्ष व्यवहारात, कोणतीही वस्तू पूर्णपणे रिजिड नसते. पण साधेपणासाठी, आपण सर्व वस्तू रिजिड वस्तू म्हणून घेतो.

वजन (Weight):

एखाद्या वस्तूला पृथ्वी ज्या बलाने आपल्या केंद्राच्या दिशेने ओढते त्याला वस्तूचे वजन म्हणतात. वस्तूचे वस्तुमान 'm' (एम) आणि वजन 'W'(डब्ल्यू) मधील संबंध खालील समीकरणाद्वारे दिले जातात

$$W = m \times g$$

'g' चे मूल्य MKS प्रणालीमध्ये तसेच SI युनिटमध्ये 9.81 m/sec^2 . गणना कार्य (Calculation) सुलभ करण्यासाठी सहसा 9.80 m/sec^2 म्हणून घेतले जाते.

टेबल 1.1 : वस्तुमान (Mass) आणि वजन (Weight) यांच्यातील फरक:

अ. क्र.	वस्तुमान (Mass)	वजन (Weight)
1	हे वस्तू मध्ये असलेल्या पदार्थाचे प्रमाण आहे.	हे एक बल आहे ज्याद्वारे वस्तू पृथ्वीच्या केंद्राकडे आकर्षित होते.
2	हे सर्व ठिकाणी स्थिर आहे.	वेगवेगळ्या उंचीवर ते वेगळे आहे.
3	हे वस्तू मधील गती (motion) प्रतिकार निर्माण करते.	हे वस्तू मधील गती (motion) निर्माण करते.

4	हे स्केलर प्रमाण आहे कारण त्यात केवळ परिमाण (magnitude) आहे.	हे एक वेक्टर प्रमाण आहे कारण त्यात परिमाण (magnitude) आणि दिशा (direction) आहे.
5	ते कधीच शून्य नसते.	ते पृथ्वीच्या मध्यभागी शून्य आहे.
6	हे युनिट्सच्या MKS प्रणालीमध्ये तसेच SI युनिट्समध्ये किलोग्राम (kg) मध्ये मोजले जाते.	हे युनिट्सच्या(MKS)प्रणालीमध्ये किलोग्राम वजनामध्ये (kg wt. किंवा kgf) आणि SI युनिट्समध्ये न्यूटन (N) मध्ये मोजले जाते .
7	हे साध्या बॅलन्सद्वारे मोजले जाऊ शकते.	हे स्प्रिंग बॅलन्सद्वारे मोजले जाते.

1.3. अदिश आणि सदिश राशी (Scalar and Vector Quantity):

1.3.1 अदिश राशी (Scalar Quantity):

अदिश राशी हे असे आहे ज्यामध्ये केवळ परिमाण (Magnitude) आहे. उदाहरणे: वस्तुमान, परिमाण, वेळ आणि घनता.

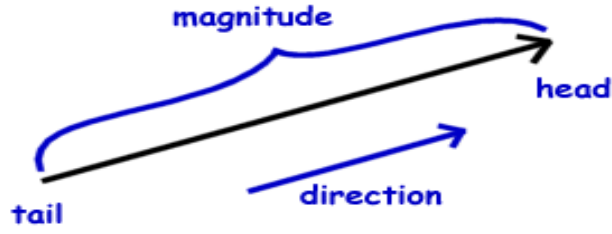


आकृती 1.1: अदिश राशी

1.3.2 सदिश राशी (Vector Quantity):

सदिश राशी (Vector Quantity) हे असे आहे ज्यात परिमाण (Magnitude) तसेच दिशा (direction) असते. उदाहरणे: बल, वेग, प्रवेग आणि क्षण इ.

सदिश राशी ही एक रेषा आणि त्याच्या टोकाला डोक्यावर बाण असे दर्शविले जाते. रेषेची लांबी (सोयीस्कर प्रमाणात) वेक्टरच्या विशालतेच्या बरोबरीची आहे. रेषा, त्याच्या बाणाच्या डोक्यासह, वेक्टरची दिशा निश्चित करते.



आकृती 1.2: सदिश राशी

1.3.2 मोजण्याचे एकक (Units of Measurement):

मोजण्याचे दोन एकक आहेत.

- मूलभूत (Fundamental) एकके/ बेसिक (Basic) एकके.
- डिराइव्हड (Derived) एकके

मुलभूत एकके/ बेसिक एकके (Fundamental or Basic Units):

मुलभूत परिमाणांच्या (Fundamental Quantities) एककांना मुलभूत एकके म्हणतात. मुलभूत परिमाण भौतिक परिमाण (Physical Quantity) आहेत, जे त्याच्या मोजमापासाठी इतर कोणत्याही भौतिक परिमाणांवर अवलंबून नाहीत. बेसिक/मुलभूत परिमाण खालीलप्रमाणे आहेत.

टेबल 1.2 : मुलभूत एकके/ बेसिक एकके.

अ. क्र.	मुलभूत भौतिक प्रमाण	मुलभूत एकक	चिन्ह
1	लांबी (Length)	मीटर	m
2	वस्तुमान (Mass)	किलो	kg
3	वेळ (Time)	सेकंद	s

तथापि मुलभूत / बेसिक एककांमध्ये आणखी दोन प्रमाण (प्लेन अँगल आणि सॉलिड अँगल) समाविष्ट केले जाऊ शकतात.

डिराइव्हड (Derived) एकके:

डिराइव्हड (Derived) परिमाणांच्या एककांना डिराइव्हड परिमाण (Derived Units) असे म्हणतात. हे भौतिक प्रमाण एक किंवा अधिक मुलभूत परिमाणाचे संयोजन (combination) म्हणून व्यक्त केले जातात.

टेबल: 1.3 : डिराइव्हड एकके (Derived Units)

डिराइव्हड प्रमाण (Derived Quantity)	सुत्र (Formula)	डिराइव्हड एकके (Derived Units)
क्षेत्रफल (Area)	लांबी × लांबी	चौरस मीटर(m^2)
आकारमान (Volume)	लांबी × लांबी × लांबी	घनमीटर(m^3)
घनता (Density)	वस्तुमान/ आकारमान	किलो/मी ³ (kg/m^3)
वेग आणि स्पीड (Velocity and Speed)	लांबी / वेळ	मी/से (m/s)
प्रवेग (Acceleration)	वेग / वेळ	मी/से ² (m/s^2)
बल (Force)	वस्तुमान × प्रवेग	किलोमी/से ² (kgm/s^2) किंवा 'N'
ऊर्जा आणि कार्य (Energy and Work)	बल × लांबी	किलोमी ² /से ² (kgm^2/s^2)
शक्ती (Power)	ऊर्जा / वेळ	किलोमी ² /से ³ (kgm^2/s^3)
दाब आणि जोर (Pressure and Thrust)	बल / क्षेत्र	किलोमी/से ² (kgm/s^2)
चालना (Momentum)	वस्तुमान × वेग	किलोमी/से(kgm/s)

एकक प्रणाली (Systems of Units):

बेसिक / मुलभूत युनिट्स आणि डिराइव्हड (Derived) युनिट्सचा संपूर्ण संच एकक प्रणाली (Systems of Units) म्हणून ओळखला जातो. वेगवेगळ्या देशांनी भौतिक प्रमाण मोजण्यासाठी वेगवेगळ्या प्रकारच्या युनिट्सचा वापर केला जातो.

एककाच्या खालील प्रणाली वापरात आहेत.

1. सीजीएस (C.G.S.) प्रणाली - ते अनुक्रमे सेंटीमीटर, ग्रॅम, सेकंद आहेत.
2. एफपीएस (F.P.S.) प्रणाली - ते अनुक्रमे फूट, पाउंड, सेकंद आहेत.
3. एमकेएस (M.K.S.) प्रणाली - ते अनुक्रमे मीटर, किलोग्राम आणि सेकंद आहेत.
4. एसआय (S.I.) प्रणाली - ते अनुक्रमे न्यूटन, मीटर आणि सेकंद आहेत .

एसआय (S.I.) युनिट प्रणाली आता मापन करण्यासाठी जगभरात स्वीकारले गेले आहे.

1.4. बल (Force): न्यूटन च्या पहिल्या नियमानुसार स्थिर वस्तू गतिमान करण्यासाठी किंवा वस्तूची सरळ रेषेतील एकसमान गती बदलण्यासाठी लागणाऱ्या भौतिक राशीस बल असे म्हणतात.

बल या राशीस परिमाण आणि दिशा असते, म्हणून ती सदिश (वेक्टर) राशी आहे.

बलाचे परिणाम (Effect of Forces):

वस्तूमध्ये एक बल खालील प्रभाव निर्माण करू शकते, ज्या वस्तूवर ते कार्य करते:

- वस्तूची गती बदलू शकते. उदा. जर वस्तू स्थिर असेल तर बल त्याला हलवू शकते.
- हे वस्तूची गती मंद किंवा गतिमान करू शकते.
- हे वस्तूवर आधीच कार्य करत असलेल्या बलांना मंदावू शकते, त्यामुळे ते स्थिरता किंवा समतोल आणू शकते.
- हे वस्तूतील अंतर्गत तणावांना (Internal Stresses) तयार करू शकते.

1.4.1. बलाची एकके (Units of Force):

बलाचे दोन सामान्यतः वापरले जाणारे एकक आहेत:

- परिपूर्ण एकके (Absolute units of force)
- गुरुत्वाकर्षण एकके. (Gravitational units of force)

1. बलाचे परिपूर्ण एकक (Absolute units of force):

वस्तुमान आणि प्रवेग वेगवेगळ्या युनिट्सच्या वेगवेगळ्या प्रणालींमध्ये मोजले जातात, म्हणून खाली दिलेल्या विविध प्रणालींमध्ये बलाची एकके देखील भिन्न आहेत:

एफ.पी.एस. FPS (फूट-पाउंड-सेकंड) प्रणालीमध्ये बलाचे परिपूर्ण एकक एक पाउंड आहे. एक बल जे एक पाउंडच्या वस्तुमानात एकक गती निर्माण करते.

सी.जी.एस. CGS (सेंटीमीटर -ग्राम -सेकंड) प्रणालीमध्ये बलाचे परिपूर्ण एकक डाइन (Dyne) आहे. एक बल जे एका ग्रॅमच्या वस्तुमानात एकक गती निर्माण करते.

एम.के.एस. MKS (मीटर -किलोग्राम -सेकंड) प्रणालीमध्ये बलाचे परिपूर्ण एकक न्यूटन आहे. एक बल जे एक किलोच्या वस्तुमानात एकक गती निर्माण करते.

स्पष्टपणे , $1 \text{ Newton} = 10^5 \text{ Dynes}$.

2. बलाची गुरुत्वाकर्षण एकके (Gravitational units of force):

ही एकके वस्तूच्या वजनावर अवलंबून असतात. (म्हणजे, ज्या बलाने वस्तू पृथ्वीच्या केंद्राकडे आकर्षित होते.)

एका वस्तूचे वजन (W) आणि त्याचे वस्तुमान 'm' असेल (म्हणजे त्या वस्तूमधील पदार्थाचे प्रमाण) $= mg$, जिथे 'g' म्हणजे गुरुत्वाकर्षणामुळे असलेला प्रवेग आहे. म्हणून गुरुत्वाकर्षण एकके बलाच्या युनिट्सच्या तीन सिस्टीम अर्थात FPS, CGS आणि MKS मध्ये अनुक्रमे पाउंड वजन, ग्राम वजन आणि किलोग्राम वजन आहे.

बलाच्या एकाकांचा संबंध खालीलप्रमाणे आहे:

- 1 पौंड वजन (किंवा lbf) = 32.2 पौण्डल्स (साधारणपणे)
- 1 ग्रॅम वजन (किंवा gmf) = 981 डाइन (Dynes) (साधारणपणे)
- 1 किलोग्राम वजन (किंवा kgf) = 9.81 न्यूटन (Newton) (साधारणपणे)

1.4.2 बलाची वैशिष्ट्ये (Characteristics of a force):

- **परिमाण (Magnitude):** हे बलाचे प्रमाण दर्शवते.(उदा. 50 N चा बल म्हणजे 50 N हा बलाचे परिमाण (Magnitude) आहे.)
- **दिशा (Direction) :** दिशा ज्या रेषेमध्ये बल कार्य करते त्या रेषे द्वारे दर्शविली जाते.
- **बलाचे स्वरूप (Nature of Force):** बल हा धक्का (Push) किंवा खेचणे (Pull) असू शकतो.
- **उपयोजित बिंदू (The Point of Application):** ज्या बिंदूवर (किंवा ज्या द्वारे) बल वस्तूवर कार्य करते.

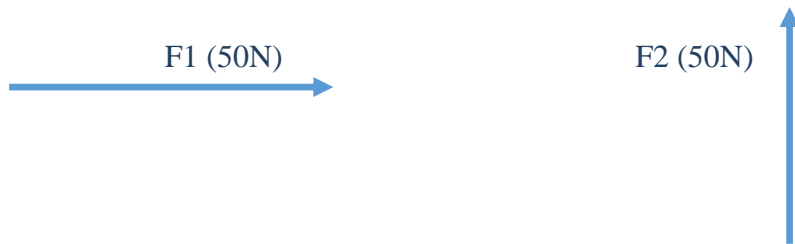
1.4.3. बलाचे प्रतिनिधित्व (Representation of forces):

खालील दोन प्रकारे बलाचे प्रतिनिधित्व केले जाऊ शकते:

1. वेक्टर प्रतिनिधित्व (Vector Representation)
2. बाऊज (Bow's) नोटेशन.

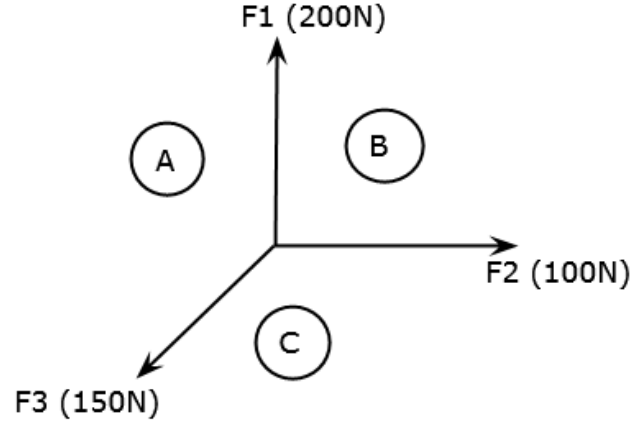
वेक्टर प्रतिनिधित्व (Vector Representation):

एक बल आकृती 1.3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक वेक्टर म्हणून प्रतिनिधित्व करू शकतो.



आकृती 1.3: वेक्टर प्रतिनिधित्व (Vector Representation)

बाऊज (Bow's) नोटेशन: ही एक बल दर्शविण्याची पद्धत आहे ज्यामध्ये दोन कॅपिटल लेटर्स बलाच्या कोणत्याही एका बाजूने एका विशिष्ट अनुक्रमाने (म्हणजे घड्याळाच्या दिशेने किंवा घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने) लिहले जातात. जसे आकृती 1.4 मध्ये दर्शविले आहे.



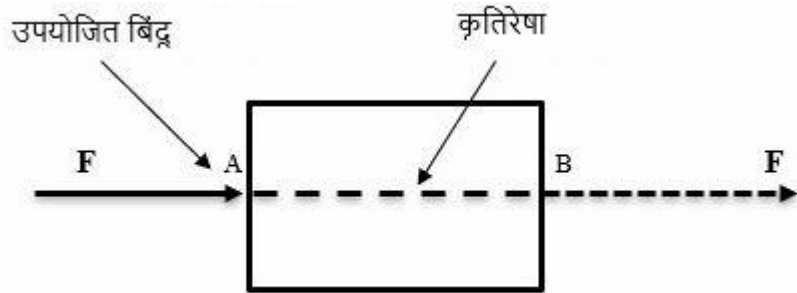
आकृती 1.4: बाऊज (Bow's) नोटेशन

आकृती 1.4 मध्ये ,

जेथे, बल F_1 (200 N), 'AB' द्वारे दर्शविले जाते
बल F_2 (100 N), 'BC' द्वारे दर्शविले जाते आणि
बल F_3 (150 N), 'CA' द्वारे दर्शविले जाते.

1.4.4. बलाची संक्रमणीयता (Transmissibility of a force):

हे असे सांगते की, " जर एखादे बल रिजिड वस्तूवर कोणत्याही एका बिंदूवर लागत असेल , तर ते बल त्याच्या कृतीरेषेवरील (Line of Action) कोणत्याही दुसऱ्या बिंदूवर विचारात घेतला जाऊ शकतो. फक्त तो दुसरा बिंदू रिजिड वस्तुशी संबंधित असावा ".

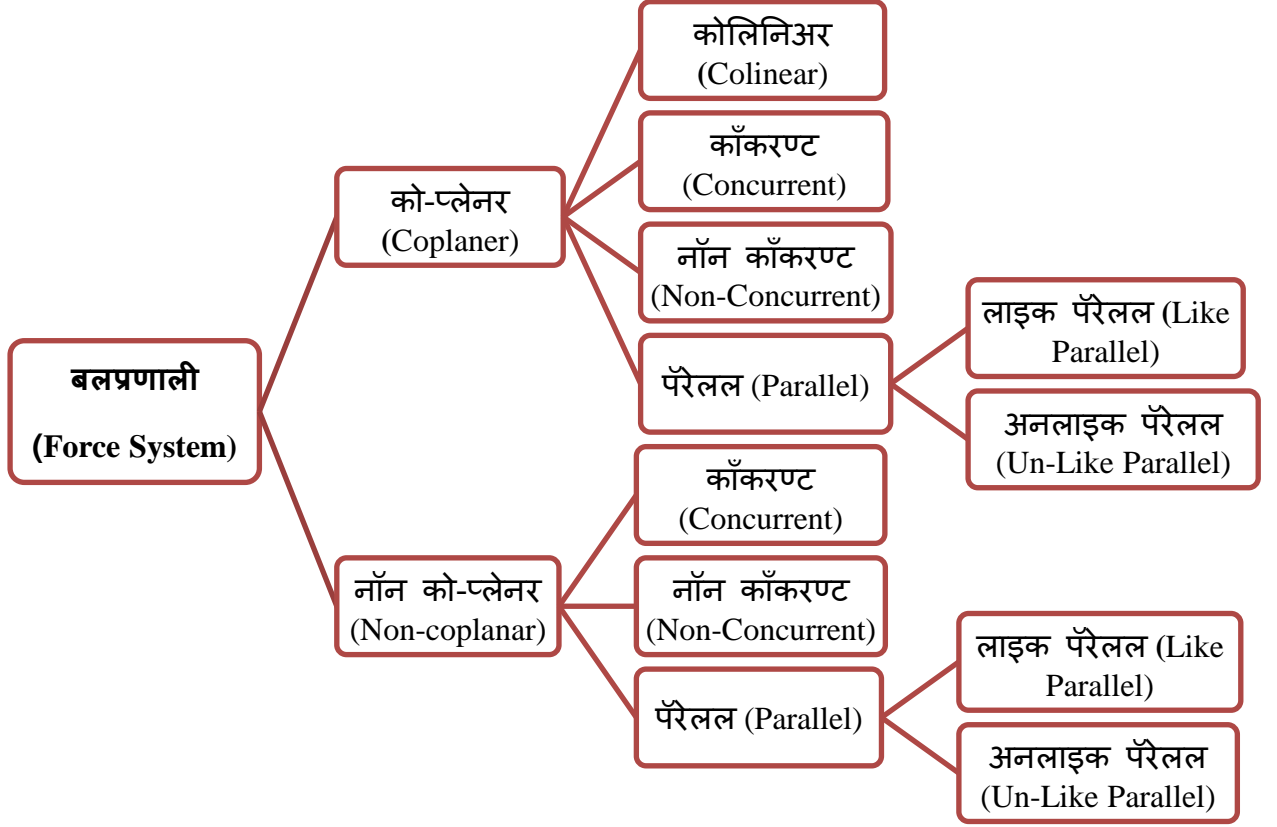


आकृती 1.5: बलाची संक्रमणीयता (Transmissibility of a force)

जर आपण बल 'F' ला बिंदू A वरून बिंदू B वर नेले जे F च्या कृतीरेषेवर आहे , तर समान परिणाम अपेक्षित असेल.

1.4.5. बल प्रणाली (Force System):

बल प्रणाली म्हणजे एक किंवा अधिक प्लेन (Plane) मध्ये वस्तूवर कार्य करणाऱ्या बलांचा संग्रह. बलांच्या कृतीरेषेच्या सापेक्ष स्थितीनुसार (Relative Position) , बलांचे खालीलप्रमाणे वर्गीकरण केले जाऊ शकते



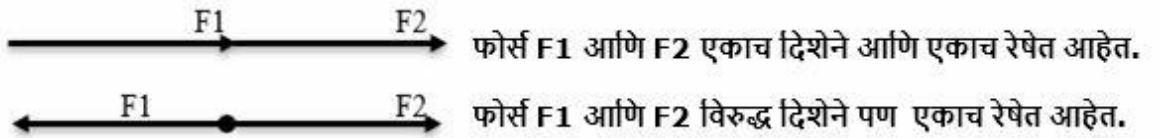
आकृती 1.6: बलांचे वर्गीकरण (Classification of Forces)

1. को-प्लेनर फोर्सस (Coplanar forces)

ज्या फोर्सस ची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये आहे त्यांना को-प्लेनर फोर्सस म्हणतात. को-प्लेनर फोर्सचे चार प्रकार आहेत.

अ) कोलिनिअर (एकरेषीय) फोर्सस (Collinear forces) -

ज्या फोर्सस ची कृतिरेषा एकाच रेषेमध्ये येते त्यांना कोलिनिअर (एकरेषीय) फोर्सस म्हणतात . कोलिनिअर फोर्स सिस्टम आकृती 1.7 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आहे.

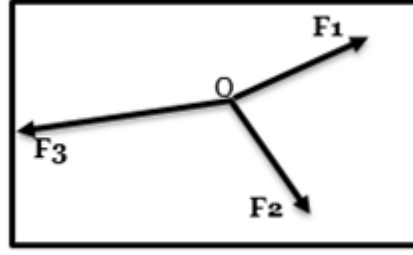


आकृती-1.7: कोलिनिअर फोर्सस

ब) को-प्लेनर काँकरण्ट फोर्सस (Concurrent) -

जे फोर्सस एकाच बिंदूत भेटतात किंवा छेदतात आणि त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये असते त्या फोर्सस ला को-प्लेनर काँकरण्ट फोर्सस म्हणतात.

को-प्लेनर काँकरण्ट फोर्सस आकृती 1.8 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे

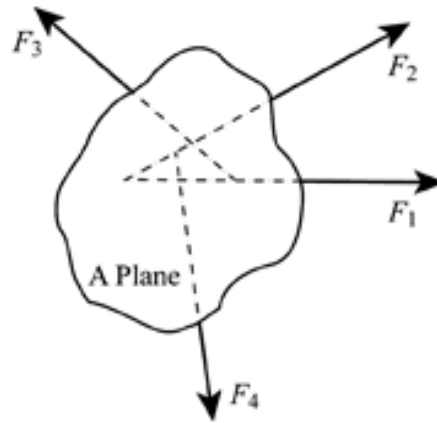


आकृती -1.8 : को-प्लेनर काँकरण्ट फोर्सस

क) को-प्लेनर नॉन काँकरण्ट फोर्सस (Non-Concurrent) -

जे फोर्सस एकाच बिंदूत भेटत नाही किंवा छेदत नाही परंतू त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये असते त्या फोर्सस ला को-प्लेनर नॉनकाँकरण्ट फोर्सस म्हणतात.

को-प्लेनर नॉन काँकरण्ट फोर्सस आकृती 1.9 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे



आकृती 1.9: को-प्लेनर नॉन काँकरण्ट फोर्सस

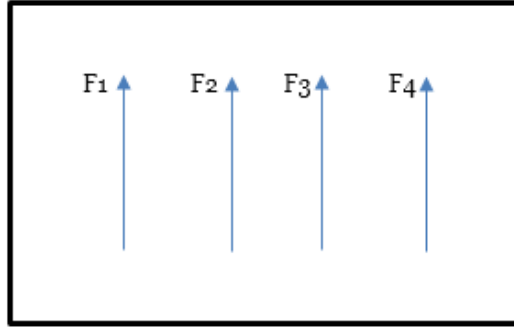
ड) समांतर (पॅरेलल) फोर्सस -

जे फोर्सस एकाच प्लेन मध्ये लावलेले असतील आणि एकमेकांना समांतर असतील तर त्यांना समांतर फोर्सस म्हणतात. हे फोर्सस एकाच दिशेने किंवा विरुद्ध दिशेने असू शकतात. समांतर फोर्सस दोन प्रकार आहेत.

(i) लाइक पॅरेलल (Like Parallel)

ज्या फोर्सस ची कृतिरेषा एकमेकांना समांतर असतील आणि त्यांची दिशा एकच असेल तर अशा फोर्सस ला लाइक पॅरेलल (Like Parallel) फोर्सस म्हणतात.

लाइक पॅरेलल (Like Parallel) फोर्सस आकृती 1.10 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे

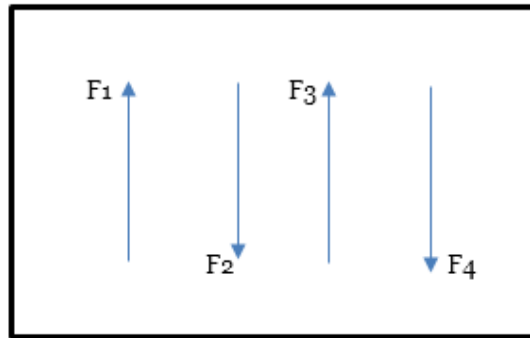


आकृती 1.10: लाइक पॅरेल (Like Parallel) फोर्सस

(ii) अनलाइक पॅरेल (Un-Like Parallel)

ज्या फोर्सस ची कृतिरेषा एकमेकांना समांतर असतील परंतु त्यांची दिशा एक नसेल तर अशा फोर्सस ला अनलाइक पॅरेल (Unlike Parallel) फोर्सस म्हणतात.

अनलाइक पॅरेल (Unlike Parallel) फोर्सस आकृती 1.11 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे



आकृती 1.11: अनलाइक पॅरेल (Unlike Parallel) फोर्सस

2. नॉन-को-प्लेनर फोर्सस (Non-Coplanar Forces) :-

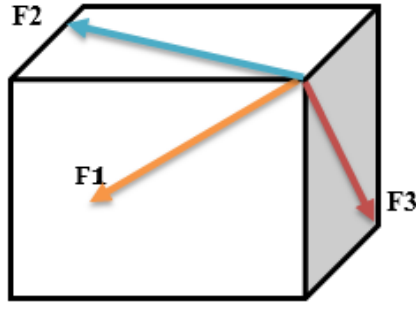
जे फोर्सस एकाच प्लेन मध्ये नसतात (म्हणजे वेगवेगळ्या प्लेन मध्ये असतात) त्यांना नॉन कोप्लेनर फोर्सस म्हणतात.

नॉन कोप्लेनर फोर्सस चे तीन प्रकार आहेत

अ) नॉन-को-प्लेनर काँकुरंट फोर्सस (Non-Coplanar Concurrent Forces): -

जे फोर्सस एकाच बिंदूत भेटतात परंतु त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये नसते त्या फोर्सस ला नॉन-को-प्लेनर काँकुरंट फोर्सस म्हणतात.

नॉन-को-प्लेनर काँकुरंट फोर्सस आकृती 1.12 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे

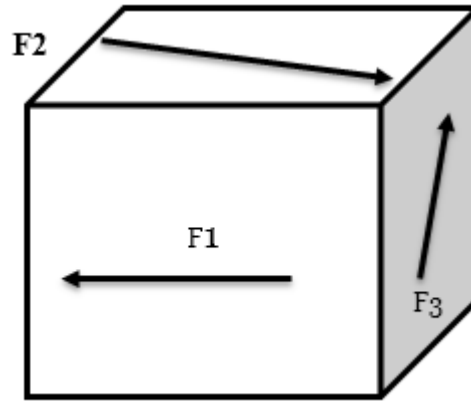


आकृती 1.12: नॉन-को-प्लेनर कॉंकरण्ट फोर्सस

ब) नॉन को-प्लेनर नॉन कॉंकरण्ट फोर्सस (Non-Coplanar Non-Concurrent Forces):

जे फोर्सस एकाच बिंदूत भेटत नाही आणि त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये नसते त्या फोर्सस ला नॉन को-प्लेनर नॉन कॉंकरण्ट फोर्सस म्हणतात.

नॉन को-प्लेनर नॉन कॉंकरण्ट फोर्सस आकृती 1.13 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे



आकृती 1.13: नॉन को-प्लेनर नॉन कॉंकरण्ट फोर्सस

क) नॉन को-प्लेनर पॅरेलल (Parallel) फोर्सस -

हे समांतर फोर्सस आहेत ,जे एकाच प्लेन मध्ये नसतात (म्हणजे वेगवेगळ्या प्लेन मध्ये असतात) आणि ते वेगवेगळ्या बिंदूवर एकाच दिशेने किंवा वेगवेगळ्या दिशेने कार्य करत असतात. जे फोर्सस एकाच दिशेने कार्य करत असतात त्यांना लाईक पॅरेलल फोर्सस म्हणतात आणि जे विरुद्ध दिशेने कार्य करत असतात त्यांना अनलाइक पॅरेलल फोर्सस म्हणतात.

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

1. व्याख्या लिहा:
- (i) स्थिरता (ii) गतिशीलता.
2. कायनेमॅटिक्स आणि कायनेटिक्स मध्ये फरक लिहा.
3. व्याख्या लिहा: i) बल ii) वस्तुमान iii) वजन iv) रिजिड वस्तू
4. वस्तुमान आणि वजन मध्ये फरक लिहा.
5. स्केलर आणि वेक्टर प्रमाणाची व्याख्या लिहा.
6. खालीलपैकी कोणते प्रमाण स्केलर आहेत? वस्तुमान, बल, आकारमान, वेग, वेळ, प्रवेग.
7. युनिट्सच्या विविध प्रणालींचे वर्णन करा. आजकाल कोणत्या युनिट्सची प्रणाली वापरात आहे.
8. बलाची व्याख्या करा. जेव्हा एखादा बल कार्य करते तेव्हा त्याचे काय परिणाम होऊ शकतात ते सांगा.
9. बलाची वैशिष्ट्ये सांगा.
10. बलाचे वर्गीकरण कसे केले जाते?
11. फोर्स सिस्टीम ची व्याख्या करा. वेगवेगळ्या बल प्रणालींची नावे द्या.

मायक्रोप्रोजेक्ट:

1. विविध बल प्रणालींचे मॉडेल तयार करा.

घटक - 2

उचलण्याचे साधे यंत्र (लिफ्टिंग मशीन)

(Simple Lifting Machine)

विषय निष्पत्ती: (Course Outcome) : संबंधित हेतूसाठी उचलण्याचे साधी यंत्र ओळखा व निवडा.

घटक निष्पत्ती : (Unit Outcome)

1. दिलेल्या लिफ्टिंग मशीनच्या घटकाचे वर्णन करा.
2. दिलेल्या दोन प्रकारच्या साध्या लिफ्टिंग मशीनचे कार्य करण्याच्या तत्त्वानुसार (Principle) फरक स्पष्ट करा.
3. साध्या लिफ्टिंग मशीनचा वेग गुणोत्तर, कार्यक्षमता आणि नियम निश्चित करा.
4. दिलेल्या साध्या लिफ्टिंग मशीनद्वारे आवश्यक एफर्ट (Effort) आणि लोड (Load) उचलण्याची गणना करा.
5. दिलेल्या माहितीच्या आधारे रेखांकन करून आलेखाचा अर्थ लावा
6. आवश्यक हेतूसाठी संबंधित साधी लिफ्टिंग मशीन निवडा व त्याचे समर्थन करा.

2.1 मशीनची सामान्य संकल्पना

एखादे असे उपकरण जे यांत्रिक शक्तीचा वापर करते, तसेच ते अनेक भागांपासून बनवलेले असते व प्रत्येक भागाचे एक निश्चित कार्य असते व सर्व भाग एकत्रितपणे एक विशिष्ट कार्य करते, त्याला मशीन असे म्हणतात.

उदाहरण: शिलाई मशीन, स्कू जॅक, प्रिंटिंग मशीन, लेथ मशीन, CNC मशीन इ.

लिफ्टिंग मशीन ही लोड (Load) उचलण्यासाठी वापरली जातात.

मशीनच्या एका बिंदूवर एफर्ट (Effort)(P) लागू केला जातो आणि मशीनच्या दुसऱ्या बिंदूवर लोड (Load) (W) उचलला जातो.

मशीन खालील दोन प्रकारची असू शकतात:

1. साधी मशीन (Simple)
2. कंपाऊंड मशीन (Compound)

साधे मशीन

या प्रकारच्या मशीनमध्ये एफर्ट (Effort) देण्यासाठी फक्त एक बिंदू आणि लोडसाठी (Load) एक बिंदू असतो. हि एक साधी यंत्रणा आहे. उदाहरणे: लीव्हर,स्कू जॅक इ.

कंपाऊंड मशीन

या प्रकारच्या मशीनमध्ये एफर्ट (Effort) देण्यासाठी आणि लोडसाठी (Load) एकापेक्षा जास्त बिंदू असतात. हि एक कंपाऊंड किंवा क्लिष्ट (Complicated) यंत्रणा आहे.

उदाहरणे: प्रिंटिंग मशीन, लेथ मशीन, मिलिंग मशीन इ.

2.1.1 महत्वाच्या व्याख्या

लोड Load (W)

एफर्ट /जोर लावून उचलले जाणारे वजन म्हणजे लोड म्हणतात. हे 'डब्ल्यू' (W) अक्षराने दर्शविले जाते. लोडचे एकक न्यूटन (N) किंवा किलो-न्यूटन (kN) आहे.

एफर्ट Effort (P)

लोड (Load) उचलण्यासाठी आवश्यक बलाचा वापर केला जातो त्याला एफर्ट (Effort) म्हणतात. हे 'P' अक्षराने दर्शविले जाते.एफर्टचे एकक न्यूटन (N) किंवा किलो-न्यूटन (kN) आहे.

मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज (Mechanical Advantage) (M.A)

आपण उचललेला लोड (W) व लागू केलेले एफर्ट (P) यांच्या गुणोत्तराला मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज म्हणतात.

$$\text{मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज} = \frac{\text{उचललेला लोड (W)}}{\text{लावलेला एफर्ट (P)}}$$

$$M.A = \frac{W}{P}$$

मेकॅनिकल अँडव्हान्टेजला एकक नाही.

वेग गुणोत्तर (Velocity Ratio) V.R

एफर्टचे (Effort) हललेले अंतर व लोडचे (Load) हललेले अंतर यांच्या गुणोत्तरास वेग गुणोत्तर असे म्हणतात.

$$\text{वेग गुणोत्तर} = \frac{\text{एफर्टचे (Effort) हललेले अंतर (y)}}{\text{लोडचे (Load) हललेले अंतर (x)}}$$

$$V.R = \frac{y}{x}$$

वेग गुणोत्तराला एकक नसते.

मशीनचे इनपुट (Machine Input):

हे मशीनवर केलेले कार्य आहे. लिफ्टिंग मशीनमध्ये इनपुट पुढीलप्रमाणे मोजले जाते.

मशीनचे इनपुट = एफर्ट (P) × एफर्टचे हललेले अंतर (y)

मशीनचे इनपुट = P × y

येथे P = एफर्ट (Effort) आणि y = एफर्टचे हललेले अंतर

मशीनचे आउटपुट (Machine Output)

हे मशीनद्वारे केलेले प्रत्यक्ष कार्य आहे.

मशीनचे आउटपुट = लोड (W) × लोडचे हललेले अंतर (x)

मशीनचे आउटपुट = W × x

येथे W = लोड

x = लोड चे हललेले अंतर

मशीनची कार्यक्षमता (Machine Efficiency):

मशीनच्या आउटपुट व इनपुट यांच्या गुणोत्तराला मशीनची कार्यक्षमता असे म्हणतात.

$$\eta = \frac{\text{आउटपुट}}{\text{इनपुट}}$$

हे साधारणतः टक्केवारी % च्या स्वरूपात दाखविले जाते.

2.1.2 M.A, V.R आणि Efficiency (η) यांच्या मधील संबंध

समजा,

W = मशीनने उचललेला लोड (Load)

P = लोड उचलण्यासाठी लागलेला एफर्ट (Effort)

y = एफर्टचे हललेले अंतर

x = लोड चे हललेले अंतर

η = मशीनची कार्यक्षमता

आपल्याला माहीत आहे कि,

$$\text{मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A} = \frac{W}{P} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{मशीनचे वेग गुणोत्तर V.R} = \frac{y}{x} \dots\dots\dots(2)$$

मशीनचे इनपुट = एफर्ट (Effort) \times एफर्टचे हललेले अंतर

$$\text{मशीनचे इनपुट} = P \times y \dots\dots\dots(3)$$

मशीनचे आउटपुट = लोड \times लोड चे हललेले अंतर(x)

$$\text{मशीनचे आउटपुट} = W \times x \dots\dots\dots(4)$$

आपल्याला माहीत आहे की,

$$\text{मशीनची कार्यक्षमता } (\eta) = \frac{\text{आउटपुट}}{\text{इनपुट}}$$

$$\text{मशीनची कार्यक्षमता } (\eta) = \frac{W \times x}{P \times y} \dots\dots\text{समीकरण 3 व 4 वरून}$$

$$\text{मशीनची कार्यक्षमता } (\eta) = \frac{\frac{W}{P}}{\frac{y}{x}}$$

समीकरण 1 व 2 वरून,

$$\text{मशीनची कार्यक्षमता } (\eta) \text{ (Efficiency)} = \frac{\text{मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A}}{\text{मशीनचे वेग गुणोत्तर V.R}} \times 100$$

हा आहे M.A , V.R आणि Efficiency (η) यांच्या मधील संबंध.

2.2 आदर्श मशीन. (आयडियल) (Ideal Machine)

मशीनची कार्यक्षमता 100% असल्यास त्यास आदर्श म्हणजेच आयडियल मशीन असे

म्हटले जाते.या ठिकाणी, आउटपुट हे इनपुटच्या बरोबरीचे आहे.

आदर्श (आयडियल) मशीनची वैशिष्ट्ये:

1. कार्यक्षमता 100% आहे
2. आउटपुट = इनपुट
3. घर्षण (Friction) शून्य आहे
4. $M.A = V.R$

2.2.1 मशीनमधील घर्षणाची संकल्पना (Concept of friction)

मशीनला आपण जेवढे इनपुट देतो त्यापैकी काही इनपुट चे लॉस (Loss) प्रत्येक मशीनमध्ये होत असते. आणि बहुतेक वेळा हा लॉस (Loss) घर्षणामुळे होतो. हे ठरवण्याचा एक मार्ग म्हणजे मशीनची कार्यक्षमता मोजणे. घर्षणामुळे होणारे लॉस खालील पद्धतीने सुद्धा दाखवता येते.

- एफर्ट (P) चा होणारा लॉस
- लोड (W) उचलण्यामध्ये होणारा लॉस

समजा,

P = लोड उचलण्यासाठी प्रत्यक्ष लागलेला एफर्ट (मशीनचे घर्षण लक्षात घेऊन) न्यूटन मध्ये (N)

P_i = आयडियल एफर्ट (मशीन घर्षण लक्षात न घेता) न्यूटन मध्ये (N)

W = प्रत्यक्ष उचललेला लोड (मशीनचे घर्षण लक्षात घेऊन) न्यूटन मध्ये (N)

W_i = उचललेला आयडियल लोड (मशीन घर्षण लक्षात न घेता) न्यूटन मध्ये (N)

P_f = घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस न्यूटन मध्ये (N) (Loss of effort due to Friction)

W_f = घर्षण झाल्यामुळे लोड चा झालेला लॉस न्यूटन मध्ये (N) (Loss of Load due to Friction)

घर्षणामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस (P_f)

$$P_f = P - P_i \dots\dots\dots (1)$$

घर्षणामुळे लोड चा झालेला लॉस (W_f)

$$W_f = W_i - W \dots\dots\dots (2)$$

आता आपण P_i ची किंमत काढूया त्यासाठी आपण एक आयडियल मशीन मानूया. आपल्याला माहीत आहे कि आयडियल मशीनची कार्यक्षमता $\eta = 1$.

$$\eta = \frac{M.A}{V.R}$$

$$M.A = \eta \times V.R$$

$$\frac{W}{P_i} = 1 \times V.R$$

$$P_i = \frac{W}{V.R} \dots\dots\dots (3)$$

समीकरण (3) मधील P_i ची किंमत समीकरण (1) मध्ये टाका

$$P_f = P - \frac{W}{V.R} \dots\dots\dots (4)$$

आता आपण W_i ची किंमत काढूया. त्यासाठी आपण पुन्हा एक आयडियल मशीन मानूया

आपल्याला माहीत आहे कि आयडियल मशीनची कार्यक्षमता $\eta = 1$.

$$\eta = \frac{M.A}{V.R}$$

$$M.A. = \eta \times V.R.$$

$$\frac{W_i}{P} = 1 \times V.R$$

$$W_i = P \times V.R \dots\dots\dots (5)$$

समीकरण (5) मधील W_i ची किंमत समीकरण (2) मध्ये टाका

$$W_f = P \times V.R. - W \dots\dots\dots (6)$$

2.2.2 मशीनची रिव्हर्सिबिलिटी कंडिशन (Condition for Reversibility of a machine)

जेव्हा मशीनवरील एफर्ट (P) पूर्णपणे काढून टाकला जातो व मशीन फक्त त्याच्या लोडमुळे उलट दिशेने काम करण्यास सक्षम असते तेव्हा त्या मशीनला रिव्हर्सिबल मशीन म्हटले जाते.

ज्या वेळेस एफर्ट पूर्णपणे काढून टाकला जातो, तेव्हा लोडवर केलेले कार्य आउटपुट ऐवजी इनपुट होईल व इथे इनपुट हे घर्षण नुकसानीच्या (Frictional Loss) बरोबर असेल.

मशीनची रिव्हर्सिबिलिटी कंडिशन खालील प्रमाणे निश्चित केली जाते.

असे मानूया,

W = मशीनने उचललेला लोड

P = लोड उचलण्यासाठी लागलेला एफर्ट

y = एफर्ट चे हललेले अंतर

x = लोड चे हललेले अंतर

मग ,

मशीनचे इनपुट $= P \times y$

मशीनचे आउटपुट $= W \times x$

मशीनमधील घर्षणाने होणारे लॉस (Frictional Loss) $=$ इनपुट - आउटपुट $= P \times y - W \times x \dots (7)$

रिव्हर्सिबल मशीनमध्ये, जेव्हा एफर्ट (P) हा शून्य असतो तेव्हा मशीनचे आउटपुट हे मशीनमधील घर्षणामुळे होणाऱ्या नुकसानापेक्षा (Frictional Loss) नेहमी जास्त असावे.

मशीनचे आउटपुट $>$ मशीन मधील घर्षण लॉस (Frictional Loss).

i.e. $W \times x > (P \times y - W \times x) \dots \dots \dots (8)$

$2W \times x > P \times y$

$$\frac{W \times x}{P \times y} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{W}{P}}{\frac{y}{x}} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{M.A}{V.R} > \frac{1}{2} \quad \left\{ \because M.A = \frac{W}{P} \text{ and } V.R = \frac{y}{x} \right\}$$

$$\eta > \frac{1}{2} > 0.5$$

$$\eta \geq 50\% \dots \dots \dots (9)$$

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो कि , एखादे मशीन रिव्हर्सिबल असण्यासाठी अशी अट आहे कि, मशीनची कार्यक्षमता हि 50 % किंवा 50 % पेक्षा जास्त असावी.

2.2.3 नॉन रिव्हर्सिबल मशीन/ अपरिवर्तनीय किंवा सेल्फ लॉकिंग मशीन

(Non-reversible/irreversible or self-locking machine)

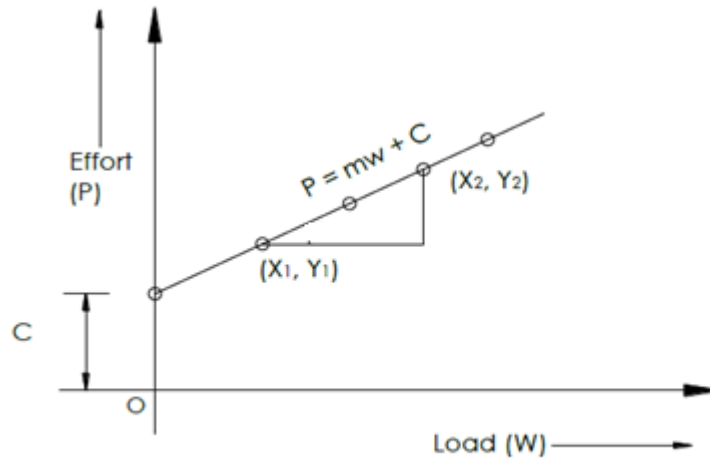
जेव्हा मशीनवरील एफर्ट (P) पूर्णपणे काढून टाकल्यानंतर सुद्धा मशीन उलट्या दिशेने काम करण्यास सक्षम नसते. तेव्हा त्या मशीनला नॉन रिव्हर्सिबल मशीन / अपरिवर्तनीय किंवा सेल्फ लॉकिंग मशीन म्हणतात.

मशीन नॉन रिव्हर्सिबल असण्याची अट एकच ती म्हणजे त्याची कार्यक्षमता 50% पेक्षा जास्त नसावी.

$$\eta < 50\%$$

2.2.4 मशीनचा नियम (Law of a machine)

मशीनचा नियम हा लावलेला एफर्ट (P) व उचललेला लोड (W) यांच्यामधील संबंध दर्शवतो. कोणत्याही मशीनसाठी एफर्ट (P) व लोड (W) यांच्या दरम्यान एक आलेख आखला तर तो एका सरळ रेषेचा संबंध दर्शवितो.



आकृती 2.1 मशीनचा नियम

हा आलेख O मधून जात नाही परंतु y- अक्षावर C बिंदू ला एक इंटरसेप्ट करतो जे दर्शविते की केवळ घर्षण प्रतिरोधनावर (Frictional resistance) मात करण्यासाठी एफर्ट चा झालेला लॉस झाला . स्थिर 'm' आलेखाचा उतार दर्शवितो.

$$P = mW + C \quad \dots\dots\dots (10)$$

हे समीकरण मशीनचा नियम म्हणून ओळखले जाते.

W_1 आणि W_2 यावरून आपण स्थिरांक 'm' आणि 'C' ची किंमत खालीलप्रमाणे काढू शकतो

$$P_1 = mW_1 + C \dots\dots\dots (10a)$$

$$P_2 = mW_2 + C \dots\dots\dots (10b)$$

समीकरण (10b) हे समीकरण (10a) मधून वजा करावे

$$P_1 - P_2 = m (W_1 - W_2)$$

$$m = \frac{P_1 - P_2}{W_1 - W_2} \dots\dots\dots (c)$$

'm' ची किंमत समीकरण (10a) मध्ये टाकावी, मग आपण लिहू शकतो की

$$P_1 = \left(\frac{P_1 - P_2}{W_1 - W_2} \right) W_1 + C$$

$$C = P_1 - \left(\frac{P_1 - P_2}{W_1 - W_2} \right) W_1 \dots\dots\dots (d)$$

2.2.5 कमाल मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज आणि जास्तीत जास्त कार्यक्षमता (Maximum Mechanical advantage and Maximum Efficiency)

आपल्याला माहित आहे की,

$$\text{मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज, } M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{W}{mW + C} \quad (\because P = mW + C)$$

$$= \frac{1}{m + \frac{C}{W}} \dots\dots\dots (e)$$

W ची किंमत अत्यंत उच्च आहे म्हणून, C/W हे शून्य असेल आणि संबंधित M.A जास्तीत जास्त असेल.

$$\text{मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज, } M.A_{\max} = \frac{1}{m} \dots\dots\dots (f)$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$M.A = \eta \times V.R \dots\dots\dots (g)$$

$$\eta = \frac{M.A}{V.R} = \frac{1}{m + \frac{C}{W}} \times \frac{1}{V.R} \dots\dots\dots (h)$$

कोणत्याही मशीनमधील वेगाचे प्रमाण निश्चित असते. त्यामुळे η हे M.A च्या सम चलनात आहे.

कमाल M.A साठी, कार्यक्षमता देखील कमाल असेल.

कमाल कार्यक्षमता,

$$\eta_{\max} = \frac{M.A \max}{V.R} \dots\dots\dots (i)$$

$$\eta_{\max} = \frac{1}{m \times V.R} \dots\dots\dots (j)$$

उदाहरणे - साधे लिफ्टिंग मशीन

उदाहरण क्र. 01 - एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये 120 N चा लोड 5 cm अंतराने हलवला जातो, जेव्हा P एवढा एफर्ट 70 cm अंतरावरून लावला जातो. जर मशीनची कार्यक्षमता 60% असेल तेव्हा P ची किंमत शोधा.

उत्तर-

उचललेला लोड (W) = 120 N

एफर्टचे हललेले अंतर (y) = 70 cm

लोडचे हललेले अंतर (x) = 5 cm

कार्यक्षमता (η) = 60 %

P ची किंमत = ?

आपल्याला माहित आहे कि

(i) मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज $M.A = \frac{W}{P} = \frac{120}{P}$

(ii) वेग गुणोत्तर $V.R = \frac{y}{x} = \frac{70}{5} = 14$

(iii) कार्यक्षमता $\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$

$$\eta \% = \frac{\frac{120}{P}}{14} \times 100$$

$$\eta \% = \frac{120}{P \times 14} \times 100$$

$$P = \frac{120}{\eta \% \times 14} \times 100$$

$$P = \frac{120}{60 \times 14} \times 100$$

P = 14.29 Nउत्तर

उदाहरण क्र. 02:एका मशीनने 220 mm च्या अंतराने 410 N चा लोड उचलला. या प्रक्रियेदरम्यान 67 N चा एफर्ट 1.9 m ने हलवला गेला. शोधा

(i) वेग गुणोत्तर

(ii) मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज

(iii) घर्षणाचा परिणाम

(iv) कार्यक्षमता

उत्तर-

उचललेला लोड, W = 410 N

लावलेला एफर्ट P = 67 N

एफर्टचे हललेले अंतर, y = 1.9 m = 1900 mm (1m = 1000mm)

लोडचे हललेले अंतर, x = 220 mm

(i) मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज,

$$M.A = \frac{W}{P} = \frac{410}{67} = \mathbf{6.119}$$

(ii) वेग गुणोत्तर $V.R = \frac{y}{x} = \frac{1900}{220} = 8.636$

(iii) कार्यक्षमता = ?

$$\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\eta \% = \frac{6.119}{8.636} \times 100$$

$\eta = 70.85 \% \dots\dots\dots$ उत्तर

(iv) घर्षणाचा परिणाम (Effect of friction) =?

आपल्याला माहित आहे कि,

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस (P_f)

$$P_f = P - \frac{W}{V.R}$$

$$P_f = 67 - \frac{410}{8.636}$$

$P_f = 19.52 \text{ N} \dots\dots\dots$ उत्तर

घर्षण झाल्यामुळे लोड चा झालेला लॉस (W_f)

$$W_f = P \times V.R - W$$

$$W_f = 67 \times 8.636 - 410$$

$W_f = 168.612 \text{ N} \dots\dots\dots$ उत्तर

उदाहरण क्र. 03:एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये 20 N च्या एफर्ट मुळे 900 N चा लोड उचलला गेला. जर मशीनची कार्यक्षमता 52 % असेल तर मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज व वेग गुणोत्तर शोधा.

उत्तर-

उचललेला लोड, $W = 900 \text{ N}$

लावलेला एफर्ट, $P = 20 \text{ N}$

कार्यक्षमता $\eta = 52 \%$

(i) मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज $M.A = \frac{W}{P} = \frac{900}{20} = 45 \text{ N}$

(ii) वेग गुणोत्तर $V.R$

आपल्याला माहित आहे कि,

$$\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$V.R = \frac{M.A}{\eta \%} \times 100$$

$$V.R = \frac{45}{52} \times 100$$

$$V.R = 86.538 \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र. 04:एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये 21 N च्या एफर्ट मुळे 800 N चा लोड उचलला गेला असेल तर मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज किती असेल ? या मशीनची कार्यक्षमता 62 % असल्यास वेग गुणोत्तर (V.R) शोधा.

उत्तर-

कार्यक्षमता = 62 %.

उचललेला लोड, W = 800 N

लावलेला एफर्ट, P = 21 N

$$\begin{aligned} \text{(i) मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज } M.A. &= \frac{W}{P} \\ &= \frac{800}{21} \\ &= 38.09 \text{ N} \end{aligned}$$

(ii) वेग गुणोत्तर V.R

आपल्याला माहित आहे कि,

$$\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$V.R = \frac{M.A}{\eta \%} \times 100$$

$$V.R = \frac{38.09}{62} \times 100$$

$$V.R = 61.44 \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र. 05: एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये, 22 N आणि 32 N लोड उचलण्यासाठी अनुक्रमे 6 N आणि 7 N एवढा एफर्ट लावला गेला.जर मशीनचा वेग गुणोत्तर (V.R) 20 असेल तर खालील बाबी निश्चित (Determine) करा.

(i) मशीनचा नियम

(ii) 22 N आणि 32 N च्या लोड संबंधित कार्यक्षमता

(iii) दोन्ही प्रकरणांमध्ये घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस (Effort lost in friction)

(iv) या मशीनकडून तुम्हाला जास्तीत जास्त किती कार्यक्षमता अपेक्षित आहे.(Maximum efficiency)

उत्तर-

(i) **मशीनचा नियम (Law of the machine) = ?**

मशीनचा नियम

$$P = mW + C$$

जेथे P = लावलेला एफर्ट

W = उचललेला लोड

‘m’ आणि ‘C’ हे दोन स्थिरांक आहेत.

आता, जेव्हा W = 22 N P = 6 N

जेव्हा W = 32 N P = 7 N.

ह्या किमती मशीनच्या नियमात टाकूया

$$6 = 22m + C \dots (i)$$

$$7 = 32m + C \dots (ii)$$

समीकरण (i) हे समीकरण (ii) मधून वजा करूया

$$7 = 32m + C \dots (ii)$$

$$6 = 22m + C \dots (i)$$

$$1 = 10m$$

$$m = \frac{1}{10}$$

$$m = 0.1$$

m = 0.1 हि किंमत समीकरण (i) मध्ये टाकूया,

मग आपल्याला मिळेल

$$6 = 22 \times 0.1 + C$$

$$C = 3.8$$

अशाप्रकारे मशीनचा नियम खालीलप्रमाणे तयार होईल

$$P = (0.1W + 3.8)N \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

(ii) कार्यक्षमता=?

जेव्हा,

$$W = 22 \text{ N and } P = 6 \text{ N}$$

$$\text{मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज, } M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{22}{6}$$

$$M.A = 3.67$$

आपल्याला दिलेले आहे कि, वेग गुणोत्तर $V.R = 20$

$$\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\eta \% = \frac{3.67}{20} \times 100$$

$$\eta = 18.33\% \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

जेव्हा,

$$W = 32 \text{ N and } P = 7 \text{ N}$$

$$\text{मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज } M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{32}{7}$$

$$M.A = 4.57$$

आपल्याला दिलेले आहे कि, वेग गुणोत्तर $V.R = 20$

$$\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\eta \% = \frac{4.57}{20} \times 100$$

$$\eta = 22.85 \% \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

(iii) घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस (Effort lost in friction) =?

जेव्हा,

$$W = 22 \text{ N, } P = 6 \text{ N}$$

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस (P_f)

$$P_f = P - \frac{W}{V.R}$$

$$P_f = 6 - \frac{22}{20}$$

$$P_f = 6 - 1.1$$

$$P_f = 4.9 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

जेव्हा,

$$W = 32 \text{ N}, P = 7 \text{ N}$$

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस (P_f)

$$P_f = P - \frac{W}{V.R}$$

$$P_f = 7 - \frac{32}{20}$$

$$P_f = 7 - 1.6$$

$$P_f = 5.4 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

(iv) जास्तीत जास्त कार्यक्षमता (Maximum efficiency) = ?

मशीनची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता

$$\eta = \frac{1}{m \times V.R} \times 100$$

$$\eta = \frac{1}{0.1 \times 20} \times 100$$

$$\eta = 50\% \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

2.3 काही लिफ्टिंग मशीन (Some lifting machines)

काही महत्त्वाची लिफ्टिंग मशीन खाली दिलेले आहेत:

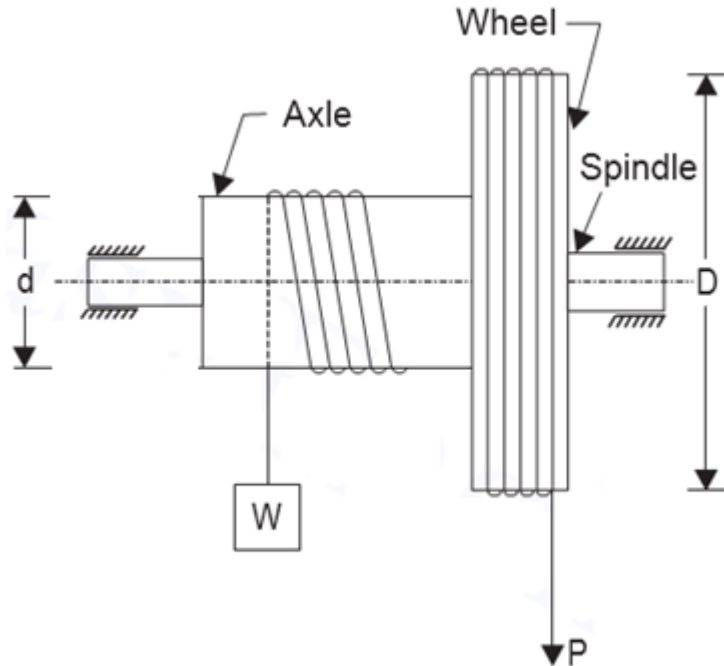
1. साधे व्हील आणि अॅक्सल (Simple wheel and axle)
2. व्हील आणि डिफरेंशियल अॅक्सल (Wheel and differential axle)
3. वेस्टनची डिफरेंशियल पुली ब्लॉक (Weston's differential pulley block)
4. वर्म व वर्म व्हील (Worm and worm wheel)

5. सिंगल पर्चेस क्रॅब विंच (Single purchase crab winch)
6. डबल पर्चेस क्रॅब विंच (Double purchase crab winch)
7. साधे स्कू जॅक (Simple screw jack)
8. गियर पुली ब्लॉक (Geared pulley block)

2.3.1 साधे व्हील आणि अॅक्सल (Simple wheel and axle)

आकृती 2.2 एक साधे व्हील आणि अॅक्सल लिफ्टिंग मशीन दाखवते. व्हील आणि अॅक्सल एकाच स्पिंडलशी जोडलेले असतात व कमीतकमी घर्षण होण्यासाठी ते बॉल बेअरिंग्सवर बसवलेले असतात. एका दोरीचे एक टोक अॅक्सल वर एका ठिकाणी फिक्स केलेले असते व दोरी गोलाकार पद्धतीने काही वळणे घेऊन अॅक्सल वर गुंडाळली जाते. दोरीच्या दुसऱ्या मोकळ्या टोकाला लोड बांधलेला असतो. त्याचप्रमाणे, दुसऱ्या दोरीचे एक टोक व्हील वर फिक्स केले जाते आणि दुसरे टोक व्हीलवर गोलाकार पद्धतीने गुंडाळले जाते. ते गुंडाळताना उलट्या दिशेने अशाप्रकारे गुंडाळतात कि, जेव्हा अॅक्सल वरील दोरी गुंडाळली जाते तेव्हा व्हील वरील दोरी उलगडली जाते. अशाच प्रकारे उलट क्रिया सुद्धा होऊ शकते.

एफर्ट हा नेहमी व्हील वर गुंडाळलेल्या दोरीच्या फ्री टोकाला लावला जातो.



आकृती क्र 2.2 साधे व्हील आणि अॅक्सल

समजा,

D = व्हील चा व्यास

d = अॅक्सल चा व्यास.

व्हील च्या एका परिभ्रमण (Revolution) मध्ये एफर्ट चे विस्थापन = πD

आणि लोडचे विस्थापन (Displacement) = πd

$$V.R = \frac{\pi D}{\pi d}$$

$$V.R = \frac{D}{d}$$

उदाहरणे -साधे व्हील आणि अॅक्सल

उदाहरण क्र.-01

एका साधे व्हील व अॅक्सल मध्ये व्हील चा व्यास 160 mm आणि अॅक्सलचा व्यास 32 mm आहे. जर मशीनची कार्यक्षमता 62 % असेल, तर 55 N चा लोड उचलण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या एफर्ट ची किंमत निश्चित करा.

उत्तर-

व्हीलचा व्यास (D) = 160 mm

अॅक्सलचा व्यास (d) = 32 mm

कार्यक्षमता (η) = 62 %

लोड (W) = 55 N

(i) अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{D}{d} = \frac{160}{32} = 5$$

(ii) एफर्ट (P) ची किंमत काढूया

आपल्याला माहीत आहे

$$\eta \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$62 = \frac{\frac{55}{P}}{5} \times 100$$

$$62 = \frac{55}{P \times 5} \times 100$$

$$P = \frac{55}{62 \times 5} \times 100$$

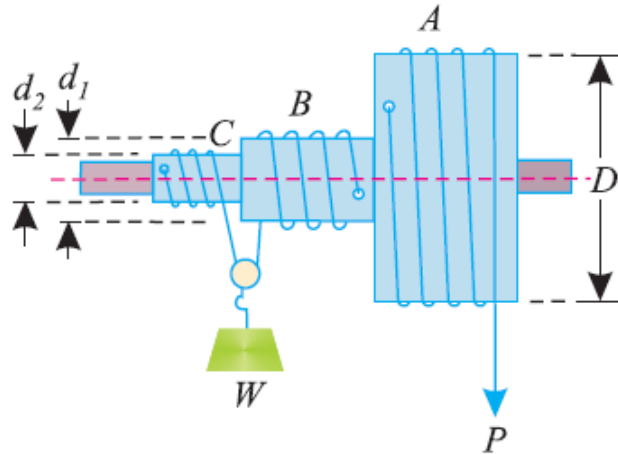
P = 17.74 N उत्तर

2.3.2 डिफरंशियल व्हील व अॅक्सल (Differential wheel and axle)

हे एक साधे व्हील व अॅक्सल चे सुधारित रूप आहे. आकृती 2.3 मध्ये एक डिफरंशियल व्हील व अॅक्सल दाखविलेले आहे. यामध्ये BC हा एक लोड अॅक्सल आहे, जो भिन्न व्यासांच्या दोन भागांपासून बनलेला आहे.

साधे व्हील व अॅक्सल प्रमाणे, व्हील A , अॅक्सल B व C हे एकाच शाफ्ट ला जोडलेले असतात व कमीतकमी घर्षण होण्यासाठी ते बॉल बेअरिंग्सवर बसवलेले असतात.

एक दोरी एफर्ट व्हील A च्या भोवती गुंडाळलेली असते. आणखी एक दोरी अॅक्सल B च्या भोवती गुंडाळलेली असते व हि दोरी पुली (ज्यावर लोड W लावलेला असतो) मधून ओवून पुन्हा अॅक्सल C च्या भोवती गुंडाळलेली असते. अॅक्सल C वरील गुंडाळलेली दोरी ही अॅक्सल B च्या गुंडाळलेल्या दोरीच्या विरुद्ध दिशेने असते. मात्र व्हील A व अॅक्सल C यांची गुंडाळलेली दोरी एकाच दिशेने असते हे लक्षात ठेवा .



आकृती क्र. 2.3 डिफरंशियल व्हील आणि अॅक्सल

याचा परिणाम म्हणजे, जेव्हा दोरी व्हील A मधून उलगडली जाते तेव्हा अॅक्सल C ची दुसरी दोरी सुद्धा उलगडली जाते परंतु त्यावेळेस अॅक्सल B वर मात्र दोरी गुंडाळली जाते. जसे कि आकृतीत दाखविलेले आहे.

समजा,

D = व्हील A चा व्यास,

d_1 = अॅक्सल B चा व्यास,

d_2 = अॅक्सल C चा व्यास,

W = उचलला जाणारा लोड,

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेले एफर्ट

एका परिभ्रमण मध्ये एफर्ट चे विस्थापन $= \pi D$

अशाप्रकारे एका परिभ्रमणामध्ये, अॅक्सल B व C वर गुंडाळल्या गेलेल्या दोरीची लांबी अनुक्रमे $:= \pi d_1$ आणि πd_2 .

परंतु त्यांच्यावरील गुंडाळलेल्या दोरीची दिशा भिन्न असल्याने, अॅक्सल B व C वर गुंडाळल्या गेलेल्या दोरीची निव्वळ लांबी $= \pi d_1 - \pi d_2$.

म्हणून, परिणामी लोडचे विस्थापन $= \frac{(\pi d_1 - \pi d_2)}{2}$ असेल

$$V.R = \frac{\pi D}{\frac{\pi d_1 - \pi d_2}{2}}$$

$$V.R = \frac{2D\pi}{\pi d_1 - \pi d_2}$$

$$V.R = \frac{2D}{d_1 - d_2}$$

उदाहरणे - डिफरंशियल व्हील आणि अॅक्सल

उदाहरण क्र.-01

एका डिफरंशियल व्हील व अॅक्सलमध्ये, व्हील चा व्यास 40 cm आहे तर अॅक्सल चा व्यास 10 cm व 8 cm आहे. जर 50 N चा एफर्ट लावल्यानंतर 1500 N चा लोड उचलला जात असेल, तर मशीनची कार्यक्षमता निश्चित करा.

उत्तर-

एफर्ट व्हील चा व्यास (D) = 40 cm

मोठ्या अॅक्सल चा व्यास (d_1) = 10 cm

छोट्या अॅक्सल चा व्यास (d_2) = 8 cm

एफर्ट (P) = 50 N

$$\text{लोड (W)} = 1500 \text{ N}$$

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2D}{d_1 - d_2} = \frac{2 \times 40}{10 - 8} = 40$$

मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$M.A = \frac{W}{P} = \frac{1500}{50} = 30$$

कार्यक्षमता काढू

$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{30}{40} \times 100$$

$$\eta = 75 \% \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.-02

एका डिफरेंशियल व्हील व अँक्सलमध्ये, व्हील चा व्यास 500 mm आहे तर अँक्सल चा व्यास 120 mm व 100 mm आहे. जर 40 N चा एफर्ट लावल्यानंतर 1200 N चा लोड उचलला जात असेल तर मशीनची कार्यक्षमता निश्चित करा. तसेच घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस व घर्षण झाल्यामुळे लोड चे झालेले लॉस सुद्धा निश्चित करा.

उत्तर-

दिलेली माहिती :-

एफर्ट व्हील चा व्यास (D) = 500 mm

मोठ्या अँक्सल चा व्यास (d_1) = 120 mm

छोट्या अँक्सल चा व्यास (d_2) = 100 mm

एफर्ट (P) = 40 N

लोड (W) = 1200 N

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2D}{d_1 - d_2} = \frac{2 \times 500}{120 - 100} = 50$$

मेकॅनिकल अडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$\begin{aligned} M.A &= \frac{W}{P} \\ &= \frac{1200}{40} \\ &= 30 \end{aligned}$$

कार्यक्षमता काढू

$$\% \eta = \frac{MA}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{30}{50} \times 100$$

$$\eta = 60 \%$$

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस

Effort lost in friction (P_f) = Actual Effort (P) – Ideal Effort (P_i)

$$P_f = P - P_i$$

$$P_f = P - \frac{W}{V.R}$$

$$P_f = 40 - \frac{1200}{50}$$

$$P_f = 16 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

घर्षण झाल्यामुळे लोड चा झालेला लॉस

Load lost in friction (W_f) = Ideal load (W_i) – Actual load (W)

$$W_f = P \times V.R - W$$

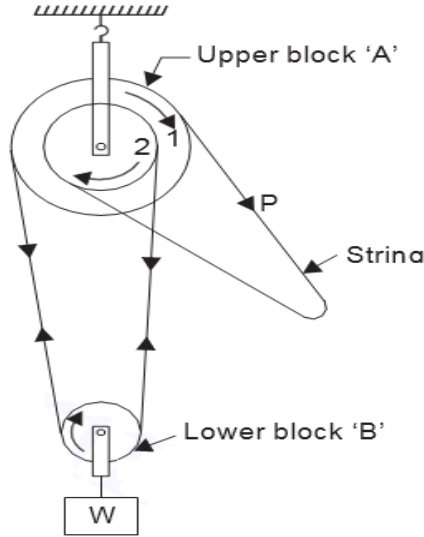
$$W_f = 40 \times 50 - 1200$$

$$W_f = 2000 - 1200$$

$$W_f = 800 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

2.3.3.वेस्टनची (Weston's) डिफरंशियल पुली ब्लॉक (Weston's differential pulley block)

आकृती 2.4 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे वेस्टनच्या डिफरंशियल पुली ब्लॉकमध्ये दोन ब्लॉक A आणि B असतात. वरच्या ब्लॉक A मध्ये दोन पुली (1 आणि 2) असतात, एकाचा व्यास दुसऱ्यापेक्षा थोडा मोठा असतो. ह्या दोन पुली एकच पुली म्हणून एकत्र गोल फिरतात. खालचा ब्लॉक B मध्ये देखील एक पुली असते, ज्यावर लोड W जोडलेला असतो. एक अंतहीन साखळी पुली '1' वरून जाते आणि नंतर खालच्या ब्लॉक मधील पुली वरून, नंतर शेवटी पुली '2' वरून जाते. उर्वरित लोम्बकळत असलेली साखळी पहिल्या मोकळ्या टोकाला जोडली जाते. एफर्ट P हा पुली '1' वरून जाणाऱ्या साखळीवर लावला जातो. साखळी घसरण्यापासून रोखण्यासाठी, पुलीच्या खोबणीमध्ये (Grooves) प्रोजेक्शन (Projection) दिले जातात.



आकृती 2.4 वेस्टनची (Weston's) डिफरंशियल पुली ब्लॉक

D = पुली 1 चा व्यास

d = पुली 2 चा व्यास,

W = उचलले जाणारे वजन

P = वजन उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट

ज्यावेळेस आपण एफर्ट P हा मोठ्या पुलीवर लावतो, त्यावेळेस साखळी मोठ्या पुलीवरून ओढली जाते. मोठ्या पुलीच्या एका परिभ्रमण मध्ये, पुलीवरून ओढल्या जाणाऱ्या साखळीची लांबी = πD .

ही लांबी म्हणजेच एफर्ट P द्वारे हलवले गेलेले अंतर आहे.

आपल्याला माहीत,आहे की, लहान पुली सुद्धा मोठ्या पुलीसोबत फिरणार आहे. त्यामुळे लहान पुलीद्वारे सोडलेल्या साखळीची लांबी = πd .

म्हणून

साखळीचे नेट शॉर्टनिंग = $\pi D - \pi d = \pi (D - d)$ (Net Shortening of Chain)

साखळीचे हे शॉर्टनिंग साखळीच्या दोन भागांमध्ये समान प्रमाणात विभाजित केले जाईल, लोडला समर्थन देईल.

ज्या अंतराने लोड वर उचलला जाईल = $\frac{\pi(D - d)}{2}$

$$V.R = \frac{\text{एफर्टचे हललेले अंतर}}{\text{लोडचे हललेले अंतर}}$$

$$V.R = \frac{\pi D}{\frac{\pi D - \pi d}{2}}$$

$$V.R = \frac{\pi D}{\frac{\pi(D - d)}{2}}$$

$$V.R = \frac{2D}{D-d}$$

जर मोठ्या आणि लहान पुलीची त्रिज्या दिली असेल तर

$$V.R = \frac{2R}{R-r}$$

जर मोठ्या आणि लहान पुलीच्या दात किंवा कॉग ची संख्या दिली असेल तर

जर, T_1 किंवा N_1 = मोठ्या किंवा वरच्या पुलीवर दात किंवा कॉग ची संख्या,

T_2 किंवा N_2 = लहान किंवा खालच्या पुलीवर दात किंवा कॉग ची संख्या

$$V.R = \frac{2T_1}{T_1 - T_2}$$

OR

$$V.R = \frac{2N_1}{N_1 - N_2}$$

उदाहरण – वेस्टनची (Weston's) डिफरंशियल पुली ब्लॉक

उदाहरण क्र.-1

एक वेस्टनचा डिफरंशियल पुली ब्लॉक हा 8 kN चा लोड उचलण्यासाठी वापरला जातो. त्यात पुलीचे व्यास 260 mm आणि 240 mm आहे. जर मशीनची कार्यक्षमता 45 % असेल तर लोड उचलण्यासाठी लागणाऱ्या एफर्ट ची किंमत निश्चित करा.

उत्तर

दिलेली माहिती

लोड (W) = 8 kN = 8000 N(1 kN = 1000 N)

मोठ्या पुलीचा व्यास (D) = 260 mm

छोट्या पुलीचा व्यास (d) = 240 mm

कार्यक्षमता (η) = 45 %

एफर्ट P = ?

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2D}{D-d}$$

$$V.R = \frac{2 \times 260}{260 - 240}$$

$$V.R = 26$$

एफर्ट P ची किंमत काढूया

$$\eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$\eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

$$P = \frac{W}{\eta \times V.R} \times 100$$

$$P = \frac{8 \times 10^3}{45 \times 26} \times 100$$

$$P = 683.76 \text{ N} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र. -2

वेस्टनच्या डिफरेंशियल पुली ब्लॉकमध्ये लहान पुलीवर 12 कॉग आणि मोठ्या पुलीवर 13 कॉग आहेत. मशीनचा नियम $P = (W/20) + 20$ आहे. जर 750 N चा लोड उचलला जात असेल तर मशीनची कार्यक्षमता शोधा.

उत्तर

दिलेली माहिती :

लहान पुलीवर कॉग (N_2) = 12

मोठ्या पुलीवर कॉग (N_1) = 13

मशीनचा नियम $P = \frac{W}{20} + 20 \text{ N}$

लोड (W) = 750 N

कार्यक्षमता (η) = ?

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2N_1}{N_1 - N_2}$$

$$V.R = \frac{2 \times 13}{13 - 12}$$

$$V.R = 26$$

एफर्ट P ची किंमत काढूया (मशीनचा नियम वापरून)

$$P = \frac{W}{20} + 20 \text{ N}$$

$$\text{Put } W = 750 \text{ N}$$

$$P = \frac{750}{20} + 20 \text{ N}$$

$$P = 57.5 \text{ N}$$

मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{750}{57.5}$$

$$M.A = 13.043$$

कार्यक्षमता η %

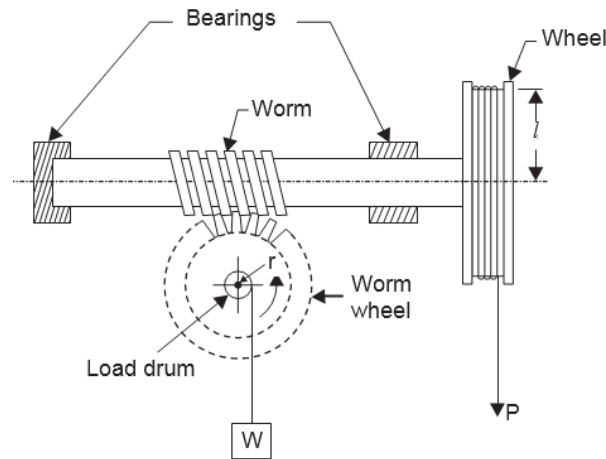
$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{13.043}{26} \times 100$$

$$\eta = 50.16 \% \quad \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

2.3.4 वर्म आणि वर्म व्हील (Worm and Worm wheel)

आकृती 2.5 मध्ये वर्म आणि वर्म व्हील दाखविले आहे. यात एक स्क्वेअर थ्रेडेड स्क्रू (वर्म म्हणून ओळखले जाते) आणि एक दात असलेले व्हील (वर्म व्हील म्हणून ओळखले जाते) एकमेकांना जोडून तयार केलेले असतात.



आकृती 2.5 वर्म आणि वर्म व्हील

वर्म ला एक दुसरे एफर्ट व्हील जोडलेले असते, ज्यावर दोरी गुंडाळलेली असते. कधीकधी व्हील ऐवजी एक हँडल वर्म ला जोडलेले असते .एक लोड ड्रम वर्म व्हील वर सुरक्षितपणे बसवला जातो.

असे मानूया कि,

$l =$ हॅडलची लांबी

$R =$ एफर्ट व्हील ची त्रिज्या

$r =$ लोड ड्रम ची त्रिज्या

$W =$ उचलला जाणारा लोड

$P =$ लोड उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट

$T =$ वर्म व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या

जर वर्म सिंगल थ्रेडेड असेल (म्हणजे वर्म च्या एका परिभ्रमण मध्ये वर्म व्हील फक्त एका दाताने पुढे ढकलले जाते)

तर मग, एफर्ट व्हील च्या किंवा हॅण्डल च्या एका परिभ्रमण मध्ये, एफर्ट (P) चे हललेले अंतर = $2\pi l$

लोड ड्रम ची होणारी हालचाल = $\frac{1}{T}$ परिभ्रमण (Revolution)

लोड (W) चे हललेले अंतर = $\frac{2\pi r}{T}$

आणि $V.R = \frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{2\pi l}{\frac{2\pi r}{T}}$$

वरील समीकरण सोडवून

$$V.R = \frac{lT}{r}$$

जर वर्म डबल थ्रेडेड असेल (म्हणजे वर्म च्या एका परिभ्रमण मध्ये वर्म व्हील फक्त अर्ध्या दाताने पुढे ढकलले जाते)

तर

$$V.R = \frac{lT}{2r}$$

साधारणतः वर्म हा 'n' थ्रेडेड असेल तर

$$V.R = \frac{lT}{nr}$$

$$V.R = \frac{DT}{nd} \quad \text{.....जर एफर्ट व्हील चा व्यास दिलेला असेल तर}$$

उदाहरणे - वर्म आणि वर्म व्हील

उदाहरण क्र. -01

एका सिंगल थ्रेडेड वर्म आणि वर्म व्हीलमध्ये, वर्म व्हीलवरील दातांची संख्या 70 आहे. एफर्ट व्हील चा व्यास 20 cm आणि लोड ड्रमचा व्यास 10 cm आहे. वेग गुणोत्तर ची किंमत काढा. मशीनची कार्यक्षमता 62 % असल्यास, 1500 N चे लोड उचलण्यासाठी किती एफर्ट लावावा लागेल ते शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती :

i) वर्म व्हीलवरील दातांची संख्या, $T = 70$

ii) हॅण्डल ची लांबी $(l) = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$

ii) लोड ड्रम ची त्रिज्या $(r) = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$

iv) मशीनची कार्यक्षमता $(\eta) = 62\%$,

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R.

$$V.R = \frac{lT}{r}$$

$$V.R = \frac{10 \times 70}{5} = 140$$

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{1500}{P}$$

मशीनची कार्यक्षमता % η

$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

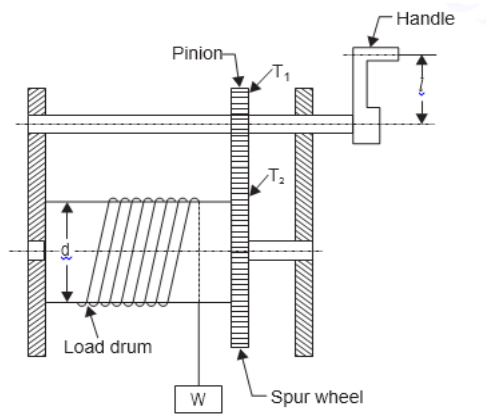
$$P = \frac{W}{\% \eta \times V.R} \times 100$$

$$P = \frac{1500}{62 \times 140} \times 100$$

$$P = 17.28 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

2.3.5 सिंगल पचेस क्रॅब विंच (Single purchase crab winch)

आकृती 2.6 मध्ये सिंगल पचेस क्रॅब विंच दाखविलेले आहे. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे एका ड्रम वर दोरीचे एक टोक फिक्स केलेले आहे व दोरी ड्रम ला गुंडाळलेली आहे.



आकृती: 2.6 सिंगल पचेस क्रॅब विंच

दोरीच्या दुसऱ्या मोकळ्या टोकाला लोड 'W' जोडलेला आहे. एक मोठे दात असलेले व्हील, ज्याला स्पर व्हील (Spur wheel) असे म्हणतात ते ड्रमवर घट्टपणे बसविलेले आहे. आणखी एक लहान दात असलेले व्हील, ज्याला पिनिअन (Pinion) असे म्हणतात ते स्पर व्हील ला जोडलेले आहे.

असे मानूया कि,

T_1 = पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या

T_2 = स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या

l = हँडलची लांबी

W = उचललेला लोड

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट, (हँडलवर लावलेला)

हँडलने एक परिभ्रमण पूर्ण केल्यावर, एफर्ट P चे हललेले अंतर = $2\pi l$.

पिनिअन ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = 1

स्पर व्हील ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

लोड ड्रम ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

लोड W चे हललेले अंतर = $\pi d \frac{T_1}{T_2}$

वेग गुणोत्तर V.R = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{2\pi l}{\pi d \cdot \frac{T_1}{T_2}}$$

$$V.R = \frac{2l}{d} \frac{T_2}{T_1}$$

जर हँडलची लांबी न देता, एफर्ट व्हील चा व्यास दिला असेल तर वेग गुणोत्तर,

$$V.R = \frac{D}{d} \frac{T_2}{T_1}$$

उदाहरणे - सिंगल पर्चेस क्रॅब विंच

उदाहरण क्र: 01

एक सिंगल पर्चेस क्रॅब विंच चा तपशील खालील प्रमाणे आहे,

हँडलची लांबी = 40 cm

लोड ड्रम चा व्यास = 20 cm

पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या = 16

स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या = 80

शोधा 1) वेग गुणोत्तर V.R आणि 2) जर मशीनची कार्यक्षमता 75 % असेल तर 2000 N चा लोड उचलण्यासाठी लागणार एफर्ट 'P' निश्चित करा

उत्तर:

दिलेली माहिती :

हँडलची लांबी(l) = 40 cm

लोड ड्रम चा व्यास (d) = 20 cm

पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या (T_1) = 16

स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या(T_2) = 80

लोड (W) = 2000 N

कार्यक्षमता(η) = 75 %

अगोदर वेग गुणोत्तर (V.R) काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2l}{d} \times \frac{T_2}{T_1}$$

$$V.R = \frac{2 \times 40}{20} \times \frac{80}{16}$$

$$V.R = 20$$

एफर्ट 'P' शोधूया, जर कार्यक्षमता % η

$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

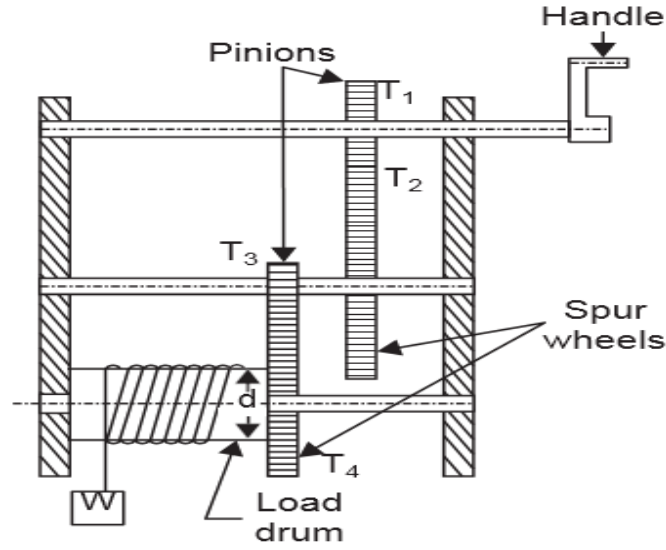
$$P = \frac{W}{\% \eta \times V.R} \times 100$$

$$P = \frac{2000}{75 \times 20} \times 100$$

$$P = 133.33 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

2.3.6 डबल पचेस क्रॅब विंच (Double purchase crab winch)

आकृती 2.7 डबल पचेस क्रॅब विंच दाखविते. या प्रकारात वेग गुणोत्तर (V.R) दोन टप्प्यांत मिळवले जाते. या लिफ्टिंग मशीनमध्ये दोन स्पर व्हील असतात ज्यांचे दात T_2 आणि T_4



आकृती 2.7 डबल पर्चेस क्रॅब विंच

असतात तसेच, दोन पिनिअन ज्यांचे दात T_1 आणि T_3 असतात. स्पर व्हील व पिनिअन एकमेकांना जोडलेले (Mesh) असतात. T_1 दात असलेला पिनिअन हा T_2 दात असलेल्या स्पर व्हील सोबत जोडलेला (Mesh) असतो. त्याचपद्धतीने T_3 दात असलेला पिनिअन हा T_4 दात असलेल्या स्पर व्हील सोबत जोडलेला (Mesh) असतो. एफर्ट P हा हँडलवर लावला जातो.

असे मानूया कि,

T_1 and T_3 = पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या

T_2 and T_4 = स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या

l = एफर्ट हँडलची लांबी

d = ड्रमचा व्यास

D = एफर्ट व्हील चा व्यास

W = उचललेला लोड

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट, (हँडलवर लावलेला)

हँडलने एक परिभ्रमण (Revolution) पूर्ण केल्यावर

एफर्ट P चे हललेले अंतर = $2\pi l$येथे l ही हँडलची लांबी आहे.

पिनिअन-1 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = 1

स्पर व्हील-2 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

पिनिअन-3 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

स्पर व्हील-4 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या $= \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$

लोड W चे हललेले अंतर $= \pi d \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$

वेग गुणोत्तर $V.R = \frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{2\pi l}{\pi d \frac{T_1 T_3}{T_2 T_4}}$$

$$V.R = \frac{2l T_2}{d T_1} \times \frac{T_4}{T_3}$$

जर हॅडलची लांबी न देता, एफर्ट व्हील चा व्यास दिला असेल तर वेग गुणोत्तर,

$$V.R = \frac{D T_2}{d T_1} \times \frac{T_4}{T_3}$$

उदाहरणे-डबल पर्चेस क्रॅब विंच

उदाहरण क्र.-01

एका डबल पर्चेस क्रॅब विंच मध्ये, पिनियनमध्ये 15 आणि 20 दात आहेत, तर स्पर व्हीलमध्ये 45 आणि 40 दात आहेत. एफर्ट हॅडल हा 400 mm चा आहे, तर ड्रमचा प्रभावी व्यास 150 mm आहे. जर या मशीनची कार्यक्षमता 40 % असेल तर हॅडलच्या शेवटी लागू केलेल्या 250 N एफर्ट मुळे किती लोड उचलला जाईल ?

उत्तर:

दिलेली माहिती

पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या, $T_1 = 15$ and $T_3 = 20$

स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या, $T_2 = 45$ and $T_4 = 40$

एफर्ट हॅडल ची लांबी (l) = 400 mm

ड्रमचा व्यास, $d = 150$ mm

कार्यक्षमता, $\eta = 40$ %

एफर्ट, $P = 250 \text{ N}$

W हा एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड आहे असे मानूया

(i) अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R

आपल्याला माहीत आहे कि,

$$V.R = \frac{2l T_2}{d T_1} \times \frac{T_4}{T_3}$$

$$V.R = \frac{2 \times 400}{150} \times \frac{45}{15} \times \frac{40}{20}$$

$$V.R = 32$$

(ii) एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड W शोधूया

$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

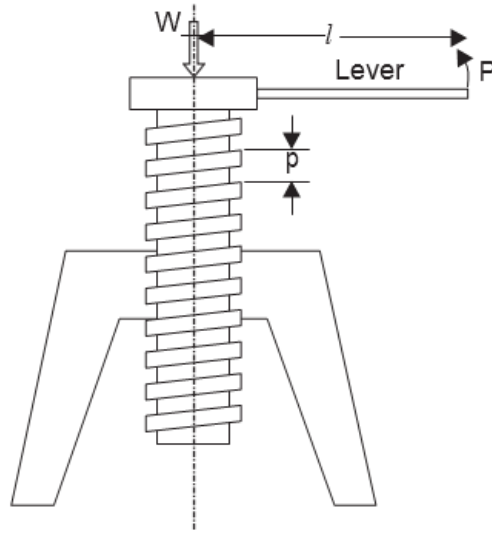
$$W = \frac{P \times V.R \times \% \eta}{100}$$

$$W = \frac{250 \times 32 \times 40}{100}$$

$$W = 3200 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

2.3.7 साधा स्क्रू जॅक (Simple Screw jack)

आकृती 2.8 मध्ये एक साधा स्क्रू जॅक दाखविलेला आहे. हे एक उपकरण आहे जे जड लोड उचलण्यासाठी वापरले जाते. लोड सहसा त्याच्या मध्यवर्ती भागावर असतो. लिवर किंवा हॅण्डल च्या मदतीने आडव्या बाजूने शक्ती (Horizontal Power) लावून लोड उचलला जातो.



आकृती 2.8 साधा स्कू जॅक

असे मानूया कि,

l = लिवर ची लांबी (किंवा पॉवर आर्म)

D = एफर्ट व्हील चा व्यास

P = लावलेला एफर्ट

W = उचललेला लोड

p = स्कू चा पीच (Pitch)

स्कू च्या एका परिभ्रमण मध्ये लोड चे हललेले अंतर = p

एफर्ट चे हललेले अंतर = $2\pi l$

वेग गुणोत्तर $V.R = \frac{\text{एफर्ट } P \text{ चे हललेले अंतर}}{\text{लोड } W \text{ चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{2\pi l}{p} \quad \text{OR} \quad V.R = \frac{\pi D}{p}$$

जर स्कू डबल थ्रेडेड असेल तर लिव्हर किंवा पॉवर आर्म (Power Arm) च्या एका परिभ्रमण मध्ये लोड हा पीच (Pitch) च्या दुप्पट उचलला जातो.

म्हणून डबल थ्रेडेड स्कू साठी वेग गुणोत्तर

$$V.R = \frac{2\pi l}{2p}$$

$$V.R = \frac{\pi l}{p}$$

उदाहरण- साधा स्क्रू जॅक

उदाहरण क्र.- 01

एक स्क्रू जॅक 30 kN चा लोड उचलतो व त्याची कार्यक्षमता 30 % आहे, तसेच त्याच्या हॅडलची लांबी 60 cm आहे .जर स्क्रूचा पिच 15 mm असेल तर लागणारा एफर्ट शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती

लोड (W) = 30 kN = 30000 N(1 kN =1000 N)

कार्यक्षमता (η) = 30%

हॅडलची लांबी(l) = 60 cm = 600 mm(1 cm = 10 mm)

स्क्रूचा पिच Pitch (p) =15 mm

अगोदर वेग गुणोत्तर (V.R) काढून घेऊ

$$\begin{aligned} V.R &= \frac{2\pi l}{p} \\ &= \frac{2 \times 3.1415 \times 600}{15} \end{aligned}$$

$$V.R = 251.32$$

एफर्ट P शोधूया

$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

$$P = \frac{W}{\% \eta \times V.R} \times 100$$

$$P = \frac{30 \times 10^3}{30 \times 251.32} \times 100$$

$$P = 397.89 \text{ N}$$

उदाहरण क्र.- 02

एका स्क्रू जॅकमध्ये एफर्ट व्हील चा व्यास 200 mm आणि पिच 5 mm आहे. 150 N च्या एफर्ट मुळे 1000 N चा लोड उचलला जातो. तर स्क्रू जॅकची कार्यक्षमता शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती

- i. एफर्ट व्हील चा व्यास (D) = 200 mm
- ii. स्क्रूचा पिच Pitch (p) = 5 mm
- iii. लोड (W) = 1000 N
- iv. एफर्ट (P) = 150 N
- v. कार्यक्षमता = ?

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R

$$V.R = \frac{\pi D}{p} = \frac{3.1415 \times 200}{5} = 125.66$$

मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{1000}{150}$$

$$M.A = 6.67$$

कार्यक्षमता काढू

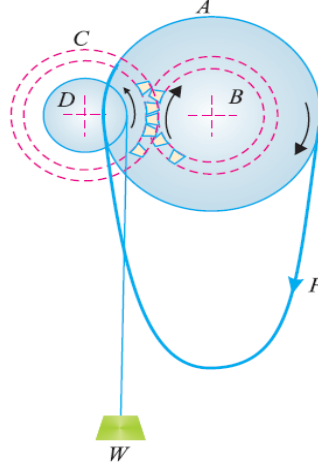
$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{6.67}{125.66} \times 100$$

$$\eta = 5.3 \%$$

2.3.8 गियर पुली ब्लॉक (Geared Pulley block)

हे डिफरेंशियल पुली ब्लॉकचे सुधारित रूप आहे ज्यामध्ये गियर्सच्या मदतीने वेग गुणोत्तर तीव्र (Intensified) केले जाते. गियर पुली ब्लॉकमध्ये कॉगव्हील A असते, ज्याभोवती एक अंतहीन साखळी असते. एक लहान गियर व्हील B, ज्याला पिनियन म्हणतात. कॉगव्हील A व पिनियन B एकाच शाफ्ट वर जोडलेले असतात. व्हील B हा दुसऱ्या मोठ्या व्हील C सह जोडला (Geared) आहे, ज्याला स्पर व्हील म्हणतात. कॉगव्हील D व स्पर व्हील C एकाच शाफ्ट वर जोडलेले असतात. लोड हा एका साखळीशी जोडलेला असतो जी साखळी कॉगव्हील D वरून जातो. एफर्ट हा अंतहीन साखळीवर लावला जातो, जी साखळी व्हील A वरून जाते जसे आकृती 2.9 मध्ये दाखविलेले आहे.



आकृती 2.9 गियर पुली ब्लॉक

आपण असे मानूया,

T_1 = व्हील A वरील कॉगची संख्या (ह्यालाच एफर्ट व्हील म्हटले जाते)

T_2 = व्हील B वरील दातांची (teeth) संख्या (ह्यालाच पिनिअन असे म्हटले जाते)

T_3 = व्हील C वरील दातांची संख्या (ह्यालाच स्पर व्हील म्हटले जाते),

T_4 = व्हील D वरील कॉगची (Cogs) संख्या (ह्यालाच लोड व्हील म्हटले जाते)

आपल्याला माहित आहे कि,

कॉग व्हील A च्या एका परिभ्रमणामध्ये एफर्ट चे हललेले अंतर, = T_1

पिनिअन-B ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = 1

स्पर व्हील C ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_2}{T_3}$

लोड व्हील D ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_2}{T_3}$

∴ लोड W चे हललेले अंतर = $\frac{T_2}{T_3} \times T_4$

वेग गुणोत्तर (V.R) = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{T_1}{\frac{T_2}{T_3} \times T_4}$$

$$V.R = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$$

उदाहरणे- गियर पुली ब्लॉक

उदाहरण क्र.- 01

एक गियर पुली ब्लॉक जो लोड उचलण्यासाठी वापरला जातोय त्याचे डायमेन्शन खालील प्रमाणे दिलेले आहेत. एफर्ट व्हील वरील कॉग ची संख्या = 90, लोड व्हीलवरील कॉगची संख्या = 8, पिनियन वरील दातांची संख्या = 25, स्पर व्हील वरील दातांची संख्या = 40. जर मशीनद्वारे 50 N चा एफर्ट लावला जात असेल तर जास्तीत जास्त किती लोड उचलला जाऊ शकतो ते शोधा. पुली ब्लॉकची कार्यक्षमता 75 % घ्या.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given):

एफर्ट व्हील वरील कॉगची संख्या (T_1) = 90

पिनियनवरील दातांची संख्या = (T_2) = 25

स्पर व्हीलवरील दातांची संख्या (T_3) = 40

लोड व्हीलवरील कॉगची संख्या (T_4) = 8

एफर्ट (P) = 50 N

कार्यक्षमता (η %) = 75 %

W हा एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड आहे असे मानूया

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R

$$V.R = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{T_3}{T_4}$$

$$V.R = \frac{90}{25} \times \frac{40}{8}$$

$$V.R = 18$$

एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड W शोधूया

$$\% \eta = \frac{M.A}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \times 100$$

$$\% \eta = \frac{W}{P \times V.R} \times 100$$

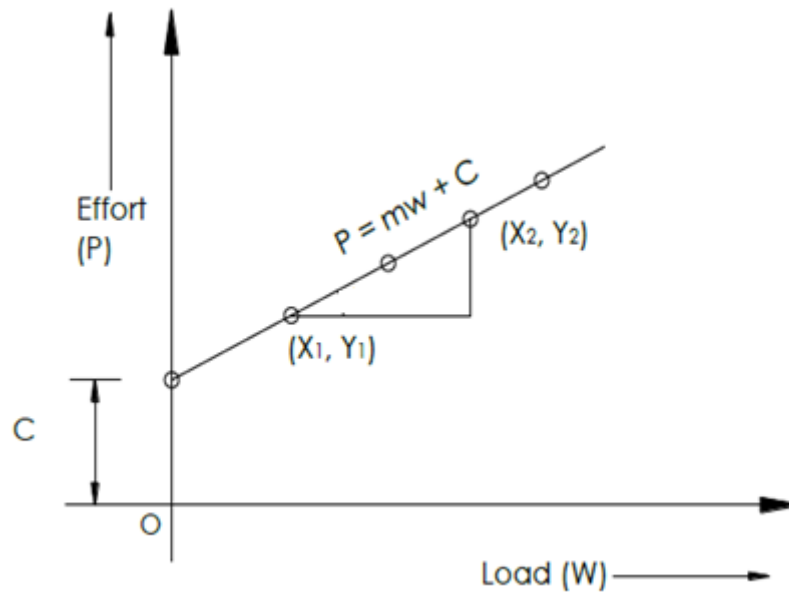
$$W = \frac{P \times V.R \times \% \eta}{100}$$

$$W = \frac{50 \times 18 \times 75}{100}$$

$$W = 675 \text{ N}$$

2.4 आलेख (GRAPHS)

2.4.1 लोड v/s एफर्ट (Load v/s Effort):

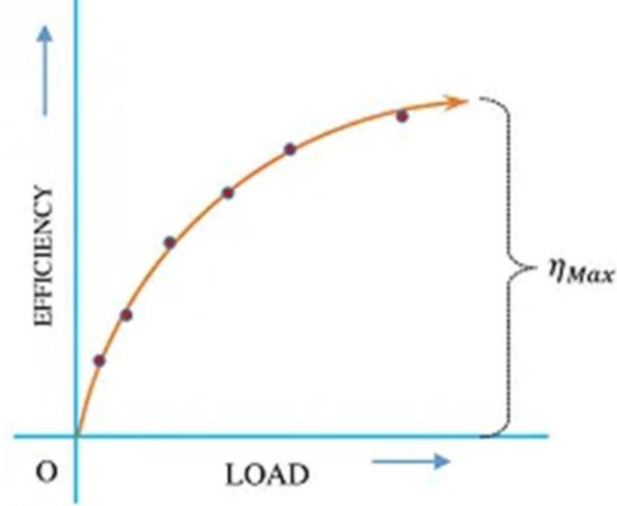


आकृती 2.10: लोड v/s एफर्ट

लोड v/s एफर्ट चा आलेख हा एक सरळ रेषा आहे, जी y-axis ला 'C' इंटरसेप्ट देऊन कट करते, जे शून्य लोड ला घर्षणामुळे झालेले एफर्टचे लॉस दर्शविते.

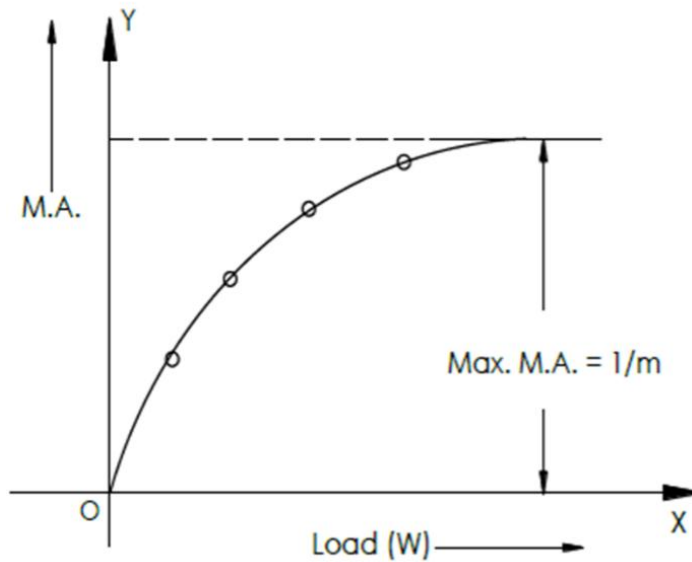
2.4.2 लोड v/s टक्केवारी कार्यक्षमता ($\% \eta$) (Load v/s Percentage Efficiency ($\% \eta$)):

लोड v/s $\%$ कार्यक्षमतेचा आलेख खालील आकृती 2.11 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे वक्र आहे. जसजसा लोड (Load) वाढतो, कार्यक्षमतेची टक्केवारी देखील वाढते आणि त्यामुळे हळूहळू वक्र (Curve) गुळगुळीत (Smooth) बनतो व वाढतजातो आणि क्ष-अक्षांशी (x-axis) कमी-अधिक समांतर बनतो.



आकृती 2.11: लोड v/s टक्केवारी कार्यक्षमता

2.4.3 लोड v/s मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज (Load v/s Mechanical Advantage):

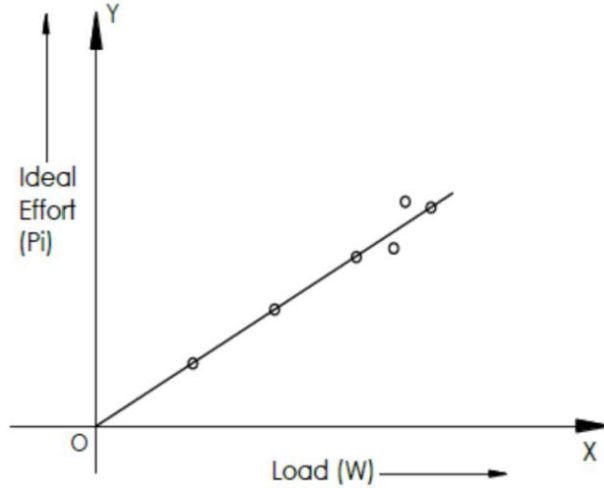


आकृती 2.12: लोड v/s मेकॅनिकल अँडवॉंटेज

लोड v/s मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज चा आलेख हा वक्र आहे आणि तो आकृती 2.12 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे वक्र आहे. जसजसा लोड वाढतो तसतसा मेकॅनिकल अॅडव्हान्टेज देखील वाढतो आणि म्हणून हळूहळू वाढत्या वक्रला (Curve) गुळगुळीत (Smooth) करते.

2.4.4 लोड v/s आयडिअल एफर्ट: Load v/s Ideal Effort (P_i):

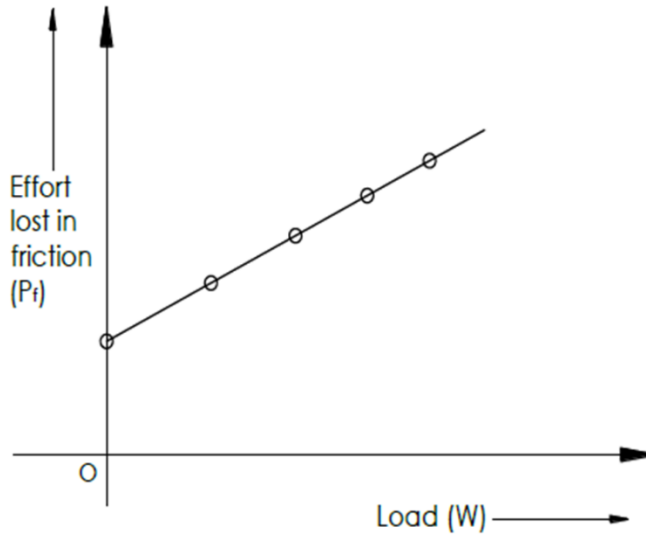
लोड v/s आयडिअल एफर्टचा आलेख आकृती 2.13 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे मूळबिंदू मधून जाणारी सरळ रेषा आहे.



आकृती 2.13: लोड v/s आयडिअल एफर्ट (P_i)

2.4.5 लोड v/s घर्षणातील एफर्ट चा लॉस (Effort lost) (P_f):

लोड v/s घर्षणातील एफर्टचा लॉस चा आलेख हा एक सरळ रेषा आहे, जी y-axis ला 'C' इंटरसेप्ट देऊन कट करते, जे शून्य लोड ला घर्षणामुळे झालेले एफर्टचा लॉस दर्शविते.



आकृती 2.14: लोड v/s घर्षणातील एफर्टचा लॉस

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

थिओरिटिकल प्रश्न (Theoretical questions)

1. मशीन म्हणजे काय? त्याची वैशिष्ट्ये सांगा.
2. उदाहरणासह खालील गोष्टी स्पष्ट करा:
 - (i) साधी मशीन
 - (ii) कंपाऊंड मशीन.
3. व्याख्या लिहा:

मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज, वेग गुणोत्तर, मशीनचे इनपुट आणि मशीनची कार्यक्षमता.
4. मशीनची कार्यक्षमता, मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज आणि वेग गुणोत्तर यांच्यातील संबंध प्रस्थापित करा.
5. मशीनमध्ये घर्षण होण्याच्या परिणामाची थोडक्यात चर्चा करा.
6. सिद्ध करा की मशीनची कार्यक्षमता 50% पेक्षा जास्त असल्यास मशीन रिव्हर्सिबल होईल.
7. सेल्फ लॉकिंग मशीन म्हणजे काय?
8. मशीनचा नियम काय आहे?
9. खालील लिफ्टिंग मशीनवर व्यवस्थित आकृत्यासह थोडक्यात चर्चा करा:
 - (i) व्हील आणि डिफरंशिअल अँक्सल
 - (ii) साधा स्कू जॅक
 - (iii) वेस्टनचे डिफरंशिअल पुली ब्लॉक
 - (iv) सिंगल पर्चेस क्रॅब विंच
 - (v) वर्म आणि वर्म व्हील.

न सोडवलेली उदाहरणे (Unsolved Examples)

- 1) लिफ्टिंग मशीनमध्ये 14 N च्या एफर्ट मधून 550 N चा लोड उचलला जातो. लोड 6 mm ने हलतो तर एफर्ट च्या उपयोजित बिंदू 450 cm ने हलतो.

शोधा:

 - (i) मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज
 - (ii) वेग गुणोत्तर
 - (iii) या मशीनची कार्यक्षमता.
- 2) मशीनचा वेग गुणोत्तर 22 आहे. जर या मशीनची कार्यक्षमता 62 % असेल तर 250 N चे लोड उचलण्यासाठी किती एफर्ट ची आवश्यकता असेल.
- 3) एक मशीन 40 N च्या एफर्ट मधून 460 N चा लोड उचलू शकते. मशीनचा वेग गुणोत्तर 22 आहे. एफर्ट च्या आणि लोडच्या दृष्टीने मशीनचे घर्षण निश्चित करा. तसेच त्याची कार्यक्षमता शोधा.

4) एका विशिष्ट मशीनचा वेग गुणोत्तर 75 आहे. मशीन चा नियम $P = 4$ आहे.तर कमाल मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज आणि कमाल कार्यक्षमता काय असेल? तसेच मशीन रिव्हर्सिबल आहे कि नाही हे सांगा.

5) एका मशीनमध्ये असे आढळून आले की 25 N आणि 20 N चे एफर्ट अनुक्रमे 155 N आणि 255 N चे लोड उचलण्यासाठी आवश्यक आहेत. जर मशीनचा वेग गुणोत्तर 28 असेल, शोधा:

- (i) मशीन चा नियम
- (ii) 450 N चा लोड उचलण्यासाठी लागणारा एफर्ट
- (iii) मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज
- (iv) कार्यक्षमता
- (v) घर्षणातील एफर्ट चे लॉस.

6) साधे व्हील आणि अॅक्सलमध्ये, व्हील चा व्यास 28 cm आणि अॅक्सल चा 12 cm आहे. जर मशीनची कार्यक्षमता 65 % असेल तर 35 N लोड उचलण्यासाठी आवश्यक एफर्ट शोधा.

7) वेस्टनच्या डिफरेंशियल पुली ब्लॉकमध्ये मोठ्या पुलीवर 12 रिसेसेस (recesses) असतात आणि 8 लहान पुलीवर असतात. 65 N चे एफर्ट लावल्यास 650 N चे लोड उचलण्यासाठी मशीनची कार्यक्षमता निश्चित करा.

8) डिफरेंशियल पुली ब्लॉकमध्ये, कॉन्सन्ट्रीक पुलीची त्रिज्या अनुक्रमे 15 cm आणि 10 cm आहे. असे आढळून आले आहे की 20 N चा एफर्ट फक्त 100 N चा लोड उचलतो. गणना करा (Calculate) i) मशीनची कार्यक्षमता (ii) घर्षणातील एफर्ट चे लॉस आणि (iii) घर्षण लोड

9) सिंगल पर्चेस क्रॅब विंच मध्ये, हँडलची लांबी 25 cm आणि गियर रेशो (Gear Ratio) 8 असते. मशीनचे वेग गुणोत्तर आणि कार्यक्षमता शोधा, जर 580 N चे लोड 40 N च्या एफर्ट मधून उचलले गेले असेल. ड्रमचा व्यास आहे 12 cm.

10) लीव्हरची लांबी = 1.2 m; एफर्ट अॅक्सलच्या पिनीयनवर दातांची संख्या = 12; काउंटर अॅक्सलच्या स्पर व्हीलवरील दातांची संख्या = 120; काउंटर अॅक्सलच्या पिनीयनवर दातांची संख्या = 16; लोड अॅक्सलवर दातांची संख्या = 160; लोड अॅक्सलचा व्यास (ड्रम) = 260 mm, वेग गुणोत्तर आणि 60 N च्या एफर्ट मधून उचलता येणारा लोड शोधा, जर या लोड ला कार्यक्षमता 50 % असेल.

11) स्कू जॅकचा मेकॅनिकल अँडव्हान्टेज आणि कार्यक्षमता शोधा, जर 2600 N चा लोड उचलण्यासाठी 220 mm लांब आर्मच्या शेवटी 12 N चा एफर्ट लावलेला असेल. स्कूचा पिच (Pitch) 6 mm आहे.

मायक्रोप्रोजेक्ट: (Micro projects)

1) वेगवेगळ्या साधे उचलण्याचे मशीनचे मॉडेल तयार करा.

घटक - 3

रिझोल्युशन आणि कॉम्पोजिशन

(Resolution and Composition)

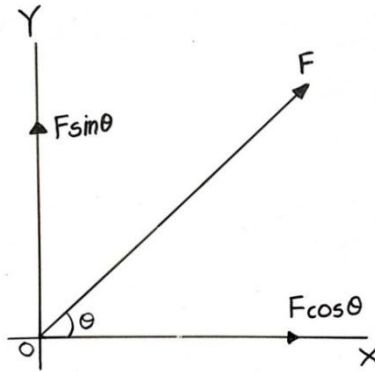
विषय निष्पत्ती (Course Outcome): भिन्न अभियांत्रिकी प्रणालीचे अज्ञात बल निश्चित करा.

घटक निष्पत्ती (Unit Outcome):

1. दिलेल्या बल प्रणालीचे निराकरण (Resolve) करा.
2. दिलेल्या बल प्रणालीच्या रिझल्टन्टची विश्लेषणात्मक गणना करा.
3. दिलेल्या बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट भौमितीयरित्या निश्चित करा.
4. त्रिकोणाचा नियम आणि समांतरभुजचा नियम वापरून दिलेल्या बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट शोधा.

3.1 बलाचे रिझोल्युशन (Resolution of Force)

दोन किंवा अधिक बल शोधण्याच्या प्रक्रियेला ज्याचा परिणाम वस्तूवर कार्य करणाऱ्या बलाप्रमाणेच होईल त्याला बलाचे रिझोल्युशन (Resolution of Force) असे म्हणतात. हे आकृती 3.1 मध्ये दाखवले आहे. येथे F हे बल आहे. जे $F\sin\theta$ आणि $F\cos\theta$ सारख्या दोन लंब घटकांमध्ये (Perpendicular components) सोडवले जाते. येथे θ हा x -axis च्या सोबत रिझल्टन्ट ने केलेला कोन आहे.

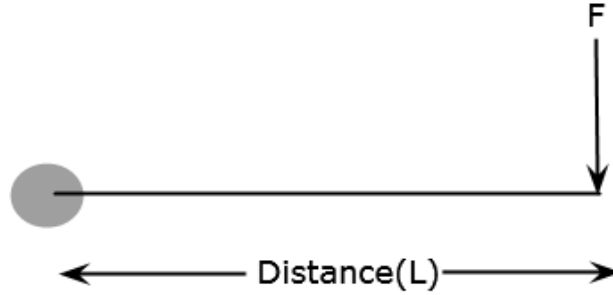


आकृती.3.1: बलाचे रिझोल्युशन

3.1.1 बलाचा मोमेन्ट (Moment of a Force)

बलाचा मोमेन्ट हा त्याच्या रोटेशनल प्रभावाचे मोजमाप आहे. हे बलाच्या परिमाण (Magnitude) आणि बलाच्या क्रियेच्या लंबवत अंतराचे (Perpendicular Distance) म्हणून परिभाषित केले

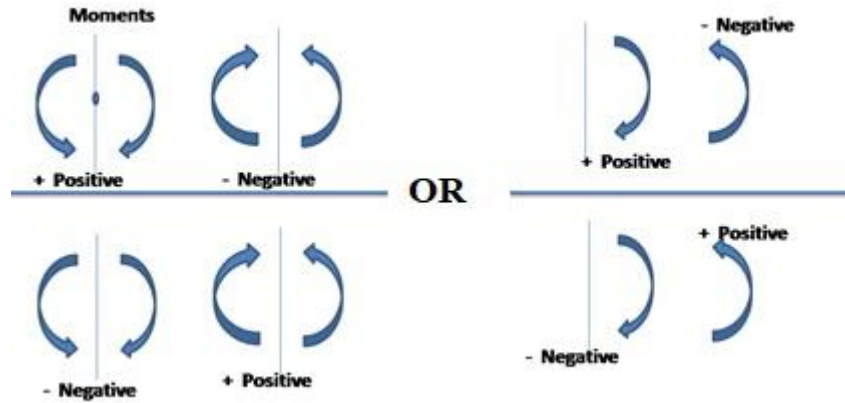
जाते. बलाचा मोमेन्ट हा बल आणि त्या मधील बिंदूच्या लंबवत अंतराचा (Perpendicular Distance) गुणाकार असतो हे आकृती 3.2 मध्ये दर्शवले आहे.



आकृती.3.2: बलाचा मोमेन्ट

बलाचा मोमेन्ट = बल(Force) \times लंबवत अंतर (Perpendicular Distance)

$$\text{Moment} = F \times L$$



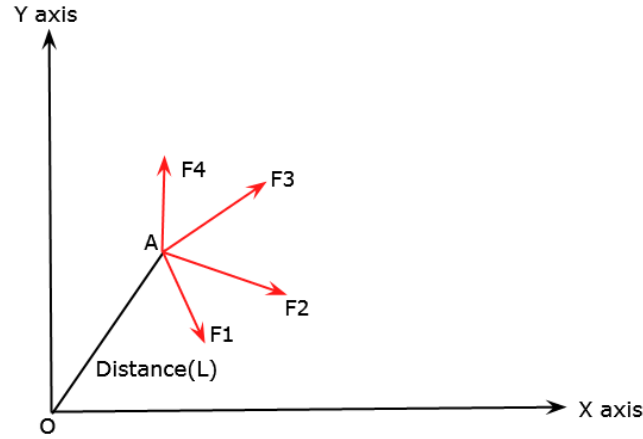
आकृती 3.3: साइन कन्व्हेन्शन

वरील आकृती 3.3 मध्ये बलाच्या मोमेन्टचे साइन कन्व्हेन्शन दाखवलेले आहे.

जर, बल न्यूटन (N) आणि अंतर मिलिमीटरमध्ये (mm) घेतले तर मोमेन्टचे एकक न्यूटन एम एम (N-mm) असेल. अभियांत्रिकीमध्ये मोमेन्टचे सामान्यतः वापरले जाणारे एकक किलो न्यूटन एम-एम (kNmm), न्यूटन मिटर (N-m) आणि न्यूटन-एमएम (N-mm) आहेत

3.1.2: व्हेरिग्ननचे प्रमेय (Varignon's Theorem)

काँकुरण्ट बल (Concurrent forces) प्रणालीच्या एका बिंदूबद्दलच्या मोमेन्टची बीजगणितीय बेरीज (Algebraic sum) ही एकाच बिंदूबद्दल या सर्व बलाच्या मोमेन्टचा रिझल्टन्ट आहे.



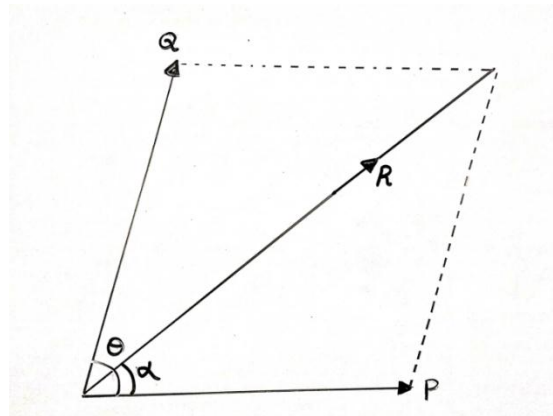
आकृती 3.4: व्हेरिगननचे प्रमेय

3.2 बलाचे कॉम्पोजिशन (Composition of Force)

रिझल्टन्ट शोधण्याच्या प्रक्रियेला बलाचे कॉम्पोजिशन असे म्हणतात. एकाच बलाचा शोध घेणे शक्य आहे ज्याचा परिणाम वस्तूवर कार्य करणाऱ्या अनेक बलाप्रमाणे असे. त्या एकच बलाला रिझल्टन्ट असे म्हणतात.

3.2.1. बलाचा समांतरभुजचा नियम (Parallelogram law of Forces)

बलाच्या समांतरभुज नियमात असे नमूद केले आहे की, “जर एका वस्तूवर (On a particle) एकाच वेळी कार्य करणाऱ्या दोन बलाला समांतर चतुर्भुजच्या (Parallelogram) दोन समीप बाजूंनी (Two side) परिमाण (Magnitude) आणि दिशेने (In the direction) प्रतिनिधित्व केले जात असेल तर, त्याचा रिझल्टन्ट समांतर चतुर्भुजच्या कर्णाच्या (Diagonal) परिमानाणे आणि दर्शविला जातो; जो कि बलाच्या विरुद्ध दिशेने असतो”. खालील आकृती 3.5 मध्ये बलाचा समांतरभुजचा नियम दाखवलेला आहे. तसेच बल P आणि Q मधील कोन ‘ θ ’ आहे



आकृती 3.5: बलाचा समांतरभुजचा नियम

गणितीय पद्धतीने (Mathematically) ; रिझल्टन्ट $(R) = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$

येथे P आणि Q दोन बल आहेत रिझल्टन्ट ची दिशा (α) ने दिली जाते.

$$\text{रिझल्टन्टची दिशा } (\alpha) = \tan^{-1} \left| \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta} \right|$$

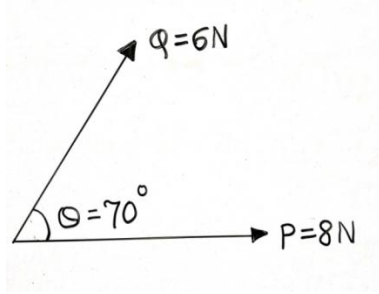
बलाच्या समांतरभुज नियमाच्या मर्यादा :

1. हे केवळ वस्तूवर कार्य करणाऱ्या दोन बलाना लागू आहे.
2. बल काँकुरंट (Concurrent) असणे आवश्यक आहे.

उदाहरण: बलाचा समांतरभुजचा नियम

उदाहरण क्र.-01

दोन बल 8 N आणि 6 N हे एका वस्तूवर (A particle) त्यांच्या क्रियेच्या (With their line of action) रेषेसह 70 च्या कोनात झुकलेले आहे (Inclined), तर रिझल्टन्टची (R) मॅग्निट्यूड (Magnitude) आणि दिशा (Direction) शोधा.



आकृती 3.6: बलाचा समांतरभुजचा नियम

दिलेली माहिती : $P = 8 \text{ N}$, $Q = 6 \text{ N}$, $\theta = 70^\circ$

शोधा : रिझल्टन्टची (R) मॅग्निट्यूड (Magnitude) आणि दिशा (Direction) शोधा.

उत्तर : वरील आकृती 3.6 मध्ये वस्तूवर लागू होणारे बल दाखवलेले आहे आपल्याला माहित आहे की,

$$\text{रिझल्टन्ट } (R) = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

$$R = \sqrt{8^2 + 6^2 + 2 \times 8 \times 6 \cos 70^\circ}$$

$$R = \sqrt{64 + 36 + 96 \cos 70^\circ}$$

$$R = \sqrt{100 + 96 \cos 70^\circ}$$

$$R = \sqrt{132.83}$$

$$R = 11.53 \text{ N} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

रिझल्टन्ट ची दिशा (α)

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{Q \sin \theta}{P+Q \cos \theta} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{6 \sin 70}{8+6 \cos 70} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{5.63}{10.05} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} | 0.56 |$$

$$\alpha = 29.75^\circ \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.-02

दोन काँकरण्ट 200 N बलासाठी आणि त्यांच्या 150 N रिझल्टन्टसाठीचा कोन शोधा.

दिलेली माहिती : बल $P = Q = 200 \text{ N}$

शोधा : बला-मधील कोन (θ).

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की, $(R) = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$

$$150 = \sqrt{[100^2 + 100^2 + 2 \times 100 \times 100 \cos \theta]}$$

$$150^2 = [100^2 + 100^2 + (2 \times 100 \times 100 \cos \theta)]$$

$$22500 = 20000 + (20000 \cos \theta)$$

$$2500 = 20000 \cos \theta$$

$$\cos \theta = (2500/20000)$$

$$\cos \theta = 0.125$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.125)$$

$$\theta = 82.82^\circ$$

$$\text{बला-मधील कोन } (\theta) = 82.82^\circ \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

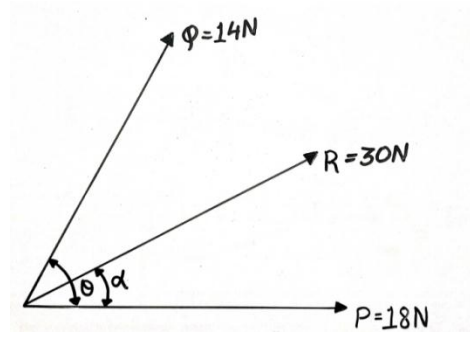
उदाहरण क्र.-03

18 N आणि 14 N हे दोन बल अशा वस्तूवर लागू होत आहेत की त्यांचा रिझल्टन्ट 30 N आहे, तर त्यांच्या बला-मधील कोन आणि रिझल्टन्ट ची दिशा शोधा.

दिलेली माहिती : बल $P = 18 \text{ N}$, $Q = 14 \text{ N}$, $R = 30 \text{ N}$

शोधा : 1. बला-मधील कोन (θ).

2. रिझल्टन्टची दिशा (α)



आकृती 3.7: बलाचा समांतरभुजचा नियम

उत्तर : वरील आकृती 3.7 मध्ये वस्तुवर लागू होणारे बल दाखवलेले आहे, आपल्याला माहित आहे की,

$$\text{रिझल्टन्ट (R)} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

$$30 = \sqrt{18^2 + 14^2 + 2 \times 18 \times 14 \cos \theta}$$

$$30^2 = [18^2 + 14^2 + (2 \times 18 \times 14 \cos \theta)]$$

$$900 = 520 + (504 \cos \theta)$$

$$380 = 504 \cos \theta$$

$$\cos \theta = (380/504)$$

$$\cos \theta = 0.75$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.75)$$

$$\theta = 41.06^\circ$$

बला-मधील कोन (θ) = 41.06° उत्तर

$$\text{रिझल्टन्ट ची दिशा } (\alpha) = \tan^{-1} \left| \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{14 \sin 41.06}{18 + 14 \cos 41.06} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{9.20}{28.56} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} [0.32]$$

$$\alpha = 17.74^\circ \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.-04

जर दोन समान बल आणि त्यांचा रिझल्टन्ट P देखील बरोबर असतील , तर P मधील कोन शोधा.

दिलेली माहिती : बल $P = Q = P$ (Newton) मध्ये आणि रिझल्टन्ट $(R) = P$ (Newton) मध्ये

शोधा : 1.बला-मधील कोन (θ).

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की,

$$\text{रिझल्टन्ट (R)} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

$$P = \sqrt{P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \cos \theta}$$

$$P = \sqrt{2P^2 + 2P^2 \cos \theta}$$

$$P^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos \theta$$

$$-P^2 = 2P^2 \cos \theta$$

$$-(1/2) = \cos \theta$$

$$\cos \theta = -0.5$$

$$\theta = \cos^{-1}(-0.5)$$

$$\theta = 120^\circ \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

3.2.2 त्रिकोणाचा नियम (Law of Triangle)

त्रिकोणाच्या नियमामध्ये असे नमूद केले आहे की, "जर दोन बल त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या परिमाण आणि दिशेने दर्शविली गेली असतील तर बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजूने विरुद्ध दिशेने मिळू शकतो". खालील आकृती 3.8 मध्ये दोन बल P आणि Q त्रिकोणाच्या दोन बाजूंनी परिमाण आणि दिशेने दर्शविला आहे आणि बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजूने दर्शविला आहे, जो P & Q च्या विरुद्ध दिशेने (Opposite Direction) आहे.



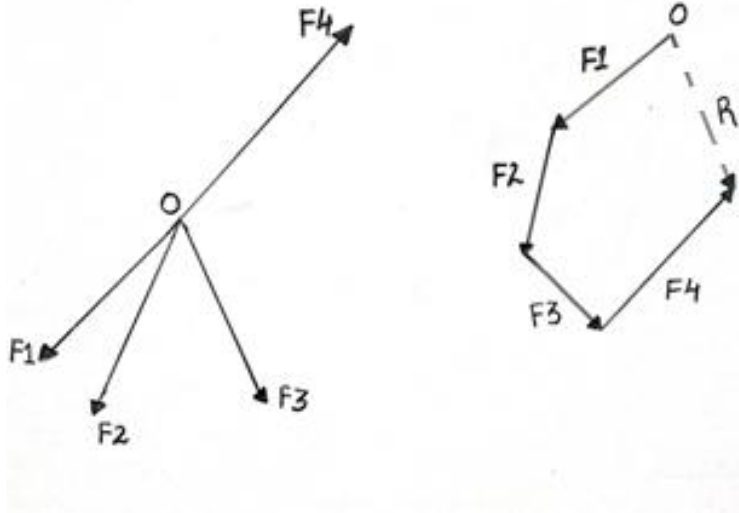
आकृती 3.8: त्रिकोणाचा नियम

जेव्हा वस्तूवर कार्य करणारे बल दोनपेक्षा जास्त असतात, तेव्हा त्रिकोणाचा नियम पॉलीगोनच्या नियमापर्यंत वाढवता येतो.

3.2.3 पॉलीगोन चा नियम (Polygon Law)

पॉलीगोनच्या नियमामध्ये असे नमूद केले आहे की, "जर एका वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करणारी अनेक को-प्लेनर कॉंकरण्ट बल एका बहुभुजाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने दर्शविली आणि क्रमाने घेतली गेली असतील तर, त्या बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट बहुभुजाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने बंद करून दर्शविला जातो; जो कि बलाच्या विरुद्ध दिशेने

असतो'. खालील 3.9 आकृतीत को-प्लेनर (Coplanar) कॉंकरण्ट बल एका वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करतात आणि ते बहुभुजाच्या बाजूंनी परिमाण आणि दिशेने दर्शविले जातात, येथे बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट बहुभुजाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने बंद करून (Closed) विरुद्ध दिशेने (Opposite direction) दर्शविले आहे.

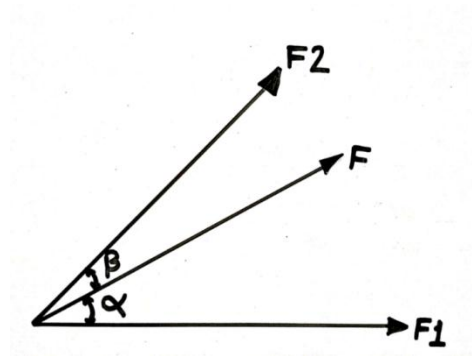


आकृती 3.9: पॉलीगोन चा नियम

3.2.4: नॉन लंब बल प्रणाली (Non perpendicular force system.)

यामध्ये सहसा बल आणि बला दरम्यान चे कोन दिले जातात आणि सहसा आपल्याला F_1 च्या दिशेचा बल आणि F_2 च्या दिशेचा बल शोधणे आवश्यक असते.

समजा F हि बल प्रणाली आकृती 3.10 मध्ये दिलेली आहे.



आकृती 3.10: रिझल्टन्ट आणि त्याचे नॉन-ऑर्थोगोनल (Non orthogonal) घटक (Component)

$\alpha = F$ आणि F_1 मधील कोन (angle)

$\beta = F$ आणि F_2 मधील कोन

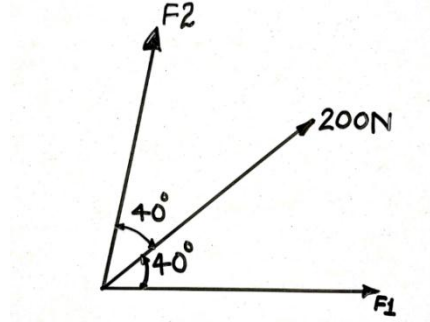
F_1 च्या दिशेचा बल $F_1 = \left[\frac{F \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \right]$

$$F_2 \text{ च्या दिशेचा बल } F_2 = \left[\frac{F \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \right]$$

उदाहरणे: नॉन लंब बल प्रणाली

उदाहरण क्र.- 01

200 N चा बल जो दोन्ही बाजूंच्या दोन दिशांना प्रत्येकी 40° च्या कोनात कार्य करतो, तर त्या बलाचे घटक शोधा.



आकृती 3.11: रिझल्टन्ट आणि त्याचे नॉन-ऑर्थोगोनल घटक

दिलेली माहिती : बल $F = 200 \text{ N}$ आणि $\alpha = \beta = 40^\circ$

शोधा : F_1 च्या दिशेचा बल आणि F_2 च्या दिशेचा बल

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की,

$$F_1 = \left[\frac{F \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \right]$$

$$F_1 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin (40 + 40)} \right]$$

$$F_1 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin 80} \right]$$

$$F_1 = 130.54 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

$$F_2 = \left[\frac{F \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \right]$$

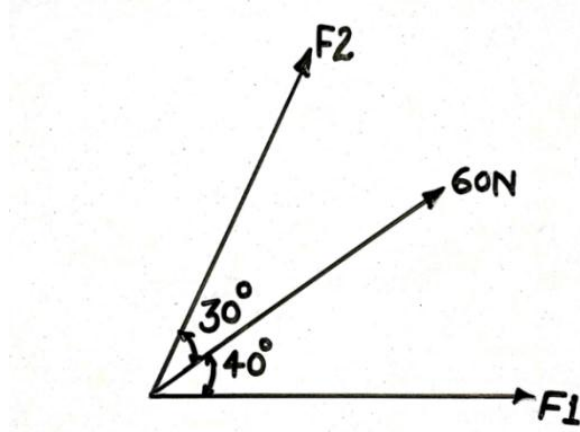
$$F_2 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin (40 + 40)} \right]$$

$$F_2 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin 80} \right]$$

$$F_2 = 130.54 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 02

60 N च्या बलाचे दोन बाजूंनी 40° आणि 50° मध्ये दोन्ही बाजूंनी रिझोल्युशन करा.



आकृती 3.12: रिझल्टन्ट आणि त्याचे नॉन-ऑर्थोगोनल घटक

दिलेली माहिती : बल $F = 60 \text{ N}$, $\alpha = 40^\circ$ आणि $\beta = 30^\circ$

शोधा : F_1 च्या दिशेचा बल आणि F_2 च्या दिशेचा बल

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की,

$$F_1 = \left[\frac{F \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right]$$

$$F_1 = \left[\frac{60 \sin 30}{\sin (40 + 30)} \right]$$

$$F_1 = \left[\frac{60 \sin 30}{\sin 70} \right]$$

$$F_1 = 31.93 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

$$F_2 = \left[\frac{F \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \right]$$

$$F_2 = \left[\frac{60 \sin 40}{\sin (40 + 30)} \right]$$

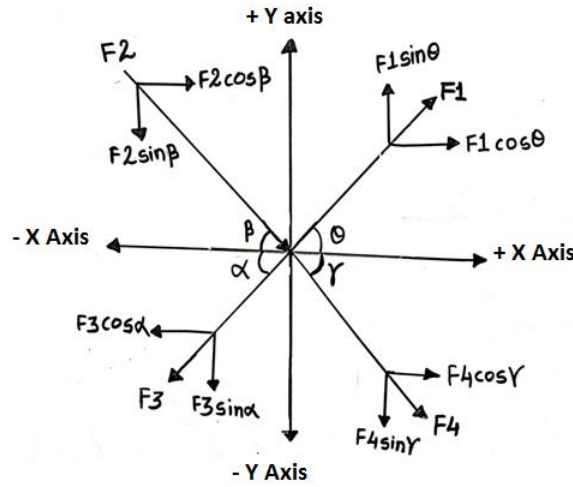
$$F_2 = \left[\frac{60 \sin 40}{\sin 70} \right]$$

$$F_2 = 41.02 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

3.2.5 काँकरण्ट, नॉनकाँकरण्ट आणि पॅरेलल को-प्लेनर बल सिस्टमसाठी रिझल्टन्ट निश्चित करण्याची विश्लेषणात्मक पद्धत (Analytical Method of Determination of Resultant for Concurrent, Non Concurrent and Parallel Co-Planer Force System)

काँकरण्ट, नॉनकाँकरण्ट आणि पॅरेलल को-प्लेनर बल सिस्टीमचा रिझल्टन्ट खालील चरणांद्वारे (Step) सहजपणे शोधला जाऊ शकतो.

स्टेप 1: आकृती 3.13 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या घटकांकडे (Vertical) झुकलेल्या (Inclined) सर्व बलाचे निराकरण (Resolve) करा.

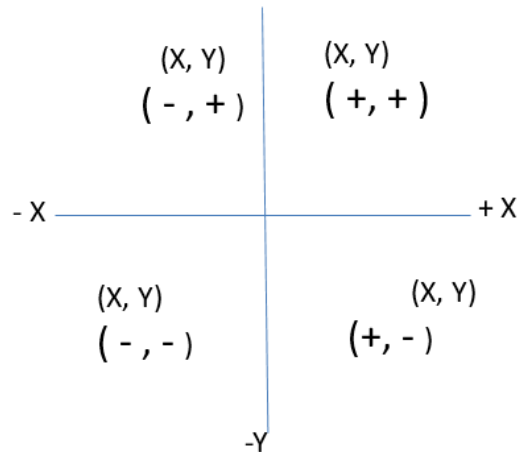


आकृती 3.13: रिझोल्युशन चे ऑर्थोगोनल घटक.

स्टेप 2: ΣF_x आणि ΣF_y शोधा.

स्टेप 3: ΣF_x आणि ΣF_y च्या मदतीने, रिझल्टन्ट (R) ची मॅग्निट्यूड आणि दिशा (Direction) शोधा.

स्टेप 4: कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम च्या साईन कन्व्हेन्शन चा विचार करून चतुर्भुज (Coordinate) मध्ये रिझल्टन्ट शोधा.



आकृती 3.14: कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम

स्टेप 5: गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल एक्स-अक्षकडे (x-axis) झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.

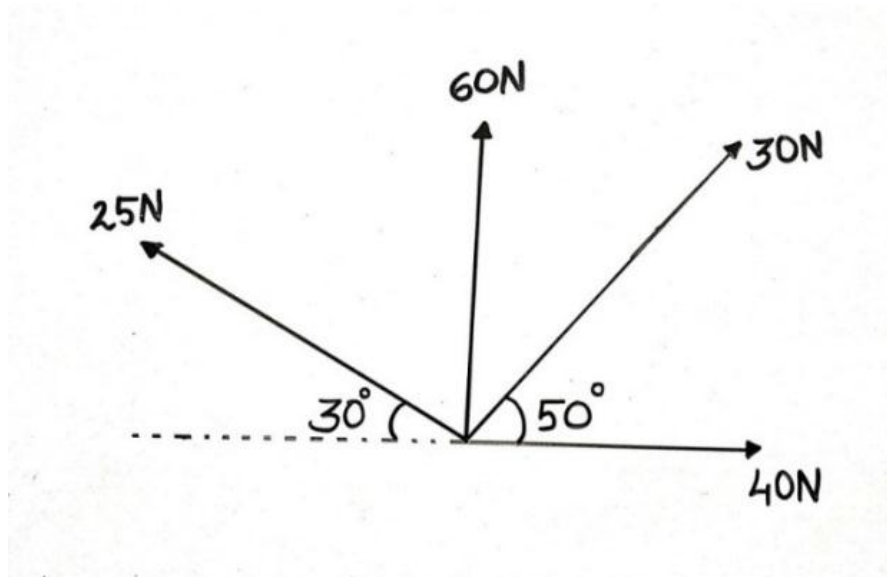
$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

स्टेप 6: रिझल्टन्टची दिशा $(\theta) = \tan^{-1} \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right|$

उदाहरणे : रिझोल्युशन (Resolution) आणि कॉम्पोजिशन (Composition)

उदाहरण क्र.- 01

खालील बल प्रणालीच्या रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा



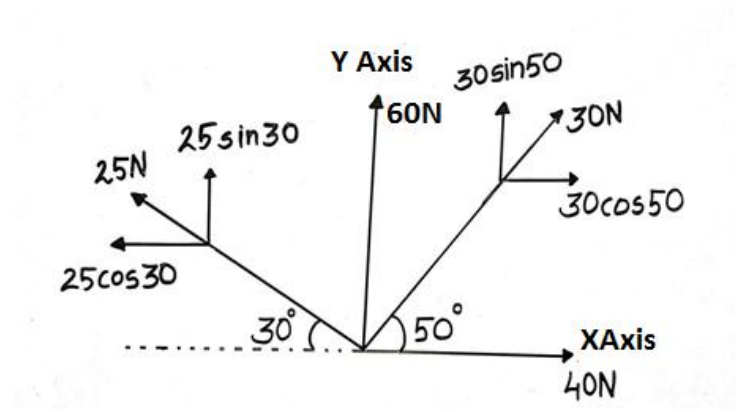
आकृती 3.15: बल प्रणाली

दिलेली माहिती : तीन बल $F_1 = 30 \text{ N}$, $F_2 = 60 \text{ N}$ आणि $F_3 = 25 \text{ N}$ आणि x-axis च्या संदर्भात त्यांचा कोन दिलेला आहे

शोधा : रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा.

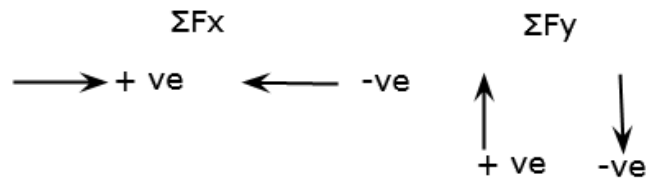
उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली (The complex force system)खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचे निराकरण करा.



आकृती 3.16: रिझोल्युशन चे ऑर्थोगोनल घटक

स्टेप 2: ΣF_x आणि ΣF_y शोधा, येथे एक अतिशय महत्वाच्या गोष्टी म्हणजे साइन कन्व्हेन्शन जे खालीलप्रमाणे आहे.



आकृती 3.17: साइन कन्व्हेन्शन

आता ΣF_x शोधूया

$$\Sigma F_x = 40 + 30 \cos 50 - 25 \cos 30$$

$$\Sigma F_x = 40 + 19.28 - 21.65$$

$$\Sigma F_x = 37.63 \text{ N}$$

त्याच प्रकारे आपण ΣF_y शोधूया

$$\Sigma F_y = 30 \sin 50 + 60 + 25 \sin 30$$

$$\Sigma F_y = 22.98 + 60 + 12.5$$

$$\Sigma F_y = 95.48 \text{ N}$$

स्टेप 3: ΣF_x आणि ΣF_y च्या मदतीने, रिझल्टन्ट “R” ची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.

स्टेप 4: गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल एक्स-अक्षकडे झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$R = \sqrt{(37.63)^2 + (95.48)^2}$$

$$R = \sqrt{10532.44}$$

$$R = 102.63 \text{ N.} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

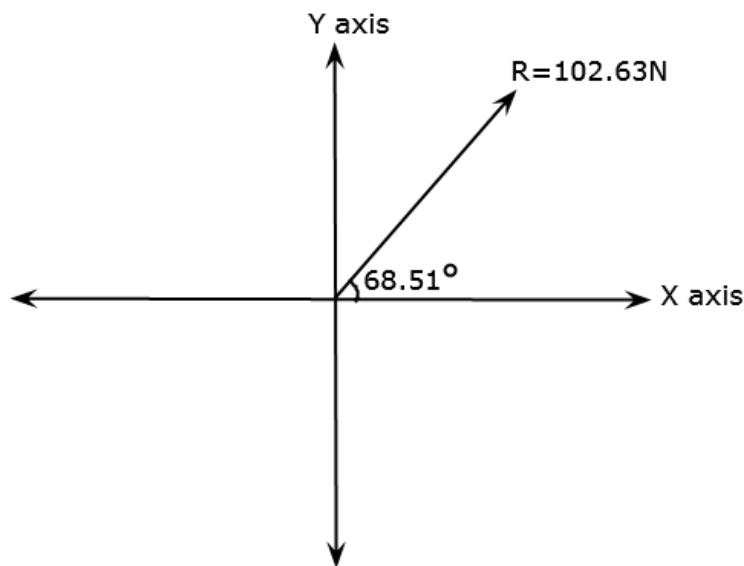
$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \right|$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{95.48}{37.63} \right|$$

$$\theta = \tan^{-1} [2.54]$$

$$\theta = 68.51^\circ \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

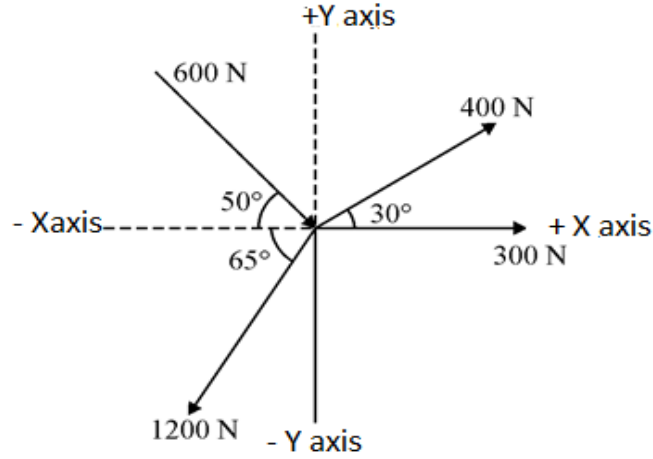
स्टेप 5 : ΣF_x आणि ΣF_y दोन्ही सकारात्मक (Positive) आहेत, म्हणून रिझल्टन्ट (R) पहिल्या चतुर्थांशात (First Quadrant) x-axis सह 68.51° कोन बनवेल.



आकृती 3.18: रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा

उदाहरण क्र.- 02

एक काँक्रेट बल प्रणाली आकृती 3.19 मध्ये दर्शविली आहे तर रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.

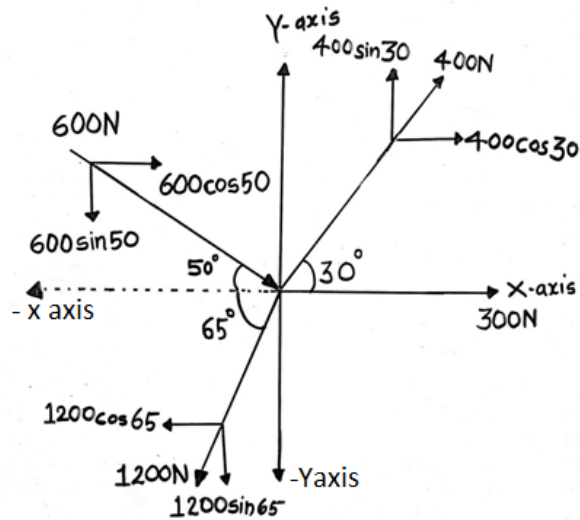
**आकृती 3.19 रिझोल्युशन चे ऑर्थोगोनल घटक**

दिलेली माहिती : चार बल; $F_1 = 300\text{ N}$, $F_2 = 400\text{ N}$, $F_3 = 600\text{ N}$ (Push) and $F_4 = 1200\text{ N}$ आणि x आणि y -axis च्या संदर्भात त्यांचे कोन दिले आहेत.

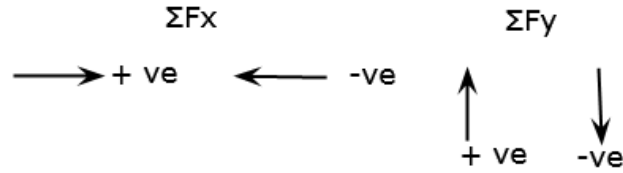
शोधा : रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा.

उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते.

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचे निराकरण करा. गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल x -अक्षाकडे झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.

**आकृती 3.20: रिझोल्युशन चे ऑर्थोगोनल घटक.**

स्टेप 2: ΣF_x आणि ΣF_y शोधा, येथे एक अतिशय महत्वाच्या गोष्टी म्हणजे साइन कन्व्हेन्शन जे खालीलप्रमाणे आहे



आकृती 3.21: साइन कन्व्हेन्शन

आता ΣF_x शोधूया

$$\Sigma F_x = 300 + 400 \cos 30 + 600 \cos 50 - 1200 \cos 65$$

$$\Sigma F_x = 300 + 346.41 + 385.67 - 507.14$$

$$\Sigma F_x = 524.94 \text{ N}$$

त्याच प्रकारे आपण ΣF_y शोधूया

$$\Sigma F_y = 400 \sin 30 - 600 \sin 50 - 1200 \sin 65$$

$$\Sigma F_y = 200 - 459.63 - 1087$$

$$\Sigma F_y = -1347.2 \text{ N}$$

स्टेप 3: ΣF_x आणि ΣF_y च्या मदतीने, रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा. कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम साइन कन्व्हेन्शनचा विचार करून चतुर्भुज मध्ये रिझल्टन्ट शोधा.

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$R = \sqrt{(524.94)^2 + (-1347.2)^2}$$

$$R = 1445.86 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

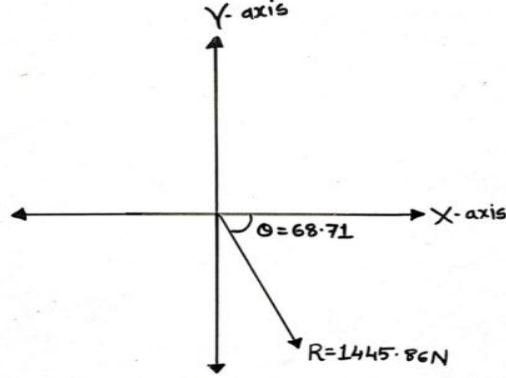
स्टेप 4: रिझल्टन्ट ची दिशा $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \right|$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{-1347.2}{524.94} \right|$$

$$\theta = \tan^{-1} | -2.57 |$$

$$\theta = 68.71^\circ \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

स्टेप 5: ΣF_x सकारात्मक (Positive) आहे आणि ΣF_y ऋणात्मक (Negative) आहे, म्हणून रिझल्टन्ट (R) चौथ्या चतुर्थांशात (Fourth Quadrant) मध्ये असेल, जो x-axis सह रिझल्टन्ट 68.71° चा कोन बनवेल.



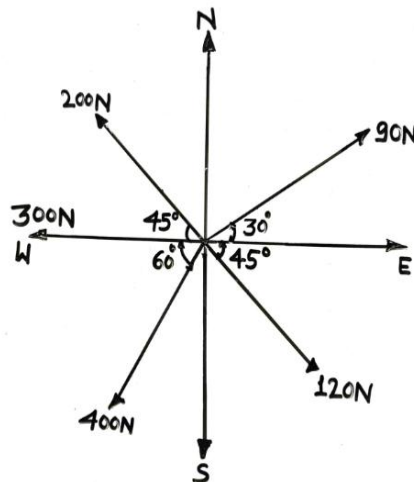
आकृती 3.22: रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा

उदाहरण क्र.- 03

खालील बल प्रणालीच्या रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा

- (i) 90 N जे 30° ईशान्य दिशेने (North of East).
- (ii) 200 N जे 45° वायव्य (West of North).
- (iii) 300 N जे पश्चिम दिशेने (towards West.).
- (iv) 400 N जे 30° नैऋत्य दिशेने (West of South).
- (v) 120 N जे आग्नेय दिशेने (South of East).

दिलेली माहिती : पाच बल $F_1 = 90 \text{ N}$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 300 \text{ N}$, $F_4 = 400 \text{ N}$ & $F_5 = 120 \text{ N}$.

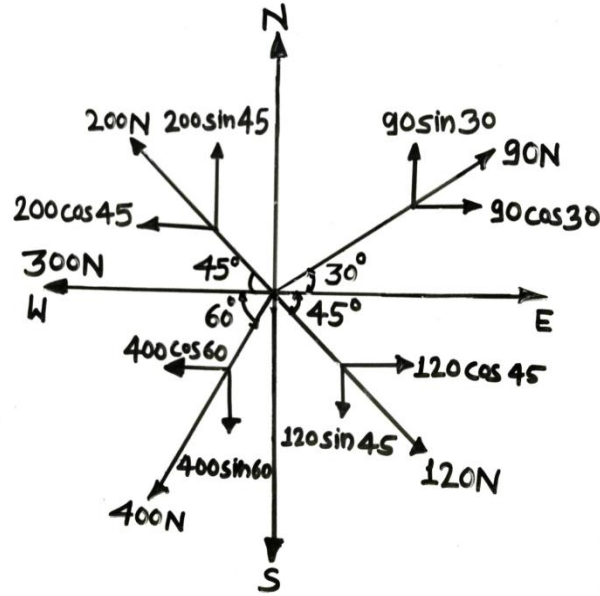


आकृती 3.23: बल प्रणाली.

शोध : रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा.

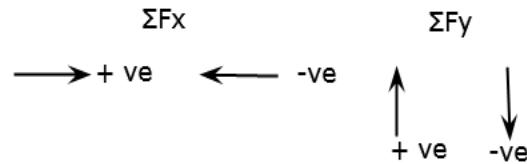
उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते.

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचे निराकरण करा. गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल x-अक्षकडे झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.



आकृती 3.24: रीझोल्यूशन चे ऑर्थोगोनल घटक.

स्टेप 2: ΣF_x आणि ΣF_y शोध, येथे एक अतिशय महत्वाच्या गोष्ट म्हणजे साइन कन्व्हेन्शन जे खालील प्रमाणे आहे



आकृती 3.25: साइन कन्व्हेन्शन

आता ΣF_x शोधूया

$$\Sigma F_x = 90 \cos 30 - 200 \cos 45 - 300 - 400 \cos 60 + 120 \cos 45$$

$$\Sigma F_x = 77.94 - 141.42 - 300 - 200 + 84.85$$

$$\Sigma F_x = -478.63 \text{ N}$$

त्याच प्रकारे आपण ΣF_y शोधूया

$$\Sigma F_y = 90 \sin 30 + 200 \sin 45 - 400 \sin 60 - 120 \sin 45$$

$$\Sigma F_y = 45 + 141.42 - 346.41 - 84.85$$

$$\Sigma F_y = -244.84 \text{ N}$$

स्टेप 3: ΣF_x आणि ΣF_y च्या मदतीने, रिझल्टन्ट “R” ची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा. कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम साइन कॉन्व्हेन्शनचा विचार करून चतुर्भुजमध्ये रिझल्टन्ट शोधा

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$R = \sqrt{(-478.63)^2 + (-244.84)^2}$$

$$R = 537.62 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

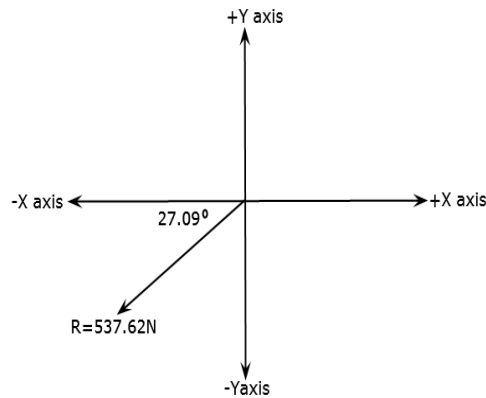
स्टेप 4: रिझल्टन्टची दिशा $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \right|$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{-244.84}{-478.63} \right|$$

$$\theta = \tan^{-1} |0.51|$$

$$\theta = 27.09^\circ \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

स्टेप 5 : ΣF_x आणि ΣF_y ऋणात्मक (Negative) आहे, म्हणून रिझल्टन्ट (R) तिसऱ्या चतुर्थांशात (Third Quadrant) असेल जो x-axis सह 27.09° चा कोन बनवेल.

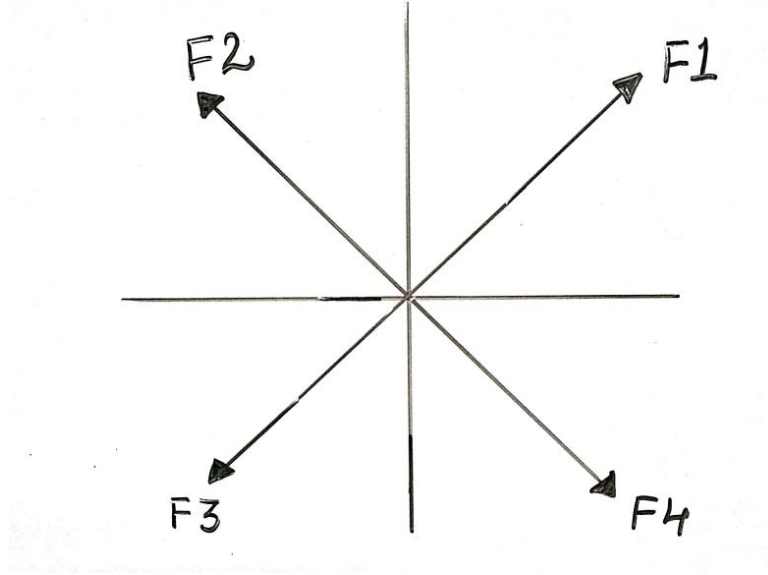


आकृती 3.26: रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा

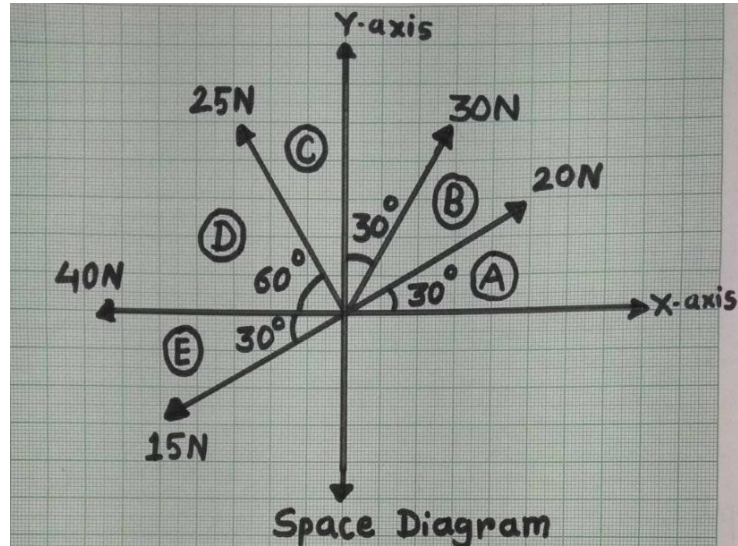
3.3. बलाची भौमितीय पध्दती

3.3.1 स्पेस डायग्राम (Space Diagram)

हि आकृती जी वस्तूवर कार्य करणाऱ्या बलाची अचूक स्थान आणि दिशा दर्शवते.



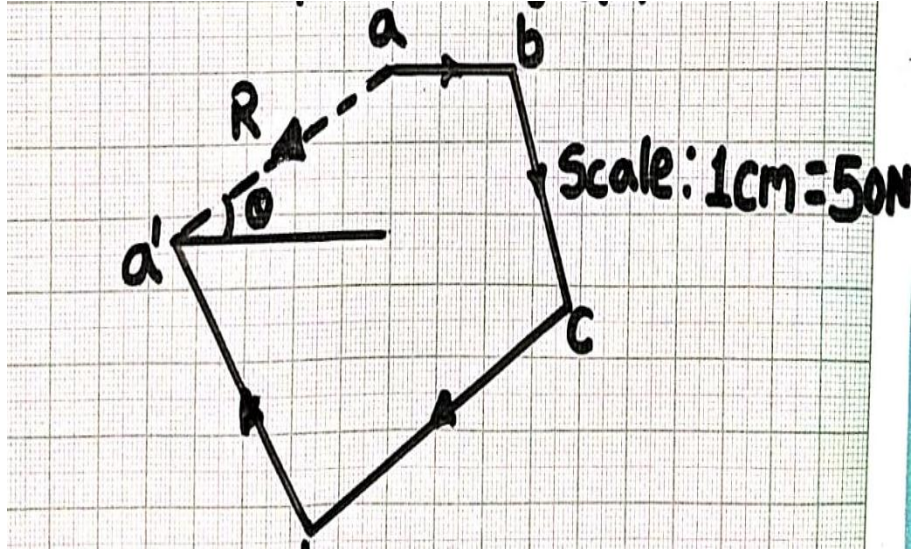
आकृती 3.27: स्पेस डायग्राम



आकृती 3.28: बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम

3.3.2 व्हेक्टर डायग्राम (Vector Diagram)

स्पेस डायग्राम काढल्यानंतर सर्व बल एका समांतर रेषांसह भौमितीय पद्धतिने दर्शविल्या जातात. ज्या लहान अक्षरांनी दर्शविल्या जातात अशा आकृतीला वेक्टर आकृती म्हणतात.



आकृती 3.29: व्हेक्टर डायग्राम (Vector Diagram)

3.3.3 पोलर डायग्राम (Polar Diagram)

हि आकृती आहे जी वेक्टर आकृतीतून प्राप्त होते ज्यामध्ये ध्रुव वेक्टर (O) आकृतीच्या जवळ बिंदू घेतला जातो आणि वेक्टर आकृतीचे सर्व बिंदू ध्रुवाशी (Pole) जोडलेले असतात.

3.3.4 फणिकुलर पॉलीगोन (Funicular Polygon)

हि आकृती आहे जी पोलरडायग्राम मधून प्राप्त होते. ज्यामध्ये रिझल्टन्ट प्राप्त करण्यासाठी पहिला आणि शेवटचा बिंदू जोडला जातो.

3.4 काँकरण्ट आणि समांतर को-प्लॅनर बल सिस्टीमसाठी रिझल्टन्ट ठरवण्याची भौमितीय पद्धत.

काँकरण्ट आणि समांतर को-प्लॅनर बल सिस्टीमचा रिझल्टन्ट खालील चरणांद्वारे सहजपणे शोधला जाऊ शकतो.

स्टेप 1: आधी बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम काढा.

स्टेप 2: दिलेल्या योग्य स्केल सह व्हेक्टर डायग्राम काढा.

स्टेप 3: रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड मिळवण्यासाठी प्रारंभ आणि शेवटचे बिंदू बंद करा.

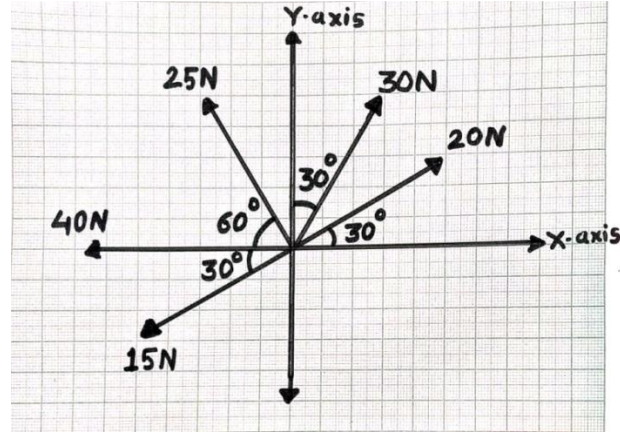
स्टेप 4: घेतलेल्या स्केलच्या मदतीने रिझल्टन्ट मोजा.

स्टेप 5: रिझल्टन्टची दिशा मिळवण्यासाठी आडव्या पृष्ठ भागासह (Horizontal Surface) मोजा.

उदाहरण: काँकरण्ट आणि समांतर को-प्लेनर बल सिस्टीमसाठी रिझल्टन्ट ठरवण्याची भौमितीय पद्धत.

उदाहरण क्र. -01

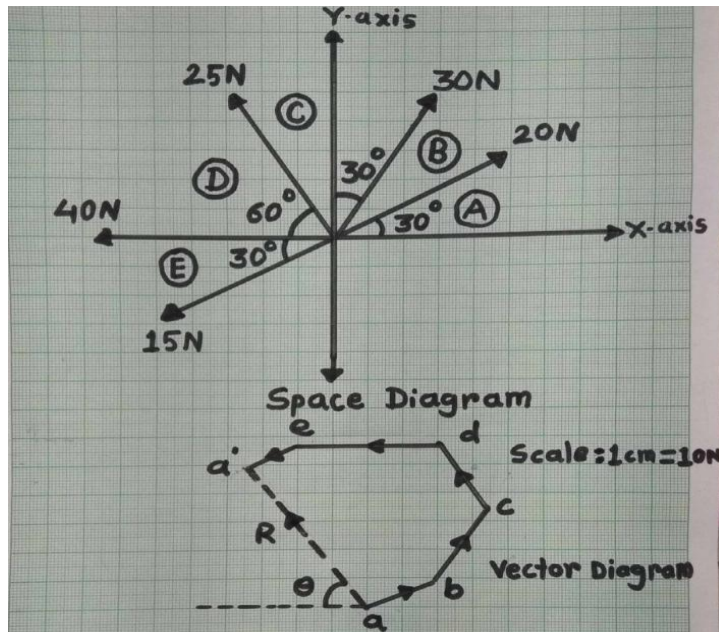
आकृती 3.30 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भौमितीय पद्धत वापरून रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.



आकृती 3.30: बल प्रणाली

उत्तर: परिमाण आणि दिशानिर्देशात वरील बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट खालील चरणांद्वारे मोजला जाऊ शकतो;

स्टेप 1: आधी बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम काढा. दिलेल्या योग्य स्केल सह व्हेक्टर डायग्राम काढा.



आकृती 3.31: स्पेस आणि व्हेक्टर डायग्राम.

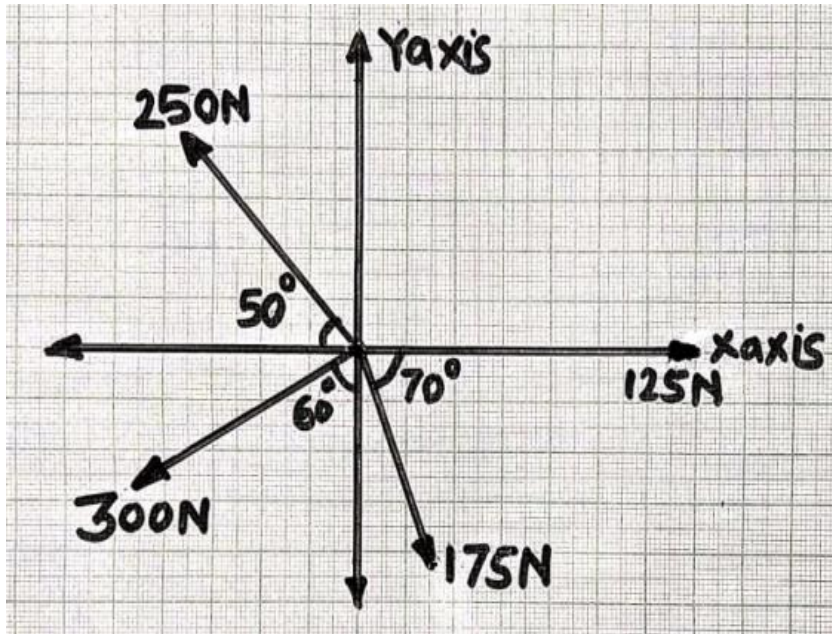
स्टेप 2: रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड मिळवण्यासाठी प्रारंभ आणि शेवटचे बिंदू बंद करा.

स्टेप 3: घेतलेल्या स्केलच्या मदतीने रिझल्टन्ट मोजा. येथे आपण $1\text{cm} = 10\text{ N}$ घेतले होते आणि गणना करून $a-a = 5.5$ मिळाले. येथे $5.5 \times 10 = 55\text{ N}$ म्हणून रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड 55 N आहे.

स्टेप 4: रिझल्टन्टची दिशा मिळवण्यासाठी आडव्या पृष्ठ भागासह (Horizontal Surface) मोजा, जी मोजून 55° मिळाली आहे.

उदाहरण क्र. -02

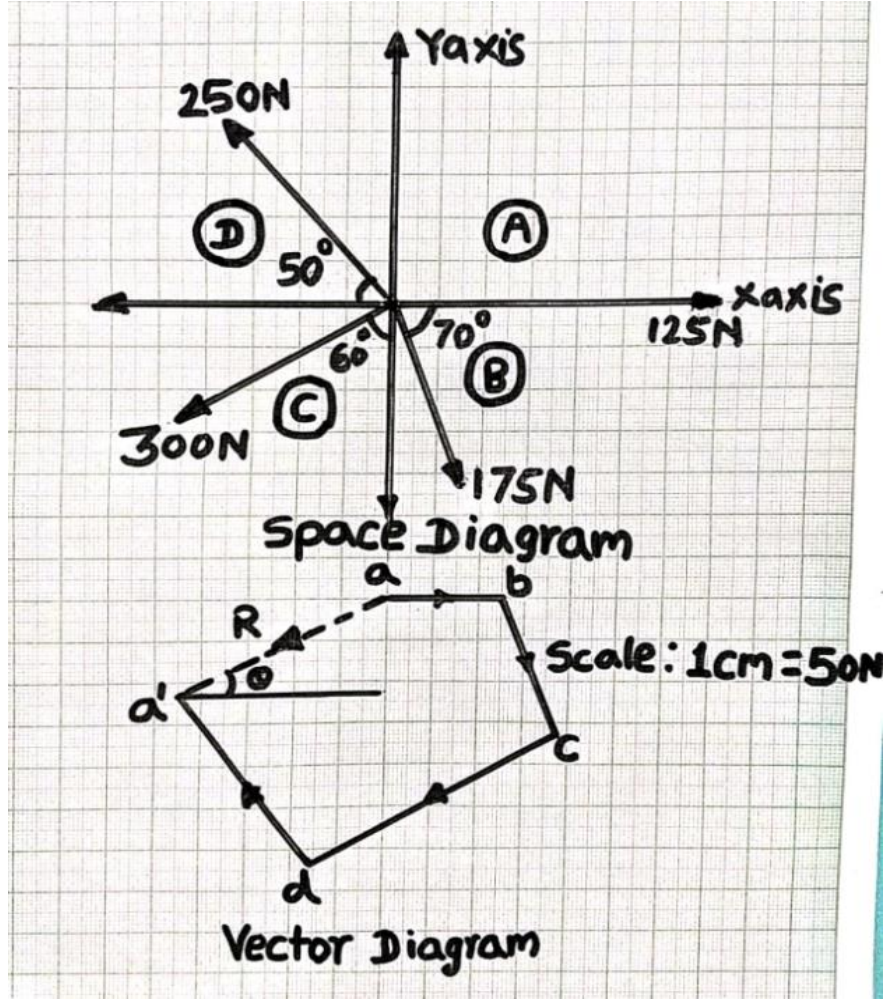
आकृती 3.32 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भौमितीय पद्धत वापरून रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.



आकृती 3.32: बल सिस्टिम

उत्तर :परिमाण आणि दिशानिर्देशात वरील बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट खालील चरणांद्वारे मोजला जाऊ शकतो;

स्टेप 1:आधी बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम काढा.दिलेल्या सुटेबल स्केल सह व्हेक्टर डायग्राम काढा.



आकृती 3.33: स्पेस आणि व्हेक्टर डायग्राम

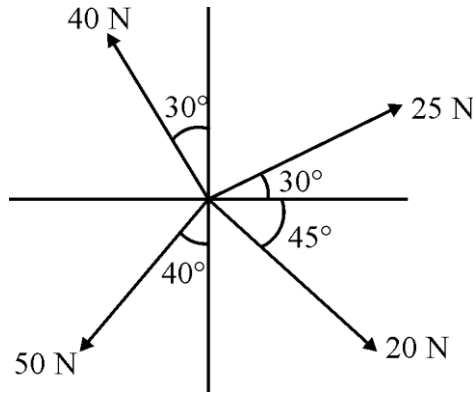
स्टेप 2: रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड मिळवण्यासाठी प्रारंभ आणि शेवटचे बिंदू बंद करा.

स्टेप 3: घेतलेल्या स्केलच्या मदतीने रिझल्टन्ट मोजा. येथे आपण $1\text{cm} = 50\text{ N}$ घेतले होते आणि गणना करून $a-a = 5\text{cm}$ मिळाले. येथे $5 \times 50 = 250\text{ N}$ म्हणून रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड 250 N आहे..

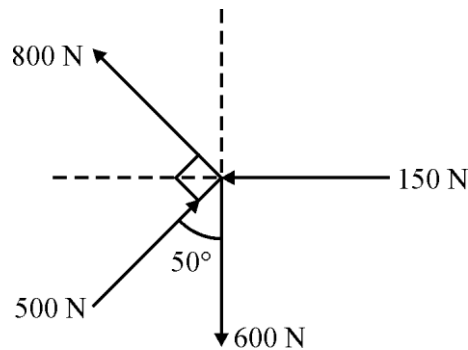
स्टेप 4: रिझल्टन्टची दिशा मिळवण्यासाठी आडव्या पृष्ठ भागासह (Horizontal Surface) मोजा, जी मोजून 30° मिळाली आहे.

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

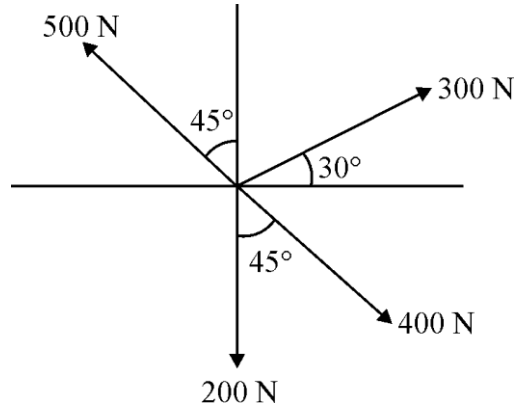
1. खालील गोष्टी स्पष्ट करा
 - i. बलाचे रिझोल्यूशन
 - ii. बलाचे कॉम्पोसिशन
2. स्पेस डायग्राम, वेक्टर डायग्राम ची परीभाषा करा. ग्राफिक स्टॅटिक्समध्ये वेक्टर डायग्राम चा उपयोग सांगा.
3. बाउज नोटेशन डायग्राम शोधा ते कुठे वापरले जाते ?
4. खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.



5. खालील बल जर बिंदूवर कार्य करत असतील रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा विश्लेषणात्मक पद्धतीने शोधा.
 - (A) 300 N जे 30° ईशान्य दिशेने.
 - (B) 150 N जे 45° वायव्य दिशेने.
 - (C) 200 N पश्चिम दिशेने.
 - (D) 400 N जे आग्नेय दिशेने.
6. खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.

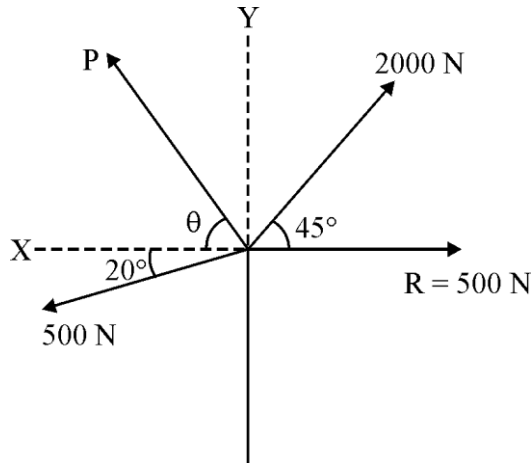


7. खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.



8. बलाचा समांतरभुजचा नियम उदाहरणा सह स्पष्ट करा.

9. खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड 500 N आहे, तर बल P चा मॅग्निट्यूड शोधा.



10. व्हेरिगननचे प्रमेय उदाहरणासह स्पष्ट करा.

11. दोन्ही बाजूंच्या दोन दिशांना प्रत्येकी 30° च्या कोनात क्षैतिज कार्य करणाऱ्या 60 N बलाचे घटक शोधा.

12. 100 N च्या बलाचे दोन बाजूंनी 40° आणि 50° मध्ये दोन्ही बाजूंनी रिझोल्युशन करा.

13. प्रत्येकी 120 N च्या दोन बलामधील कोन शोधा, जसे की त्यांचा रिझल्टन्ट 60 N आहे.

14. दोन बल 100 N पुल आणि 80 N पुश त्यांच्या दरम्यान 135° चा कोन बनवत आहेत

तर त्याच्या रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.

15. दोन बल 20 N आणि 40 N वस्तूवर त्यांच्या क्रियेच्या रेषेसह 60 च्या कोनात झुकलेले आहे, तर रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.

मायक्रो प्रोजेक्ट:

1. विविध बल सिस्टीमची वास्तविक जीवन उदाहरणे आणि त्यांचा वापर दाखवणारे तक्ते तयार करा.

घटक : 4
समतोल
(Equilibrium)

विषय निष्पत्ती (Course Outcomes) : विविध बल प्रणालीची स्थिरता तपासा.

घटक निष्पत्ती (Unit Outcomes):

1. दिलेल्या स्थिती साठी फ्री बॉडी डायग्राम काढा.
2. लामीच्या प्रमेयाचा वापर करून दिलेल्या परिस्थितीत अज्ञात बल निश्चित करा.
3. दिलेल्या परिस्थितीसाठी आवश्यक बीमचे प्रकार ओळखा.
4. दिलेल्या बीम मधील विश्लेषणात्मक आणि भौमितीय पद्धतीने प्रतिक्रिया (Reaction) निश्चित करा.

3. 1.1. समतोल (Equilibrium)

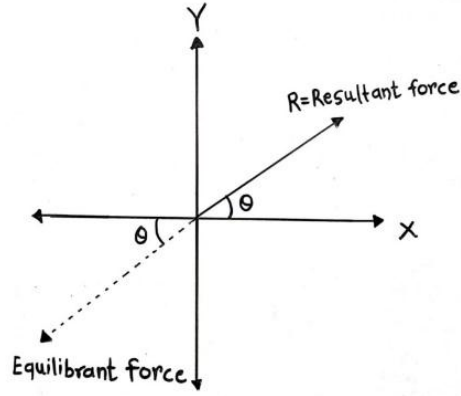
ज्या वेळेस बल प्रणाली स्टॅटिक किंवा एकसमान गती असणाऱ्या वस्तुवर ऍक्ट होते तर त्याला समतोल असे म्हणतात. याचा अर्थ समतोल मध्ये वस्तुवर कार्य करणाऱ्या सर्व बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट शून्य आहे.

वस्तुवर (On a Particle) कार्य करणाऱ्या को-प्लेनर प्रणालीचा रिझल्टन्ट शून्य असतो जेव्हा तो खालील अटी पूर्ण करते:

1. बलाच्या सर्व आडव्या (Horizontal) घटकांची आणि सर्व उभ्या (Vertical) घटकांची बीजगणितीय बेरीज शून्याइतकी असते.
2. कुठल्याही एका पॉइंट भोवती मोमेन्ट हा शून्य असतो.

4.1.2. संतुलन (Equilibrant)

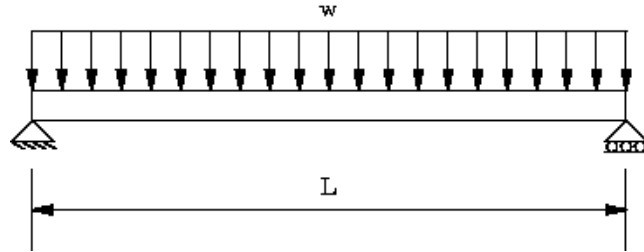
हा असा बल असतो जो वस्तूला समतोल स्थितीत आणतो आणि जो रिझल्टन्टच्या मॅग्निट्यूड मध्ये समान असतो, परंतु रिझल्टन्टच्या विरुद्ध दिशेने असतो. खाली दिलेल्या आकृती 4.1 मध्ये रिझल्टन्ट आणि संतुलन (Equilibrant) बल प्रणालीमध्ये दाखवलेली आहे.



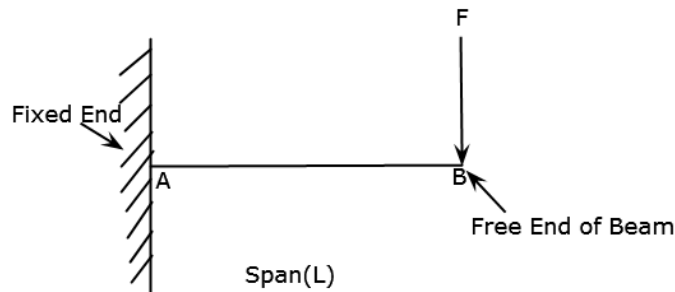
आकृती 4.1: रिझल्टन्ट आणि संतुलन बल प्रणाली

4.1.3 फ्री बॉडी डायग्राम (Free Body Diagram)

फ्री बॉडी डायग्राम हि एक आकृती आहे ज्यामध्ये विचाराधीन वस्तू सर्व संपर्क पृष्ठभागापासून मुक्त असते आणि त्यावर कार्य करणाऱ्या सर्व बल दर्शविते. अज्ञात प्रतिक्रिया (Reaction), तणाव (Tension) FBD वरून सहज शोधता येतात. खाली दिलेल्या 4.2 आणि 4.3 आकृती मध्ये फ्री बॉडी डायग्राम दाखलेली आहे



आकृती 4.2. समान वितरित लोड (UDL) सह बिमची फ्री बॉडी डायग्राम



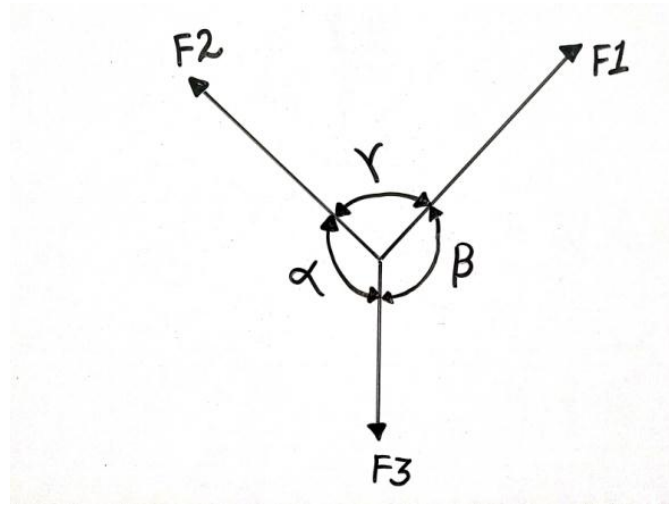
आकृती 4.3. कॅन्टिलीव्हर बिमची फ्री बॉडी डायग्राम

4.2. विश्लेषणात्मकदृष्ट्या बल प्रणालीचा समतोल (Equilibrium of Force System Analytically)

1. बलाच्या सर्व आडव्या (Horizontal) घटकांची बीजगणितीय बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे i.e. $\Sigma F_x = 0$.
 2. बलाच्या सर्व उभ्या (Vertical) घटकांची बीजगणितीय बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे i.e. $\Sigma F_y = 0$
 3. कुठल्याही एका पॉइंट भोवती मोमेन्ट हा शून्य असतो. i.e. $\Sigma M = 0$
- वरील अटींपैकी, को-प्लेनर बल प्रणाली साठी - फक्त दोन अटी पूर्ण केल्या पाहिजेत. को-प्लेनर नॉन कॉंकरण्ट बल प्रणाली साठी सर्व तीन अटी पूर्ण केल्या पाहिजेत.

4.3. लामीचे प्रमेय (Lami's Theorem)

लामीचे प्रमेय त्यात असे म्हटले आहे की "जर तीन को-प्लेनर बल समतोल स्थितीत वस्तू (Body) वर लागू होत असतील तर, प्रत्येक बल इतर दोन बलामधील कोनाच्या साईनच्या प्रमाणात (Proportional to sin) असतो.



आकृती 4.4: लामीचे प्रमेय

वरील दिलेल्या आकृती 4.4 मध्ये लामीचे प्रमेय दाखवलेले आहे. वरील आकृती मध्ये F_1 , F_2 आणि F_3 बल आहेत आणि α , β , γ त्या मधिल कोन आहेत. α हा F_2 आणि F_3 मधिल, β हा F_1 आणि F_3 मधिल आणि γ हा F_1 आणि F_2 मधिल कोन आहे.

लामीच्या प्रमेया नुसार

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

4.3.1. लामीच्या प्रमेयाचे उपयोग

1. हे अज्ञात बल ची गणना करण्यासाठी वापरले जाते.
2. बीमसाठी संपर्क बिंदूवर (Contact Point) प्रतिक्रिया शोधण्यासाठी याचा वापर केला जातो.
3. वायर, रस्सी, केबल्स, मधील तणाव (Tension in Wires) शोधण्यासाठी याचा वापर केला जातो.
4. चॅनेलमध्ये विश्रांती घेतलेल्या गोलावरील समस्या (Reaction & Tension), जिब क्रेन आणि फोटो फ्रेमवर आधारित समस्या (Reaction) सोडवण्यासाठी देखील याचा वापर केला जातो.

4.3.2. लामीच्या प्रमेयाची मर्यादा

1. वस्तू (Body) समतोल मध्ये असावी.
2. हे फक्त तीन बल प्रणाली करीता लागू आहे, बल प्रणालीमध्ये जास्त किंवा कमी नाही. (Not more or less than three Forces).
3. हे समांतर आणि को-प्लेनर बल प्रणालीसाठी लागू नाही.

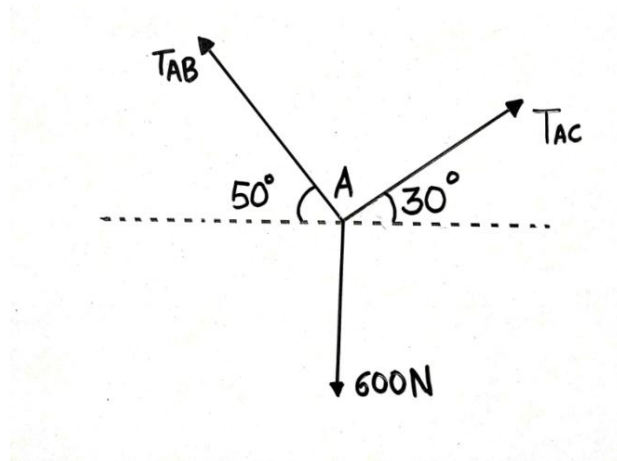
4.3.3. लामीच्या प्रमेयाच्या वापरासाठी आवश्यक अट

1. तीन बल आणि कोनांपैकी किमान एक बल आणि दोन कोन माहित असणे आवश्यक आहे.
2. बल समतोल असणे आवश्यक आहे.
3. बल को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट असणे आवश्यक आहे.
4. तीन बल असणे आवश्यक आहे.

उदाहरणे: लामीचं प्रमेय

उदाहरण क्र.- 01

आकृती 4.5 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे "A" बिंदूसाठी, लागू बलाच्या कृती अंतर्गत समतोलमध्ये, AB आणि AC मधील तणावाचे (Tension) मूल्य (Magnitude) शोधा.



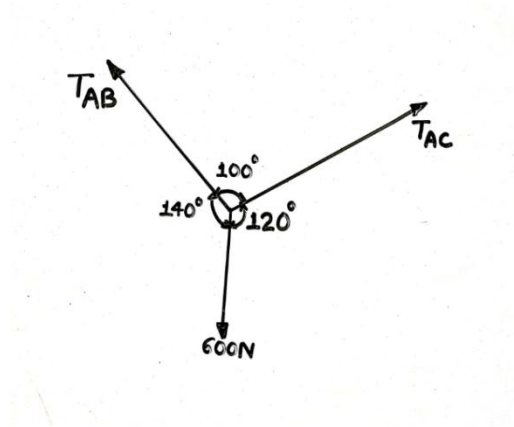
आकृती 4.5: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली

दिलेली माहिती: एका बिंदूवर तीन कॉंकरण्ट बल कार्य करत आहेत. बल = 600 N.

शोधा: AB आणि AC मधील तणावाचे मूल्य.

उत्तर: कॉप्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते. लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$



आकृती 4.6: फ्री बॉडी डायग्राम

$$\alpha = 140^\circ, \beta = 120^\circ \text{ आणि } \gamma = 100^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{600}{\sin \gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin 140} = \frac{AB}{\sin 120} = \frac{600}{\sin 100}$$

$$\frac{AB}{\sin 120} = \frac{600}{\sin 100}$$

$$AB \text{ मधील तणाव (Tension in AB)} = \frac{600 \times \sin 120}{\sin 100} = 527.63 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

त्याचप्रमाणे, AC मधील तणाव

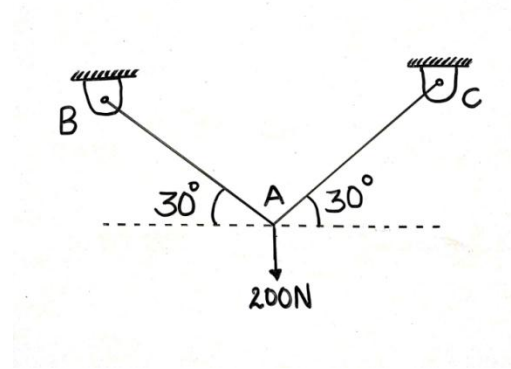
$$\frac{AC}{\sin 140} = \frac{600}{\sin 100}$$

त्याचप्रमाणे,

$$AC \text{ मधील तणाव} = \frac{600 \times \sin 140}{\sin 100} = 391.62 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 02

खालील को-प्लेनर आणि काँकरण्ट बल प्रणाली साठी, AB आणि AC मधील तणावाचे मूल्य शोधा.



आकृती 4.7: को-प्लेनर आणि काँकरण्ट बल प्रणाली

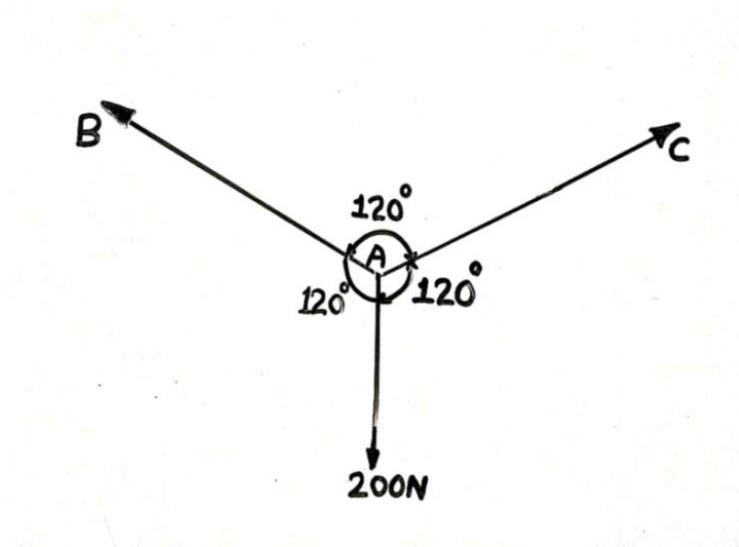
दिलेली माहिती: एका बिंदूवर तीन काँकरण्ट बल कार्य करत आहेत, बल = 200 N.

शोधा: AB आणि AC मधील तणावाचे मूल्य

उत्तर: को-प्लेनर आणि काँकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते. लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

$$\alpha = 120^\circ, \beta = 120^\circ \text{ आणि } \gamma = 120^\circ$$



आकृती 4.8: फ्री बॉडी डायग्राम

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{200}{\sin \gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin 120} = \frac{AB}{\sin 120} = \frac{200}{\sin 120}$$

AB मधिल तणाव (Tension in AB)

$$\frac{AC}{\sin 120} = \frac{200}{\sin 120}$$

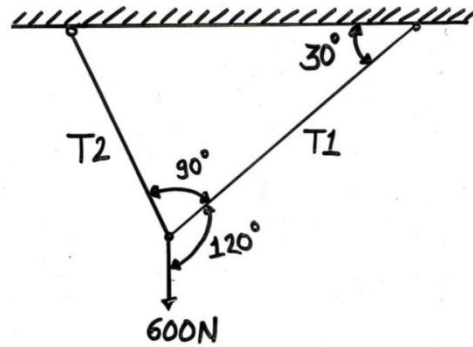
$$\text{AB मधिल तणाव (Tension in AB)} = \frac{200 \times \sin 120}{\sin 120} = 200 \text{ Nउत्तर}$$

त्याचप्रमाणे AC मधिल तणाव (Tension in AC), $\frac{AC}{\sin 120} = \frac{200}{\sin 120}$

$$\text{AC मधिल तणाव} = \frac{200 \times \sin 120}{\sin 120} = 200 \text{ Nउत्तर}$$

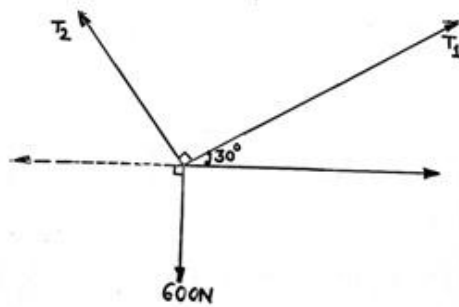
उदाहरण क्र.- 03

आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे 600 N च्या वजनाला दोन धातूच्या दोऱ्यांचा आधार आहे. तर T_1 आणि T_2 मधील तणाव शोधा.



आकृती 4.9: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली

दिलेली माहिती: एका बिंदूवर तीन कॉंकरण्ट बल कार्य करत आहेत, बल = 600 N.



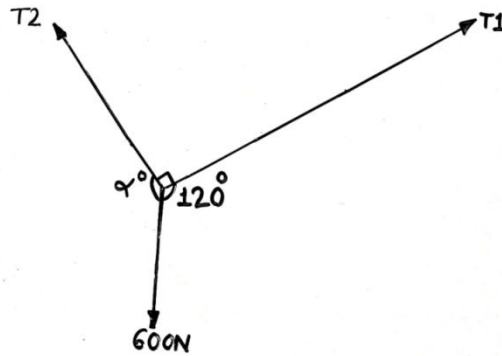
आकृती 4.10: फ्री बॉडी डायग्राम

शोधः T_1 आणि T_2 मधील तणाव.

उत्तरः को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते. लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

$$\alpha = 150^\circ, \beta = 120^\circ \text{ and } \gamma = 90^\circ$$



आकृती 4.11: फ्री बॉडी डायग्राम

$$\frac{T_1}{\sin 150} = \frac{T_2}{\sin 120} = \frac{600}{\sin 90}$$

$$\frac{T_1}{\sin 150} = \frac{600}{\sin 90}$$

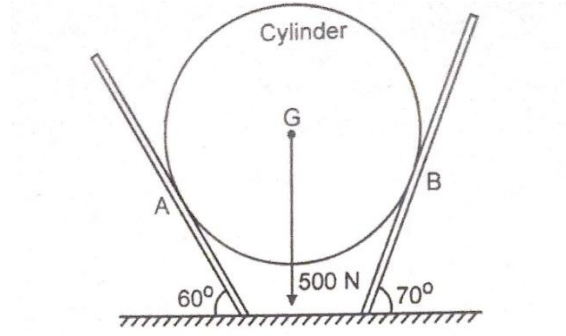
$$T_1 \text{ मधील तणाव} = \frac{600 \times \sin 150}{\sin 90} = 300 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

$$\text{त्याचप्रमाणे, } T_2 \text{ मधील तणाव, } \frac{T_2}{\sin 120} = \frac{600}{\sin 90}$$

$$T_2 \text{ मधील तणाव} = \frac{600 \times \sin 120}{\sin 90} = 519.62 \text{ N} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 04

खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे 500 N वजनाचा सिलेंडर गुळगुळीत चॅनेलच्या पृष्ठभागावर स्थिरावलेला आहे तर, त्या चॅनेलच्या पृष्ठभागाद्वारे देऊ केलेली रिएक्शन शोधा.



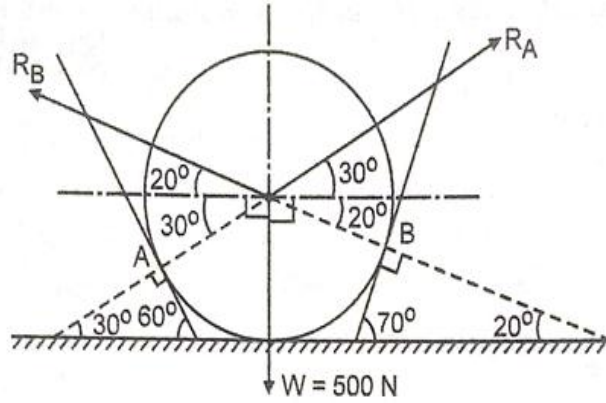
आकृती 4.12: चॅनेलच्या पृष्ठभागावर स्थिरावलेला सिलेंडर

दिलेली माहिती: सिलेंडरचे वजन, बल = 500 N

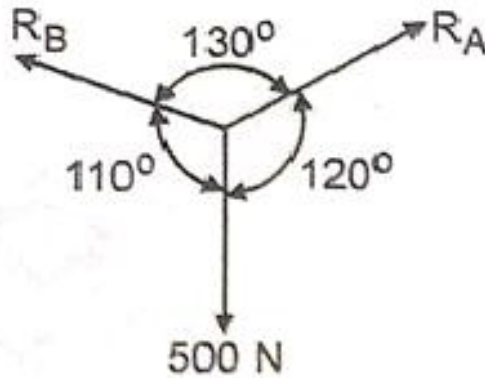
शोधा: चॅनेलच्या पृष्ठभागाद्वारे दिलेली रिऍक्शन.

उत्तर: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते. लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$



आकृती 4.13 :लोड सह सिलेंडर



आकृती 4.14 : फ्री बॉडी डायग्राम

$$\alpha = 110^\circ, \beta = 120^\circ \text{ and } \gamma = 130^\circ$$

लामीच्या प्रमेया नुसार;

$$\frac{500}{\sin 130} = \frac{R_A}{\sin 110} = \frac{R_B}{\sin 120}$$

$$\frac{500}{\sin 130} = \frac{R_A}{\sin 110}$$

$$R_A = \frac{500 \times \sin 110}{\sin 130}$$

$$R_A = 613.34 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

त्याचप्रमाणे,

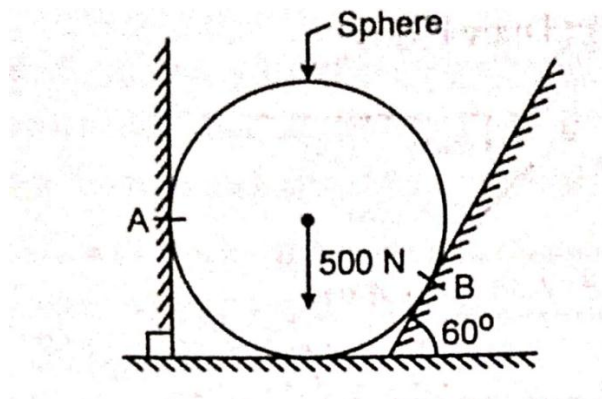
$$\frac{500}{\sin 130} = \frac{R_B}{\sin 120}$$

$$R_B = \frac{500 \times \sin 120}{\sin 130}$$

$$R_B = 565.25 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 05

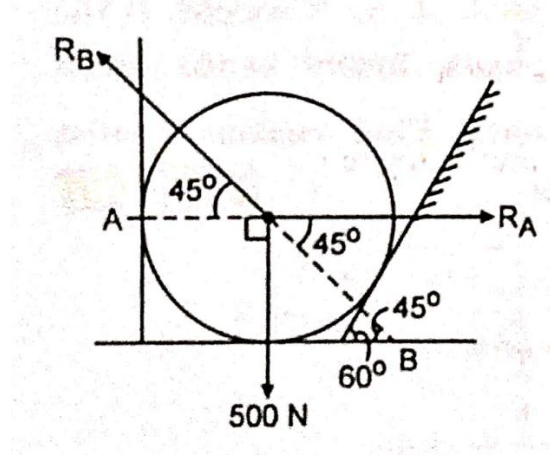
खालील आकृती मध्ये 500 N वजनाचा एक स्फिअर (sphere) दोन प्लेन च्या मध्ये ठेवलेला आहे. एक प्लेन उभा आहे आणि दुसरा 60° कोनात आडव्या दिशेने कललेला आहे. तर त्या सपोर्टची (Support) रिएक्शन शोधा.



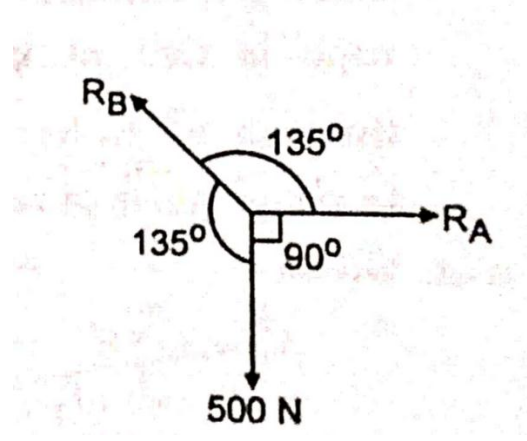
आकृती 4.15: दोन प्लेन मध्ये ठेवलेला स्फिअर (sphere)

उत्तर: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते. लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$



आकृती 4.16: लोड सह स्फिअर (sphere)



आकृती 4.17 :: फ्री बॉडी डायग्राम

$$\alpha = 135^\circ, \beta = 90^\circ \text{ and } \gamma = 135^\circ$$

लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{500}{\sin 135} = \frac{R_A}{\sin 135} = \frac{R_B}{\sin 90}$$

$$\frac{500}{\sin 135} = \frac{R_A}{\sin 135}$$

$$R_A = \frac{500 \times \sin 135}{\sin 135}$$

$$R_A = 500 \text{ N} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

त्याचप्रमाणे,

$$\frac{500}{\sin 135} = \frac{R_B}{\sin 90}$$

$$R_B = \frac{500 \times \sin 90}{\sin 135}$$

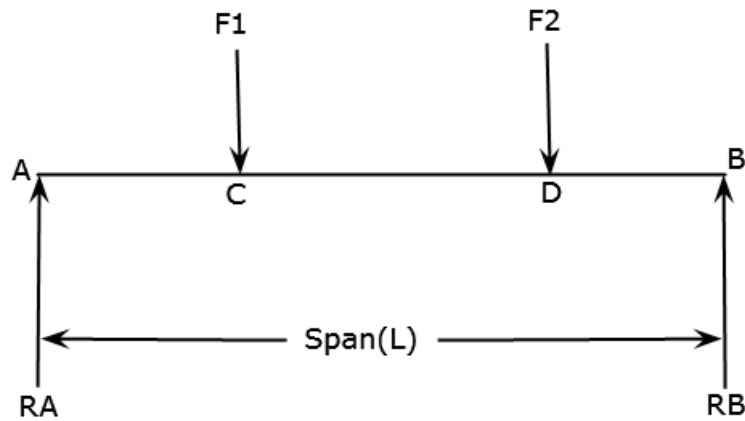
$$R_B = 707.10 \text{ N} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

4.4.1 बीम (Beam) हे स्ट्रक्चरल घटक म्हणून परिभाषित (Defined) केले गेले आहे ज्याचे एक परिमाण (Dimension) इतर दोन परिमाणांपेक्षा बरेच मोठे आहे आणि ते काही बिंदूवर सपोर्टेड (Supported By loads) आहे. हा आडवा स्ट्रक्चरल मेंबर (Structural Member) आहे जो ट्रान्सव्हर्स लोडच्या अधीन आहे.



आकृती 4.18: बीम

4.4.2 बिम चा स्पॅन (Span of Beam): हे बीमच्या सपोर्ट मधील अंतर असते.

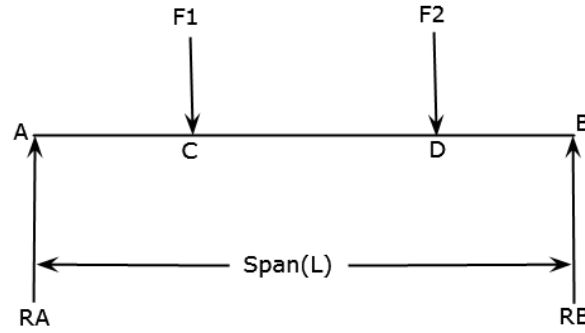


आकृती 4.19: बिम चा स्पॅन

4.4.3. सपोर्टचे प्रकार (Types of Support)

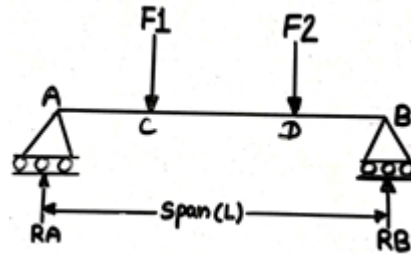
सपोर्टचे विविध प्रकार आहेत

1. **सिम्पल सपोर्ट:** जर बीम फक्त एका सपोर्ट वर अवलंबून असेल तर त्याला सिम्पल सपोर्ट असे म्हणतात. अशा प्रकरणांसाठी सपोर्ट वरील प्रतिक्रिया (Reaction) सपोर्टला काटकोनात (Perpendicular) असते.



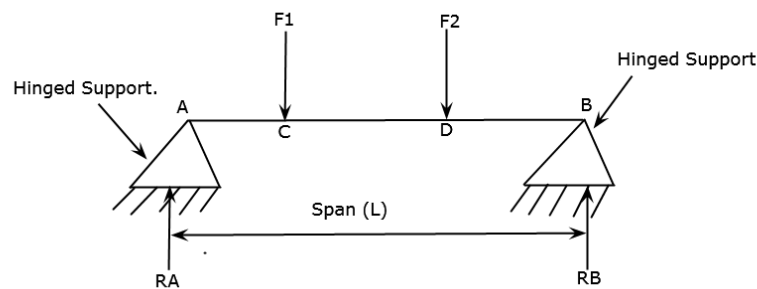
आकृती 4.20: सिम्पल सपोर्ट

2. **रोलर सपोर्ट:** या मध्ये बीमला रोलर च्या साहाय्याने सपोर्ट दिला जातो. या मध्ये रिएक्शन हि बीमला काटकोनात असते.



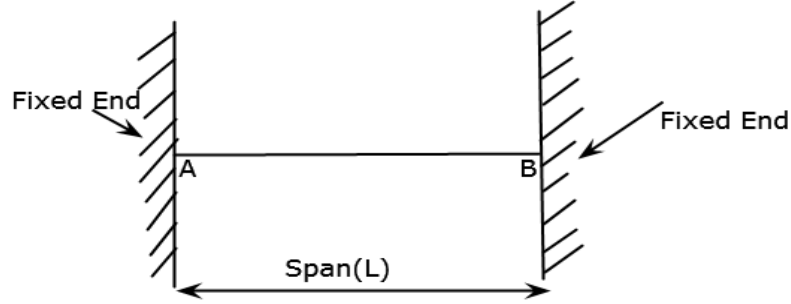
आकृती 4.21: रोलर सपोर्ट

3. **हिंज सपोर्ट :** या प्रकारच्या सपोर्ट मध्ये बीम कोणत्याही दिशेने जाऊ शकत नाही, तो सपोर्ट भोवती फिरू शकतो. विश्लेषणाच्या हेतूसाठी रिएक्शन हि बीम ला आडवी तसेच उभी असते.



आकृती 4.22: हिंज सपोर्ट

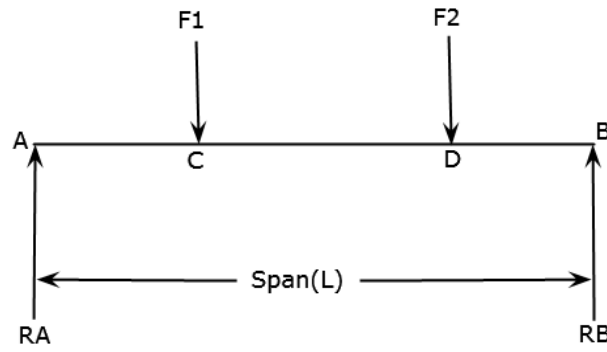
4. **फिक्स सपोर्ट** : या प्रकारच्या सपोर्ट मध्ये बीम फिक्स असतो.



आकृती 4.23: फिक्स सपोर्ट

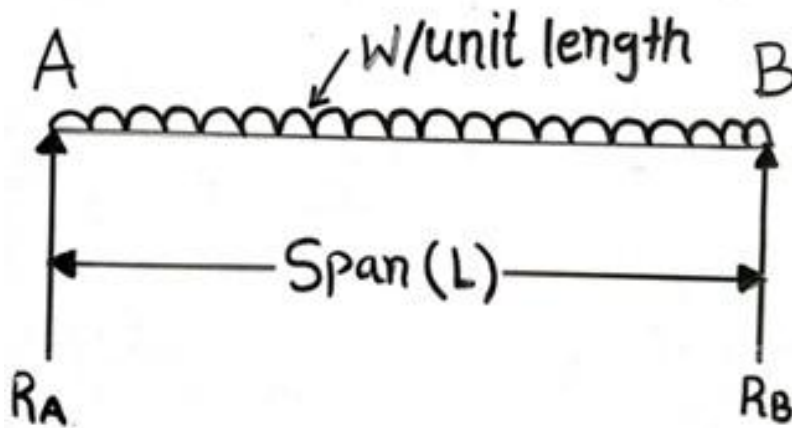
4.4.4. लोडिंगचे प्रकार (Types of Loading)

1. **एकाग्र लोड (Concentrated load)**: हा लोड आहे जो खूप लहान लांबीवर (Length) कार्य करतो. याला पॉइंट लोड असेही म्हणतात.



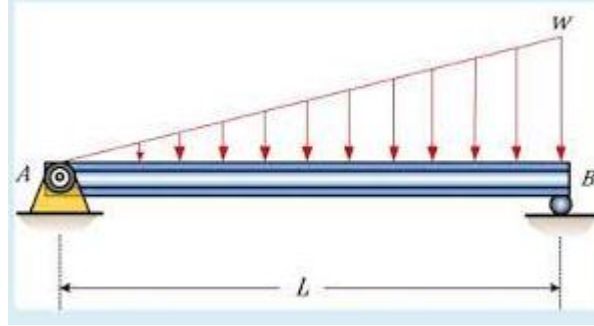
आकृती 4.24: एकाग्र लोड

2. **एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed Load)**: हा लोड (Load) आहे जो एकसमान तीव्रतेसह (Intensity) लक्षणीय लांब अंतरावर (At certain Distance) कार्य करतो.



आकृती 4.25: एकसमान वितरित लोड

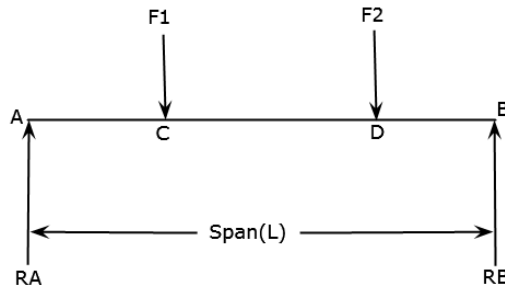
3. एकसारखे बदलणारे लोड (Uniformly varying load): हे असे लोड आहे ज्याचा परिमाण (Magnitude) विशिष्ट कालावधीत वाढतो किंवा कमी होतो, याला त्रिकोणी लोड असेही म्हणतात.



आकृती 4.26: एकसारखे बदलणारे लोड

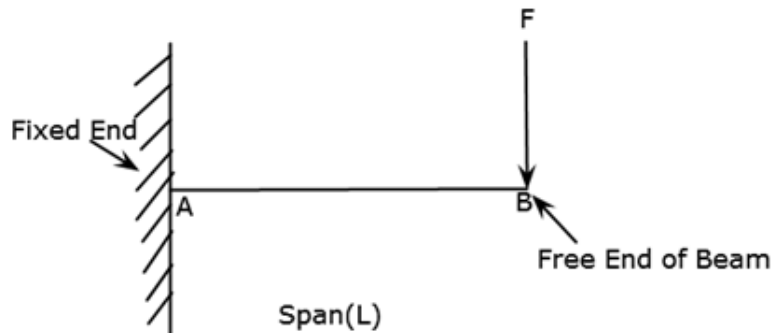
4.5. बीमचे प्रकार

4.5.1. सिम्पली सपोर्टेड बीम: जर बीम हा सपोर्ट वर नुसता (Simply) लागू होत असेल तर त्याला सिम्पली सपोर्टेड बीम म्हणतात.



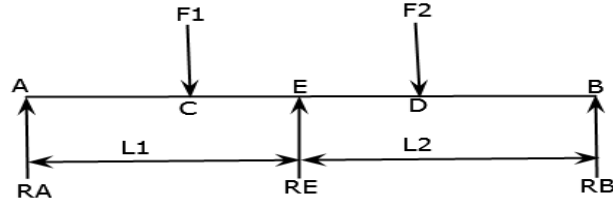
आकृती 4.27: सिम्पली सपोर्टेड बीम.

4.5.2. कॅन्टिलीव्हर बीम: जर बीम च्या एका टोकाला बल लागत असेल आणि दुसरा टोक मुक्त असेल तर, त्याला कॅन्टिलीव्हर बीम म्हणतात.



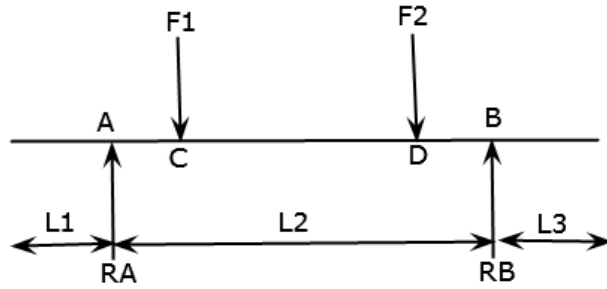
आकृती 4.28: कॅन्टिलीव्हर बीम

4.5.2. **कन्टीन्यूअस बीम:** जर बीम हि दोनपेक्षा जास्त बिंदूवर सपोर्टेड असेल तर, त्याला कन्टीन्यूअस बीम असे म्हणतात.



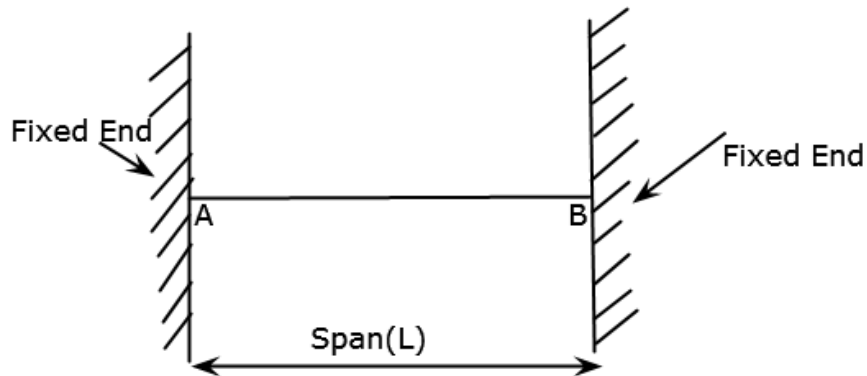
आकृती 4.29: कन्टीन्यूअस बीम

4.5.3. **ओव्हर हँग बीम:** जर बीम चा एन्ड पोर्शन जर समोर वाढवला गेला असेल तर, त्याला ओव्हर हँग बीम असे म्हणतात.



आकृती 4.30: ओव्हरहँग बीम

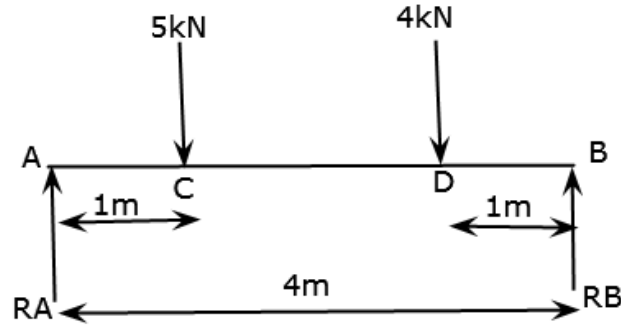
4.5.5. **फिक्स्ड बीम:** जर बिमचे दोन्ही टोक भिंतीमध्ये निश्चित असतील तर त्याला फिक्स्ड किंवा कन्स्ट्रेन्ड किंवा बिम इन बिल्ट असे म्हणतात.



आकृती 4.31: फिक्स्ड बीम

उदाहरण: वेगवेगळ्या बीमच्या सपोर्ट रिॆक्शन शोधणे.**उदाहरण क्र.- 01**

खालील आकृती 4.32 मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 4 m आहे ,त्यावर दोन पॉइंट लोड 5 kN आणि 4 kN अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून 1 m च्या अंतरावर लागू होत असतील,तर त्या साठीच्या सपोर्ट रिॆक्शन शोधा.



आकृती 4.32: पॉइंट लोडसह सिम्पली सपोर्टेड बीम

दिलेली माहिती: $F_1 = 5 \text{ kN}$ आणि $F_2 = 4 \text{ kN}$, स्पॅन = 4 m.

शोधा: सपोर्ट रिॆक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिॆक्शन शोधली जाऊ शकते.

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे. $\Sigma F_y = 0$.

कोणत्याही बिंदू संबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे. $\Sigma M = 0$

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow +ve$ $\downarrow -ve$)

$$R_A + R_B - 5 - 4 = 0$$

$$R_A + R_B - 9 = 0$$

$$R_A + R_B = 9 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर}$$

घड्याळाच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट (Anticlockwise) मोमेंट नकारात्मक आहे.

$$(5 \times 1) + (4 \times 3) - (R_B \times 4) = 0$$

$$5 + 12 - 4R_B = 0$$

$$17 - 4R_B = 0$$

$$R_B = 4.25 \text{ kN} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

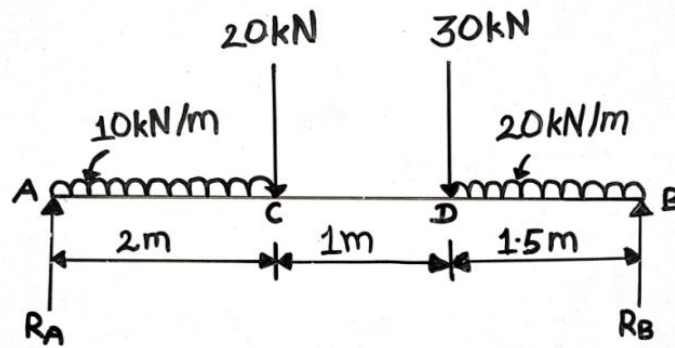
$R_B = 4.25 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते

$$R_A + 4.25 = 9$$

$$R_A = 4.75 \text{ kN} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 02

खालील आकृती 4.33 मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 4.5 m आहे ,त्यावर दोन पॉइंट लोड एकसमान वितरित भारा सह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून खालील अंतरावर लागू होत आहेत.तर त्या साठीच्या सपोर्ट रिॆक्शन शोधा.



आकृती 4.33: पॉइंट लोड आणि एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.

दिलेली माहिती: $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 30 \text{ kN}$, 10 N/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे त्याचप्रमाणे, 20 N/m चे UDL 1.5 m च्या कालावधी वर आहे.

शोधा: सपोर्ट रिॆक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिॆक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

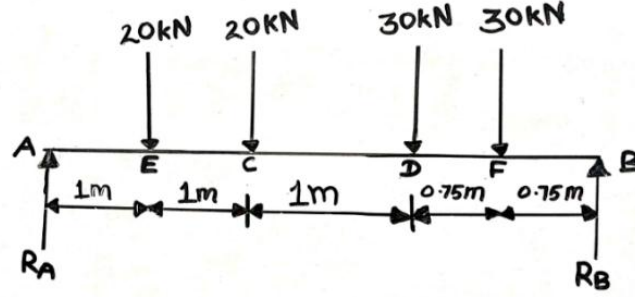
कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

दिलेल्या एकसमान वितरित भाराचं पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर करूया.

$$10 \text{ N/m} \text{ चे UDL } 2 \text{ m} \text{ च्या अंतरावर आहे } = 10 \times 2 = 20 \text{ kN}$$

$$\text{त्याचप्रमाणे, } 20 \text{ N/m} \text{ चे UDL } 1.5 \text{ m} \text{ च्या कालावधी वर आहे त्यामुळे ते होईल } 20 \times 1.5 = 30 \text{ kN}$$



आकृती 4.34: एकसमान वितरित लोड पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर.

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\Sigma F_y = 0$ $\left| \begin{array}{l} \uparrow +ve \\ \downarrow -ve \end{array} \right.$)

$$R_A + R_B - 20 - 20 - 30 - 30 = 0$$

$$R_A + R_B - 100 = 0$$

$$R_A + R_B = 100 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$\Sigma M_A = 0$ A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे.

$$(20 \times 1) + (20 \times 2) + (30 \times 3) + (30 \times 3.75) - (R_B \times 4.5) = 0$$

$$20 + 40 + 90 + 112.5 - 4.5R_B = 0$$

$$262.5 - 4.5R_B = 0$$

$$R_B = 58.33 \text{ kN} \quad \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

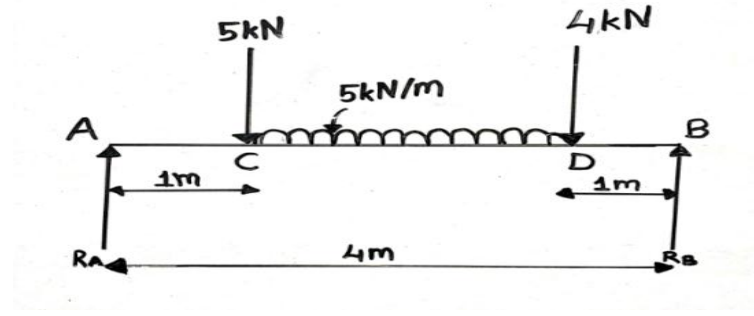
$R_B = 58.33 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते

$$R_A + 58.33 = 100$$

$$R_A = 41.67 \text{ kN} \quad \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.-3

खालील आकृती 4.35 मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 4 m आहे, त्यावर दोन पॉइंट लोड एकसमान वितरित लोड सह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून खालील कालावधीवर लागू होत आहेत. तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिएक्शन शोधा.



आकृती 4.35: पॉइंट लोड आणि एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.

दिलेली माहिती: $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, 5 kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे.

शोधा: सपोर्ट रिएक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते

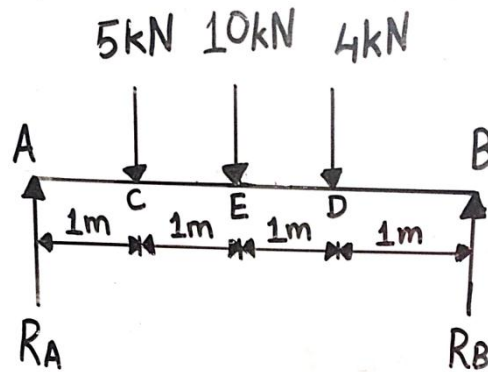
बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

2 m स्पॅनच्या मध्यभागी UDL ला समतुल्य बिंदू लोडमध्ये रूपांतरित करा, ते 10 kN असेल.

आता $\Sigma F_y = 0$ (साईन कन्व्हेन्शन $\Sigma F_y = 0$ +ve \uparrow -ve \downarrow).



आकृती 4.35(A): एकसमान वितरित लोडचे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर

$$R_A + R_B - 5 - 4 - 10 = 0$$

$$R_A + R_B - 19 = 0$$

$$R_A + R_B = 19 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \dots\dots\dots \text{A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर}$$

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे

$$(5 \times 1) + (4 \times 3) + (10 \times 2) - (R_B \times 4) = 0$$

$$5 + 12 + 20 - 4R_B = 0$$

$$37 - 4R_B = 0$$

$$R_B = 9.25 \text{ kN} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

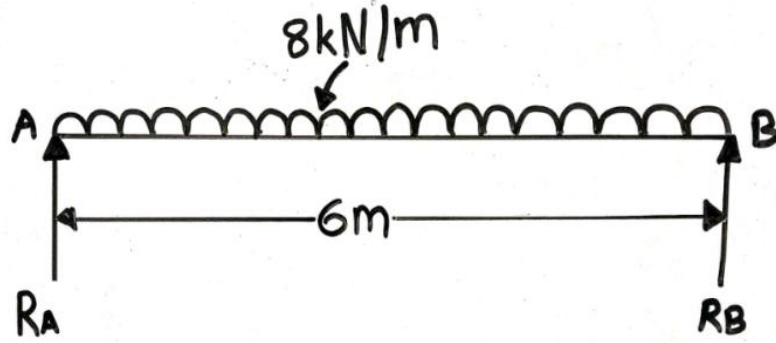
$R_B = 9.25 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते

$$R_A + 9.25 = 19$$

$$R_A = 9.75 \text{ kN} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 4

खालील आकृती 4.36 मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 6 m आहे ,त्यावर एकसमान वितरित लोड सर्व स्पॅन वर लागू होत आहे.तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिएक्शन शोधा.



आकृती 4.36: एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.

दिलेलीमाहिती: 8 N/m चे UDL 6 m च्या अंतरावर आहे

शोधा: सपोर्ट रिएक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते

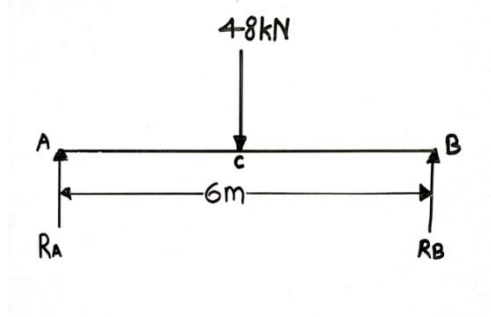
बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

UDL ज्या स्पॅन वर आहे त्याचे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर करूया.

8 N/m चे UDL 6 m च्या अंतरावर आहे $8 \times 6 = 48 \text{ kN}$.



आकृती 4.37 : एकसमान वितरित लोड चे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow +ve$ $\downarrow -ve$).

$$R_A + R_B - 48 = 0$$

$$R_A + R_B = 48 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$\Sigma M_A = 0$ A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे

$$(48 \times 3) - (R_B \times 6) = 0$$

$$144 - 6R_B = 0$$

$$R_B = 24 \text{ kN} \quad \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

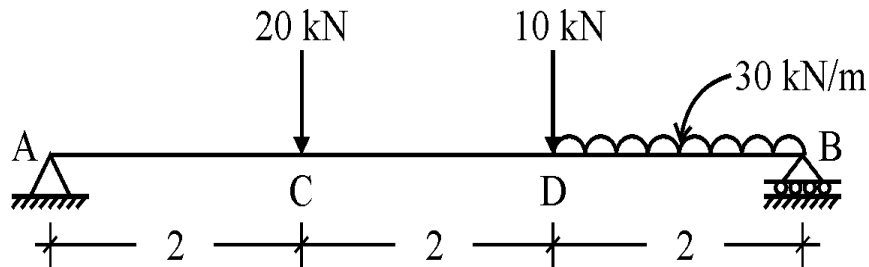
$R_B = 24 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते.

$$R_A + 24 = 48$$

$$R_A = 24 \text{ kN} \quad \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 05

खालील आकृती 4.38 मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 6 m आहे ,त्यावर दोन पॉइंट लोड 20 kN आणि 10 kN सह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून (End) 2 m च्या अंतरावर पॉइंट लोड ऍक्ट होत आहेत तसेच 30 kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे .तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिॆक्शन शोधा.



आकृती 4.38: पॉइंट लोड आणि एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.

दिलेली माहिती: दोन पॉइंट लोड 20 kN आणि 10 kN सह 30 kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे

शोधा: सपोर्ट रिएक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

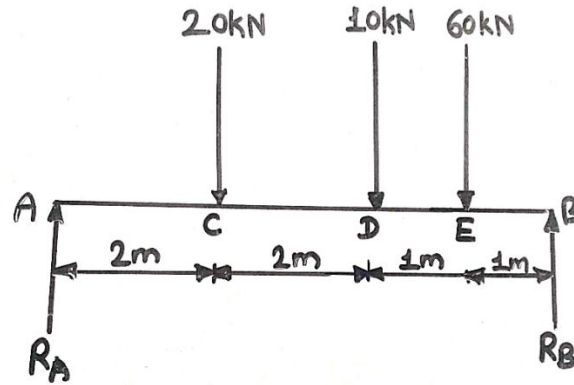
कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

UDL ज्या स्पॅन वर आहे त्याचे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर करूया.

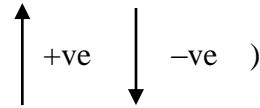
30 kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे.

$$30 \times 2 = 60 \text{ kN}$$



आकृती 4.39: फ्री बॉडी डायग्राम

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन



$$R_A + R_B - 20 - 10 - 60 = 0$$

$$R_A + R_B = 90$$

..... समीकरण (1)

$\Sigma M_A = 0$ A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे.

$$(20 \times 2) + (10 \times 4) + (60 \times 5) - (R_B \times 6) = 0$$

$$40 + 40 + 300 - (R_B \times 6) = 0$$

$$380 - 6R_B = 0$$

$R_B = 63.33 \text{ kN}$ उत्तर

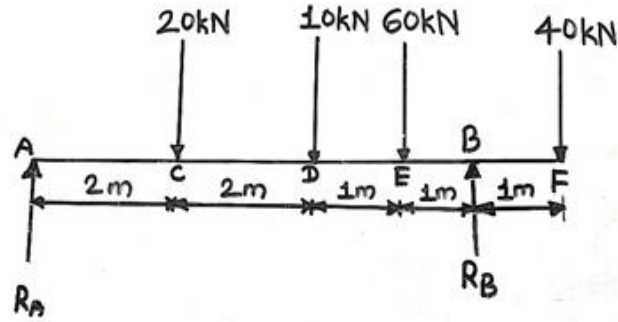
$R_B = 63.33 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते,

$$R_A + 63.33 = 90$$

$R_A = 26.67 \text{ kN}$ उत्तर

उदाहरण क्र.- 06

खालील आकृती 4.40 मध्ये ओव्हरहॅंग बीम ज्याचा स्पॅन 7 m आहे तर, त्यासाठीच्या सपोर्ट रिएक्शन शोधा.



आकृती 4.40: पॉइंट लोड सह सिम्पली सपोर्टेड ओव्हरहॅंग बीम.

दिलेली माहिती: 20 kN, 10 kN, 60 kN आणि 40 kN चे पॉइंट लोड ऍक्ट होत आहेत.

शोधा: सपोर्ट रिएक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\begin{matrix} \uparrow +ve \\ \downarrow -ve \end{matrix}$)

$$R_A + R_B - 20 - 10 - 60 - 40 = 0$$

$$R_A + R_B = 130 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$\Sigma M_A = 0$ A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे.

$$(20 \times 2) + (10 \times 4) + (60 \times 5) + (40 \times 7) - (R_B \times 6) = 0$$

$$40 + 40 + 300 + 280 + (R_B \times 6) = 0$$

$$660 - 6R_B = 0$$

$$R_B = 110 \text{ kN} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

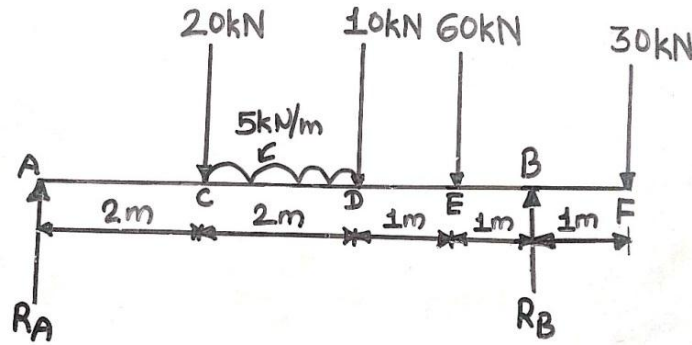
$R_B = 110 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते,

$$R_A + 110 = 130$$

$$R_A = 20 \text{ kN} \dots\dots\dots\text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 07

खालील आकृती 4.41 मध्ये ओव्हरहॅंग बीम ज्याचा स्पॅन 7 m आहे तर, त्यासाठीच्या सपोर्ट रिॲक्शन शोधा



आकृती 4.41: ओव्हरहॅंग बीम.

दिलेली माहिती 20 kN, 10 kN, 60 kN आणि 30 kN चे पॉइंट लोड आणि 5 kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर ऍक्ट होत आहेत .

शोधा : सपोर्ट रिॲक्शन R_A आणि R_B

उत्तर : समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिॲक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

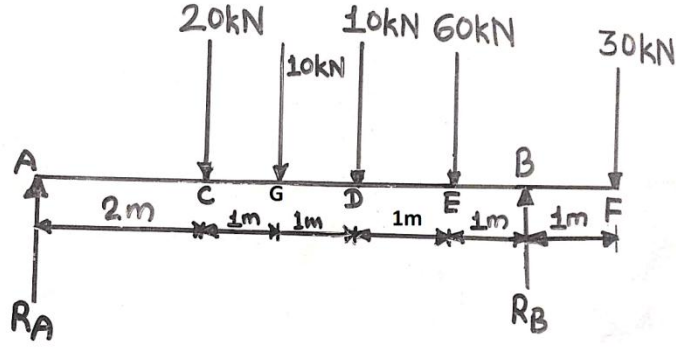
कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

udl ज्या स्पॅन वर आहे त्याचे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर करूया.

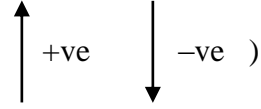
5 kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे.

$$5 \times 2 = 10 \text{ kN}$$



आकृती 4.42: फ्री बॉडी डायग्राम

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन



$$R_A + R_B - 20 - 10 - 10 - 60 - 30 = 0$$

$$R_A + R_B = 130$$

..... समीकरण (1)

$\Sigma M_A = 0$ A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे.

$$(20 \times 2) + (10 \times 3) + (10 \times 4) + (60 \times 5) + (30 \times 7) - (R_B \times 6) = 0$$

$$40 + 30 + 40 + 300 + 210 + (R_B \times 6) = 0$$

$$620 - 6R_B = 0$$

$$R_B = 103.33 \text{ kN} \dots \dots \dots \text{ उत्तर}$$

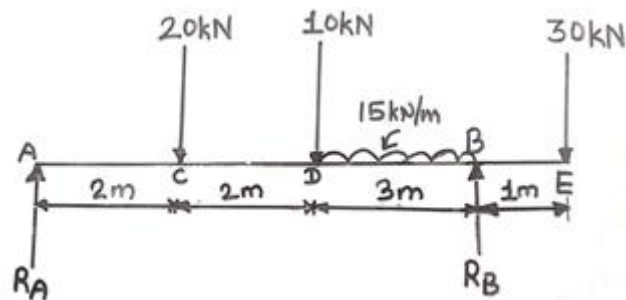
$R_B = 103.33 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते,

$$R_A + 103.33 = 130$$

$$R_A = 26.67 \text{ kN} \dots \dots \dots \text{ उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 08

खालील आकृती 4.41 मध्ये ओव्हरहॅंग बीम ज्याचा स्पॅन 8 m आहे तर, त्यासाठीच्या सपोर्ट रिएक्शन शोधा.



आकृती 4.43: ओव्हरहॅंग बीम.

दिलेली माहिती: 20 kN, 10 kN, 30 kN चे पॉइंट लोड आणि 15 kN/m चे UDL 3 m च्या अंतरावर ऍक्ट होत आहेत .

शोधा : सपोर्ट रिएक्शन R_A आणि R_B

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते.

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

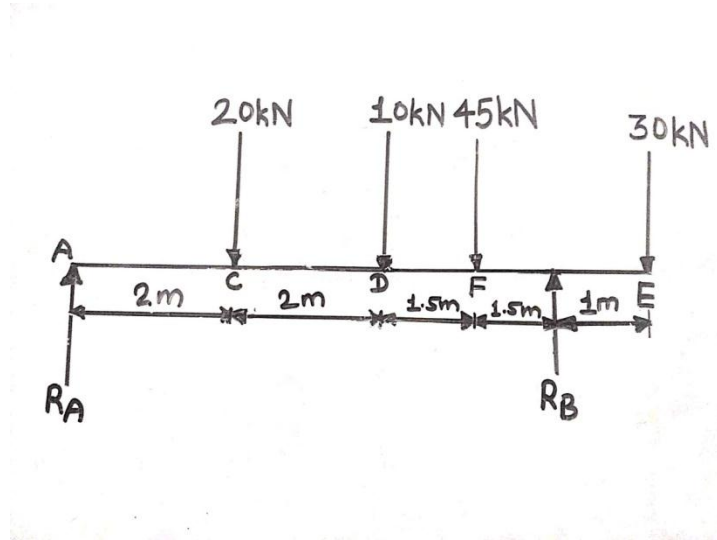
कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$$\Sigma M = 0$$

udl ज्या स्पॅन वर आहे त्याचे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर करूया.

15 kN/m चे UDL 3 m च्या अंतरावर आहे.

$$15 \times 3 = 45 \text{ kN}$$



आकृती 4.44: फ्री बॉडी डायग्राम

आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\uparrow +ve$ $\downarrow -ve$)

$$R_A + R_B - 20 - 10 - 45 - 30 = 0$$

$$R_A + R_B = 105 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$\Sigma M_A = 0$ A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे.

$$(20 \times 2) + (10 \times 4) + (45 \times 5.5) + (30 \times 8) - (R_B \times 7) = 0$$

$$40 + 40 + 247.5 + 240 + (R_B \times 7) = 0$$

$$567.5 - 7R_B = 0$$

$R_B = 81.07 \text{ kN}$ उत्तर

$R_B = 81.07 \text{ kN}$ समीकरण 1 मध्ये टाकून R_A शोधले जाऊ शकते,

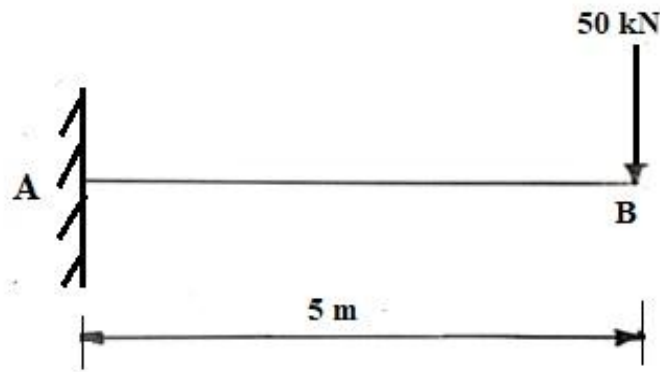
$$R_A + 81.07 = 105$$

$R_A = 23.93 \text{ kN}$ उत्तर

उदाहरणे: कॅन्टिलीव्हर बीम

उदाहरण क्र.- 01

5 m स्पॅनच्या खालील कॅन्टिलीव्हर बीमसाठी, सपोर्ट रिएक्शन शोधा .



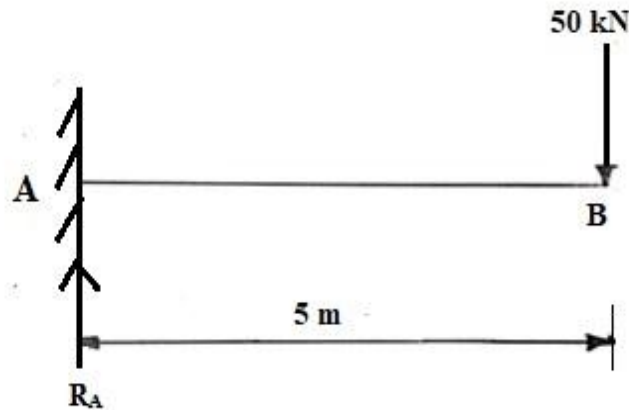
आकृती 4.45: कॅन्टिलीव्हर बीम

दिलेली माहिती : 50 kN चे पॉइंट लोड 5 m बीमवर लागू होत आहे.

शोधा : सपोर्ट रिएक्शन R_A

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.



आकृती 4.46: फ्री बॉडी डायग्राम

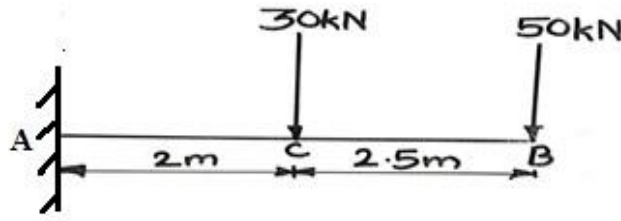
आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\uparrow +ve$ $\downarrow -ve$)

$$R_A - 50 = 0 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$$R_A = 50 \text{ kN} \dots\dots\dots \text{उत्तर}$$

उदाहरण क्र.- 02

5.5 m स्पॅनच्या खालील कॅन्टिलीव्हर बीमसाठी, सपोर्ट रिएक्शन शोधा.



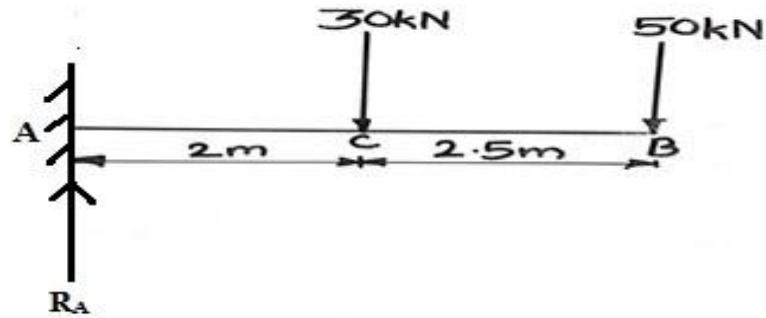
आकृती 4.47: कॅन्टिलीव्हर बीम

दिलेली माहिती : 50 kN आणि 30 kN चे पॉइंट लोड 5.5m च्या बीमवर लागू होत आहे.

शोधा : सपोर्ट रिएक्शन R_A .

उत्तर : समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिएक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.



आकृती 4.48: फ्री बॉडी डायग्राम

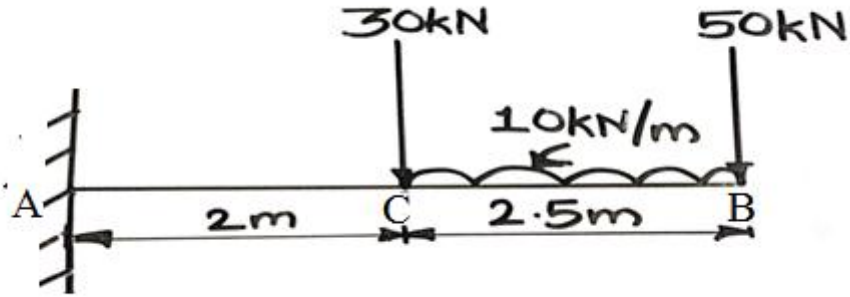
आता $\Sigma F_y = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन $\uparrow +ve$ $\downarrow -ve$)

$$R_A - 30 - 50 = 0 \quad \dots\dots\dots \text{समीकरण (1)}$$

$$R_A = 80 \text{ kN. (उत्तर)}$$

उदाहरण क्र.- 03

4.5 m स्पॅनच्या खालील कॅन्टिलीव्हर बीमसाठी, सपोर्ट रिॆक्शन शोधा.

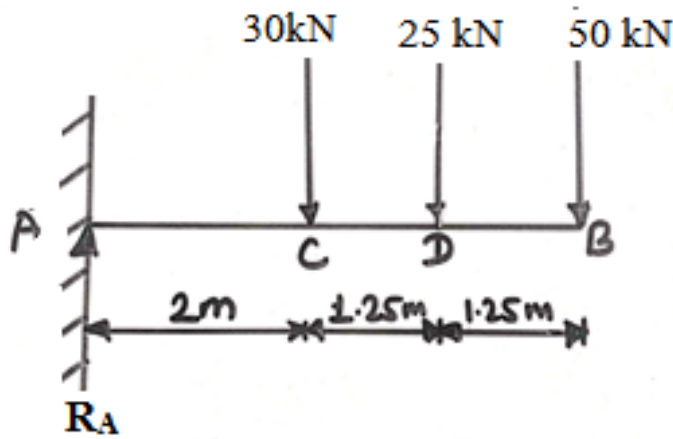
**आकृती 4.49: कॅन्टिलीव्हर बीम**

दिलेली माहिती : 50 kN, 30 kN चे पॉइंट लोड आणि 10 kN/m आणि udl 4.5 m च्या बीमवर लागू होत आहे.

शोधा : सपोर्ट रिॆक्शन R_A

उत्तर : समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिॆक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma F_y = 0$.

**आकृती 4.50: फ्री बॉडी डायग्राम**

आता $\Sigma F_y = 0$

$$R_A - 30 - 50 - 25 = 0$$

(साइन कन्व्हेन्शन

..... समीकरण (1)



$$R_A = 105 \text{ kN} \dots \dots \dots \text{उत्तर}$$

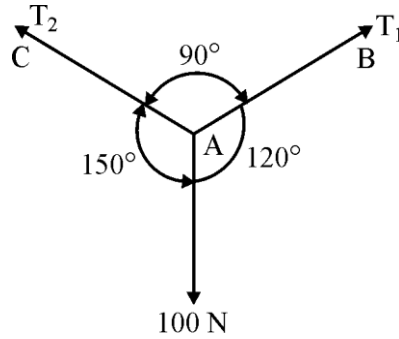
4.5 बीमसाठी प्रतिक्रिया सोडविण्यासाठी भौमितीय पद्धत (Beam Reaction Graphically For Simply Supported Beam Subjected To Vertical Load)

बीमकरित्या बीम प्रतिक्रिया भौमितीय पद्धतीने सोडविण्यासाठी स्टेप्स खालील प्रमाणे आहे

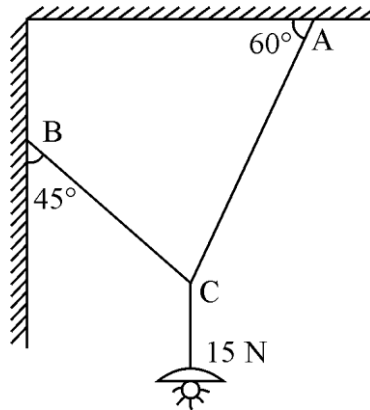
1. स्पेस आणि वेक्टर डायग्राम काढा
2. पोलर डायग्राम काढा: हि आकृती वेक्टर आकृतीतून प्राप्त होते, ज्यामध्ये बिंदू “O” ध्रुव वेक्टर आकृतीच्या जवळ घेतला जातो आणि वेक्टर आकृतीचे सर्व बिंदू “O” ध्रुवाशी जोडलेले असतात.
3. फणिकुलर पॉलीगोन काढा.
4. हि आकृती पोलर डायग्राम मधून प्राप्त होते. यामध्ये रिझल्टन्ट प्राप्त करण्यासाठी पहिला आणि शेवटचा बिंदू जोडा.

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

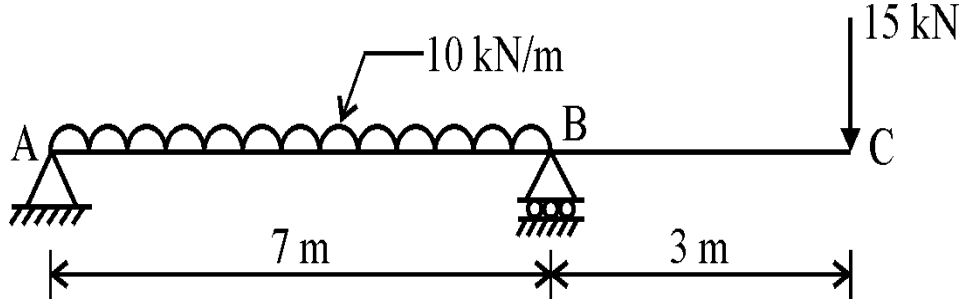
1. फ्री बॉडी डायग्राम ची परिभाषा करा.
2. लामीचे प्रमेय उदाहरणा सह स्पष्ट करा.
3. लामीच्या प्रमेयाचे उपयोग तसेच लामीच्या प्रमेयाची मर्यादा स्पष्ट करा.
4. संतुलन (Equilibrium) आणि रिझल्टन्ट उदाहरणा सह स्पष्ट करा.
5. विश्लेषणात्मकदृष्ट्या बल सिस्टमचा समतोल स्थिती सांगा.
6. खालील को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली साठी तणावाचे मूल्य शोधा.



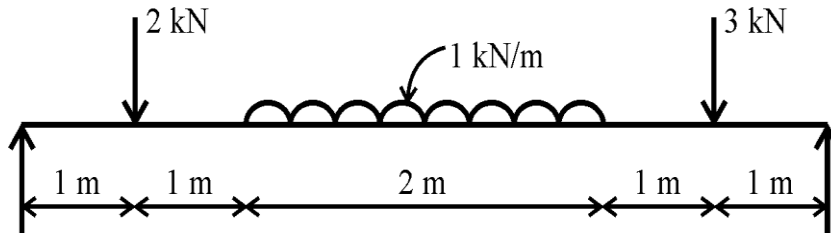
7. खालील को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली साठी तणावाचे मूल्य शोधा.



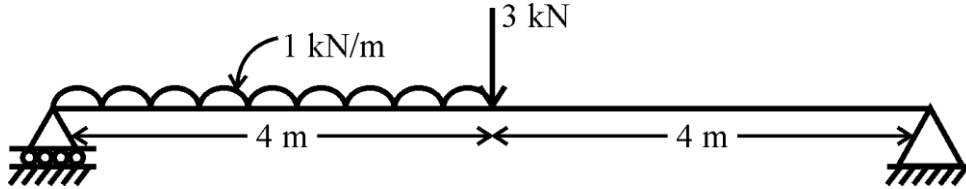
8. सपोर्टचे विविध प्रकार आकृती सह स्पष्ट करा.
9. बिमचे विविध प्रकार आकृती सह स्पष्ट करा
10. खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 10 m आहे ,त्यावर दोन लोड 15 kN आणि 10 kN/m चे UDL 7 m सह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून 3 m अंतरावर च्या पॉइंट ऍक्ट होत आहेत.तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



11. खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 6 m आहे ,त्यावर दोन लोड 2 kN आणि 1 kN, 1 kN/m चे UDL 2 m सह पॉइंट ऍक्ट होत आहेत.तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



12. खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 8 m आहे,त्यावर पॉईंट लोड 3 kN डाव्या एंडपासून 4 m अंतरावर च्या पॉइंटऍक्ट होत आहेत तसेच 1 kN/m चे UDL 4m च्या अंतरावर आहे.तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



मायक्रो प्रोजेक्ट:

- विविध प्रकारच्या बीमचे मॉडेल वास्तविक तसेच संबंधित योजनाबद्ध आकृती दर्शविणारा तक्ता तयार करा.

घटक 5

घर्षण

(Friction)

विषय निष्पत्ती (Course outcomes): उपयुक्त हेतूसाठी विविध परिस्थितींमध्ये (Situation) घर्षण (Friction) तत्त्व (Principles) लागू करा

घटक निष्पत्ती (Unit Outcomes):

1. दिलेल्या स्थितीसाठी (Situation) घर्षण बल (Friction force) आणि घर्षण गुणांक (Coefficient of Friction) निश्चित करा.
2. दिलेल्या परिस्थितीसाठी (Condition) घर्षण स्थितीचे वर्णन करा.
3. दिलेल्या स्थितीत घर्षण बल निश्चित करा.
4. फ्री बॉडी डायग्राम (Free body diagram) वापरून दिलेल्या स्थितीसाठी शिडीवर (ladder) काम करणारे विविध बल ओळखा.

5.1 घर्षण (Force):

घर्षणाची व्याख्या (Force definition) : एका वस्तूच्या हालचालीचा (Movement) प्रतिकार (Resistance) दुसऱ्याच्या सापेक्ष (Relative) हालचालीला होतो, त्याला घर्षण म्हणतात. दोन पृष्ठभागावर (Surface) असणाऱ्या अनियमिततांमुळे (Irregularities) घर्षण निर्माण होते. जेव्हा एखादी वस्तू (Body) दुसरीकडे सरकते (Slide) तेव्हा या अनियमिततेमुळे घर्षणा मध्ये वाढ होते. जर अनियमितता किंवा पृष्ठभागाचा खडबडीतपणा (Surface roughness) वाढला तर घर्षण देखील वाढेल.

आपल्या दैनंदिन कामकाजात घर्षणाची भूमिका (Role) अत्यंत महत्वाची आहे जसे रस्त्याच्या पृष्ठभागावर शूज घालून चालणे, सायकलचे टायर रस्त्याच्या पृष्ठभागावर फिरणे, पेनने पृष्ठावर लिहिणे इत्यादी. घर्षणाच्या अनुपस्थितीत पृष्ठभागावर चालणे खूप कठीण होते ते पृष्ठभागाच्या गुळगुळीतपणामुळे (Smoothness).

5.1.1 घर्षणाचे प्रकार

घर्षणाचे दोन प्रकार आहेत

- स्थिर घर्षण (Static friction)
- गतिशील घर्षण (Rolling friction)

स्थिर घर्षण:

स्थिर घर्षणाची व्याख्या (Definition): जेव्हा स्थिर (Rest) स्थितीत (Condition) असताना वस्तूद्वारे अनुभवलेल्या घर्षणाला स्थिर घर्षण म्हणतात.

गतिशील घर्षण:

गतिशील घर्षणाची व्याख्या (Definition): जेव्हा वस्तू हालचालीच्या (Moving) अवस्थेत असते तेव्हा वस्तूद्वारे अनुभवलेले (Experienced) घर्षणाला गतिशील घर्षण म्हणतात.

गतिशील घर्षण हे दोन प्रकारांमध्ये विभागलेले आहे

- सरकते घर्षण (Sliding friction)
- रोलिंग घर्षण (Rolling friction)

सरकते घर्षण (Sliding friction)

सरकते घर्षणाची व्याख्या (Defination): जेव्हा एक वस्तू दुसऱ्या वस्तूवर सरकते तेव्हा वस्तूद्वारे अनुभवलेले घर्षणाला सरकते घर्षण म्हणतात.

रोलिंग घर्षण (Rolling friction)

रोलिंग घर्षणाची व्याख्या (Defination): एखाद्या वस्तूला दुसऱ्या वस्तूवर रोलिंग होत असतांना जे घर्षण जाणवते त्याला रोलिंग घर्षण म्हणतात.

घर्षणाचे फायदे (Advantages of friction):

- आपण पृष्ठभागावर मुक्तपणे (Freely) फिरू शकतो.
- आपण पेन सहज पकडून पानावर लिहू शकतो.
- ऑटोमोबाईल ब्रेकिंग सिस्टम घर्षण तत्त्वानुसार कार्य करते.
- रस्त्याच्या पृष्ठभागावर (Surface) टायरच्या मदतीने वाहनाची हालचाल होते.
- आपण वस्तू (Body) हातात धरून ठेवू शकतो.

घर्षणांचे तोटे (Disadvantages of friction):

- मशीनमध्ये हलणारे (Moving) भागांचे Wear आणि Tear होते.
- मशीन ची शक्ती (Power) कमी होते.

- मशीन चालवण्यासाठी जास्त शक्ती (Power) लागते.
- मशीनची कार्यक्षमता (Efficiency) कमी होते.
- यामुळे मशीनची देखभाल (Maintenance) वाढेल.
- उर्जा (Energy) निर्मितीसाठी ऑटोमोबाईलला अधिक इंधनाची (Fuel) आवश्यकता लागेल.

स्थिर घर्षणांचे नियम (Laws of static friction)

स्थिर घर्षणाचे नियम खालीलप्रमाणे आहेत

- घर्षण बल (Friction force) नेहमी संपर्काच्या पृष्ठभागावर टॅजेन्शियल (Tangential) कार्य करते.
- घर्षण बल वस्तूच्या (Body) गतीच्या (Motion) दिशेच्या (Direction) विरुद्ध (Opposite) कार्य (Act) करते.
- संपर्कात असलेल्या पृष्ठभागाच्या क्षेत्रावर (Surface area) घर्षण बल स्वतंत्र (Independant) असते
- घर्षण बल पृष्ठभागाच्या खडबडीवर (Roughness) अवलंबून असते.
- घर्षण बलाचे (Friction force) सामान्य प्रतिक्रियेचे (Normal Reaction) गुणोत्तर स्थिर राहते.
- स्थिर घर्षण (Static friction) नेहमी गतिशील घर्षणापेक्षा (Dynamic friction) जास्त असते.

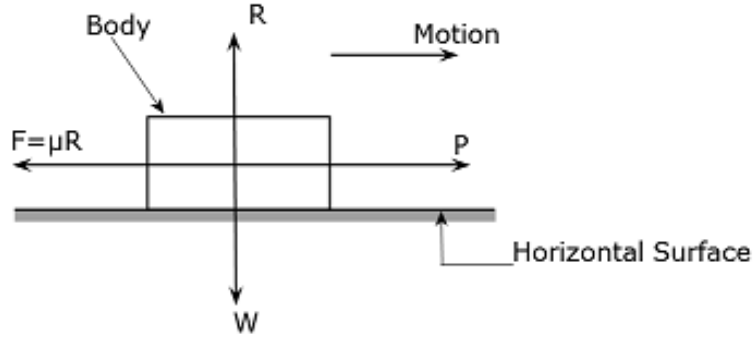
गतिशील घर्षणाचे नियम (Laws of dynamic friction)

- घर्षण बल (Friction force) नेहमी एका दिशेने कार्य करते, ज्याच्या विरुद्ध (Opposite) वस्तू हलते.
- गतिज घर्षणांची परिमाण (Magnitude) दोन पृष्ठभागांमधील सामान्य प्रतिक्रियेचे स्थिर गुणोत्तर (Ratio) धारण (Bears) करते. परंतु घर्षण (Friction) मर्यादित करण्याच्या बाबतीत हे प्रमाण त्यापेक्षा किंचित कमी आहे.
- मध्यम गतीसाठी, घर्षण बल स्थिर (Constant) राहते. पण वेग (Speed) वाढल्याने तो किंचित कमी होतो.

5.1.2: समतोल मर्यादित करणे (Limiting Equilibrium):

आकृती 5.1 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे (W) वजनाची वस्तू खडबडीत (Rough) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवलेली दर्शवत (Represent) आहे. वस्तूचे वजन (W) नेहमी अनुलंब (Vertically) खालच्या दिशेने कार्य (Act) करते आणि सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) (R) नेहमी अनुलंब वरच्या दिशेने कार्य करते. जर आपण थोडे आडवे बल (Horizontal force) 'P' लावले तर घर्षण बला (Friction force) मुळे (F) वस्तू पुढच्या दिशेने जात नाही, बलाच्या दिशेने पुढे जाणे या

टप्प्यावर घर्षण बल जास्तीत जास्त (Maximum) आहे आणि ती आडव्या बलाच्या (P) बरोबरीची (Equal) आहे आणि वस्तूच्या या अवस्थेला (Situation) मर्यादित समतोल (Limiting Equilibrium) म्हणून ओळखले जाते. जर आपण आडवे बल (P) आणखी वाढवले तर घर्षण बलापेक्षा (F), आडवे बल (P) चा परिमाण वाढल्यामुळे वस्तू बलाच्या दिशेने जाईल.



आकृती -5.1 मर्यादित समतोल

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

S = परिणामी प्रतिक्रिया (Reaction force) N मध्ये

समतोल मर्यादित करण्याची अटी (Condition for Limiting Equilibrium):

$\sum F_x = 0$ \longrightarrow +ve चिन्ह (आडवे बल उजवीकडे जात आहे)

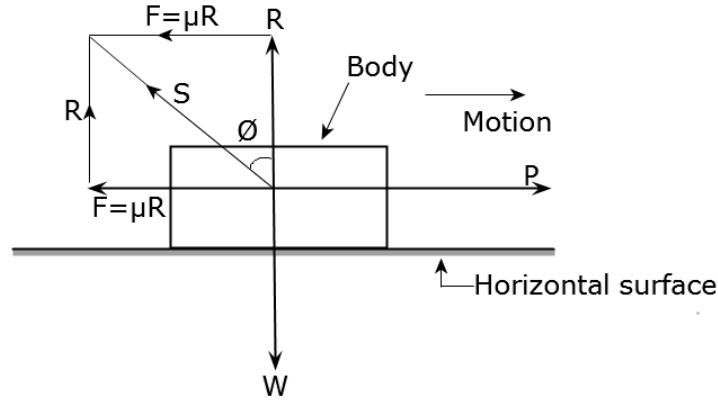
\longleftarrow -ve चिन्ह (आडवे बल डाव्या बाजूला जात आहे)

$\sum F_y = 0$ \uparrow +ve चिन्ह (उभ्या बलाला वरची दिशा आहे)

\downarrow -ve चिन्ह (उभ्या बलाला खालची दिशा आहे)

5.1. घर्षण मर्यादित करणे किंवा घर्षण मूल्य मर्यादित करणे (Limiting friction or limiting value of friction)

हे घर्षण बलाचे जास्तीत जास्त मूल्य (Value) आहे,जेव्हा एखादी वस्तू दुसऱ्या वस्तूच्या पृष्ठभागावर (Surface) सरकण्यास (Slide) सुरुवात करते.जेव्हा बल (Force) मर्यादित घर्षणापेक्षा (Limiting friction) कमी असते, तेव्हा वस्तू विश्रांती मध्ये (Rest) राहते.जेव्हा बल मर्यादित घर्षणापेक्षा जास्त असते, तेव्हा वस्तू हलू (Move) लागते.



आकृती 5.2: मर्यादित घर्षण (Limiting friction)

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

S = परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction) N मध्ये

5.1.4 घर्षण गुणांक (Coefficient of friction):

घर्षण बल (Friction force) व सामान्य प्रतिक्रियेच्या (Normal reaction) गुणोत्तराला (Ratio) घर्षण गुणांक असे म्हणतात. घर्षण गुणांक हे μ ह्या चिन्हाद्वारे दर्शविले जाते.

$$\text{घर्षण गुणांक } (\mu) = \frac{\text{घर्षण बल } (F)}{\text{सामान्य प्रतिक्रिया } (R)}$$

$$\mu = \frac{F}{R}$$

घर्षण गुणांक (μ) ला एकक (Unit) नाही.

5.1.5 घर्षण कोन (Angle of friction) आणि परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant Reaction)

सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) आणि परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction) यांच्यातील कोनाला (Angle) घर्षण कोन म्हणतात. घर्षण कोन हे ' ϕ ' ह्या चिन्हाद्वारे दर्शविले जाते.

आकृती 5.2 पासून,

$$\tan \phi = \frac{F}{R}$$

$$\text{But } \mu = \frac{F}{R}$$

$$\tan \phi = \mu \quad \dots\dots \text{ घर्षण कोन } (\phi) \text{ आणि घर्षण गुणांक } (\mu) \text{ यांच्यातील संबंध.}$$

परिणामी प्रतिक्रिया (S)

$$S = \sqrt{F^2 + R^2}$$

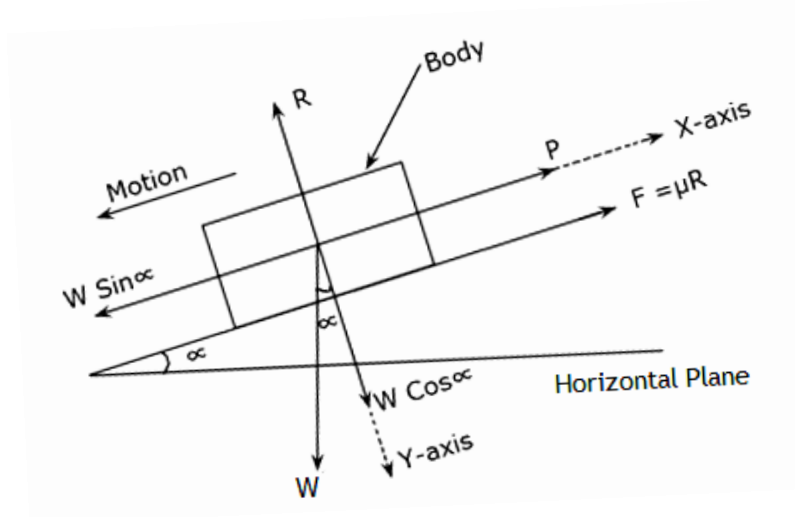
येथे,

R = सामान्य प्रतिक्रिया हे N मध्ये

F = घर्षण बल हे N मध्ये

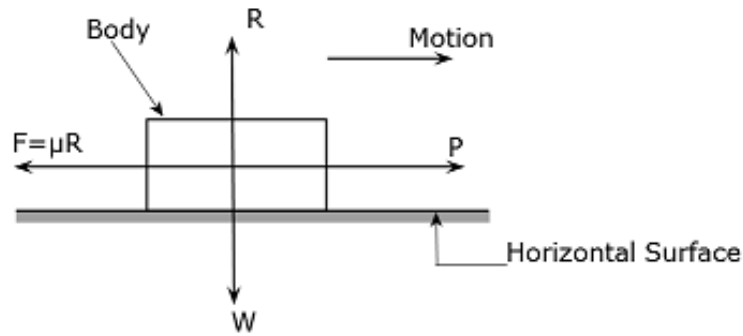
5.1.6 रिपोज कोन (Angle of repose) (α)

जेव्हा वस्तू एखाद्या झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Incline surface) ठेवली जाते आणि वस्तूवर कोणत्याही प्रकारच्या बाह्य बलाचा (External force) प्रभाव न घेता स्वतःच्या वजनामुळे (Own weight) खाली सरकण्यास सुरुवात होते तेव्हा आडव्या पृष्ठभागाचा (Horizontal surface) झुकलेल्या पृष्ठभागाशी (Incline surface) झालेल्या कोनाला रिपोज कोन (Angle of repose) असे म्हणतात.



आकृती -5.3: रिपोज कोन

5.2 जेव्हा वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवली जाते आणि बल (Force) समतोल स्थितीत (Equilibrium condition) आडव्या पृष्ठभागाला (Horizontal surface) समांतर (Parallel) लागू होतो.



आकृती -5.4

आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) (W) एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर आडवे बल (Horizontal force) (P) लावलेला आहे असा विचार करू. बलामुळे (P) वस्तू पुढच्या दिशेने जाईल आणि या दिशेच्या विरुद्ध घर्षण बल (Frictional force) (F), आकृती 5.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कार्य करेल.

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\begin{array}{ccc} \sum F_x = 0 & \longrightarrow & +ve \text{ चिन्ह (आडवे बल उजवीकडे जात आहे)} \\ & \longleftarrow & -ve \text{ चिन्ह (आडवे बल डाव्या बाजूला जात आहे)} \end{array}$$

$$\therefore +P - F = 0$$

$$\text{परंतु } F = \mu R,$$

$$\therefore +P - \mu R = 0$$

$$\therefore +P = \mu R = F \quad \dots\dots\dots (i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\begin{array}{ccc} \sum F_y = 0 & \uparrow & +ve \text{ चिन्ह (उभ्या बलाला वरची दिशा आहे)} \\ & \downarrow & -ve \text{ चिन्ह (उभ्या बलाला खालची दिशा आहे)} \end{array}$$

$$\therefore +R - W = 0$$

$$\therefore +R = W \quad \dots\dots\dots (ii)$$

जेव्हा वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवली जाते आणि बल (Force) समतोल स्थितीत (Equilibrium condition) आडव्या पृष्ठभागाला (Horizontal surface) समांतर (Parallel) लागू होतो, या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे.

उदाहरण क्र -01

3000 N वजनाची वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवलेली आहे आणि जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.3 असेल तर वस्तू हलविण्यासाठी आवश्यक आडवे बल (Horizontal force) शोधा.

उत्तर:

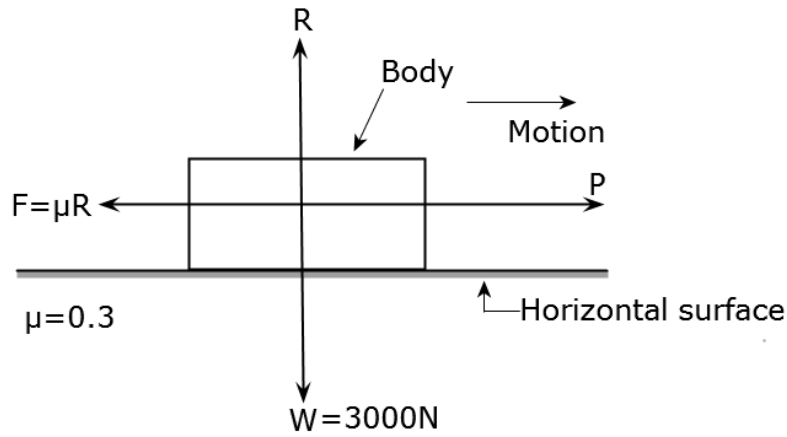
दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 3000 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.3

आडवे बल (P) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केले आहे.



आकृती-5.5

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore +P - F = 0$$

$$\therefore +P - \mu R = 0$$

$$\therefore +P - 0.3R = 0$$

$$\therefore +P = 0.3R \dots\dots\dots(i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium) :

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore +R - W = 0$$

$$\therefore +R - 3000 = 0$$

$$\therefore R = 3000 \text{ N}$$

$R = 3000 \text{ N}$ समीकरण (i) मध्ये टाकल्यास, आपल्याला मिळते

$$+P = 0.3R$$

$$\therefore +P = 0.3(3000)$$

$$\therefore P = 900 \text{ N} \dots\dots\dots \text{ आडवे बल}$$

उदाहरण क्र.- 02

300 N वजनाची वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि वस्तू हलविण्यासाठी आवश्यक असलेले आडवे बल (Horizontal force) 85 N आहे. तर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) आणि घर्षण बल (Frictional force) किती असेल.

उत्तर:

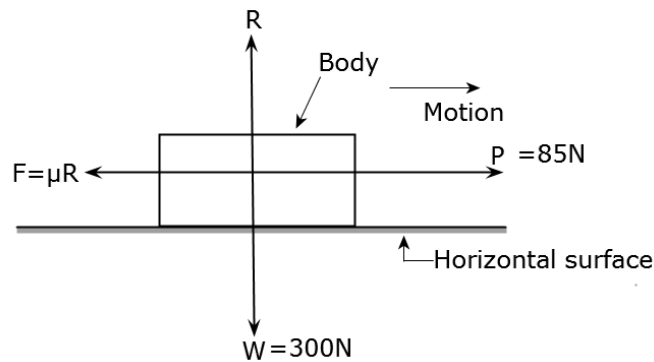
दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 300 N

आडवे बल (P) = 85 N

घर्षण गुणांक (μ) = ?

घर्षण बल (F) = ?



आकृती-5.6

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केले आहे.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium) :

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore +P - F = 0$$

$$\therefore 85 - F = 0$$

$$\therefore F = 85 \text{ N} \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Frictional force)}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore +R - W = 0$$

$$\therefore +R - 300 = 0$$

$$\therefore R = 300 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant Reaction)}$$

आपल्याला माहित आहे की, $\mu = \frac{F}{R}$

$$\therefore \mu = \frac{85}{300}$$

$$\therefore \mu = 0.2833 \dots\dots\dots \text{घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)}$$

उदाहरण क्र. -03

25 kN वजनाची वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि आडवे बल P वस्तूवर लावलेले आहे, जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.7 आहे .तर सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction), घर्षण बल (Frictional force) आणि घर्षण कोन (Angle of friction) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 25 kN = 25 × 1000 = 25000 N..... (1 kN = 1000 N)

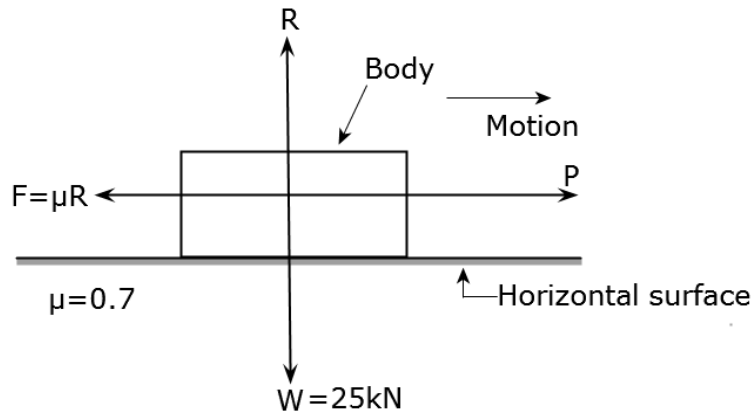
घर्षण गुणांक (μ) = 0.7

सामान्य प्रतिक्रिया (R) = ?

घर्षण बल (F) = ?

घर्षण कोन (θ) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केली आहे.



आकृती-5.7

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow \quad +ve \quad \longleftarrow \quad -ve$$

$$\therefore +P - F = 0$$

$$\therefore +P - \mu R = 0$$

$$\therefore +P - 0.7R = 0$$

$$\therefore +P = 0.7R \quad \dots\dots\dots (i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow \quad +ve \quad \downarrow \quad -ve$$

$$\therefore +R - W = 0$$

$$\therefore +R - 25000 = 0$$

$$\therefore R = 25000 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)}$$

$R = 25000 \text{ N}$ समीकरण (i) मध्ये टाकल्यास, आपल्याला मिळते

$$+ P = 0.7R$$

$$\therefore + P = 0.7 \times 25000$$

$$\therefore P = 17500 \text{ N} \dots\dots\dots \text{आडवे बल (Horizontal force)}$$

तसेच,

$$\tan \phi = \mu$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1}(\mu)$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1}(0.7)$$

$$\therefore \phi = 34.99^\circ \dots\dots\dots \text{घर्षण कोन (Angle of friction)}$$

तसेच,

$$\therefore F = \mu R$$

$$\therefore F = 0.7 \times 25000$$

$$\therefore F = 17500 \text{ N} \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Friction force)}$$

उदाहरण क्र. -04

आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली 60 N वजन असलेली वस्तू (Body) ओढण्यासाठी 30 N आडवे बल (Horizontal force) आवश्यक आहे. तर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) आणि परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction) किती असेल?

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

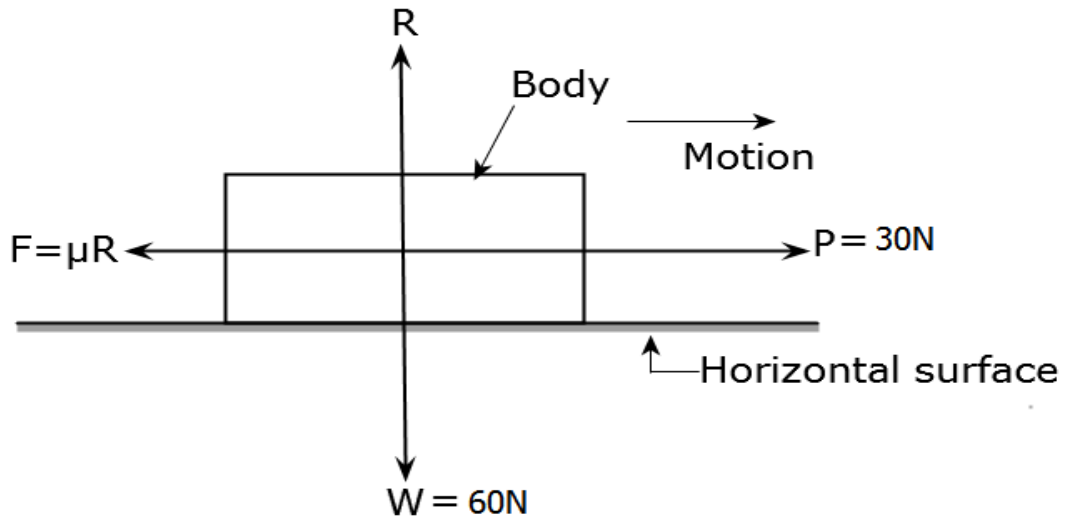
वस्तूचे वजन (W) = 60 N

आडवे बल (P) = 30 N

घर्षण गुणांक (μ) = ?

परिणामी प्रतिक्रिया (S) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केली आहे.



आकृती-5.8

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore +P - F = 0$$

$$\therefore 30 - F = 0$$

$$\therefore \mathbf{F = 30\ N} \quad \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Friction force)}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore +R - W = 0$$

$$\therefore +R - 60 = 0$$

$$\therefore \mathbf{R = 60\ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)}$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$\mu = \frac{F}{R}$$

$$\therefore \mu = \frac{30}{60}$$

$$\therefore \mu = 0.5 \dots\dots\dots \text{घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)}$$

परिणामी प्रतिक्रिया (S)

$$S = \sqrt{F^2 + R^2}$$

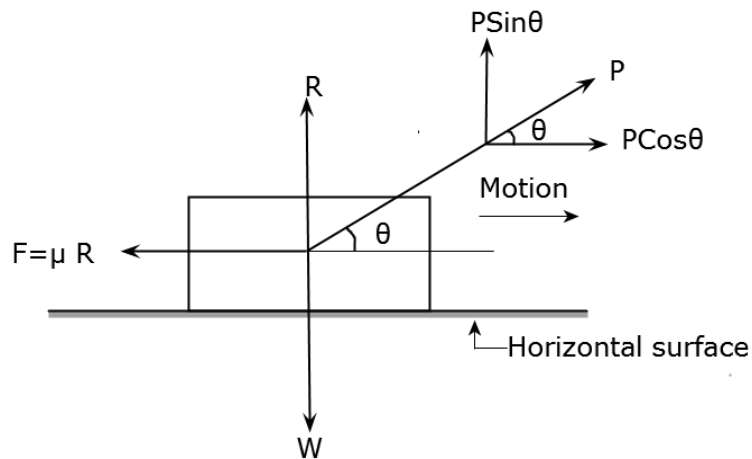
$$\therefore S = \sqrt{30^2 + 60^2}$$

$$\therefore S = \sqrt{4500}$$

$$\therefore S = 67.08 \text{ N} \dots\dots\dots \text{परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction)}$$

5.2.1 जेव्हा वस्तू (Body) ही आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) हे लागलेले असतांना.

आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) W एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) P हे आडव्या पृष्ठभागाशी (θ) एवढा कोन करत आहे असा विचार करू. झुकलेलेल्या बलामुळे (P) वस्तू पुढच्या दिशेने जाईल आणि या दिशेच्या विरुद्ध घर्षण बल (Friction force) F. आकृती 5.9 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कार्य करेल.



आकृती-5.9

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Inclined force) N मध्ये

θ = आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) झुकलेल्या बलाने (Inclined force) P केलेला कोन degree मध्ये

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore + P \cos \theta - F = 0$$

$$\therefore F = P \cos \theta \dots\dots\dots (i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore P \sin \theta + R - W = 0$$

$$\therefore W = P \sin \theta + R \dots\dots\dots (ii)$$

जेव्हा वस्तू (Body) ही आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) हे लागलेले असतांना, या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे.

उदाहरण क्र.- 01

आडव्या खडबडीत पृष्ठभागावर (Rough horizontal Surface) 500 N एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) 140 N हे आडव्या पृष्ठभागाशी 30° एवढा कोन करत आहे. तर सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction) आणि घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती: (Given data)

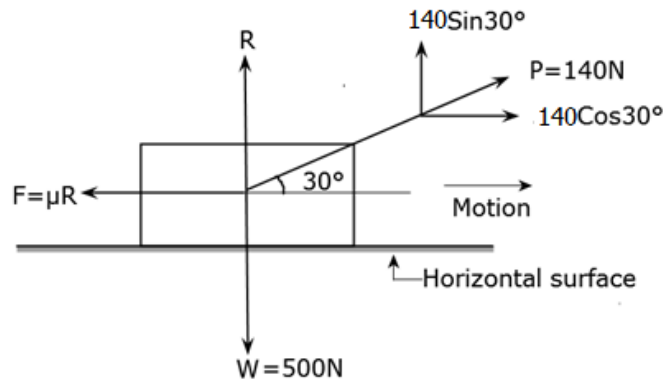
वस्तूचे वजन (W) = 500 N

झुकलेले बल (P) = 140 N

घर्षण गुणांक (μ) = ?

सामान्य प्रतिक्रिया (R) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी ($\theta = 30^\circ$) एवढा कोन करत आहे.



आकृती-5.10

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore +140\cos 30^\circ - F = 0$$

$$\therefore 121.24 - F = 0$$

$$\therefore F = 121.24 \text{ N} \quad \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Friction force)}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore 140\sin 30^\circ + R - W = 0$$

$$\therefore 70 + R - 500 = 0$$

$$\therefore R - 430 = 0$$

$$\therefore R = 430 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction)}$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$\mu = \frac{F}{R}$$

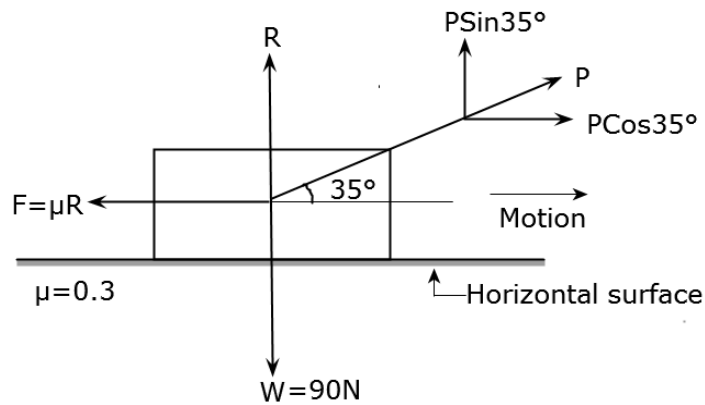
$$\therefore \mu = \frac{121.24}{430}$$

$$\therefore \mu = 0.28 \dots\dots\dots \text{घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)}$$

उदाहरण क्र. - 02

90 N वजनाची (Weight) वस्तू खडबडीत आडव्या पृष्ठभागावर (Rough horizontal Surface) ठेवून बलाने (Force) खेचली जात आहे, जर झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी 35° एवढा कोन करत आहे आणि घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) हा 0.3 असेल तर झुकलेले बल शोधा.

उत्तर:



आकृती-5.11

दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 90 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.3

झुकलेले बल (P) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी ($\theta = 35^\circ$) एवढा कोन करत आहे.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore +P \cos 35^\circ - F = 0$$

$$\therefore P (0.819) - \mu R = 0$$

$$\therefore P (0.819) = 0.3R$$

$$\therefore R = \frac{0.819P}{0.3}$$

$$\therefore R = 2.73P \quad \dots\dots\dots (i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore P \sin 35^\circ + R - W = 0$$

$$\therefore 0.573P + R - 90 = 0$$

$$\therefore R = 90 - 0.573P \quad \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) आणि (ii) पासून, असे लिहू शकतो की

$$2.73P = 90 - 0.573P$$

$$\therefore 2.73P + 0.573P = 90$$

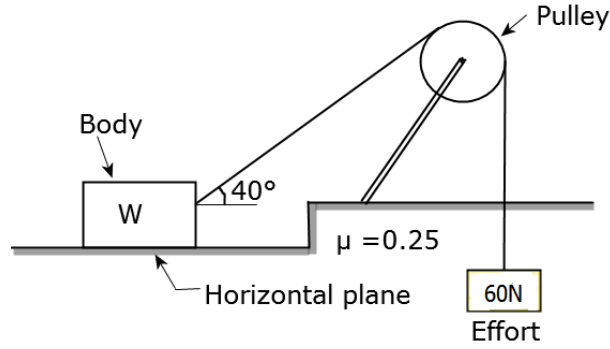
$$\therefore 3.303P = 90$$

$$\therefore P = \frac{90}{3.303}$$

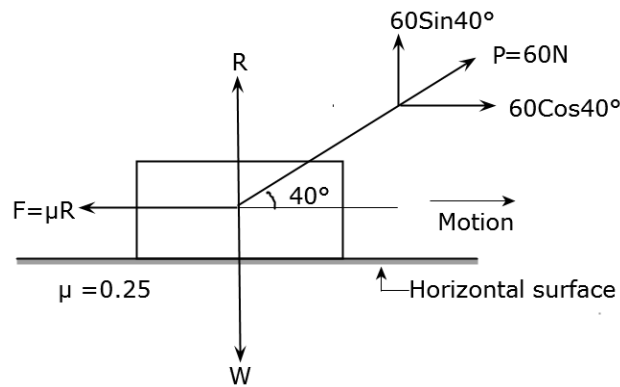
$$\therefore P = 27.24 \text{ N} \quad \dots\dots\dots \text{झुकलेले बल (Inclined force)}$$

उदाहरण क्र.- 03

खालील आकृती 5.12 मध्ये, W वजनाची एक वस्तू आडवी (Horizontal) हलवण्याची व्यवस्था दर्शवते. वस्तूला हलवण्यासाठी 60 N एवढे बल (Force) लावलेले आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.25 असेल, तर वस्तूचे वजन (Weight) शोधा.

**आकृती-5.12****उत्तर:****दिलेली माहिती (Given data):**घर्षण गुणांक (μ) = 0.25लावलेले बल (P) = 60 Nवस्तूचे वजन (W) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी ($\theta = 40^\circ$) एवढा कोन करत आहे.

**आकृती-5.13**

वस्तु समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum Fx = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore +60\cos 40^\circ - F = 0$$

$$\therefore 45.96 - \mu R = 0$$

$$\therefore 45.96 - 0.25R = 0$$

$$\therefore 0.25R = 45.96$$

$$\therefore R = \frac{45.96}{0.25}$$

$$\therefore R = 183.84 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)}$$

वस्तु समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum Fy = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore 60\sin 40^\circ + R - W = 0$$

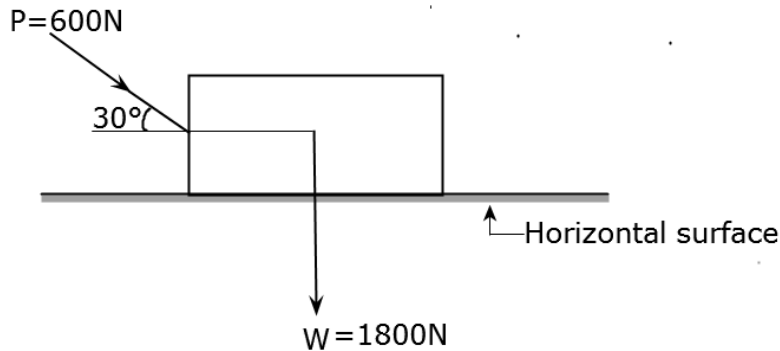
$$\therefore 38.56 + 183.84 - W = 0$$

$$\therefore 222.4 - W = 0$$

$$\therefore W = 222.4 \text{ N} \dots\dots\dots \text{वस्तूचे वजन (Weight)}$$

उदाहरण क्र.- 04

खालील आकृती 5.14 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे वस्तु समतोल स्थितीत (Equilibrium condition) असल्यास घर्षण गुणांकचे (Coefficient of friction) मूल्य (Value) शोधा.



आकृती -5.14

उत्तर:

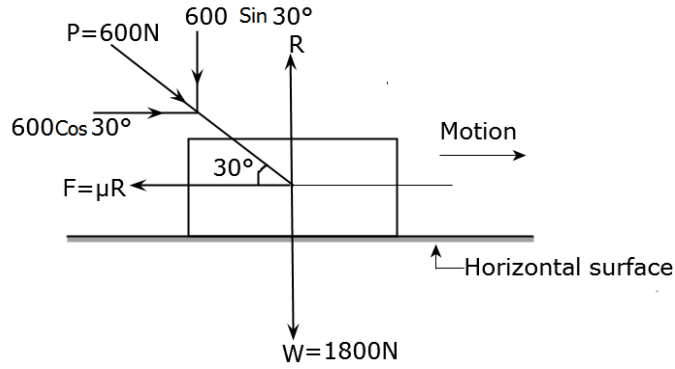
दिलेली माहिती (Given data):

लावलेले बल (P) = 600 N

वस्तूचे वजन (W) = 1800 N

घर्षण गुणांक (μ) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल हे आडव्या पृष्ठभागाशी ($\theta = 30^\circ$) एवढा कोन करत आहे



आकृती -5.15

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore + 600 \cos 30^\circ - F = 0$$

$$\therefore 519.61 - F = 0$$

$$\therefore F = 519.61 \text{ N} \quad \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Friction force)}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore - 600 \sin 30^\circ + R - W = 0$$

$$\therefore - 300 + R - 1800 = 0$$

$$\therefore R - 2100 = 0$$

$\therefore R = 2100 \text{ N}$ सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

$$\mu = \frac{F}{R}$$

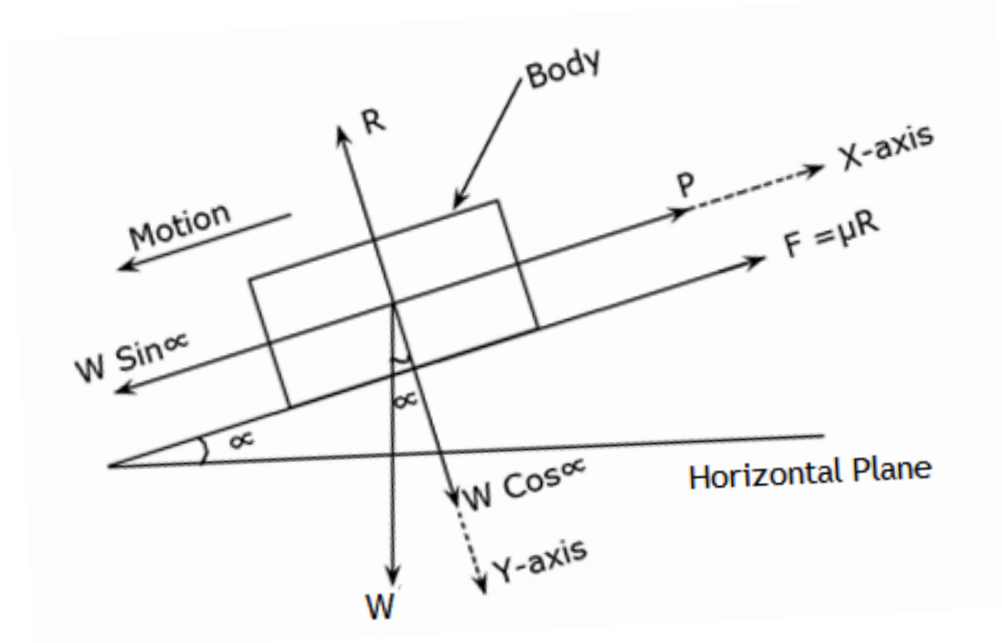
$$\therefore \mu = \frac{519.61}{2100}$$

$\therefore \mu = 0.247$ घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

5.3 जेव्हा वस्तू (Body) झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) असते आणि बल (Force) झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागू होते.

Case: 1 वस्तू पृष्ठभागावरून (Surface) खाली (Down) सरकताना.

झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) 'W' एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि झुकलेला पृष्ठभाग हा आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) α एवढा कोन (Angle) करत आहे, तसेच लावलेले बल (Force) हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागलेले आहे असा विचार करू. आकृती 5.16 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे स्वतःच्या वजनामुळे वस्तू झुकलेल्या पृष्ठभागावरून खाली (Down) सरकेल.



आकृती-5.16

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of Body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

α = झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined Surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal Surface) केलेला कोन Degree मध्ये

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore -W \sin \alpha + F + P = 0$$

$$\therefore F = W \sin \alpha - P \dots \dots \dots (i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

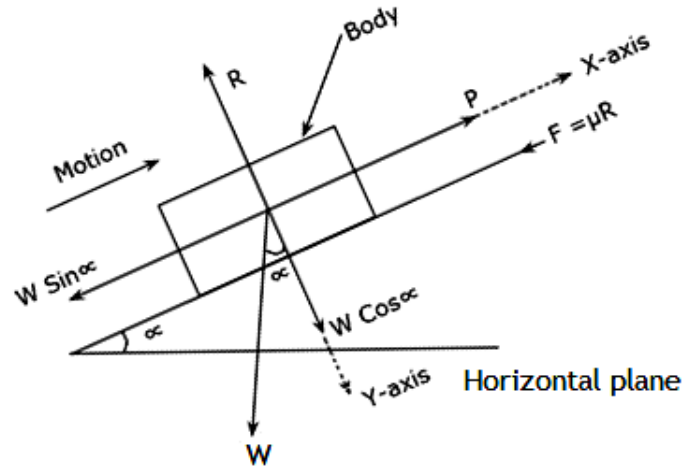
$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore -W \cos \alpha + R = 0$$

$$\therefore R = W \cos \alpha \dots \dots \dots (ii)$$

Case: 2 वस्तू पृष्ठभागावरून (Surface) वरती (Up) सरकताना

झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) W एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि झुकलेला पृष्ठभाग हा आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) α एवढा कोन (Angle) करत आहे, तसेच लावलेले बल (Force) हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागलेले आहे असा विचार करू. आकृती 5.17 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे लावलेल्या बलामुळे वस्तू झुकलेल्या पृष्ठभागावरून वरती सरकेल.



येथे,

आकृती - 5.17

W = वस्तूचे वजन (Weight of Body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

α = झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined Surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal Surface) केलेला कोन Degree मध्ये.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore -W \sin \alpha - F + P = 0$$

$$\therefore F = -W \sin \alpha + P \quad \dots\dots\dots (i)$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore -W \cos \alpha + R = 0$$

$$\therefore R = W \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (ii)$$

जेव्हा वस्तू (Body) झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) ठेवले जाते आणि बल (Force) झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागलेले असतांना, या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे.

उदाहरण क्र.- 01

700 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Rough inclined surface) ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) केलेला कोन 30° आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.6 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून खाली (Down) येण्यापासून रोखण्यासाठी किती बलाची (Force) आवश्यकता आहे.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

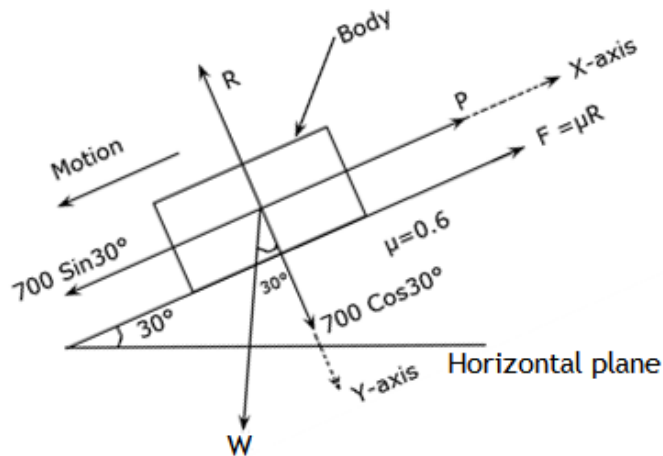
वस्तूचे वजन (W) = 700 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.6

झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन (α) = 30°

लागणारे बल (P) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू ही झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली आहे आणि बल हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर लागू झालेले आहे.



आकृती -5.18

वस्तु समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum Fy = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore -700 \cos 30^\circ + R = 0$$

$$\therefore -606.2 + R = 0$$

$$\therefore R = 606.2 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction)}$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$\therefore F = \mu R$$

$$\therefore F = 0.6 \times 606.2$$

$$\therefore F = 363.72 \text{ N} \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Friction force)}$$

वस्तु समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum Fx = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore -700 \sin 30^\circ + F + P = 0$$

$$\therefore -350 + 363.72 + P = 0$$

$$\therefore -13.72 + P = 0$$

$$\therefore P = 13.72 \text{ N} \dots\dots\dots \text{वस्तूला खाली येण्यापासून रोखण्यासाठी लागणारे बल (Force).}$$

उदाहरण क्र.-02

500 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Rough horizontal surface) ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined surface) आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन 20° आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.3 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून वरती (Up) ओढण्यासाठी किती बलाची (Force) आवश्यकता आहे.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

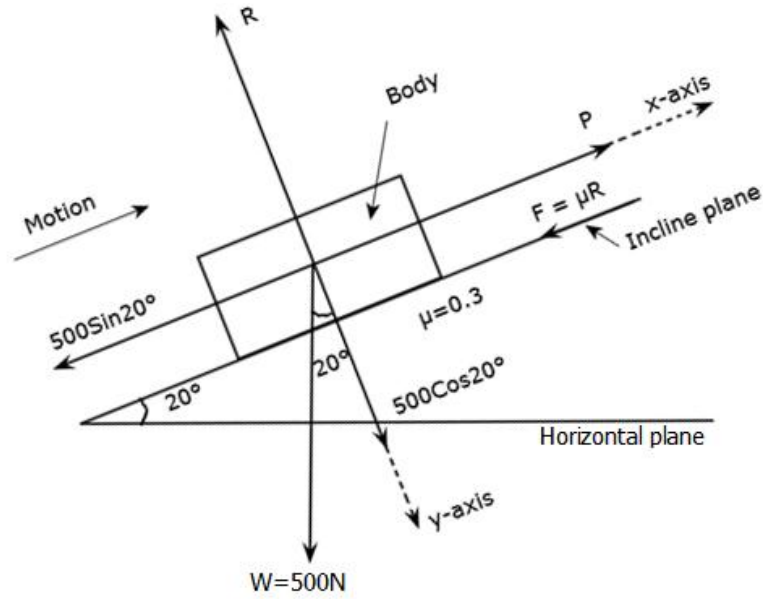
वस्तूचे वजन (W) = 500 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.3

झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन (α) = 20°

लागणारे बल (P) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू ही झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) ठेवली आहे आणि बल (force) हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागू झालेले आहे.



आकृती -5.19

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore -500 \cos 20^\circ + R = 0$$

$$\therefore -469.84 + R = 0$$

$$\therefore R = 469.84 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction)}$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$\therefore F = \mu R$$

$$\therefore F = 0.3 \times 469.84$$

$$\therefore F = 140.95 \text{ N} \dots\dots\dots \text{घर्षण बल}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum Fx = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore -500 \sin 20^\circ - F + P = 0$$

$$\therefore -171.01 - 140.95 + P = 0$$

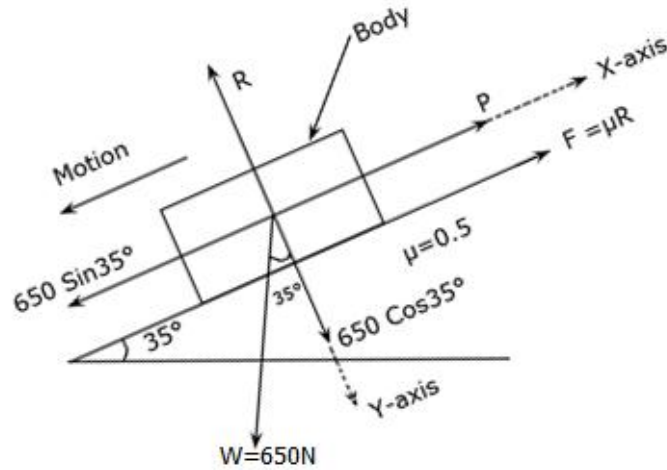
$$\therefore -311.96 + P = 0$$

$$\therefore P = 311.96 \text{ N} \quad \dots \text{वस्तूला पृष्ठभागावरून वरती (Up) ओढण्यासाठी लागणारे बल.}$$

उदाहरण क्र. - 03

650 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Rough horizontal surface) ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) केलेला कोन 35° आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.5 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून खाली येण्यापासून रोखण्यासाठी किती बलाची (Force) आवश्यकता आहे.

उत्तर:



आकृती -5.20

दिलेली माहिती (Given data) :

वस्तूचे वजन (W) = 650 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.5

झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन (α) = 35°

लागणारे बल (P) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू ही झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली आहे आणि बल हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर लागू झालेले आहे.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore -650 \cos 35^\circ + R = 0$$

$$\therefore -532.44 + R = 0$$

$$\therefore R = 532.44 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया}$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$\therefore F = \mu R$$

$$\therefore F = 0.5 \times 532.44$$

$$\therefore F = 266.22 \text{ N} \dots\dots\dots \text{घर्षण बल}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_x = 0 \quad \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

$$\therefore -650 \sin 35^\circ + F + P = 0$$

$$\therefore -372.82 + 266.22 + P = 0$$

$$\therefore -106.62 + P = 0$$

$$\therefore P = 106.62 \text{ N} \dots\dots \text{वस्तूला खाली (Down) येण्यापासून रोखण्यासाठी (Resist) लागणारे बल.}$$

उदाहरण क्र.- 04

1000 N वजनाचा एक दगड (Stone) 40° डोंगराच्या (Hill) उतारावर (Incline) आहे. जर जमीन आणि दगड यांच्यातील घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.4 असेल, तर दगड डोंगरावर ओढण्यासाठी डोंगराच्या पृष्ठभागाला लागणारे समांतर बल (Parallel force) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

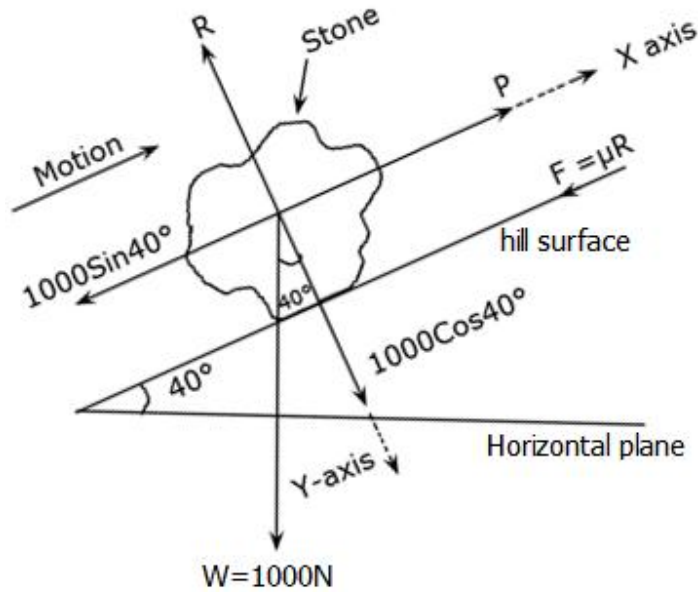
दगडाचे वजन (Weight of stone) = $W = 1000 \text{ N}$

घर्षण गुणांक (μ) = 0.4

डोंगराच्या पृष्ठभागाने (Surface of hill) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) केलेला कोन (α) = 40°

लागणारे बल (Force) (P) = ?

दिलेली स्थिती: वस्तू (दगड) झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली आहे आणि बल हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर लागू झालेले आहे.



आकृती -5.21

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore -1000 \cos 40^\circ + R = 0$$

$$\therefore -766.04 + R = 0$$

$$\therefore R = 766.04 \text{ N} \dots\dots\dots \text{सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction)}$$

आपल्याला माहित आहे की,

$$\therefore F = \mu R$$

$$\therefore F = 0.4 \times 766.04 \dots\dots\dots \text{घर्षण बल (Friction force)}$$

$$\therefore F = 306.45 \text{ N}$$

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$$\sum Fx = 0 \longrightarrow +ve \quad \longleftarrow -ve$$

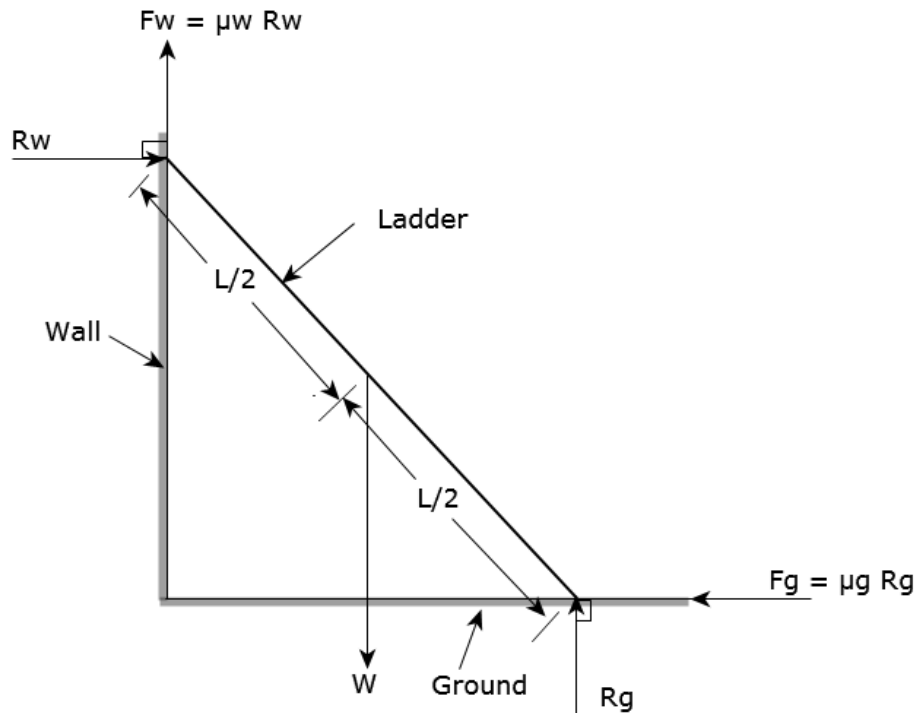
$$\therefore -1000 \sin 40^\circ - F + P = 0$$

$$\therefore -642.78 - 306.45 + P = 0$$

$$\therefore -949.23 + P = 0$$

$$\therefore P = 949.23 \text{ N} \dots\dots\dots \text{दगडाला पृष्ठभागावरून वरती ओढण्यासाठी लागणारे बल.}$$

5.4 शिडी (Ladder) .



आकृती-5.22 : शिडीची फ्री बॉडी डायग्राम

आपण उंचीवर (Height) जाण्यासाठी शिडीचा वापर करतो, शिडीचा वापर खूप ठिकाणी होत असतो जसे काही भिंत (Wall) रंगविण्यासाठी (Painting) चित्रकार (Painter) शिडीचा वापर करतो, तसेच सुतार (Carpenter) देखील शिडीचा वापर करून चौकट (Frame) ही भिंतीमध्ये खिळांच्या सहाय्याने बसवतो. अशा अनुप्रयोगासाठी (Application) शिडीचा वापर करताना घर्षणाचा (Friction) उपयोग होतो आणि शिडीचा सुरक्षित (Safe) उपयोग करण्यासाठी जमिनीवर आणि भिंतीच्या संदर्भात योग्य कोनात शिडी समायोजित करावी लागेल

आकृती 5.22 ही, एका शिडीची फ्री बॉडी डायग्राम (FBD) दाखवते. शिडी समतोल स्थितीत (Limiting Equilibrium) असताना, शिडीचे वजन W व शिडीची लांबी L असून, शिडी एका भिंतीला कलती (Incline) आहे.

शिडीवर लागणारे बल (Forces) खालील प्रमाणे आहेत

1. वजन W हे शिडीच्या वस्तुमान केंद्रावर (Centre of mass) कार्य (Acting) करते,
2. सामान्य प्रतिक्रिया बल (Normal Reaction force) R_w भिंतीच्या संपर्क बिंदूवर कार्य करते
3. सामान्य प्रतिक्रिया बल (Normal Reaction force) R_g जमिनीच्या संपर्क (Contact) बिंदूवर कार्य करते.
4. शिडी आणि जमिनी यांच्यातील घर्षण बल $(F_g) = \mu_g R_g$
5. शिडी आणि भिंत यांच्यातील घर्षण बल $(F_w) = \mu_w R_w$
6. शिडी आणि जमिनी दरम्यान असलेला घर्षण गुणांक (μ_g)
7. शिडी आणि भिंत यांच्यातील असलेला घर्षण गुणांक (μ_w)

शिडी समतोल स्थितीत असताना:

$$\sum F_x = 0 \quad +ve \longrightarrow \quad -ve \longleftarrow$$

$$\therefore R_w - F_g = 0$$

$$\therefore R_w = F_g \dots \dots \dots (i)$$

शिडी समतोल स्थितीत असताना:

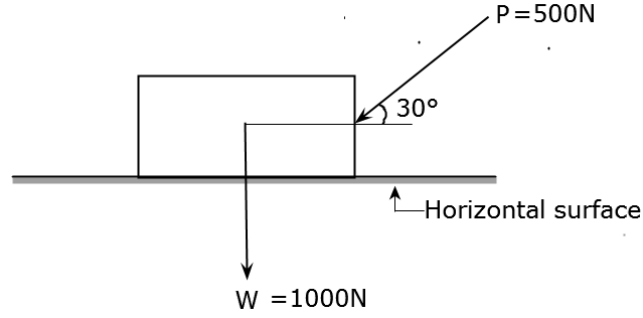
$$\sum F_y = 0 \quad \uparrow +ve \quad \downarrow -ve$$

$$\therefore R_g - W + F_w = 0$$

$$\therefore W = R_g + F_w \dots \dots \dots (ii)$$

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

1. घर्षण परिभाषित करा.
2. घर्षणाचे फायदे आणि तोटे सांगा.
3. स्थिर घर्षणाचे नियम सांगा.
4. गतिशील घर्षणाचे नियम सांगा.
5. घर्षण आणि रिपोज कोन परिभाषित करा.
6. घर्षण गुणांक परिभाषित करा. तसेच त्याचे युनिट सांगा.
7. घर्षण कोन आणि घर्षण गुणांक यांच्यातील संबंध सांगा.
8. समतोल शिडीवर कार्य करणारे विविध बल परिभाषित करा.
9. आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेली 100 N वस्तू ओढण्यासाठी 60 N आडवे बल आवश्यक आहे. तर घर्षण गुणांक आणि परिणामी प्रतिक्रिया किती असेल?
10. 400 N वजनाची वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि आडवे बल P वस्तूवर लावलेले आहे, जर घर्षण गुणांक 0.65 आहे. तर सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction), घर्षण बल (Frictional force), घर्षण कोन (Angle of friction) शोधा.
11. 350 N वजनाची वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि वस्तू हलविण्यासाठी आवश्यक असलेले आडवे बल 75N आहे. तर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) आणि घर्षण बल (Frictional force), किती असेल.
12. 95 N वजनाची वस्तू खडबडीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवून बलाने खेचली जात आहे, जर झुकलेले बल P हे आडव्या पृष्ठभागाशी 38° एवढा कोन करत आहे आणि घर्षण गुणांक हा 0.35 असेल तर, झुकलेले बल शोधा.
13. आडव्या खडबडीत पृष्ठभागावर 560 N एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल 145 N हे आडव्या पृष्ठभागाशी 35° एवढा कोन करत आहे. तर सामान्य प्रतिक्रिया आणि घर्षण गुणांक शोधा.
14. 750 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन 35° आहे. जर घर्षण गुणांक 0.55 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून खाली येण्यापासून रोखण्यासाठी किती बलाची आवश्यकता आहे.
15. खालील आकृती 5.23 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे वस्तू समतोल मर्यादित असल्यास घर्षण गुणांकचे मूल्य शोधा.



आकृती-5.23

16. 580 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन 25° आहे. जर घर्षण गुणांक 0.35 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून वरती ओढण्यासाठी किती बलाची आवश्यकता आहे.
17. 1500 N वजनाचा एक दगड 45° झुकलेल्या डोंगराच्या उतारावर आहे. जर जमीन आणि दगड यांच्यातील घर्षण गुणांक 0.3 असेल तर दगड डोंगरावर ओढण्यासाठी डोंगराच्या पृष्ठभागाला लागणारे समांतर बल (Parallel force) शोधा.

मायक्रो प्रोजेक्ट:

1. विविध क्षेत्रांच्या स्थितीतील घर्षण प्रकारांचा तक्ता तयार करा.

घटक 6

केंद्रक आणि गुरुत्वाकर्षण केंद्र Centroid and Centre of gravity

विषय निष्पत्ती (Course Outcomes): अभियांत्रिकी (Engineering) सिस्टीम मध्ये विविध (Various) घटकांचे केंद्रक आणि गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र शोधा.

घटक निष्पत्ती (Unit Outcomes):

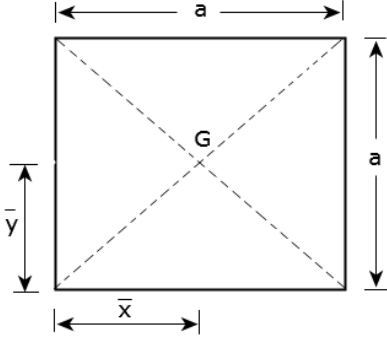
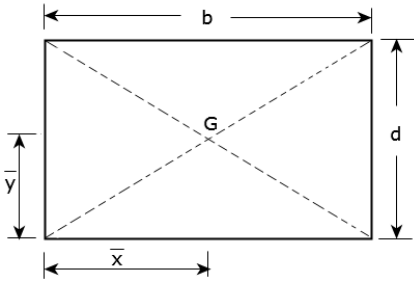
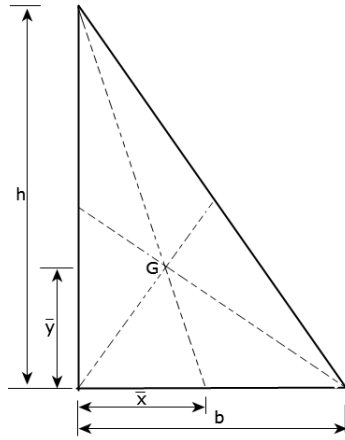
1. दिलेल्या साध्या भौमितिक (Geometrical) प्लेन आकृतीचे केंद्रक आणि साध्या घनाच्या (Solid) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र निश्चित (Determine) करा.
2. दिलेल्या संयुक्त (Composite) प्लेन लॅमिना च्या केंद्राकाची गणना (Calculate) करा.
3. दिलेल्या घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र निश्चित (Determine) करा.
4. दिलेल्या संयुक्त (Composite) घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र निश्चित (Determine) करा.

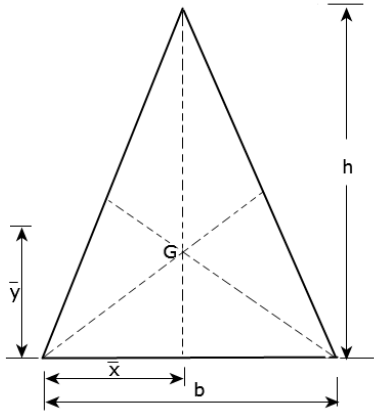
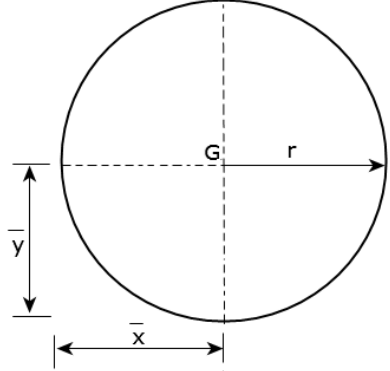
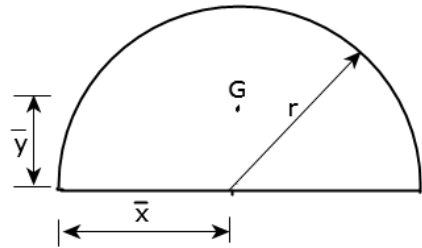
6.1 भौमितिक प्लेन आकृत्यांचे केंद्रक (Centroid):

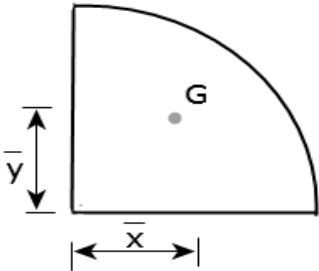
केंद्राकाची (Centroid) व्याख्या कोणत्याही नियमित (Regular) किंवा अनियमित (Irregular) द्विमितीय (Two-dimensional) आकृतीचे भौमितिक (Geometrical) मध्य (Centre) म्हणून केली जाते. केंद्रक (Centroid) हा द्विमितीय प्लेन आकृती ज्याला जाडी (Thickness) नाही व फक्त क्षेत्रफळ (Area) आहे, अशा आकृतीला लागू होतो. एखाद्या द्विमितीय प्लेन आकृतीच्या क्षेत्रफळाला जाडी नसल्यामुळे गुरुत्वाकर्षणाच्या बलाने त्यावर कार्य करण्यासाठी कोणतेही वस्तुमान (Mass) नसते आणि त्यामुळे त्याचे वजन (Weight) केंद्रक काढण्यासाठी उपयोगात येत नाही. केंद्रक (Centroid) हा शब्द द्विमितीय प्लेन लॅमिना किंवा आकृत्यांच्या क्षेत्रफळासाठी लागू आहे. केंद्रक (Centroid) हे G अक्षराने दर्शविले जाते.

केंद्रक (Centroid)) हा भौमितिक प्लेन आकृत्यांसाठी लागू आहे जसे की चौरस, आयत, त्रिकोण, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ, चतुर्थांश वर्तुळ इ.

भौमितिक प्लेन आकृत्यांचे केंद्रक (Centroid):

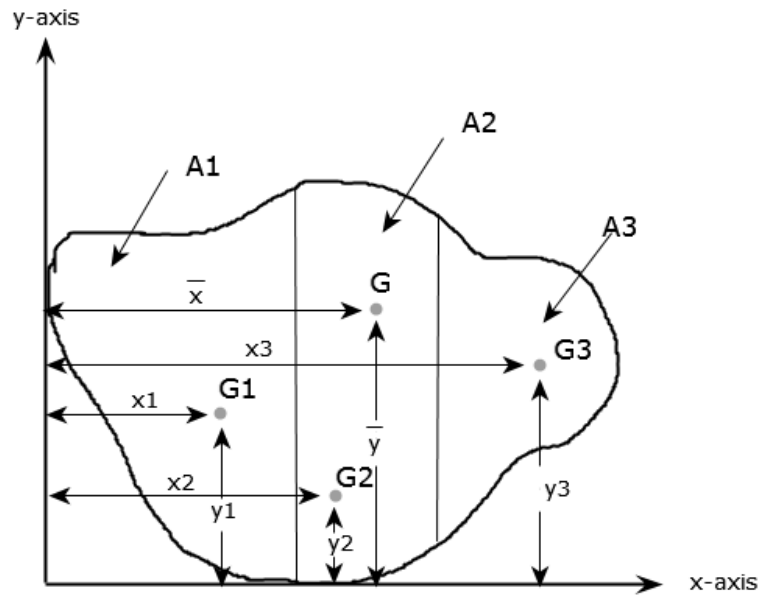
अनु क्रमांक	आकृतीचे नाव	आकार (Shape)	क्षेत्रफल (Area) (A)	केंद्रक (Centroid) (G)
1	चौरस (Square)		$a \times a$ येथे, $a =$ बाजूची लांबी (Side length)	$\bar{x} = \frac{a}{2}$ $\bar{y} = \frac{a}{2}$
2	आयत (Rectangle)		$b \times d$ येथे, $b =$ लांबी (Length) $d =$ उंची (Height)	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{d}{2}$
3	काटकोन त्रिकोण (Right angle Triangle)		$\frac{1}{2} \times b \times h$ येथे, $b =$ लांबी (Length) $h =$ उंची (Height)	$\bar{x} = \frac{b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$

4	<p>समभुज त्रिकोण (Equilateral triangle) किंवा समद्विभुज त्रिकोण (Isosceles Triangle)</p>		$\frac{1}{2} \times b \times h$ येथे, b= लांबी (Length) h= उंची (Height)	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$
5	<p>वर्तुळ (Circle)</p>		πr^2 or $\frac{\pi}{4} \times d^2$ येथे, r = वर्तुळाची त्रिज्या (Radius) d = वर्तुळाचा व्यास (Diameter)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = r$
6	<p>अर्धवर्तुळ (Semicircle)</p>		$\frac{1}{2} \times \pi r^2$ येथे, r = अर्धवर्तुळाची त्रिज्या (Radius)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

7	चतुर्थांश वर्तुळ (Quarter circle)		$\frac{1}{4} \times \pi r^2$ येथे, $r =$ चतुर्थांश वर्तुळाची त्रिज्या (Radius)	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
---	--	---	--	--

6.2 संयुक्त आकृत्यांची केंद्राकाची स्थिती (Centroidal position of composite figures)

कोणत्याही संयुक्त (Composite) आकृतीच्या केंद्राकाची (Centroid) गणना ही क्षेत्रफळाच्या (Area) सहाय्याने “व्हेरिगॉन” चे प्रमेय वापरून केली जाऊ शकते. खालील आकृती-6.1 संयुक्त आकृती दर्शविते.



आकृती -6.1 संयुक्त आकृत्यांची केंद्राकाची (Centroidal) स्थिती

समजा संयुक्त आकृती मधील विभाजित (Divided) भागांचे A_1 , A_2 , A_3 हे क्षेत्रफळ आहे.

समजा संयुक्त आकृती मधील विभाजित भागांचे x_1 , x_2 , x_3 हे y -अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) दर्शवत आहे.

समजा संयुक्त आकृती मधील विभाजित भागांचे y_1, y_2, y_3 हे x-अक्षापासून केंद्राकाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा \bar{x} हे y-अक्षापासून संयुक्त विभागाची केंद्राकाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा \bar{y} हे x- अक्षापासून संयुक्त विभागाची केंद्राकाची स्थिती दर्शवत आहे.

“व्हेरिगॉन” प्रमेयानुसार, कोणत्याही अक्षाशी (Axis) आकृतीच्या वैयक्तिक (Individual) क्षेत्रफळाच्या मुमेंट (Moment) ची बीजगणितीय बेरीज ही संयुक्त आकृतीच्या क्षेत्रफळाच्या मुमेंट (Moment) इतकी असते.

हे गणितात असे लिहिले जाऊ शकते,

$$A \bar{x} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A}$$

$$\text{परंतु, } A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \dots\dots y\text{- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal)}$$

त्याचप्रमाणे,

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} \dots\dots x\text{- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal)}$$

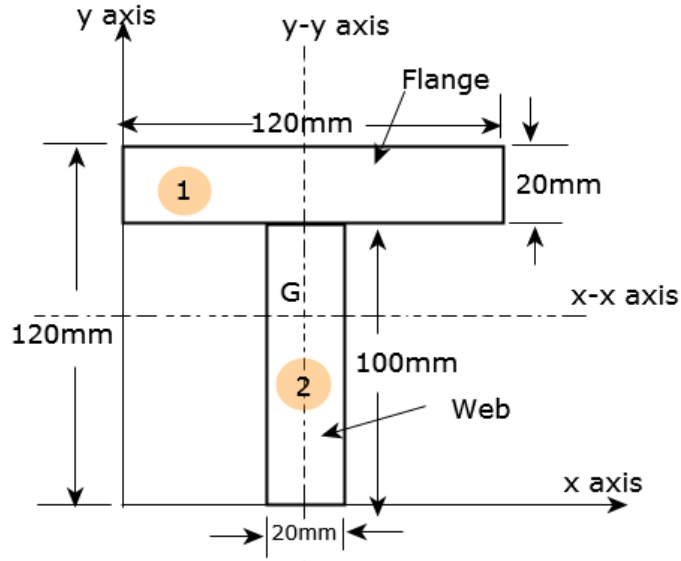
संयुक्त (Composite) आकृत्यांच्या केंद्राकाच्या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे:

उदाहरण क्र. -01

जर T -सेक्शनचे (Section) आकारमान $120 \text{ mm} \times 120 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ तर T- सेक्शनचा केंद्रक (Centroid) शोधा.

उत्तर:

येथे $120 \text{ mm} \times 120 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ म्हणजे एकूण लांबी \times एकूण उंची \times रुंदी



आकृती - 6.2

क्षेत्रफल गणना (Area calculation):

उभ्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of web) = $A_1 = 100 \times 20 = 2000 \text{ mm}^2$

आडव्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of flange) = $A_2 = 120 \times 20 = 2400 \text{ mm}^2$

टीप: उभ्या भागाला Web किंवा Rib आणि आडव्या भागाला Flange असे म्हणतात.

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{x} ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला T सेक्शन (Section) y-y अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{T सेक्शनची (Section) जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{120}{2}$$

$$\bar{x} = 60 \text{ mm}$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{y} ची गणना करण्यासाठी:

$$y_1 = \frac{100}{2}$$

$$y_1 = 50 \text{ mm}$$

$$y_2 = 100 + \frac{20}{2}$$

$$y_2 = 110 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(2000 \times 50) + (2400 \times 110)}{(2000 + 2400)}$$

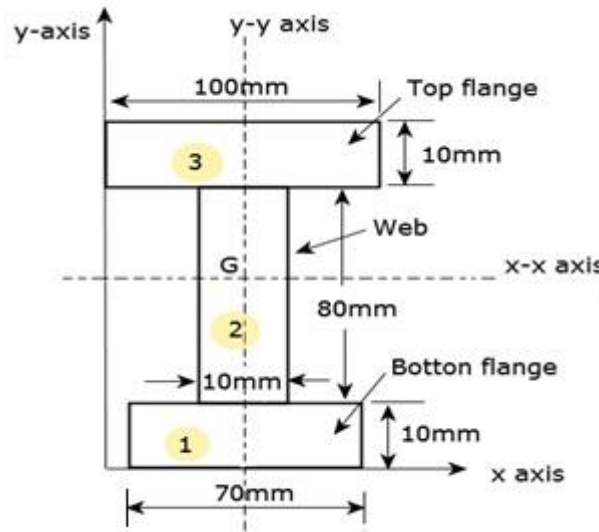
$$\bar{y} = 82.72 \text{ mm}$$

केंद्राकाची स्थिती (G) = (\bar{x} , \bar{y}) = (60 mm, 82.72 mm)

उदाहरण क्र. -02

जर I-सेक्शनच्या (Section) वरच्या आडव्या (Top flange) भागाचे आकारमान हे 100 mm × 10 mm आहे, तळाच्या आडव्या (Bottom flange) भागाचे आकारमान हे 70 mm × 10 mm आहे आणि उभ्या भागाचे (Web) आकारमान 80 mm × 10 mm असेल तर I-सेक्शनचा (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.

उत्तर:



आकृती क्रमांक - 6.3

क्षेत्रफल गणना (Area calculation):

वरच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of top flange) = $A_1 = 100 \times 10 = 1000 \text{ mm}^2$

उभ्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of web) = $A_2 = 80 \times 10 = 800 \text{ mm}^2$

तळाच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of bottom flange) $= A_3 = 70 \times 10 = 700 \text{ mm}^2$

y- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{x} ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला I सेक्शन y-y अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{I सेक्शनची (Section) ची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{100}{2}$$

$$\bar{x} = 50 \text{ mm}$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{y} ची गणना करण्यासाठी:

$$y_1 = \frac{10}{2}$$

$$y_1 = 5 \text{ mm}$$

$$y_2 = 10 + \frac{80}{2}$$

$$y_2 = 50 \text{ mm}$$

$$y_3 = 10 + 80 + \frac{10}{2}$$

$$y_3 = 95 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{y} = \frac{(1000 \times 5) + (800 \times 50) + (700 \times 95)}{(1000 + 800 + 700)}$$

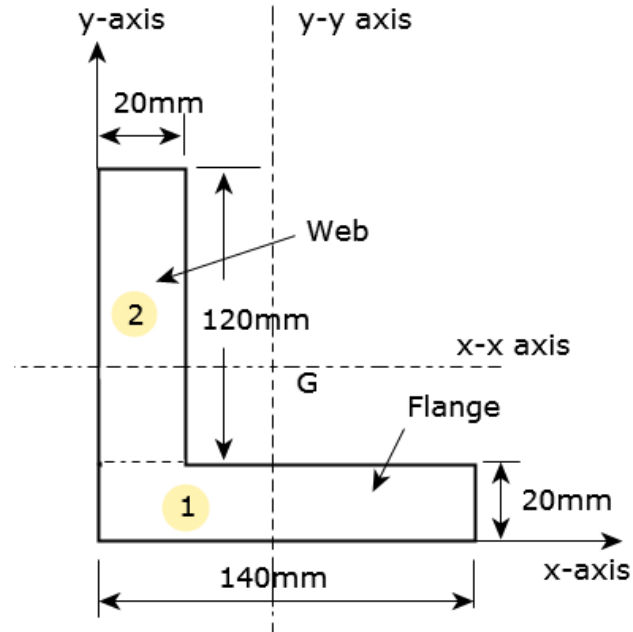
$$\bar{y} = 44.6 \text{ mm}$$

केंद्राकाची स्थिती (G) $= (\bar{x}, \bar{y}) = (50 \text{ mm}, 44.6 \text{ mm})$

उदाहरण क्र. -03

जर L सेक्शनच्या (Section) आडव्या भागाचे (Flange) आकारमान $140 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ आहे आणि उभ्या भागाचे (Web) आकारमान $120 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ असेल तर L सेक्शनचा (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.

उत्तर:



आकृती - 6.4

क्षेत्रफल गणना (Area calculation):

आडव्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of flange) = $A_1 = 140 \times 20 = 2800 \text{ mm}^2$

उभ्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of web) = $A_2 = 120 \times 20 = 2400 \text{ mm}^2$

y- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

$$x_1 = \frac{140}{2}$$

$$x_1 = 70 \text{ mm}$$

$$x_2 = \frac{20}{2}$$

$$x_2 = 10 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{x} = \frac{(2800 \times 70) + (2400 \times 10)}{(2800 + 2400)}$$

$$\bar{x} = 42.30 \text{ mm}$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{y} ची गणना करण्यासाठी:

$$y_1 = \frac{20}{2}$$

$$y_1 = 10 \text{ mm}$$

$$y_2 = 20 + \frac{120}{2}$$

$$y_2 = 80 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(2800 \times 10) + (2400 \times 80)}{(2800 + 2400)}$$

$$\bar{y} = 42.30 \text{ mm}$$

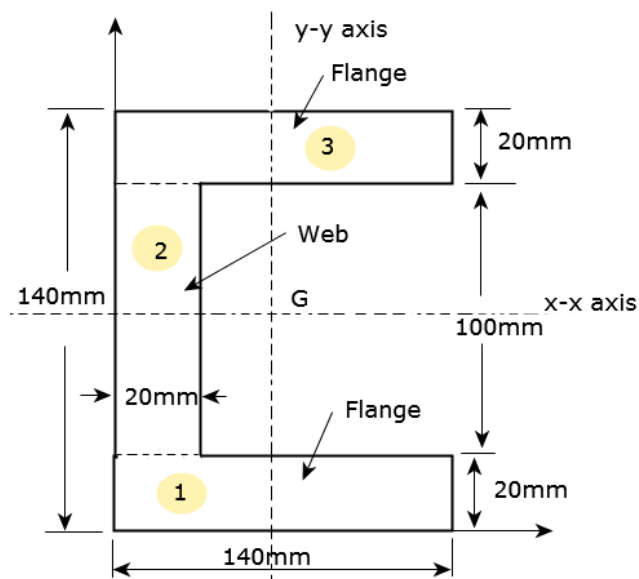
केंद्राकाची स्थिती (G) = (\bar{x} , \bar{y}) = (42.30 mm, 42.30 mm)

उदाहरण क्र. -04

चॅनल (Channel) किंवा C सेक्शनचे (Section) चे आकारमान 140 mm × 140 mm × 20 mm आहे तर, C -सेक्शनचा (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.

उत्तर:

येथे 140 mm × 140 mm × 20 mm म्हणजे एकूण लांबी × एकूण उंची × रुंदी



आकृती -6.5

क्षेत्रफल गणना (Area calculation):

वरच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of top flange) = $A_1 = 140 \times 20 = 2800 \text{ mm}^2$

उभ्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of web) = $A_2 = 100 \times 20 = 2000 \text{ mm}^2$

तळाच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफल (Area of bottom flange) = $A_3 = 140 \times 20 = 2800 \text{ mm}^2$

y- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

$$x_1 = \frac{140}{2}$$

$$x_1 = 70 \text{ mm}$$

$$x_2 = \frac{20}{2}$$

$$x_2 = 10 \text{ mm}$$

$$x_3 = \frac{140}{2}$$

$$x_3 = 70 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{x} = \frac{(2400 \times 70) + (2000 \times 10) + (2400 \times 70)}{(2400 + 2000 + 2400)}$$

$$\bar{x} = 52.35 \text{ mm}$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{y} ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला C- सेक्शन (Section) x-x अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{y} = \frac{\text{C-सेक्शन (Section) ची जास्तीत जास्त उंची}}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{140}{2}$$

$$\bar{y} = 70 \text{ mm}$$

केंद्राकाची स्थिती (G) = $(\bar{x}, \bar{y}) = (52.35 \text{ mm}, 70 \text{ mm})$

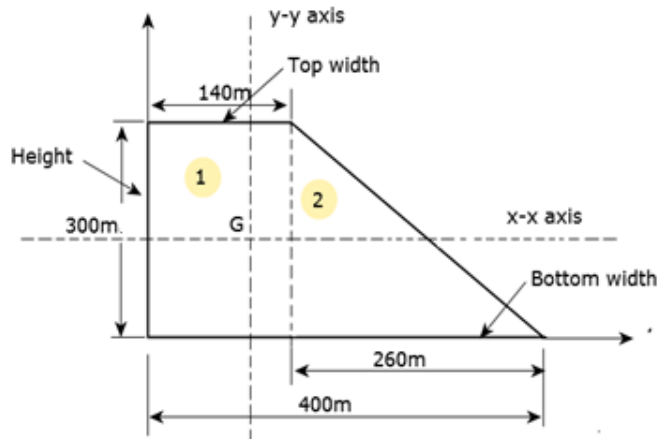
उदाहरण क्र. -05

एका धरणा चे (Dam Section) आकारमान खालील प्रमाणे आहे:

- पाण्याच्या बाजूची उभ्या भिंतीची (Vertical Height) उंची 300 m,
- धरणाची वरची रुंदी (Top width) 140 m ,
- पायाची रुंदी (Base width) 400 m आहे.

तर धरणाचा (Dam Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.

उत्तर:



आकृती - 6.6

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

आयताचे क्षेत्रफळ (Area of rectangle) = $A_1 = 300 \times 140 = 42000 \text{ m}^2$

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of Triangle) = $A_2 = \frac{1}{2} \times 260 \times 300 = 39000 \text{ m}^2$

y-अक्षापासून (Axis) केंद्रकाची स्थिती (Centroidal) \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

$$x_1 = \frac{140}{2}$$

$$x_1 = 70 \text{ m}$$

$$x_2 = 140 + \frac{260}{3}$$

$$x_2 = 226.66 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{x} = \frac{(42000 \times 70) + (39000 \times 226.66)}{(42000 + 39000)}$$

$$\bar{x} = 145.42 \text{ m}$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{y} ची गणना करण्यासाठी

$$y_1 = \frac{300}{2}$$

$$y_1 = 150 \text{ m}$$

$$y_2 = \frac{300}{3}$$

$$y_2 = 100 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

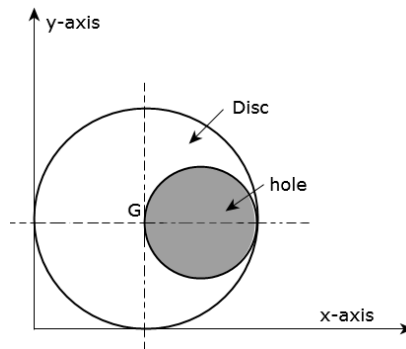
$$\bar{y} = \frac{(42000 \times 150) + (39000 \times 100)}{(42000 + 39000)}$$

$$\bar{y} = 125.92 \text{ m}$$

केंद्राकाची स्थिती (G) = $(\bar{x}, \bar{y}) = (145.42 \text{ m}, 125.92 \text{ m})$

उदाहरण क्र. -06

आकृती क्रमांक - 6.7 दाखवल्याप्रमाणे 12 mm व्यासाच्या (Diameter) वर्तुळाकार डिस्कमधून 6 mm व्यासाचे (Diameter) गोलाकार भोक कापले आहे. तर दिलेल्या सेक्शनचे (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.



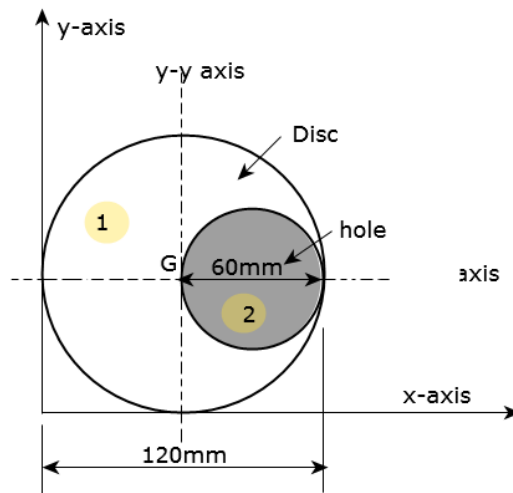
आकृती -6.7

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given Data),

$$R = \text{गोलाकार डिस्कची त्रिज्या (Radius of circular disc)} = \frac{\text{वर्तुळाकार डिस्कचा व्यास}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ mm}$$

$$r = \text{लहान छिद्राची त्रिज्या (Radius of hole)} = \frac{\text{लहान छिद्राचा व्यास}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ mm}$$



आकृती -6.8

क्षेत्रफल गणना (Area calculation):

$$A_1 = \text{मोठ्या वर्तुळाचे क्षेत्रफल (Big circle volume)} = \pi R^2$$

$$A_1 = \pi (6)^2$$

$$A_1 = 113.09 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \text{लहान वर्तुळाचे क्षेत्रफल (Small circle volume)} = \pi r^2$$

$$A_2 = \pi (3)^2$$

$$A_2 = 28.27 \text{ mm}^2$$

y- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

$$x_1 = R$$

$$x_1 = 6 \text{ mm}$$

$$x_2 = 6 + r$$

$$x_2 = 6 + 3$$

$$x_2 = 9 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 X_1 - A_2 X_2}{A_1 - A_2}$$

$$\bar{x} = \frac{(113.09 \times 6) - (28.27 \times 9)}{(113.09 - 28.27)}$$

$$\bar{x} = 5 \text{ mm}$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) \bar{y} ची गणना करण्यासाठी

दिलेला सेक्शन (Section) x-x अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{y} = \frac{\text{दिलेल्या सेक्शनची (Section) जास्तीत जास्त उंची}}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{12}{2}$$

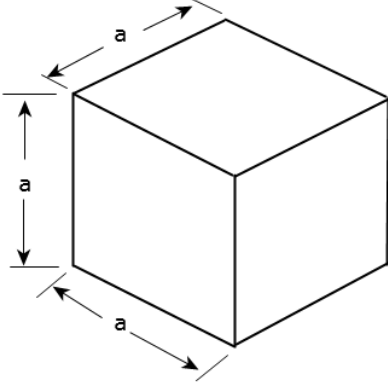
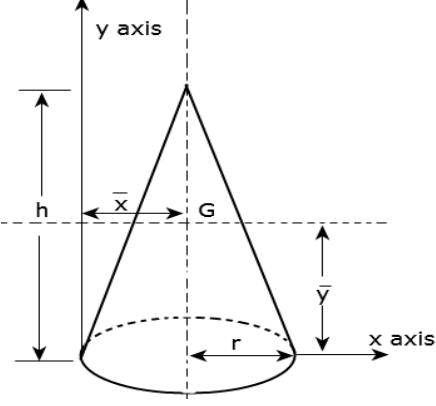
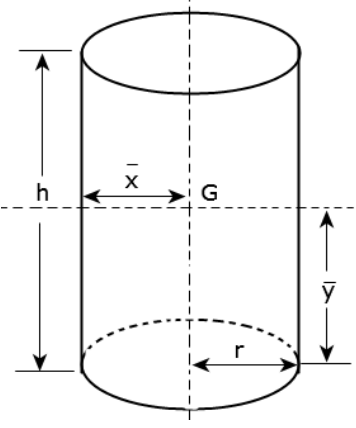
$$\bar{y} = 6 \text{ mm}$$

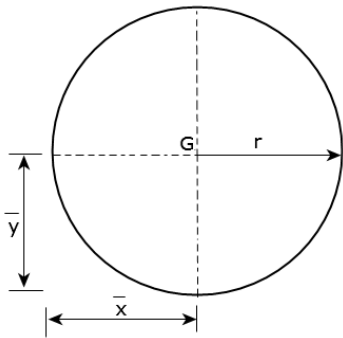
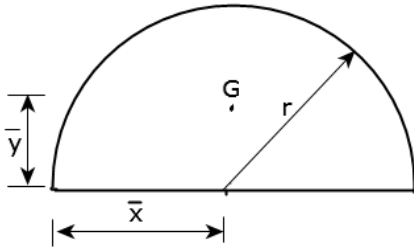
केंद्राकाची स्थिती (G) = (\bar{x} , \bar{y}) = (5 mm, 6 mm)

6.3: साध्या घन पदार्थाचे गुरुत्वाकर्षण केंद्र (Centre of Gravity of Simple solids) : (G)

वस्तूच्या (Body) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of Gravity) म्हणजे बिंदू (Point) ज्यावर वस्तूचे (Weight) वजन कार्य करते. वस्तूच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र त्रिमितीय (Three-dimensional) घन (Solid) वस्तू संदर्भित करते. घन वस्तूमुळे आपल्याला जाडीचा (Thickness) विचार करावा लागतो. म्हणून आपल्याला घन वस्तूवर कार्य करण्यासाठी घनफळ (Volume) आणि वजन (Weight) विचारात घेणे आवश्यक आहे. गुरुत्वाकर्षण केंद्र हा त्रिमितीय घन वस्तूच्या घनफळला लागू आहे. म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की गुरुत्वाकर्षण केंद्र हा घन वस्तूवरचा बिंदू (Point) आहे, जिथे संपूर्ण वजन (Weight) केंद्रित असते.

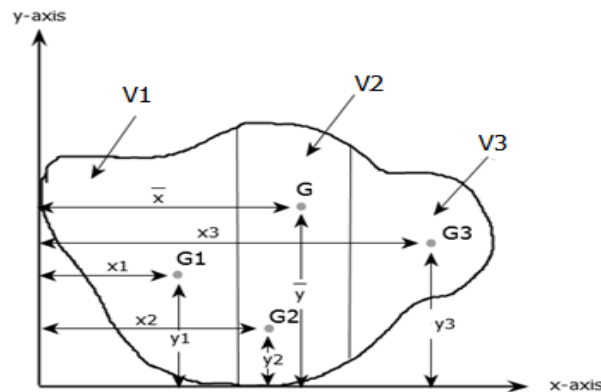
साध्या घन पदार्थाचे गुरुत्वाकर्षण केंद्र (G):

अनु क्रमांक	आकृतीचे नाव	आकार (Shape)	घनफळ (V) (Volume)	गुरुत्वाकर्षण केंद्र (G)
1	घन (Cube)		a^3 येथे, a = घनाची बाजूची लांबी (Side length)	$\bar{x} = \frac{a}{2}$ $\bar{y} = \frac{a}{2}$
2	शंकू (Cone)		$\frac{1}{3} \pi r^2 h$ येथे, r = तळाच्या वर्तुळाची त्रिज्या (Radius) h = शंकूची उंची (Height)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{h}{4}$
3	घन वृत्तचिह्ती (Solid Cylinder)		$\pi r^2 h$ येथे, r = तळाच्या वर्तुळाची त्रिज्या (Radius) h = वृत्तचिह्तीची उंची (Height)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$

4	घन गोल (Solid Sphere)		$\frac{4}{3} \times \pi r^3$ येथे, r = गोलाची त्रिज्या (Radius)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = r$
5	अर्धगोल (Solid hemisphere)		$\frac{2}{3} \times \pi r^3$ येथे, r = अर्धगोलाची त्रिज्या (Radius)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{3r}{8}$

6.4. संयुक्त आकृत्यांच्या गुरुत्वाकर्षणाचे स्थान (Centre of gravity position of composite figures)

कोणत्याही घन संयुक्त (Composite) आकृतीच्या गुरुत्वाकर्षणाच्या केंद्राची (Centre of gravity) गणना (Calculation) घनफळाच्या (Volume) सहाय्याने “व्हेरिग्नॉन” प्रमेय वापरून केली जाऊ शकते. खालील आकृती - 6.9 घन संयुक्त आकृती दर्शविते.



आकृती - 6.9 संयुक्त (Composite) विभागातील गुरुत्वाकर्षणाचे स्थान

समजा घन संयुक्त (Composite) आकृती मधील विभाजित (Divided) भागांचे V_1, V_2, V_3 हे घनफळ आहे.

समजा घन संयुक्त आकृती मधील विभाजित (Divided) भागांचे x_1, x_2, x_3 हे y -अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा घन संयुक्त आकृती मधील विभाजित भागांचे y_1, y_2, y_3 हे x - अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा \bar{x} हे y - अक्षापासून (Axis) संयुक्त विभागाची गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा \bar{y} हे x -अक्षापासून (Axis) संयुक्त विभागाची गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

व्हेरिग्नॉन प्रमेयानुसार, कोणत्याही अक्षाशी (Axis) आकृतीच्या वैयक्तिक (Individual) घनफळच्या मुमेंट (Moment) ची बीजगणितीय बेरीज ही संयुक्त आकृतीच्या घनफळच्या मुमेंट (Moment) इतकी असते.

हे गणिती म्हणून लिहिले जाऊ शकते,

$$V \bar{x} = V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3$$

$$\bar{x} = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3}{V}$$

परंतु, $V = V_1 + V_2 + V_3$

$$\bar{x} = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + V_3 x_3}{V_1 + V_2 + V_3} \dots\dots y\text{- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थितीचे केंद्र}$$

त्याचप्रमाणे,

$$\bar{y} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + V_3 y_3}{V_1 + V_2 + V_3} \dots\dots x\text{- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थितीचे केंद्र}$$

संयुक्त आकृत्यांच्या गुरुत्वाकर्षणाच्या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण क्र. -01

6 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 60 cm उंचीचा (Height) शंकू (Cone) हा 6 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 80 cm उंचीच्या (Height) वृत्तचिह्नीवर (Solid cylinder) समाक्षिकपणे

(Coaxially) ठेवला आहे ,तर संयुक्त (Composite) घनाच्या (Solid) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

वृत्तचिह्तीचा व्यास (Diameter of solid cylinder) = $D = 6 \text{ cm}$

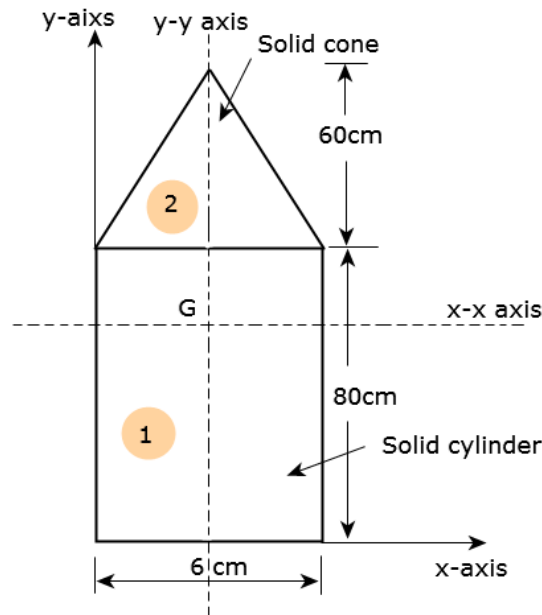
वृत्तचिह्तीची त्रिज्या (Radius of solid cylinder) = $R = \frac{\text{वृत्तचिह्तीचा व्यास}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

शंकूचा व्यास (Diameter of solid cone) = $d = 6 \text{ cm}$

शंकूची त्रिज्या (Radius of solid cone) = $r = \frac{\text{शंकूचा व्यास}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

वृत्तचिह्तीची उंची (Height of solid cylinder) = $H = 80 \text{ cm}$

शंकूची उंची (Height of solid cone) = $h = 60 \text{ cm}$



आकृती -6.10

घनफळ गणना (Volume calculation):

वृत्तचिह्तीचे घनफळ (Volume of solid cylinder) = $V_1 = \pi R^2 H$

$$= \pi \times (3)^2 \times 80$$

$$= 2261.94 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned}
 \text{शंकूचे घनफळ (Volume of solid cone)} &= V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
 &= \frac{1}{3} \pi \times (3)^2 \times 60 \\
 &= 565.48 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

y- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्त घन y-y अक्षासाठी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्त घनाची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{6}{2}$$

$$\bar{x} = 3 \text{ cm}$$

x -अक्षापासून गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{y} ची गणना करण्यासाठी

$$y_1 = \frac{h}{2}$$

$$y_1 = \frac{80}{2}$$

$$y_1 = 40 \text{ cm}$$

$$y_2 = 80 + \frac{h}{4}$$

$$y_2 = 80 + \frac{60}{4}$$

$$y_2 = 95 \text{ cm}$$

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(2261.94 \times 40) + (565.48 \times 95)}{(2261.94 + 565.48)}$$

$$\bar{y} = 50.99 \text{ cm}$$

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = (3 \text{ cm}, 50.99 \text{ cm})$

उदाहरण क्र. -02

20 cm व्यासाचा (Diameter) गोल (Sphere) हा 20 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 100 cm उंचीच्या (Height) वृत्तचिह्नीवर (Solid cylinder) समाक्षिकपणे (Coaxially) ठेवला आहे, तर संयुक्त (Composite) घनाच्या (Solid) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

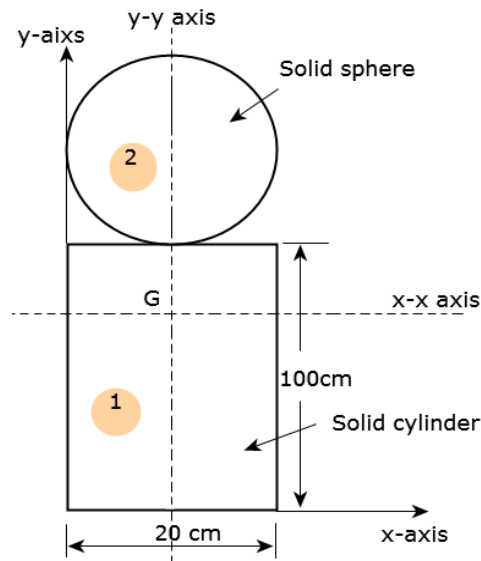
वृत्तचिह्नीचा व्यास (Diameter of solid cylinder) = $D = 20$ cm

वृत्तचिह्नीची त्रिज्या (Radius of solid cylinder) = $R = \frac{\text{वृत्तचिह्नीचा व्यास}}{2} = \frac{20}{2} = 10$ cm

गोलाचा व्यास (Diameter of sphere) = $d = 20$ cm

गोलाची त्रिज्या (Radius of sphere) = $r = \frac{\text{गोलाचा व्यास}}{2} = \frac{20}{2} = 10$ cm

वृत्तचिह्नीची उंची (Height of solid cylinder) = $H = 100$ cm



आकृती -6.11

घनफळ गणना (Volume calculation):

वृत्तचिह्नीचे घनफळ (V_1) = $\pi R^2 H$

$$= \pi \times (10)^2 \times 100$$

$$= 31415.9 \text{ cm}^3$$

$$\text{गोलाचे घनफळ (V}_2\text{)} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (10)^3$$

$$= 4188.79 \text{ cm}^3$$

y- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्त घन y-y अक्षासाठी (Axis) सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्त घनाची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{20}{2}$$

$$\bar{x} = 10 \text{ cm}$$

x -अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{y} ची गणना करण्यासाठी

$$y_1 = \frac{h}{2}$$

$$y_1 = \frac{100}{2}$$

$$y_1 = 50 \text{ cm}$$

$$y_2 = 100 + r$$

$$y_2 = 100 + 10$$

$$y_2 = 110 \text{ cm}$$

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(31415.9 \times 50) + (4188.79 \times 110)}{(31415.9 + 4188.79)}$$

$$\bar{y} = 57.058 \text{ cm}$$

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = (10 \text{ cm}, 57.058 \text{ cm})$

उदाहरण क्र. -03

30 cm व्यासाचा (Diameter) गोल हा 50 cm लांबीच्या (Side length) घनावर (Cube) समाक्षिकपणे (Coaxially) ठेवला आहे, तर संयुक्त (Composite) घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा

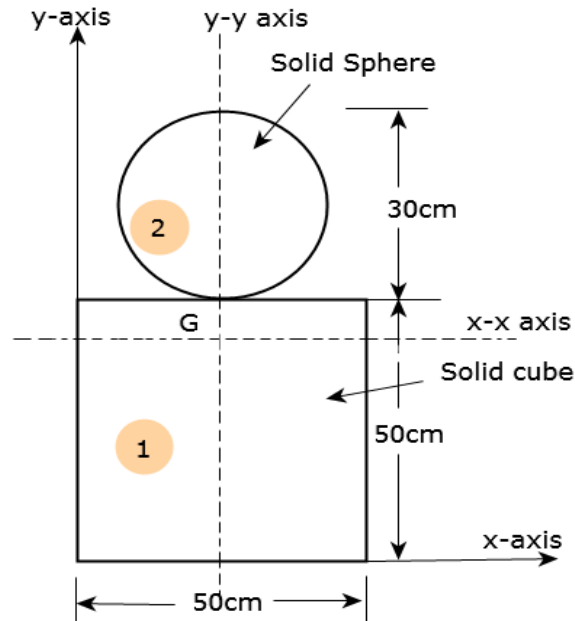
उत्तर:

दिलेली माहिती (Given Data):

घनाची लांबी (Cube length) = $a = 50$ cm

गोलाचा व्यास (Diameter of Sphere) = $d = 30$ cm

गोलाची त्रिज्या (Radius of Sphere) = $r = \frac{\text{गोलाचा व्यास}}{2} = \frac{30}{2} = 15$ cm



आकृती -6.12

घनफळ गणना (Volume calculation):

$$\begin{aligned}\text{घनाचे घनफळ (V}_1\text{)} &= a^3 \\ &= (50)^3\end{aligned}$$

$$= 125000 \text{ cm}^3$$

$$\text{गोला चे घनफल (V}_2\text{)} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (15)^3$$

$$= 14137.166 \text{ cm}^3$$

y- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्त घन y-y अक्षासाठी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्त घनाची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{50}{2}$$

$$\bar{x} = 25 \text{ cm}$$

x अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{y} ची गणना करण्यासाठी

$$y_1 = \frac{a}{2}$$

$$y_1 = \frac{50}{2}$$

$$y_1 = 25 \text{ cm}$$

$$y_2 = 50 + r$$

$$y_2 = 50 + 15$$

$$y_2 = 65 \text{ cm}$$

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(125000 \times 25) + (14137.166 \times 65)}{(125000 + 14137.166)}$$

$$\bar{y} = 29.08 \text{ cm}$$

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = (25 \text{ cm}, 29.08 \text{ cm})$

उदाहरण क्र -04

80 cm व्यासाचा (Diameter) अर्धगोल (Hemisphere) हा 80 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 110 cm उंचीच्या (Height) वृत्तचिह्नीवर (Solid cylinder) समाक्षिकपणे (Coaxially) ठेवला आहे, तर संयुक्त (Composite) घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given Data):

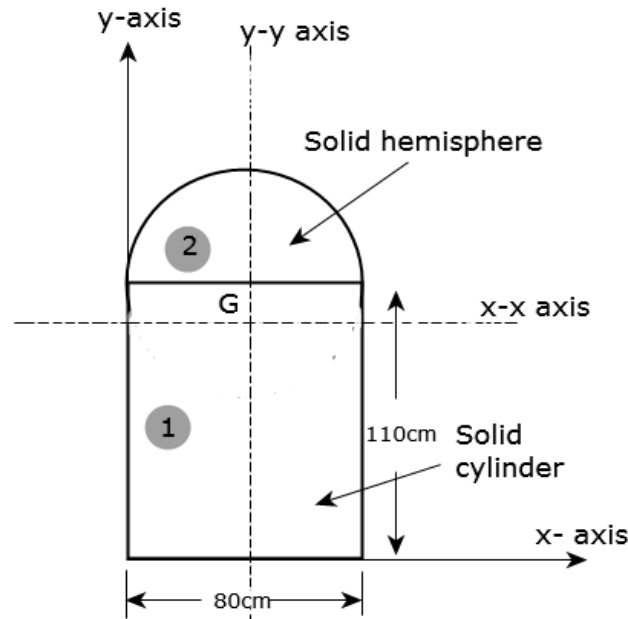
वृत्तचिह्नीचा व्यास (Diameter of solid cylinder) = $D = 80$ cm

वृत्तचिह्नीची त्रिज्या (Radius of solid cylinder) = $R = \frac{D}{2} = \frac{80}{2} = 40$ cm

वृत्तचिह्नीची उंची (Height of solid cylinder) = $H = 110$ cm

अर्धगोलाचा व्यास (Diameter of hemisphere) = $d = 80$ cm

अर्धगोलाची त्रिज्या (Radius of hemisphere) = $r = \frac{d}{2} = \frac{80}{2} = 40$ cm



आकृती -6.13

घनफळ गणना (Volume calculation):

वृत्तचिह्नीचे घनफळ (Solid cylinder volume) = $V_1 = \pi R^2 H$

$$= \pi \times (40)^2 \times 110$$

$$= 552920.30 \text{ cm}^3$$

$$\text{अर्धगोलाचे घनफळ (Hemisphere volume)} = V_2 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi \times (40)^3$$

$$= 134041.28 \text{ cm}^3$$

y- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) स्थिती \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्त घन y-y अक्षासाठी (Axis) सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्त घनाची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{80}{2}$$

$$\bar{x} = 40 \text{ cm}$$

x -अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) स्थिती \bar{y} ची गणना करण्यासाठी

$$y_1 = \frac{h}{2}$$

$$y_1 = \frac{110}{2}$$

$$y_1 = 55 \text{ cm}$$

$$y_2 = 110 + \frac{3r}{8}$$

$$y_2 = 110 + \frac{3 \times 40}{8}$$

$$y_2 = 125 \text{ cm}$$

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(552920.30 \times 55) + (134041.28 \times 125)}{(552920.30 + 134041.28)}$$

$$\bar{y} = 68.65 \text{ cm}$$

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = (40 \text{ cm}, 68.65 \text{ cm})$

उदाहरण क्र. -05

12 cm व्यासाचे (Diameter) आणि 20 cm उंचीचे (Height) एक घन वर्तुळाकार वृत्तचिह्नीमधून (Solid cylinder) 6 cm व्यासाचा (Diameter) एक दंडगोलाकार (Cylindrical) छिद्र (Hole) वृत्तचिह्नीच्या अर्ध्या (Half) भागासाठी समाक्षिकपणे (Axially) ड्रिल केले आहे तर संयुक्त (Composite) घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given Data):

वृत्तचिह्नीचा व्यास (Diameter of solid cylinder) = $D = 12 \text{ cm}$

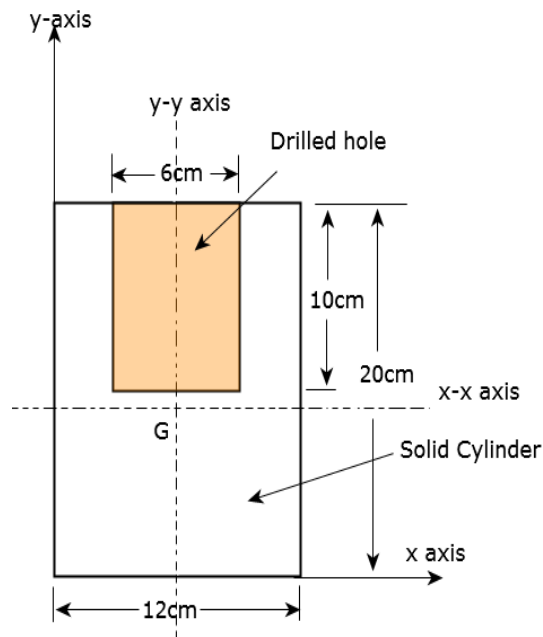
वृत्तचिह्नीची त्रिज्या (Radius of solid cylinder) = $R = \frac{D}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$

दंडगोलाकार छिद्राचा व्यास (Diameter of hole) = $d = 6 \text{ cm}$

दंडगोलाकार छिद्राची त्रिज्या (Radius of Hole) = $r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$

वृत्तचिह्नीची उंची (Height of solid cylinder) = $H = 20 \text{ cm}$

दंडगोलाकार छिद्राची उंची (Height of hole) = $h = 10 \text{ cm}$



आकृती -6.14

घनफळ गणना (Volume calculation):

वृत्तचिह्तीचे घनफळ (Volume of Solid cylinder) = $V_1 = \pi R^2 H$

$$= \pi \times (6)^2 \times 20$$

$$= 2261.94 \text{ cm}^3$$

ड्रिल केलेले वृत्तचिह्तीचे घनफळ (Volume of drilled Solid cylinder) = $V_2 = \pi r^2 h$

$$= \pi \times (3)^2 \times 10$$

$$= 282.74 \text{ cm}^3$$

y-अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{x} ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्त घन y-y अक्षासाठी सममितीय (Symmetrical) आहे,

$$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्त घनाची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{12}{2}$$

$$\bar{x} = 6 \text{ cm}$$

x -अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती \bar{y} ची गणना करण्यासाठी,

$$y_1 = \frac{h}{2}$$

$$y_1 = \frac{20}{2}$$

$$y_1 = 10 \text{ cm}$$

$$y_2 = 10 + \frac{h}{2}$$

$$y_2 = 10 + \frac{10}{2}$$

$$y_2 = 15 \text{ cm}$$

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V_1 y_1 - V_2 y_2}{V_1 - V_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(2261.94 \times 10) - (282.74 \times 15)}{(2261.94 - 282.74)}$$

$$\bar{y} = 9.28 \text{ cm}$$

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र $(\bar{x}, \bar{y}) = (6 \text{ cm}, 9.28 \text{ cm})$

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

1. उदाहरणासह केंद्रक आणि गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र परिभाषित करा.
2. केंद्रक आणि गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र वर्गीकरण करा.
3. चतुर्थांश वर्तुळासाठी केंद्रकाचे सूत्र सांगा.
4. घन वृत्तचिह्तीसाठी गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र सांगा.
5. जर T-सेक्शनचे (Section) आकारमान $180 \text{ mm} \times 180 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ तर T-सेक्शनचा केंद्रक (Centroid) शोधा.
6. जर I-सेक्शनचा (Section) वरच्या आडव्या (Top flange) भागाचे आकारमान हे $150 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ आहे, तळाच्या आडव्या (Bottom flange) भागाचे आकारमान हे $80 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ आहे आणि उभ्या भागाचे (Web) आकारमान $90 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ असेल तर I सेक्शनचा (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.
7. जर L विभागाच्या (Section) आडव्या भागाचे (flange) आकारमान $160 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ आहे आणि उभ्या भागाचे (web) आकारमान $130 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ असेल तर, L सेक्शनचा (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.
8. चॅनल (Channel) किंवा C सेक्शनचे (Section) चे आकारमान $150 \text{ mm} \times 150 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$ आहे तर, C – सेक्शनचा (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.
9. एका धरणा चे (Dam Section) आकारमान खालील प्रमाणे आहे :
 - i. पाण्याच्या बाजूची उभ्या भिंतीची उंची 350 m ,
 - ii. धरणाची वरची रुंदी 200 m ,
 - iii. पायाची रुंदी 500 m आहे.तर, धरणाचा (Dam Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.
10. 8 cm व्यासाचा आणि 80 cm उंचीचा शंकू हा 8 cm व्यासाचा आणि 100 cm उंचीच्या वृत्तचिह्तीवर समाक्षिकपणे (Axially) ठेवला आहे ,तर संयुक्त घनच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र शोधा.
11. 30 cm व्यासाचा गोल हा 30 cm व्यासाचा आणि 120 cm उंचीच्या वृत्तचिह्तीवर समाक्षिकपणे (Axially) ठेवला आहे , तर संयुक्त घनच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र शोधा.
12. 40 cm व्यासाचा गोल हा cm सेमी लांबीच्या घनावर समाक्षिकपणे ठेवला आहे ,तर संयुक्त घनच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र 90 cm व्यासाचा अर्धगोल हा 90 cm व्यासाचा आणि 130 cm उंचीच्या वृत्तचिह्तीवर समाक्षिकपणे (Axially) ठेवला आहे ,तर संयुक्त घनच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र शोधा.

13. 14 cm व्यासाचे आणि 30 cm उंचीचे एक घन वर्तुळाकार वृत्तचिह्नीमधून, 8 cm व्यासाचा एक दंडगोलाकार छिद्र वृत्तचिह्नीच्या अर्ध्या भागासाठी समाक्षिकपणे (Axially) ड्रिल केले आहे तर, संयुक्त घनच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र शोधा.

मायक्रो प्रोजेक्ट:

1. गुरुत्वाकर्षण केंद्राची संकल्पना महत्त्वाची असलेल्या परिस्थितीचा तक्ता तयार करा.

संदर्भ (Reference) :

- 1) अप्लाइड मेकॅनिक्स पाठ्यपुस्तक, आर. के . राजपूत , थर्ड एडिशन 2011, लक्ष्मी पब्लिकेशन्स,ईएएम-0791-250- एटीबी लागू मेक राज.

HEAD OFFICE



Secretary,
Maharashtra State Board of Technical Education
49, Kherwadi, Bandra (East), Mumbai - 400 051
Maharashtra (INDIA)
Tel: (022)26471255 (5 -lines)
Fax: 022 - 26473980
Email: -secretary@msbte.com

Web -www.msbte.org.in

REGIONAL OFFICES:

MUMBAI

Deputy Secretary (T),
Mumbai Sub-region,
2nd Floor, Govt. Polytechnic Building,
49, Kherwadi, Bandra (East)
Mumbai - 400 051
Phone: 022-26473253 / 54
Email: rbtemumbai@msbte.com

PUNE

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education,
Regional Office,
412-E, Bahirat Patil Chowk,
Shivaji Nagar, Pune
Phone: 020-25656994 / 25660319
Fax: 020-25656994
Email: rbtepn@msbte.com

NAGPUR

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education
Regional Office,
Mangalwari Bazar, Sadar, Nagpur - 440 001
Phone: 0712-2564836 / 2562223
Fax: 0712-2560350
Email: rbteng@msbte.com

AURANGABAD

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education,
Regional Office,
Osmanpura, Aurangabad -431 001.
Phone: 0240-2334025 / 2331273
Fax: 0240-2349669
Email: rbteau@msbte.com